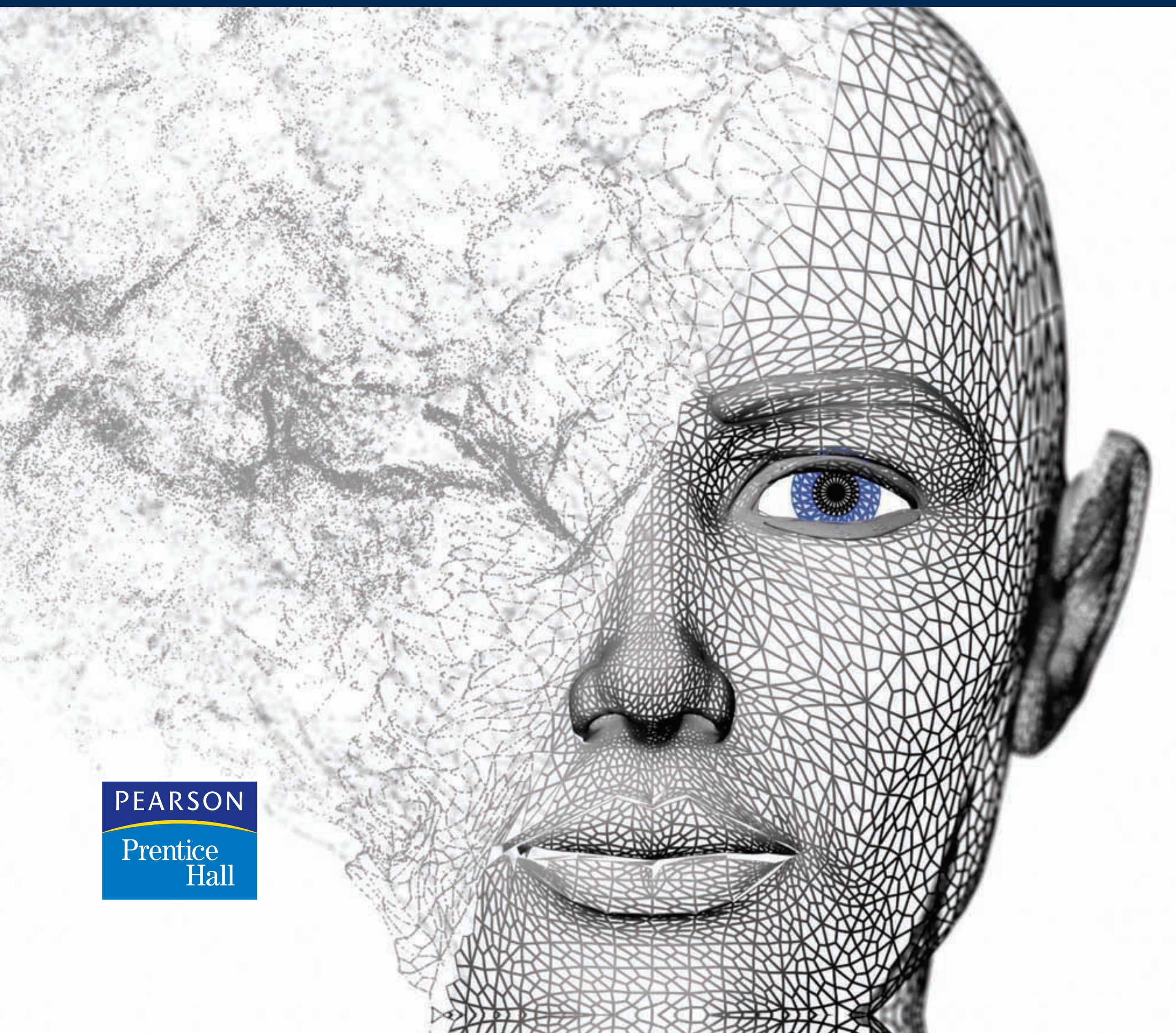
Alfonso Bustamante Arias

Lógica y argumentación

De los argumentos inductivos a las álgebras de Boole



PEARSON
Prentice Hall

Lógica y argumentación

De los argumentos inductivos a las álgebras de Boole

Lógica y argumentación

De los argumentos inductivos a las álgebras de Boole

Alfonso Bustamante Arias
Universidad Icesi, Cali (Colombia)

PEARSON
Educación

Colombia • Argentina • Bolivia • Brasil • Chile • Costa Rica • España
Guatemala • México • Perú • Puerto Rico • Uruguay • Venezuela

Datos de catalogación bibliográfica

Alfonso Bustamante Arias
Lógica y argumentación: De los argumentos inductivos
a las álgebras de Boole - 1ª edición
Pearson Educación de México S.A. de C.V., 2009

ISBN: 9786074422092

Formato: 17 x 23 cm Páginas: 292

Editora: María Fernanda Castillo
fernanda.castillo@pearsoned.cl

Corrección de estilo: Óscar Limache

Diseño y diagramación: Víctor Goyburo

Supervisión editorial: Alessandra Canessa

Asistente de producción: Rita Tasayco

Primera edición, 2009

ISBN: 9786074422092

Impreso en Quebecor World Bogota
Impreso en Colombia / *Printed in Colombia*
50561

A la memoria de mis padres.

A la memoria de José Hipólito González Z.

A Deifilita y a mis hijos.

CONTENIDO

PRÓLOGO

De nuevo el profesor Alfonso Bustamante ha hecho una buena obra. Hace seis años conocí las notas iniciales de este libro y ya entonces eran un material sólido, útil e interesante, para quienes nos ocupamos de la lógica. Hoy encuentro un libro completo, ambicioso y único en su género dentro de nuestro medio académico, que nos da la oportunidad de aligerar la dependencia obligada con ciertos autores de habla inglesa.

Ahora que este libro llega a varios países, apreciamos que la así llamada "Racionalidad" occidental también nos pertenece. En ocasiones, escuchamos, con algo de chovinismo, que tenemos un alma diferente a la sajona. No lo creo. Tal vez un humor y una simpatía diferentes; nada esencial. Pero nuestra forma humana de razonar es universal. Sin esta premisa, la enseñanza de la lógica y de la argumentación caería en el desierto y su semilla se esparciría en el viento.

La lógica y la argumentación tienen un linaje griego, añejo y clásico. Por esta razón, quienes enseñamos materias afines sabemos del esfuerzo que representa ilustrar con nuevos ejemplos los viejos tópicos, y presentarlos de una manera atractiva a los nuevos públicos. Este libro enriquece generosamente el acervo de ilustraciones; la razón debe ir de la mano de la intuición, como enseñara Kant en su *Crítica de la razón pura.* Y si esas intuiciones abundan y casan con el entendimiento, mucho mejor.

Sin embargo, sólo alguien, con esa clara y profunda convicción en nuestras capacidades, puede dejar de lado, con toda confianza, el estudio casuístico de las falacias empíricas, tal como muchos de nosotros lo hacemos en nuestras presentaciones de la argumentación. Su confianza en las luces de la razón le permite creer que aplicando adecuadamente los reglas de la inferencia correcta sería superfluo ocuparse de esas decenas de tipologías sofisticas, que vienen en los manuales de lógica desde los tiempos del mismo *Organon* de Aristóteles. Se cae en los sofismas (argumento *ad hominem, ad verecundiam, ad baculum,* etc.) al descuidar el pensamiento correcto. Una persona educada en los aspectos básicos de la argumentación y el correcto pensar no corre el riesgo de ser falaz. Así nos lo enseña, sin decírnoslo, este libro de *Lógica y argumentación: De los argumentos inductivos a las álgebras de Boole.* Aquí sólo hay campo para estudiar las falacias lógicas.

Las buenas obras tienen tres orígenes posibles: son el producto de la inspiración de un genio, pensemos en el *Tratado de la naturaleza humana* de David Hume, publicado cuando el filósofo inglés tenía apenas veinticuatro años; o son el fruto de la paciencia, como la ya mencionada Crítica de la razón pura, publicada por Kant a sus sesenta años de edad, luego de decenios de reflexión; o la natural consecuencia del tiempo, como dice Borges refiriéndose a *La Ilíada* y *La Odisea*: "El tiempo termina siendo un gran antologista".

Este libro tiene un origen distinto: la pasión pedagógica, la lucidez y la paciencia. Se decantó con los años, con el estudio continuado y la observación cuidadosa de sus colegas y de sus alumnos en clase. El resultado no es inferior a estos desvelos. Se construyó paso a paso, de modo que no se encontrarán referencias o alusiones de lo que no se haya explicado antes. Es un viaje de la comodidad del lenguaje natural de la argumentación en los primeros capítulos, hacia la luz de la complejidad de las relaciones algebraicas en los últimos.

Este libro es un aporte para los estudiantes, profesores, directivos académicos y estudiosos de la lógica y la argumentación en general. Los estudiantes encontrarán en sus páginas una exposición amable y rigurosa de una materia esencial en su formación universitaria. Si desean consultar un tema particular (los tipos de argumentación, las falacias lógicas, el cálculo de predicados), hallarán aquí un apoyo seguro.

Por su parte, los maestros ansiosos de un libro de texto que sirva de guía y soporte para un curso de un semestre (o un año) ganarán tiempo si se topan con este trabajo, pues encontrarán no sólo los temas básicos, sino las luces de un profesor con experiencia en la enseñanza universitaria.

Los investigadores que desean profundizar temas del cálculo de predicados, de la teoría de conjuntos, de las álgebras booleanas o simplemente desean ver otra forma de presentar lo ya conocido (de pronto de una manera más interesante o pertinente) no se verán defraudados con la lectura de estas páginas; este libro es una buena ocasión para estudiar de nuevo.

Los directivos universitarios, como es mi caso, tenemos ahora la ocasión de recomendar un buen libro con destino a los cursos del núcleo básico (o ciclo básico), con los cuales se inician la mayoría de programas de pregrado en nuestras universidades. Cada día es más cierto que la formación en competencias básicas para el aprendizaje superior debe estar en manos competentes. En nuestra universidad tenemos cursos introductorios de argumentación, análisis de argumentos, lógica y pensamiento formal, y la presentación de temas tratados en estos cursos se ve bien expresada aquí, con diferentes grados de profundidad, según las necesidades temáticas de las distintas carreras.

"No es posible no leer este libro con provecho". Esta frase no viola la lógica, pero sí la buena prosa. No encontrarán frases como esta en el libro del profesor Bustamante; su característica es la claridad y la consideración por el lector. Él, por un pudor académico, no condesciende con la broma, pero no por falta de gracia; su sentido del humor es tan fresco como el de cualquier persona inteligente. Sucede que, por su formación matemática, teme despistar al lector con alusiones irrelevantes. Teme que poniendo un gracejo distraiga la atención o le reste seriedad a la exposición; en consecuencia, sólo muy esporádicamente la obra estará salpicada con alusiones graciosas y finas que, por esa curiosidad de los años, se convirtieron para mí en una verdadera aventura encontrarlas, cuando leía este libro. Los giros simpáticos aparecen comúnmente entre paréntesis, aunque excluyo de esta categoría las fórmulas de la lógica que demandan esos paréntesis. Esa búsqueda cómplice es una forma de ser el lector agradecido que cualquier libro espera.

En el ejercicio de mi cargo, como Decano de la Universidad del Rosario, he aprendido (con los golpes de la vida) que las normas nos protegen. Cuando uno se atiene a las reglas que nos rigen (y esas reglas son correctas), los procesos avanzan con justicia. Pues bien, en el estudio de la lógica y de la argumentación, las normas nos protegen. Son protocolos curados por el tiempo. Marco de entendimiento entre los hombres, al menos entre los razonables. Cuando se habla de las muchas posibilidades que tenemos para hermanarnos, siempre pienso en los buenos argumentos que podemos darnos, unos a otros, para acrecentar los entendimientos.

En estas páginas se pone en marcha un propósito pedagógico, una idea de la ciencia y una filosofía: la argumentación no cae necesariamente en el campo de la retórica, como pensaba Chäim Perelman. De nuevo los anacrónicos ilustrados respiramos confiados en las luces del pensamiento, pues, en el fondo de los argumentos, no está el capricho del más fuerte, sino el peso del argumento más sólido. Ese tono se pone desde el comienzo de esta obra. En la misma Introducción, cuando se está hablando de la argumentación en general, el primer ejemplo que se trae es el del Teorema de Pitágoras. Es cierto, la argumentación copa todo el escenario de las interacciones verbales entre los hombres, pero al momento de ilustrar su engranaje se acude a un ejemplo geométrico.

Para terminar, quiero señalar que él y yo tenemos un enfoque diferente para enfrentar los problemas de lógica del tipo propuesto por Moore. En mis clases, por ejemplo, frente al ejercicio de los trabajos de cerámica que este libro trae en la página 97, mi primera tarea para los estudiantes es preguntarles, ¿cuántos datos se pueden extraer con la primera premisa y sólo con el concurso de ella? Esto, con el objeto de hacerles sentir, de primera mano, la capacidad que tenemos de pensar a priori y obtener información pertinente por medios puramente analíticos. La premisa dice así: "Quien hizo el frutero terminó después de quien hizo el cenicero, pero antes que Flora". La respuesta es ocho nuevos datos, ¿podría usted decir cuáles?

José Francisco Rodríguez Latorre
Decano Escuela de Ciencias Humanas
Universidad del Rosario, Bogotá

INTRODUCCIÓN

Presentamos a la comunidad académica *Lógica y argumentación: De los argumentos inductivos a las álgebras de Boole*, como contribución al desarrollo de la competencia argumentativa y del pensamiento lógico, y al uso de estas competencias en el manejo de temas como las técnicas de demostración y los fundamentos de teoría de conjuntos y de álgebras booleanas.

El texto dedica especial atención al análisis de las diferentes clases de razonamientos inductivos, al estudio y aplicación de las reglas de inferencia y de los criterios de validez de razonamientos deductivos, a las técnicas de demostración, y a dos importantes temas de aplicación: la teoría de conjuntos y las álgebras de Boole.

En el capítulo 1 se introduce el tema general de razonamiento: concepto, elementos de un razonamiento e identificadores para los mismos, diagrama de la estructura de un razonamiento, argumentos deductivos y argumentos inductivos. Como en todos los capítulos, se proponen ejercicios para el control de la comprensión y del aprendizaje.

En el capítulo 2 se presentan los conceptos de afirmación categórica y proposición categórica, y se estudian el silogismo categórico y el criterio de validez de silogismos. Al igual que para el capítulo 1, la referencia bibliográfica fundamental para este capítulo ha sido *Introducción a la Lógica,* de Irving Copi y Carl Cohen, texto que por su cobertura y calidad es referencia obligada sobre el tema. El capítulo presenta también las nociones de condición suficiente, condición necesaria, y condición necesaria y suficiente, y las falacias conocidas como falacias lógicas. Se cierra el capítulo con una sección sobre el tipo de problemas conocido como "problemas lógicos", que incluye algunos problemas del tipo LSAT *(Law School Aptitude Test)*, un examen diseñado para evaluar la lectura crítica, el manejo de datos y las habilidades de razonamiento analítico.

Los capítulos 3 y 4 están dedicados a la lógica simbólica: lógica proposicional y lógica de predicados de primer orden, respectivamente. Se presentan las reglas de inferencia y los criterios de validez para los razonamientos deductivos, con lo cual se supera la limitación a los razonamientos silogísticos del capítulo 2. Se presentan también la noción de razonamiento inconsistente y las consecuencias derivadas de esta clase de razonamientos.

Finalmente, en el capítulo 5 se hace una breve presentación de las técnicas más usuales de demostración en matemáticas, y de su fundamento en la Lógica formal, y se tratan dos temas de aplicación importante: los elementos básicos de teoría de conjuntos, y las álgebras booleanas y su utilización en los circuitos lógicos. Por su estrecha relación con los temas del capítulo 3, estos dos temas constituyen un cierre adecuado de la temática del libro. Sin embargo, también por su especificidad pueden considerarse opcionales para algunos programas de estudio.

Esperamos que el aprendizaje de los temas aquí considerados represente un doble beneficio para la formación del estudiante: En primer lugar, que contribuya al fortalecimiento de su capacidad de estudio sistemático y le generen respeto por el rigor intelectual, e inclinación hacia el trabajo académico serio. Aquí encontrará que la Lógica es mucho más que "tablas de verdad" y que, para comprender y aprender los temas desarrollados, debe leer cuidadosa y críticamente cada concepto, cada regla, cada ejemplo, y resolver oportunamente los ejercicios propuestos. En segundo lugar, que aprenda a diferenciar los razonamientos válidos de los razonamientos no válidos, a establecer la estructura de argumentos simples o complejos y a evaluar la calidad de la relación entre la conclusión y las razones que la sustentan, para establecer la validez o la fuerza, según se trate de un argumento deductivo o inductivo, respectivamente.

Esta publicación tiene su origen en "Notas para un curso de Lógica y argumentación", material que ha orientado durante varios años el curso Lógica y argumentación en la Universidad Icesi, y recoge varias recomendaciones de mis colegas profesores del curso, a quienes agradezco su valiosa colaboración durante todos estos años. Agradezco muy especialmente a Luis Eduardo Múnera y a Luis Cornelio Recalde, con quienes sostuve en 1998 las primeras reuniones para concretar la respuesta inicial a la solicitud de Hipólito González Zamora, en ese entonces vicerrector de la Universidad y artífice de la reforma curricular, de diseñar un curso de Lógica formal para el núcleo común de los programas de pregrado. A José Francisco Rodríguez Latorre, hoy decano de la Facultad de Humanidades de la Universidad del Rosario, y a Julián Trujillo, profesor de la Escuela de Filosofía de la Universidad del Valle, les agradezco su contribución en la definición del curso de Lógica y argumentación, que sustituyó al mencionado curso de Lógica formal. Debo un especial reconocimiento a Federico Escobar, profesor del curso durante varios semestres y autor de todas las preguntas de opción múltiple incluidas en los cuatro primeros capítulos, y quien generosamente las cedió para que hicieran parte de esta publicación. Finalmente, mi agradecimiento al equipo de Pearson Educación por su excelente trabajo y por su dedicación para cumplir con los plazos acordados para la publicación.

Alfonso Bustamante Arias
Universidad Icesi, Cali

CAPÍTULO 1

Lógica y argumentación

1.1 INTRODUCCIÓN

La necesidad de construir argumentos es recurrente en nuestra vida cotidiana. Por ejemplo, el desarrollo de las tecnologías de información y comunicaciones ha hecho posible que conozcamos, casi al momento de producirse, las principales noticias de las diversas regiones del mundo. Estas noticias usualmente originan en nuestro entorno debates de mayor o menor trascendencia, en los cuales los participantes buscan que sus puntos de vista sean aceptados y compartidos por sus oponentes. Lograr este objetivo depende, en buena medida, de la calidad de la argumentación utilizada para sustentar tales puntos de vista.

También requerimos argumentos al adoptar decisiones para resolver situaciones problemáticas, o al tomar posición respecto de algún tema de nuestro particular interés. No es exagerado afirmar que el día a día de los seres humanos se desenvuelve en una continua toma de decisiones sobre situaciones de diversa complejidad. En algunos casos el tema puede ser la elección de una carrera universitaria, o encontrar la forma más conveniente de financiar los estudios, o decidir con cuál de los profesores asignados matricularse en determinada materia en la universidad. En otros casos puede ser el someterse o no a una cirugía de alto riesgo, denunciar o no al autor de un delito, apoyar o combatir una ley de rebaja de penas, estar o no de acuerdo con el aborto, etc. En general, son muchas y muy diversas las situaciones en las que es necesario tomar una decisión; pero en todas ellas la argumentación es un elemento fundamental. Qué tan riguroso sea el proceso argumentativo es algo que depende de los individuos y de las circunstancias particulares. Sin embargo, lo ideal es considerar toda la información posible, establecer cómo ella contribuye a una solución del problema y a soluciones alternativas, analizar las consecuencias de optar por una u otra solución y, sólo entonces, tomar la decisión final.

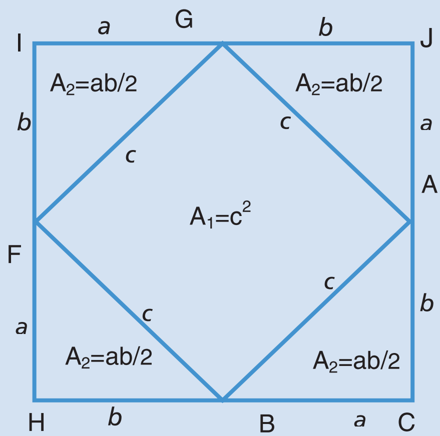
Pero no solamente los individuos enfrentan situaciones problemáticas o conflictos personales. También las sociedades se ven enfrentadas a problemas y conflictos sociales que deben ser tratados y resueltos, muchas veces mediante el recurso de los instrumentos jurídicos. Estamos así en presencia de otro escenario para la permanente argumentación: el ámbito del Derecho. Argumentan los legisladores para sustentar la expedición de normas o leyes sobre determinado problema social; argumentan los jueces para establecer la aplicación de las normas en casos concretos sometidos a su veredicto; y argumentan los abogados para persuadir al juez de una causa, aconsejar a sus clientes o llegar a un acuerdo con los abogados de la contraparte. Con relación al Derecho como argumentación, dice el profesor Manuel Atienza: "… consiste en considerar al Derecho como un intento, una técnica para la solución de determinados problemas prácticos" [Atienza, 1997, p. 23].

Otro escenario natural para la argumentación es la demostración de teoremas. Cada teorema afirma que un enunciado particular, llamado conclusión o tesis, es necesariamente verdadero, como consecuencia de aceptar que otro, llamado hipótesis, también lo es. Por ejemplo, uno de estos teoremas afirma que "Si un entero es impar, entonces su cuadrado también es impar". En este caso la hipótesis, es decir, lo que se supone como dato o hecho cierto puede expresarse como "x es un entero impar", y la conclusión, es decir, lo que se desprende como consecuencia necesaria de tal hecho es "x^2 es impar". Otro teorema, el famoso Teorema de Pitágoras, afirma que "Si un triángulo tiene un ángulo recto, entonces el cuadrado de la hipotenusa (el lado que se opone al ángulo recto) es igual a la suma de los cuadrados de los catetos (los lados que forman el ángulo recto)". La argumentación surge en este nuevo escenario porque lo afirmado por los teoremas no es evidente sino que es necesario establecerlo mediante un proceso argumentativo que muestre que la conclusión es consecuencia necesaria de la hipótesis. Ese proceso, llamado "demostración" o "prueba" del teorema, se requiere siempre, independientemente de la trascendencia del teorema. (A propósito: la argumentación de naturaleza geométrica mediante la cual se establece la validez del Teorema de Pitágoras, desarrollada en la siguiente sección, es considerada como un ejemplo clásico de sencillez e ingenio. El teorema era conocido para casos particulares, pero fue Pitágoras quien primero demostró su validez universal. También a Pitágoras, dicho sea de paso, se le atribuye la creación de la matemática como ciencia deductiva [Newman, 1985, vol. 5 p. 406].

1.1.1 Un argumento geométrico para demostrar el Teorema de Pitágoras

En la figura 1.1 se aprecia una construcción geométrica que permite demostrar el Teorema de Pitágoras, a partir de un triángulo rectángulo ABC cuyos catetos e hipotenusa tienen longitudes a, b y c, respectivamente. Con estos datos debemos probar que $\mathbf{c^2 = a^2 + b^2}$, es decir, que "el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos", como lo asegura el Teorema de Pitágoras.

Figura 1.1 El Teorema de Pitágoras



Demostración: Tomando la hipotenusa AB del triángulo ABC como lado de un cuadrado, se forma el cuadrado ABFG. El área de este cuadrado es $A_1 = c^2$. A continuación se extiende el lado CA del triángulo en una longitud a y se extiende el lado CB en una longitud b. Tenemos así dos lados contiguos de un cuadrado CHIJ. En este cuadrado, cuyo lado tiene longitud a + b, queda inscrito el cuadrado ABFG. Observe que el área de cada uno de los triángulos de las esquinas es igual a ab/2. Entonces, podemos calcular el área del cuadrado CHIJ de dos maneras:

1. Usando el hecho de que el área de un cuadrado es igual al cuadrado de su lado:
   Área CHIJ = $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

2. Sumando al área A_1 del cuadrado interior el área de los 4 triángulos de las esquinas:
   Área CHIJ = $A_1 + 4A_2 = c^2 + 4(ab/2) = c^2 + 2ab$.

Ahora, igualamos las dos expresiones para el área, $c^2 + 2ab = a^2 + 2ab + b^2$ y eliminamos el término común 2ab en ambos lados de la igualdad, para obtener el resultado esperado: $\mathbf{c^2 = a^2 + b^2}$, es decir, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos. (Si no conocía esta prueba del teorema, ¿imaginó alguna vez que pudiera ser tan sencilla?)

El proceso anterior muestra la naturaleza de los argumentos deductivos utilizados en la demostración de teoremas: a partir de un conjunto de datos, que conforman la hipótesis, se infieren gradualmente unos resultados o afirmaciones que se convierten, a su vez, en razón o fundamento para nuevas inferencias. El proceso termina cuando se llega a la conclusión deseada.

1.2 LÓGICA Y COTIDIANIDAD

Todos tenemos alguna idea sobre la lógica y sobre su uso, aun sin haber estudiado el tema formalmente. En el lenguaje cotidiano usualmente calificamos como "lógico" lo que nos parece evidente o claro, lo que aparentemente no deja lugar a dudas: "Es lógico que, si tengo sobrepeso, debo comer menos". Por el contrario, decimos que algo es "ilógico" o que "no tiene lógica" cuando nos parece absurdo, imposible, carente de sentido: "No existe razón lógica para pensar que los alzados en armas puedan tener interés en desmovilizarse" [R. Pombo, *Revista Cambio,* 14 de agosto de 2000, p. 10]. Pero también la expresión "es lógico" se utiliza para indicar que una afirmación se sigue inevitablemente como consecuencia de otra u otras: "Es lógico que Juan sepa nadar, porque es buzo profesional". Este enunciado encierra tres afirmaciones. Una de ellas está enunciada explícitamente: "Juan es buzo profesional"; otra está implícita en el texto: "Todo buzo profesional sabe nadar". La tercera afirmación, "Juan sabe nadar", está precedida de la expresión "es lógico", como aseveración de que ella está garantizada por las dos afirmaciones anteriores. En síntesis, en este ejemplo, la expresión "es lógico" se utiliza con el significado de "es inevitable concluir que…, dado que…".

El texto siguiente destaca la presencia de la lógica en la vida diaria. Su contenido se hará más claro al lector a medida que avance en el estudio de este libro y se familiarice con conceptos y usos de la lógica:

> "La lógica no es una alternativa por la que podamos optar; no podemos decidir si vamos a emplearla o no. Resulta inevitable y está presente en cada frase que pronunciamos, ya que continuamente estamos enunciando proposiciones lógicas. Cuando decimos, por ejemplo, que algo es necesario, que una cosa depende de otra, que un evento es causa de otro, cuando indicamos una contradicción o una imposibilidad, una implicación o una dependencia, estamos haciendo lógica, aunque no seamos conscientes de ello" [Zuleta, 1996, p. 16].

El estudio de la lógica permite identificar, en los argumentos cotidianos, ciertas estructuras válidas de razonamiento utilizadas por los seres humanos. Tales estructuras son usadas generalmente en forma espontánea, sin que nos detengamos a analizar la estructura utilizada. Por ejemplo: no ponemos las manos en el fuego porque hacerlo nos causa quemaduras. (Y como no estamos dispuestos a causarnos quemaduras, ¡pues no ponemos las manos en el fuego! Es así de simple). Un conocedor de la lógica formal podría identificar en este razonamiento una estructura válida de argumentación llamada *Modus tollens*, que se expresa en lógica simbólica como $\{p \Rightarrow q, \neg q\} \models \neg p$. Este simbolismo se interpreta así: si de un hecho, p, (en el ejemplo, poner las manos en el fuego) se sigue necesariamente otro, q, (causarse quemaduras) y este último no sucede ($\neg q$: no me causo quemaduras), entonces el primero tampoco sucede ($\neg p$: no he puesto las manos en el fuego). Decíamos, de nuestro lógico, que podría identificar en la forma del argumento un *Modus tollens*. ¡Pero lo que sería un despropósito es que argumentara que "no ponemos las manos en el fuego porque la estructura '*Modus tollens*' nos indica que no debemos hacerlo"! En síntesis, con ayuda de la lógica podemos hacer explícita la forma de algunos razonamientos, aunque pocas veces es esto lo que nos interesa en los razonamientos cotidianos. En este sentido, podríamos decir que la lógica es al razonamiento cotidiano como la gramática de un lenguaje natural es al uso del mismo. Por ejemplo, usted enuncia la proposición "Ana y Juana son hermanas" y, al hacerlo, respeta la concordancia en género (femenino) y número (plural) exigida por la gramática. Pero lo hace espontáneamente, sin detenerse a considerar qué normas gramaticales está aplicando. Si fuera necesario hacer explícitas las normas gramaticales que justifican la concordancia en género y número posiblemente diría: "El sujeto es compuesto: Ana y Juana. Por lo tanto se requiere el uso del verbo en tercera persona del plural...". En el texto ya mencionado, el profesor Zuleta se refirió a la analogía entre lógica y gramática en estos términos: "La lógica es, pues, un momento reflexivo en el que el pensamiento vuelve sobre sí mismo y trata de hacer explícitas sus operaciones, de la misma manera como en la gramática el discurso vuelve sobre sí mismo y hace explícitas sus formas y sus reglas" [Zuleta, 1996, p. 17].

Con frecuencia opinamos que algo "es lógico" o, por el contrario, que "no tiene lógica". Sin embargo, no siempre lo que es "lógico" para algunos, lo es para todos. Por ejemplo, si sé que hoy es miércoles y que todos los miércoles tengo clase de Cálculo, es "lógico", es "natural" concluir que hoy tengo clase de Cálculo. Y es razonable esperar que todos concluyamos así, pues tal conclusión está prácticamente contenida en las afirmaciones que la preceden y por lo tanto se deriva de ellas de manera inevitable. Pero no siempre coincidimos todos en calificar como "lógicas" algunas conclusiones. Consideremos, por ejemplo, el caso de alguien que exclama: "¡Es lógico: Juan estaba mintiendo! ¿Notaron cómo se puso de nervioso cuando lo interrogaron? ¡Eso pasa cuando uno está mintiendo!". Detengámonos un poco en el argumento. En él se afirma que cuando una persona miente se pone nerviosa al ser interrogada (¡por lo que más quiera, no diga "se coloca nerviosa"!). Además, se afirma que "Juan se puso nervioso al ser interrogado". Y se concluye que "Juan estaba mintiendo". Preguntémonos ahora: ¿es lógico concluir que Juan estaba mintiendo? ¿No podría ser que no estuviera mintiendo sino que una actitud hostil y amenazante del interrogador lo puso nervioso? De ser así, no sería "lógico" afirmar que Juan estaba mintiendo. Igualmente, puede haber desacuerdo en calificar como "lógica" la conclusión en este caso: "Todos los que votaron por Chávez están de acuerdo con la nacionalización del petróleo. Entonces usted no está de acuerdo con la nacionalización, porque no votó por Chávez". Si usted considera "lógicas" las conclusiones de los dos casos anteriores, pronto aprenderá que está en un error. En este curso estudiaremos las normas que rigen los argumentos deductivos válidos y que le enseñarán a establecer si, en un caso específico, es correcto afirmar que la conclusión es "lógica" o que no lo es.

Ejercicio 1.1 Analice cuidadosamente los dos últimos razonamientos usados como ejemplo en el párrafo anterior. ¿Qué modificaciones harían "lógicas" las conclusiones?

Algunos errores de razonamiento, que llevan a derivar incorrectamente ciertas conclusiones, son consecuencia de un uso de la lógica y del lenguaje que no supera el nivel espontáneo, informal y cotidiano. Sin embargo, tales errores pueden evitarse si se conocen y se aplican las reglas de la lógica y, conjuntamente, se procura utilizar un lenguaje tan cuidadoso y preciso como sea posible. Esperamos que uno de los beneficios que usted obtenga como resultado de un trabajo serio en este curso sea conocer, identificar y evitar muchos de tales errores.

Definición 1.2 La **Lógica** es el estudio de los métodos y principios utilizados para distinguir el razonamiento correcto del razonamiento incorrecto [Copi & Cohen, 1998, p. 3].

Nuestro plan de trabajo se configura a partir de la definición anterior. Consiste en estudiar las nociones de razonamiento y razonamiento correcto, y establecer criterios para distinguir los razonamientos correctos de aquellos que no lo son. Igualmente, en estudiar las nociones de razonamientos fuertes y razonamientos débiles y establecer criterios para identificarlos como tales. Con este propósito, empezaremos por considerar los elementos del lenguaje que se utilizan para expresar los razonamientos.

1.3 FRASES Y PROPOSICIONES

El lenguaje, instrumento por excelencia para comunicar el conocimiento, está formado por frases. Estas pueden ser de tipo declarativo: "El oxígeno es necesario para la vida"; de tipo interrogativo: "¿Cuál es la temperatura local en este momento?"; de tipo imperativo: "¡Retírese de ahí, inmediatamente!"; y de tipo exclamativo: "¡Ojalá llueva pronto!". Usualmente, pero no exclusivamente, los razonamientos están formados por bloques de frases declarativas.

Definición 1.3 Una **proposición** es una frase declarativa que puede ser afirmada o negada.

De acuerdo con esta definición, sólo las frases declarativas constituyen proposiciones. Su contenido debe ser calificable como verdadero o como falso, sin que esto signifique que se haya establecido o se pueda establecer explícitamente tal carácter de verdadero o falso.

Los enunciados siguientes son ejemplos de proposiciones:

1. Bogotá D.C. es la capital de Colombia.
2. Aristóteles, filósofo griego, fue discípulo de Platón.
3. 8 es un número primo.
4. Todo número par mayor que 2 puede ser expresado como suma de dos números primos.
5. La señora Hillary Clinton es la esposa del presidente de Estados Unidos.
6. Dios existe.

Estas seis frases son enunciados declarativos, es decir, afirman cosas; y lo que afirman será verdadero o falso según que se corresponda o no con los hechos. Las proposiciones 1 y 2 son verdaderas y la proposición 3 es falsa, y para calificarlas como tales se requiere disponer de información o conocimientos adecuados. No obstante, para catalogar un enunciado como proposición sólo se exige reconocer que el enunciado debe ser verdadero o falso, sin que sea necesario establecer explícitamente que es lo uno o es lo otro. Por ejemplo, al momento de escribir este texto la verdad o falsedad de la afirmación 4 de la lista anterior, conocida como "La conjetura de Goldbach", sigue sin establecerse, a pesar de más de 250 años de esfuerzos de connotados matemáticos. Sin embargo, es claro que tal afirmación tiene que ser verdadera o tiene que ser falsa, y por lo tanto es una proposición. En cuanto a la afirmación 5, ella fue verdadera sólo durante el tiempo que el señor Clinton fue el presidente de los Estados Unidos (1993-2001). La inclusión del ejemplo 6, como lo adivinará el lector, tiene la intención de ilustrar el hecho de que la calificación de verdadera o falsa no tiene que ser universalmente compartida. Finalmente, la proposición "Ernesto Samper Pizano, presidente de la República de Colombia entre 1994 y 1998, supo, durante su campaña, que a esta habían ingresado dineros ilícitos", es un ejemplo de proposición cuya verdad o falsedad probablemente nunca conozcamos.

A veces se hace diferencia entre una proposición y la frase que la expresa. Por ejemplo, "Pedro escogió la camisa blanca", "La camisa blanca fue escogida por Pedro" y "Pedro *chose the white shirt*" son tres frases distintas, pero enuncian la misma proposición. En sentido estricto, la frase es la cadena de símbolos (palabras) utilizadas en el enunciado; la proposición es lo afirmado por la frase. Por esto, cada sistema de representación simbólica de proposiciones muy posiblemente utilizaría los mismos símbolos para denotar cualquiera de los tres enunciados anteriores, si se representa la proposición y no la frase. Adicionalmente, también muy posiblemente se utilizaría el mismo símbolo para representar proposiciones como "Juan llega puntualmente a clase", "Juan llegó puntualmente a clase" y "Juan llegará puntualmente a clase"; es decir, sin hacer distinciones por los tiempos verbales. Estas convenciones son muy útiles cuando se representa simbólicamente un argumento con el propósito de estudiar su validez, tal como podrá apreciarse en el capítulo 3.

1.3.1 Proposiciones compuestas

Las frases declarativas pueden ser proposiciones compuestas. El enunciado "A Juan le gusta el cine y a Pedro le gusta el teatro" está formado por dos proposiciones conectadas con la conjunción "y": "A Juan le gusta el cine", la primera, y "a Pedro le gusta el teatro", la segunda. En este caso la proposición compuesta será verdadera si (y solamente si) las proposiciones que la componen son verdaderas. Otro tipo de proposición compuesta se forma conectando dos proposiciones con la disyunción "o": "El próximo semestre debo matricularme en Inglés o Francés". (Esta es la forma usual de enunciar la proposición compuesta: "El próximo semestre debo matricularme en Inglés o el próximo semestre debo matricularme en Francés"). Observe que el enunciado no afirma que "El próximo semestre debo matricularme en Inglés" y tampoco que "El próximo semestre debo matricularme en Francés". Lo que afirma es que el próximo semestre debo matricularme por lo menos en una de las dos materias. Un tercer caso de proposición compuesta se obtiene al conectar dos proposiciones con el condicional "Si..., entonces...". Por ejemplo, "Si Juan logra el primer puesto, entonces recibirá la beca de estudios de la compañía". A diferencia de las proposiciones compuestas mediante las conjunciones "y" y "o", este enunciado condicional no hace afirmaciones sobre la verdad de las proposiciones que lo componen. Lo único que se afirma con este condicional es que hay una relación de dependencia entre las dos proposiciones: si el antecedente es verdadero, es decir, si Juan logra el primer puesto, necesariamente el consecuente será verdadero, es decir, Juan recibirá la beca de estudios de la compañía.

En el tercer capítulo volveremos sobre el tema de las proposiciones compuestas.

Ejercicio 1.4

1. ¿Cuáles son las proposiciones simples que forman el enunciado "María ama la pasta y la ensalada"? ¿En qué caso el enunciado es verdadero? ¿En qué casos la afirmación es falsa? (Tres casos).
2. ¿Cuáles son las proposiciones simples del enunciado "A Juan le gusta el cine pero no le gusta el teatro"? ¿En qué caso el enunciado es verdadero? Consulte la diferencia entre las conjunciones "y" y "pero". ¿Con cuál de ellas coincide el significado de "sin embargo"? ¿Y el de "no obstante"?
3. La proposición compuesta "Una palabra aguda tiene tilde sólo si termina en vocal, en n o en s" está formada por cuatro proposiciones simples. ¿Cuáles son? (Ayuda: una de ellas es "Una palabra aguda termina en vocal") ¿Qué afirma esta proposición compuesta sobre cada una de las proposiciones que la forman?

1.4 RAZONAMIENTO Y ARGUMENTACIÓN

1.4.1 Elementos generales

En las secciones anteriores hemos utilizado repetidamente las palabras "razonamiento" y "argumentación", sin haberlas definido previamente. Lo hicimos así bajo el supuesto de que todos tenemos más o menos la misma idea sobre su significado, pero ahora nos proponemos formalizar estas nociones.

Usualmente se denomina **razonamiento** a una forma especial de pensamiento, raciocinio o actividad mental: "Es la acción de discurrir, ordenando ideas en la mente, para llegar a una conclusión", dice el Diccionario de la Real Academia Española, DRAE [Vigésima primera edición, 1992]. El texto siguiente, tomado de *El hombre anumérico: El analfabetismo matemático y sus consecuencias*, ilustra magníficamente la definición anterior. El autor presenta un razonamiento para mostrar que algunos cálculos sencillos pueden resultar interesantes:

> "¿Cuál es el volumen total de la sangre humana existente en el mundo? El macho adulto medio tiene unos cinco litros de sangre, la hembra adulta un poco menos, y los niños bastante menos. Así, si calculamos que en promedio cada uno de los 5 mil millones de habitantes de la tierra tiene unos cuatro litros de sangre, llegamos a que hay unos 20 mil millones ($2x10^{10}$) de litros de sangre humana. Como en cada metro cúbico caben 1.000 litros, hay aproximadamente $2x10^7$ metros cúbicos de sangre. La raíz cúbica de $2x10^7$ es 270. Por tanto, ¡toda la sangre humana del mundo cabría en un cubo de unos 270 metros de largo, un poco más de un dieciseisavo de kilómetro cúbico!" [Paulus, 1988, p. 22].

En este caso, el razonamiento es el **proceso** mismo mediante el cual se articulan unas ideas con otras hasta llegar a la conclusión.

Este sentido de razonamiento como "acción mental" es también el que utiliza Moore en *Los mejores problemas lógicos 2* al referirse a las habilidades necesarias para resolver la clase de problemas que conforman su libro: "Todo lo que se precisa es sentido común, una cierta capacidad de razonamiento…", [Moore, 1991, p. 7]. Y es también el que utilizamos cuando explicamos la forma en que llegamos a la solución de un problema diciendo: "Yo lo pensé así:…" o "Este fue mi razonamiento…".

Ejemplo 1.5 El siguiente es un razonamiento muy utilizado por los profesores de álgebra para mostrarles a sus estudiantes que un descuido al usar propiedades de los números reales puede ocasionar resultados absurdos: Vamos a "demostrar" que 1 = 2.

Supongamos, para empezar, que a y b denotan números reales iguales, y diferentes de 0:

$a = b$

1. Multipliquemos ambos miembros de la igualdad anterior por b:
   $ab = b^2$
2. De los dos miembros de la igualdad anterior restemos a^2:
   $ab - a^2 = b^2 - a^2$
3. Los términos de la igualdad anterior se pueden factorizar así:
   $a(b-a) = (b+a)(b-a)$
4. Dividamos ambos miembros de esta igualdad entre (b–a):
   $a = b + a$.
5. Utilicemos la hipótesis de que a y b son iguales y remplacemos a por b en la expresión anterior:
   $b = b+b =2b$

6. Ahora, dividamos por b ambos miembros de b = 2b, para obtener el resultado propuesto:
   1 = 2

El desafío: Encontrar el error en el razonamiento, error que evidentemente existe.

A diferencia de la noción de razonamiento como "proceso mental" conducente a una conclusión, en **lógica formal** se considera que un razonamiento es un bloque especial de proposiciones, más que una actividad mental. En este sentido, cada uno de los tres bloques siguientes de afirmaciones, en los que algunas de ellas constituyen el soporte, fundamento o justificación de otra afirmación del mismo bloque, es un razonamiento. Sin embargo, ninguno da cuenta del proceso mental mediante el cual se va pasando de una afirmación a la siguiente:

1. Todos los hombres son mortales. Sócrates es hombre. **Por lo tanto**, Sócrates es mortal.

2. Los pingüinos vuelan. **Porque** todas las aves vuelan, y los pingüinos son aves.

3. Es martes o no es martes. **En consecuencia**, la luna es un pedazo de queso amarillo. **En efecto**, si es martes, la luna es un pedazo de queso amarillo. Y si no es martes, la luna es un pedazo de queso amarillo.

Lo importante para resaltar aquí es que entre el razonamiento cotidiano y el razonamiento lógico formal hay un elemento común, que sirve de fundamento a la siguiente definición aplicable en ambos casos:

Definición 1.6 **Un argumento o razonamiento** es un bloque de proposiciones con el cual se afirma que una de ellas, llamada **conclusión**, se deriva, se desprende o se sigue como consecuencia de otras proposiciones del mismo bloque, llamadas **premisas**.

Sobre la base de la definición anterior, identificaremos la conclusión y las premisas en cada uno de los tres ejemplos que la preceden. Preste atención a la función de las expresiones en negrillas; ellas contribuyen a tal identificación:

1. "Todos los hombres son mortales. Sócrates es hombre. **Por lo tanto**, Sócrates es mortal". La expresión "Por lo tanto" separa la afirmación "Sócrates es mortal" de otras dos, que la justifican: "Todos los hombres son mortales" y "Sócrates es hombre". Es claro que si aceptamos que todos los hombres son mortales y que Sócrates es hombre, tendremos que aceptar que Sócrates es mortal. Se trata de un razonamiento con dos premisas: "Todos los hombres son mortales" y "Sócrates es hombre". La conclusión, "Sócrates es mortal", va después de las premisas. Es un esquema de razonamiento de la forma: [premisas]. **Por lo tanto** [conclusión].

2. "Los pingüinos vuelan. **Porque** todas las aves vuelan, y los pingüinos son aves". En este caso aseguramos que [conclusión], "Los pingüinos vuelan". Y lo hacemos sobre la base de dos afirmaciones [premisas]: "Todas las aves vuelan", primera premisa, y "Los pingüinos son aves", segunda premisa. En este caso la conclusión precede a las premisas. Es un esquema de la forma: [conclusión]. **Porque** [premisas].

3. "Es martes o no es martes. **En consecuencia**, la luna es un pedazo de queso amarillo. **En efecto**, si es martes, la luna es un pedazo de queso amarillo. Y si no es martes, la luna es un pedazo de queso amarillo".

Este es un caso en el que la conclusión, "la luna es un pedazo de queso amarillo", va entre las premisas:

P_1 Es martes o no es martes.

P_2 Si es martes, la luna es un pedazo de queso amarillo.

P_3 Si no es martes, la luna es un pedazo de queso amarillo.

Ejercicio 1.7 Establezca, por analogía con los dos casos anteriores, el esquema del razonamiento anterior.

Observe que si en cualquiera de los razonamientos anteriores se aceptan como verdaderas las premisas, entonces debe aceptarse como verdadera la conclusión; es decir, **es imposible que las premisas sean verdaderas y que la conclusión sea falsa.** A estos razonamientos se les llama **razonamientos deductivos válidos**; son los razonamientos "correctos" mencionados en la definición 1.2. A los argumentos que se dan a favor o en contra de una opinión, o para justificar o explicar una decisión o la solución de un problema, o a los que eventualmente permiten llegar a acuerdos sobre asuntos polémicos, se les llama **razonamientos dialécticos.** El razonamiento de Paulus en *El hombre anumérico*, citado en la sección 1.4.1, es un razonamiento dialéctico.

La definición 1.6 es compatible con las dos clases de razonamiento mencionadas en el párrafo anterior, pues en ambos casos se sustenta una conclusión sobre la base de un conjunto de premisas. Sólo que mientras el argumento cotidiano conlleva usualmente la intención —no siempre explícitamente declarada— de convencer de algo a un interlocutor, o de influir sobre sus opiniones o creencias, tal intención puede no estar presente en los razonamientos deductivos. Por otra parte, como la definición no diferencia entre los términos argumento y razonamiento, uno puede utilizar indistintamente ambos términos. Sin embargo, cuando se hable de validez o corrección, diremos preferentemente "razonamiento válido" o "razonamiento correcto".

Antes de presentar algunos ejemplos de razonamientos, es necesario hacer una observación adicional: **la validez de un razonamiento es una característica formal; hace referencia solamente a la calidad de la relación entre las premisas y la conclusión, y no a su contenido o veracidad.** En particular, el calificativo de "verdadero" se aplica solamente a los enunciados; no a los razonamientos. Es por esto que hablamos de premisas verdaderas o de premisas falsas, y de conclusión verdadera o de conclusión falsa. Pero **no decimos** "el razonamiento es verdadero" o "el razonamiento es falso" sino "el razonamiento es válido" o "el razonamiento es inválido". Un razonamiento es válido cuando la conclusión está implicada por las premisas en forma necesaria, esto es, cuando no es posible que las premisas sean verdaderas, o se acepten como tales, y que la conclusión no lo sea, o no se acepte como tal. Veamos un ejemplo: "Como los seres terrestres tienen alas y los marcianos son seres terrestres, entonces los marcianos tienen alas". No hay duda de que **si aceptáramos** como verdaderas las dos premisas, **tendríamos que aceptar** como verdadera la conclusión, pues ella se sigue de las premisas en forma necesaria. Se trata entonces de un razonamiento válido, a pesar de que las dos premisas son falsas. (Muy posiblemente la conclusión también lo es). Un razonamiento es inválido cuando la conclusión no se desprende necesariamente de las premisas. Este es el caso del razonamiento "Los médicos saben primeros auxilios. Entonces Juan es médico, **porque** Juan sabe primeros auxilios". Aquí la conclusión "Juan es médico" no se desprende de las premisas en forma necesaria. En efecto, la primera premisa asegura que los médicos saben primeros auxilios, pero no asegura que sólo los médicos saben primeros auxilios. De hecho, Juan puede saber de primeros auxilios si es paramédico, por ejemplo. La validez de un razonamiento no está dada entonces por la verdad de las premisas o de la conclusión **sino por la forma en que las premisas sustentan la conclusión**. Ya mencionamos el hecho de que los tres razonamientos que ilustran la definición 1.6 son válidos. Sin embargo, en el primero de ellos las premisas y la conclusión son verdaderas; en el segundo, la conclusión es falsa (los pingüinos no vuelan) —lo cual indica que por lo menos una de las premisas también lo es— y en el tercero sólo la primera premisa es verdadera.

Ejercicio 1.8 Identifique las premisas y la conclusión en el razonamiento siguiente. ¿Es un razonamiento válido? ¿Es un razonamiento verdadero? ¿Es un razonamiento correcto?

"**Dado que** los calamares son mariscos y que los mariscos se descomponen a altas temperaturas, **se concluye** que los calamares se descomponen a altas temperaturas".

1.4.2 Premisas implícitas

Cuando una persona afirma que "Juan cree en Dios **porque** es católico", está razonando a partir de dos premisas: una explícita, "Juan es católico", y la otra implícita, "Todos los católicos creen en Dios". La incorporación explícita de tal premisa al razonamiento produce este razonamiento válido: "Juan cree en Dios. **Porque** Juan es católico, y todos los católicos creen en Dios". En forma análoga, una premisa implícita en el razonamiento "Hoy tengo clase de lógica **puesto** que es lunes", es: "Los lunes tengo clase de lógica". Si escribimos "Hoy tengo clase de lógica **puesto** que es lunes y los lunes tengo clase de lógica", es fácil apreciar la estructura válida del razonamiento.

En términos generales, llamaremos **premisas implícitas** a aquellas premisas que hacen parte de un razonamiento pero que no se enuncian en el mismo, sino que se sobrentienden, o se espera que se sobrentiendan, por parte del lector o de la contraparte en la argumentación. Determinar las premisas implícitas e incorporarlas al argumento es esencial para decidir sobre su validez, en el caso de los razonamientos deductivos, o sobre su fuerza, en el caso de los razonamientos inductivos (clasificación que estudiaremos posteriormente). Sin embargo, no siempre es tan sencillo como en los ejemplos anteriores identificar las premisas implícitas o coincidir en ellas. Y es fácil entender el porqué de esto: algunas piezas de información que el autor del argumento considera tácitas, sobrentendidas, bien pueden no serlo para quien lee o escucha el argumento.

Ejemplo 1.9 La afirmación "No es lógico que un defensor del derecho a la vida esté de acuerdo con el aborto, **porque** el aborto quita la vida a un ser humano", es un razonamiento. Su conclusión, "No es lógico que un defensor del derecho a la vida esté de acuerdo con el aborto", se sustenta en dos afirmaciones. La primera es una premisa explícita: "El aborto quita la vida de un ser humano". La segunda es una premisa implícita: "No es lógico que un defensor del derecho a la vida esté de acuerdo con acciones que quitan la vida a un ser humano".

Ejercicio 1.10 Considere este argumento: "(De la globalización) no se puede afirmar que se trate de un fenómeno realmente global, **ya que** más de la mitad de los países del mundo no se han integrado en forma intensa a la economía mundial" [La globalización. *Portafolio*, jueves 16 de enero de 2003, p. 30]. El columnista no está de acuerdo con calificar de fenómeno global un mundo sólo parcialmente integrado desde el punto de vista económico. ¿Cuál o cuáles son las premisas del argumento? (Debe incluir la premisa implícita). ¿Cuál es la conclusión?

Ejercicio 1.11 Determine la premisa implícita en el argumento siguiente y reescriba el argumento incorporándole dicha premisa: Las promesas hechas cuando se tiene un arma apuntando a la cabeza carecen de fuerza moral o legal. Nadie está obligado a cumplir con una promesa hecha bajo amenaza [Copi & Cohen, 1998, p. 46].

1.4.3 Un razonamiento para probar que el enunciado condicional no es un razonamiento

En términos generales, el condicional "Si... entonces..." no expresa un razonamiento. Veamos por qué, con un ejemplo: "**Si** es domingo **entonces** los católicos van a misa". Determinemos el número de afirmaciones contenidas en el enunciado. ¿Afirma que es domingo? No. ¿Afirma que los católicos van a misa? Tampoco. Entonces, ¿cuántas afirmaciones contiene el condicional? Solamente una: cuando es domingo, los católicos van a misa. Pero en un razonamiento deben identificarse por lo menos dos afirmaciones, premisa y conclusión, la primera de las cuales es el soporte o justificación de la segunda. Entonces, el enunciado condicional "Si…, entonces…" no expresa un razonamiento.

Insistamos en la conclusión del párrafo anterior: es un error suponer que en un enunciado de la forma "si **p** entonces **q**", el antecedente, **p**, es una premisa, y el consecuente, **q**, la conclusión. El condicional no afirma ninguna de ellas.

Ejercicio 1.12 Considere el texto siguiente: "Si hoy es domingo, entonces los católicos acudirán a misa **porque** los preceptos de su religión así lo establecen". Discuta esta afirmación: el texto expresa un razonamiento. Determine las premisas y la conclusión. Compare con el condicional del párrafo anterior, y explique la diferencia.

Lo que sí puede suceder es que un enunciado condicional "Si…, entonces…" sea una de las premisas de un razonamiento en el que la conclusión y la otra premisa son afirmaciones implícitas, y que generalmente se usa para rechazar enfáticamente un juicio de valor. Este uso se ilustra en los dos ejemplos siguientes:

Ejemplo 1.13 Suponga que alguien exclama: "¡Admiro a Adolfo Hitler, por su humanitarismo!". A lo cual usted responde: "**Si** Adolfo Hitler fue humanitario, **entonces** yo soy san Pedro Claver". Este condicional tiene el propósito de rechazar tajantemente la afirmación de que Adolfo Hitler fue admirable por su humanitarismo. Hace parte de un razonamiento en el que la otra premisa y la conclusión son afirmaciones implícitas, y que es este, en su forma completa: "**Si** Adolfo Hitler fue humanitario, **entonces** yo soy san Pedro Claver. Pero es un hecho que yo no soy san Pedro Claver. Por lo tanto, Adolfo Hitler no fue humanitario". Este uso del condicional, por cierto un uso interesante en argumentación, origina razonamientos deductivos válidos.

Ejemplo 1.14 "Con ese gran desprecio por las minorías y esa absurda intolerancia por lo diferente, si el ministro Rómulo puede administrar justicia y la congresista Vivianne legislar sobre moral, Marulanda es monseñor Rubiano y Amparo Grisales, sor Teresa de Calcuta" ["Correo del lector". *El Tiempo*, Bogotá, 26 enero 2002].

Según la definición de razonamiento dada en 1.6, no todo texto formado por un bloque o grupo de proposiciones es, o contiene, un argumento o razonamiento. En efecto, en un texto argumentativo debe ser identificable el propósito de mostrar la validez de un resultado, o de defender un punto de vista, o de persuadir o convencer al auditorio para que acepte una idea u opinión. Deben también ser identificables las razones [premisas] del autor en favor de su opinión o punto de vista [conclusión], aunque una o varias premisas, e inclusive la conclusión, puedan ser implícitas. Evidentemente, muchos textos no tienen los propósitos anotados sino que cumplen funciones diferentes. Puede tratarse de textos que simplemente describen un hecho, explican un concepto o situación, o cumplen una función de tipo narrativo, por ejemplo.

Ejemplo 1.15 Consideremos el texto siguiente, tomado de un periódico colombiano de circulación nacional:

> "La construcción de la nueva línea de Transmilenio sobre la avenida Ciudad de Quito nos forzó a varios vecinos de la calle 88A a negociar nuestras viviendas que habitamos por más de 30 años. El IDU[1] propone una negociación basada en un avalúo de la Lonja de Propiedad Raíz, con el que no estamos de acuerdo porque no refleja los precios del mercado ni cubre el costo de reposición de las viviendas.
>
> En toda negociación comercial debe haber una propuesta del comprador y una contrapropuesta del vendedor. En este caso no: el IDU fija el precio, que debe ser aceptado o de lo contrario expropia. También fija la forma de pago: una suma este año, a la entrega de la propiedad en un término de 60 días, y el saldo el año entrante, sin reconocimiento de intereses.
>
> El afán del alcalde Mockus de cerrar su administración con la puesta en marcha de su proyecto bandera, indiscutiblemente necesario para Bogotá, le impide ver el atropello contra muchos de los propietarios afectados".
>
> [*El Tiempo,* Sección "Foro del lector", 8 de julio de 2003]

El remitente expresa su inconformidad con las condiciones impuestas por la entidad oficial encargada de negociar las viviendas de los residentes de un sector de la capital: Describe tales condiciones, manifiesta por qué son inaceptables y declara que ellas constituyen un atropello contra los propietarios afectados.

La carta es un texto argumentativo puesto que en ella se identifican una opinión y varias afirmaciones que la sustentan. La opinión es que las condiciones de negociación

1 Instituto de Desarrollo Urbano.

constituyen un atropello contra los propietarios (conclusión), opinión que es respaldada con la descripción de las condiciones de negociación (premisas).

En el ejemplo siguiente se le da al texto anterior una estructura nítida de razonamiento, en la cual son fácilmente identificables las premisas y la conclusión:

Ejemplo 1.16

> El afán del alcalde Mockus de cerrar su administración con la puesta en marcha de su proyecto bandera —la nueva línea de Transmilenio sobre la avenida Ciudad de Quito—, indiscutiblemente necesario para Bogotá, le impide ver el atropello contra muchos de los propietarios afectados. **En efecto**, varios vecinos de la calle 88A fuimos forzados a negociar nuestras viviendas de acuerdo con condiciones injustas establecidas unilateralmente por el IDU: en primer lugar, el IDU fija el precio con base en un avalúo de la Lonja de Propiedad Raíz, con el que no estamos de acuerdo porque no refleja los precios del mercado ni cubre el costo de reposición de las viviendas. Este precio debe aceptarse, pues de lo contrario se produce la expropiación de la vivienda. En segundo lugar, el IDU fija la forma de pago: una suma este año, a la entrega de la propiedad en un término de 60 días, y el saldo el año entrante, sin reconocimiento de intereses.

En el texto anterior se identifica:

La conclusión: El afán del alcalde Mockus de cerrar su administración con la puesta en marcha de su proyecto bandera —la nueva línea de Transmilenio sobre la avenida Ciudad de Quito—, indiscutiblemente necesario para Bogotá, le impide ver el atropello contra muchos de los propietarios afectados.

Premisa 1: Varios vecinos de la calle 88A fuimos forzados a negociar nuestras viviendas de acuerdo con condiciones injustas establecidas unilateralmente por el IDU.

Observe que las afirmaciones mencionadas "en primer lugar" y "en segundo lugar", son razones dadas por el remitente para justificar la premisa 1. **Por lo tanto esta premisa es también la conclusión de un argumento contenido a su vez en el argumento global.** Las premisas de tal argumento son:

Premisa 2: El IDU fija el precio con base en un avalúo de la Lonja de Propiedad Raíz, con el que no estamos de acuerdo porque no refleja los precios del mercado ni cubre el costo de reposición de las viviendas.

Premisa 3: El IDU fija la forma de pago: una suma este año a la entrega de la propiedad, en un término de 60 días, y el saldo el año entrante, sin reconocimiento de intereses.

Ejercicio 1.17 El siguiente es un texto argumentativo. Léalo atentamente. ¿De qué espera el autor convencer a los lectores? ¿Qué afirmaciones utiliza para lograrlo? El texto es tomado de la misma fuente del ejemplo 1.15.

> "Señor Director:
>
> Sobre el sugestivo editorial del primero de julio, titulado "Derrotar el hambre en el mundo" y relacionado con los alimentos transgénicos quiero hacer unas observaciones.
>
> El final del hambre en el mundo es una falacia propalada por las transnacionales que se lucran con este gigantesco negocio. Cifras de la FAO muestran que el hambre no se debe a la falta de producción de comida sino a que cerca del 80 por ciento de la población no tiene forma de acceder a ella. Las pruebas sobre posibles aumentos en la productividad de semillas transgénicas en centros de investigación de Estados Unidos, México, Gran Bretaña y otros países, indican que no hay un aumento consistente de aquella. También, según la FAO, en el mundo hay unos 1.400 millones de agricultores de subsistencia, que guardan sus semillas de un año a otro. No pueden comprar las transgénicas por obvios motivos. ¿Qué pasará con ellos?
>
> Los genes tienen su propio sistema de interactuar entre todos ellos. Uno solo que se introduzca en el ADN, ¿cómo va a afectar a todo el organismo y por cuánto tiempo? Hasta el momento nadie lo puede decir".
>
> [*El Tiempo*, sección "Foro del lector", 3 de julio de 2003]

1.4.4 Sobre responsabilidades del autor y del lector de un texto argumentativo

Es pertinente mencionar que, de acuerdo con una de las reglas para la composición de buenos argumentos, hubiera sido conveniente que el remitente de la carta del ejercicio 1.17 citara las fuentes de la información contenida en el párrafo principal de la misma. Si la doble referencia a cifras de la FAO, y la referencia a pruebas de productividad con el uso de las semillas transgénicas, se hubieran documentado citando las fuentes, se hubiera dado más credibilidad al argumento, tendría más fuerza. Además, un lector interesado en el tema hubiera tenido así la posibilidad de consultar directamente tales fuentes y de conocer con más detalles los documentos referidos. (No obstante, en este caso la omisión de fuentes pudo ser deliberada: o porque el autor no consideró necesario incluirlas, o para ajustarse a las limitaciones de extensión que generalmente fijan los periódicos para publicar las cartas de sus lectores).

Las consideraciones del párrafo anterior se centran en responsabilidades del autor de la carta. Pensemos un poco en las del lector: Su primera responsabilidad es conocer el significado contextual de todas las palabras, frases y símbolos utilizados. ¿Alimentos transgénicos? ¿Semillas transgénicas? ¿Falacia propalada por las transnacionales? ¿FAO? No puede comprenderse un texto si se ignora el significado de algún término contenido en el mismo. Una vez superadas las etapas sintáctica y semántica el lector interesado se formula y responde algunas preguntas como: ¿Qué opinión sostiene el autor? ¿Con cuáles afirmaciones la fundamenta? ¿Son creíbles estas afirmaciones? ¿Constituyen un soporte adecuado para la conclusión?

Para finalizar esta sección presentamos dos ejemplos de textos que no son argumentativos, dado que carecen de los elementos característicos de estos, y que fueron mencionados inmediatamente después del ejercicio 1.14.

Ejemplo 1.18 El texto siguiente cumple una función expositiva. El autor muestra algunos errores que se cometen cuando se enfrenta por primera vez la tarea de escribir un ensayo basado en argumentos:

> "Las reglas que rigen los argumentos, entonces, no son arbitrarias: tienen un propósito específico. Pero los estudiantes (al igual que otros escritores) no siempre comprenden ese propósito cuando por primera vez se les asigna la realización de un ensayo basado en argumentos; y si no se entiende una tarea, es poco probable que se realice correctamente. Muchos estudiantes invitados a argumentar a favor de sus opiniones respecto a determinada cuestión, transcriben elaboradas afirmaciones de sus opiniones, <u>pero no ofrecen ninguna auténtica razón para pensar que sus propias opiniones son las correctas</u>. Escriben un ensayo, pero no un ensayo basado en argumentos" [Weston, 1999, p. 15]. (El subrayado es nuestro).

Ejemplo 1.19 En el siguiente texto-poema el poeta describe la pérdida gradual de la memoria y su premonición de lo inevitable:

> ESCRITURAS, 1
>
> *Luego fueron*
> *las palabras cotidianas.*
> *Las que bendecían los alimentos*
> *las que deseaban los buenos días*
> *las de nombrar los dolores:*
> *Se te fueron muriendo en la boca*
> *a pesar tuyo.*
>
> *Entonces*
> *te valdrías del papel*
> *para salvar esas palabras urgentes.*
> *Al deletrear penosamente tus fatigas*
> *ibas leyendo*
> *el itinerario de tu muerte.*
>
> [Galán, 2008, p. 7]

Ejercicio 1.20 Decida si el texto siguiente es o no argumentativo. Explique la razón de su decisión y el propósito del texto:

> "El anumerismo o incapacidad de manejar cómodamente los conceptos fundamentales de número y azar, atormenta a demasiados ciudadanos que, por lo demás, pueden ser perfectamente instruidos. Las mismas personas que se encogen de miedo cuando se confunden términos como "implicar" e "inferir", reaccionan sin el menor asomo de turbación ante el más egregio de los solecismos numéricos" [Paulus, 1988, p. 9].

1.4.5 Una ayuda en la identificación de los elementos de un razonamiento: Los indicadores

La identificación de las premisas y de las conclusiones —explícitas e implícitas— es un elemento indispensable para establecer la estructura de un razonamiento o de un texto argumentativo y para pronunciarse sobre su validez o sobre su admisibilidad. Algunas veces el texto incluye expresiones conocidas como **indicadores** (de premisas o de conclusión), que **contribuyen** a identificarlas. Son expresiones como las destacadas en negrillas en la sección 1.4.2 y en algunos ejemplos posteriores.

Indicadores de conclusión: Son expresiones que "anuncian" la (o una) conclusión en un argumento. La siguiente es una lista no exhaustiva de indicadores de conclusión: en consecuencia…, luego…, por esto…, por lo anterior…, por esta(s) razón(es)…, por lo tanto…, se sigue que…, así que…, podemos deducir que (concluir que, inferir que)…, lo cual muestra que… (indica que, significa que, implica que), como resultado…, de acuerdo con lo anterior…

Ejemplo 1.21 Los seres humanos destruyen anualmente millones de hectáreas de bosques y son los directos culpables de la desaparición masiva de fuentes de agua potable. Ningún otro ser viviente ocasiona tanto daño a la naturaleza. **Por esto**, de todos los seres que pueblan la tierra, los seres humanos son los más nocivos para el ecosistema.

El razonamiento anterior tiene dos premisas. La primera es la conjunción de dos afirmaciones: "Los seres humanos destruyen anualmente millones de hectáreas de bosques" y "(Los seres humanos) son los directos culpables de la desaparición masiva de fuentes de agua potable". La segunda premisa afirma que "Ningún ser viviente ocasiona tanto daño a la naturaleza como lo hacen los seres humanos". Sobre la base de estas afirmaciones el argumento concluye que "De todos los seres que pueblan la tierra, los seres humanos son los más nocivos para el ecosistema", conclusión anunciada por el indicador "Por esto".

Indicadores de premisas: Son expresiones que "anuncian" una premisa o una lista de premisas en un argumento: dado que…, como…, porque…, la razón es que…, puede deducirse de… (concluirse de, inferirse de), en vista de…, puesto que…

Ejemplo 1.22 "Me iré a narrar fútbol en Etiopía. **Porque** prometí hacerlo si Colombia no clasificaba al mundial de fútbol".

En el ejemplo la conclusión precede a las premisas y una de las premisas es implícita.

"Porque", indicador de premisas, anuncia las razones para la afirmación que la precede.

Conclusión: "Me iré a narrar fútbol en Etiopía".

Premisa 1: "Prometí que si Colombia no clasificaba al mundial de fútbol, me iría a narrar fútbol en Etiopía".

Premisa 2 (implícita): "Colombia no clasificó al mundial de fútbol".

Tenga presente que los indicadores de premisa y de conclusión constituyen una ayuda y no un requerimiento. Por esta razón no siempre se utilizan. Tal es el caso del argumento siguiente en el que no se usaron indicadores, y en el que la conclusión, seguida de las premisas, es la primera afirmación: "Hemos hecho del más privilegiado territorio del continente una desoladora pesadilla. Las sierras eléctricas aniquilan una naturaleza que podría salvarnos; la conquista de América prosigue con su viejo rostro brutal contra los hombres y las selvas; la peste del olvido borró nuestros orígenes y nuestros sueños" [Ospina, 1997, p. inicial]. Note que la última afirmación, importante en el texto como expresión del sentir del autor, no hace parte de las premisas.

Aunque la definición 1.6 estipula que los elementos de los razonamientos son proposiciones, hay otras formas alternas de expresión, propias del lenguaje natural y equivalentes a frases declarativas. Por ejemplo, la frase "¿Que el cigarrillo no es nocivo para los llamados "fumadores pasivos?", puede entenderse, según el tono en que se pronuncie, como una **afirmación:** el cigarrillo <u>también</u> es nocivo para los no fumadores en el entorno del fumador, o como: ¡Claro que el cigarrillo también es nocivo para los fumadores pasivos!

Ejercicio 1.23 Identifique un razonamiento en cada situación siguiente. Indique las premisas (esto significa incluir premisas implícitas si considera que existen) y la conclusión.

1. —¿Estudiaste el domingo?
   —¡Nooo…o!
   —¿Y eso?
   —Porque yo estudio el domingo sólo si el sábado no he alcanzado a preparar algún examen que tenga el lunes.

2. ¿Que el cigarrillo no es nocivo para los llamados "fumadores pasivos"? ¡Convenza de esto a quienes, después de convivir por años con familiares fumadores, desarrollaron enfermedades asociadas con el hábito de fumar, a pesar de nunca haber fumado!

Ejemplo 1.24 En el ejemplo siguiente el argumento tiene dos premisas explícitas y una premisa implícita. También la conclusión es implícita, pero su contenido se infiere fácilmente a partir de las premisas:

Si el incremento en las penas de prisión fuera suficiente para disminuir los niveles de delincuencia, el índice de secuestros iría en disminución. Pero es un hecho que, en lugar de disminuir, el número de secuestros va en aumento.

Premisas:

P_1 Si el incremento en las penas de prisión fuera suficiente para disminuir los niveles de delincuencia, el índice de secuestros iría en disminución.

P_2 El número de secuestros, en lugar de disminuir, va en aumento.

Además, del texto se infiere la siguiente premisa implícita:

P_3 (implícita). La pena de prisión para el delito del secuestro ha sido incrementada.

Conclusión (también implícita). El incremento en las penas de prisión no es, por sí sola, una medida suficiente para disminuir los niveles de delincuencia.

Ejemplo 1.25 El enunciado "Si un número entero tiene exactamente dos divisores positivos, entonces es un número primo" no es un razonamiento (ver sección 1.4.3). Se trata, simplemente, de una proposición condicional verdadera que enuncia una condición suficiente para que un entero sea primo: que el entero tenga únicamente dos divisores positivos. En cambio, y no obstante estar expresado en una sola frase, el enunciado "8 no es un número primo **porque** tiene más de dos divisores", contiene un argumento: Afirma que 8 no es un número primo y respalda esta afirmación con dos premisas: una premisa explícita, "8 tiene más de dos divisores" y una premisa implícita, "si un entero tiene más de dos divisores, no es primo".

1.4.6 Diagrama de la estructura de un argumento

Es frecuente que una conclusión derivada en un proceso argumentativo se utilice, a su vez, como premisa que contribuye a justificar otra conclusión intermedia o la conclusión del razonamiento. Esto sucede, por ejemplo, cuando se quiere —o se necesita— justificar alguna de las premisas que respaldan la conclusión del argumento (ver comentario al ejemplo 1.16). Para la comprensión de esta clase de argumentos es de gran ayuda elaborar un diagrama que represente la forma como la conclusión (y las conclusiones intermedias) dependen de las premisas en la estructura global del razonamiento. Construir el diagrama es una forma eficaz de generar habilidades para el análisis de argumentos complejos, habilidades que son, a su vez, herramientas fundamentales para abordar la lectura y el estudio de textos también complejos. Uno podría también determinar, como parte del análisis, si las premisas contribuyen, separada o conjuntamente, a una conclusión intermedia o a la conclusión global, y representar estos hechos en el diagrama en una forma adecuada. Sin embargo, tal nivel de análisis no fue considerado necesario para los propósitos de este libro.

Ejemplo 1.26 Construir un diagrama que muestre la estructura del argumento siguiente, es decir, la relación de dependencia entre las premisas, y entre estas y la conclusión. [Copi & Cohen, 1998, p. 64].

> "En las democracias, las leyes generalmente tienden a promover el beneficio del mayor número posible de personas; porque tales leyes emanan de la mayoría de los ciudadanos, quienes están sujetos a error, pero no pueden tener intereses opuestos a su propio beneficio. Por el contrario, en una aristocracia las leyes tienden a concentrar la riqueza y el poder en las manos de la minoría; porque una aristocracia, por su misma naturaleza, constituye una minoría. En consecuencia, se puede asegurar, como afirmación general, que el propósito de la legislación es más útil a la humanidad en una democracia que en una aristocracia".

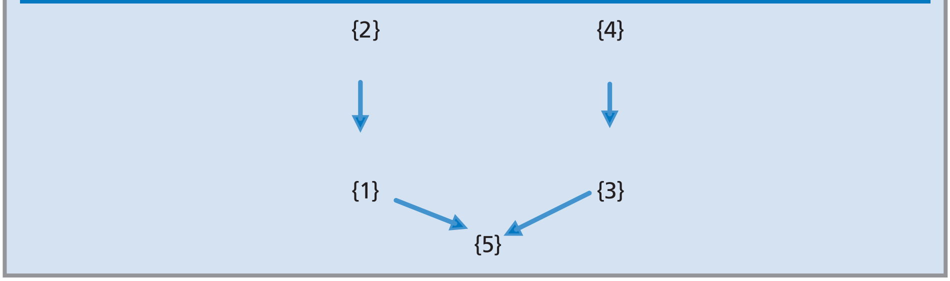
El primer paso consiste en reescribir el argumento, insertando códigos numéricos para identificar las premisas y la(s) conclusión(es) y para delimitar el alcance de las mismas, como se ve a continuación:

> {1} [En las democracias, las leyes generalmente tienden a promover el beneficio del mayor número posible de personas]; **porque** {2} [tales leyes emanan de la mayoría de los ciudadanos, quienes están sujetos a error, pero no pueden tener intereses opuestos a su propio beneficio]. Por el contrario, {3} [en una aristocracia las leyes tienden a concentrar la riqueza y el poder en las manos de la minoría]; **porque** {4} [una aristocracia, por su misma naturaleza, constituye una minoría]. **En consecuencia**, {5} [se puede asegurar, como afirmación general, que el propósito de la legislación es más útil a la humanidad en una democracia que en una aristocracia].

El segundo paso consiste en utilizar los códigos numéricos y sustituir con ellos las afirmaciones que representan. En nuestro ejercicio el texto toma esta forma: {1} **porque** {2}; {3} **porque** {4} y, **en consecuencia** {5}.

El siguiente diagrama describe la estructura del argumento:

Figura 1.2 Estructura del argumento, ejemplo 1.26



Las proposiciones {1} y {2} forman un razonamiento en el cual {1} es una conclusión parcial o intermedia, y {2} constituye la razón para la misma. Una relación similar existe entre las proposiciones {3} y {4}. Finalmente, las conclusiones intermedias {1} y {3} son las premisas en las cuales se fundamenta {5}, la conclusión global del argumento.

Ejemplo 1.27 Construya el diagrama que representa la estructura del siguiente razonamiento:

> Cualquiera sea la situación del dólar con respecto al peso, algún sector de la economía resulta perjudicado: Si el peso se revalúa, se perjudica el sector exportador **porque** los dólares que reciben los exportadores representan menos pesos al traerlos al país. Si el peso se devalúa, se perjudican los importadores **porque** tienen que pagar más caros los bienes que importan y, además, disminuye el consumo de los mismos. Finalmente, la devaluación del peso nos afecta a todos, porque se encarece la deuda externa del país.

Solución: Como en el ejemplo anterior, insertamos códigos numéricos y delimitamos el alcance de las premisas y la conclusión:

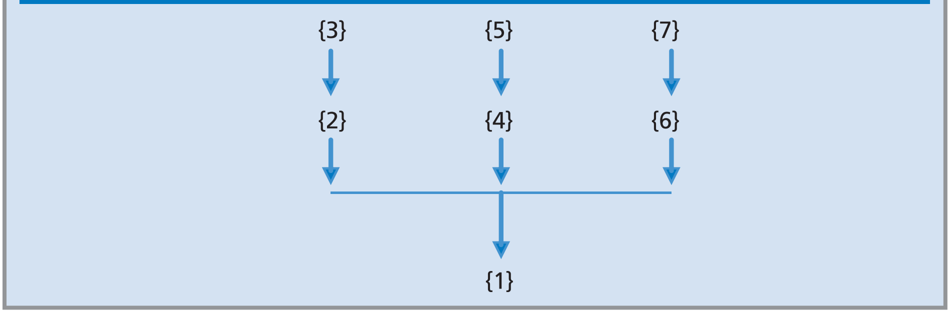
> {1} [Cualquiera sea la situación del dólar con respecto al peso, algún sector de la economía resulta perjudicado]: {2} [Si el peso se revalúa, se perjudica el sector exportador] **porque** {3} [los dólares que reciben los exportadores representan menos pesos al traerlos al país]. {4} [Si el peso se devalúa, se perjudican los importadores] **porque** {5} [(los importadores) tienen que pagar más caros los bienes que importan y, además, disminuye el consumo de los mismos]. {6} [La devaluación del peso nos afecta a todos] **porque** {7} [(si el peso se devalúa) se encarece la deuda externa del país].

En un segundo paso remplazamos los elementos del razonamiento con sus códigos numéricos:

{1}. **(En efecto)** : {2} **porque** {3}. {4} **porque** {5}. Finalmente, {6} **porque** {7}.

Con la información anterior se construye el diagrama que muestra la relación de dependencia entre los elementos del razonamiento:

Figura 1.3 Diagrama representativo del razonamiento en el ejemplo 1.27



1.5 UNA CLASIFICACIÓN DE LOS RAZONAMIENTOS

1.5.1 Introducción

En términos generales, podemos afirmar que toda argumentación está orientada a mostrar que su conclusión se deriva de las premisas o está explicada por ellas. Sin embargo, al considerar diferentes tipos de argumentos se encuentran diferencias evidentes en la forma y en el grado en que las premisas justifican la conclusión o dan razones para ella. Pensemos, por ejemplo, en un razonamiento que tiene estas premisas: “Los estudiantes de Maestría en Lenguas Modernas de mi universidad deben hacer profundización en Inglés o en Francés. Juan, estudiante de Maestría en Lenguas Modernas en mi universidad, no hizo profundización en Inglés”. Estas dos premisas conducen, **inevitablemente**, a concluir que Juan hizo profundización en Francés; en otras palabras, esta es una conclusión necesaria; no puede ser otra. Este es un **razonamiento deductivo válido.** Supongamos, alternativamente, que se razona así: “Los estudiantes de Maestría en Lenguas Modernas de mi universidad deben hacer profundización en Inglés o en Francés. Juan, estudiante de Maestría en Lenguas Modernas de mi universidad, hizo profundización en Inglés. Por lo tanto Juan no hizo profundización en Francés”. ¡Esta forma de razonar es incorrecta! En efecto, una de las premisas establece que se debe hacer profundización en alguno de los idiomas, pero ninguna estipula que no se puede hacer profundización en los dos. Por lo tanto, concluir que por haber hecho profundización en uno de ellos no se hizo en el otro, es incorrecto; se trata de un razonamiento deductivo inválido.

1.5.2 Razonamiento deductivo

Llamaremos **razonamiento deductivo** a todo razonamiento que incluye tácitamente la afirmación de que la conclusión se desprende inevitablemente de las premisas; de que está garantizada por ellas. Dicho de otro modo: un razonamiento es deductivo cuando tiene la pretensión de que las premisas proporcionan evidencia terminante para su conclusión. Si esto es efectivamente así, si la conclusión se sigue inevitablemente de las premisas, es decir, si no es posible que las premisas sean verdaderas y la conclusión falsa, decimos que el razonamiento deductivo es **válido.** Este es el caso del primer ejemplo del párrafo anterior. En cambio, si el razonamiento es deductivo pero la conclusión no es necesaria, el razonamiento es **inválido**. El siguiente es un ejemplo de razonamiento deductivo válido citado prácticamente en todo texto sobre el tema:

Ejemplo 1.28 Como todo hombre es mortal y Sócrates es hombre, entonces Sócrates es mortal.

En este ejemplo, la primera premisa es de carácter universal o general. Podríamos decir que expresa una **regla:** Todo hombre es mortal. A su vez, la segunda premisa hace una afirmación particular; menciona un **caso** o elemento del universo al cual es aplicable la regla: Sócrates es hombre. Finalmente, la conclusión aplica la regla al caso, y establece el **resultado:** Sócrates es mortal. En resumen, el argumento se ajusta a este esquema: "aplicación de una regla a un caso, para obtener un resultado". Así:

Regla: Todo hombre es mortal.

Caso (en el universo de aplicación de la regla): Sócrates es hombre.

Resultado (obtenido por aplicación de la regla al caso): Sócrates es mortal.

No todos los razonamientos deductivos se ajustan al esquema anterior. Sin embargo, con frecuencia se tipifica el razonamiento deductivo como "un razonamiento que va de lo general a lo particular". Pero esta noción, aunque aplicable en razonamientos con la forma del anterior, excluye de ella a muchos razonamientos deductivos. Es más precisa y general la noción presentada en 1.5.2 porque no restringe el concepto de razonamiento deductivo al esquema de "aplicación de la regla a un caso, para obtener un resultado". Como lo muestra este ejemplo: "Existen tres programas de estudios en Ingeniería, en esta Universidad: Ingeniería Industrial, Ingeniería de Sistemas e

Ingeniería Telemática. Juan, que es estudiante de Ingeniería en esta universidad, no estudia Industrial ni Telemática. Entonces, Juan es estudiante de Ingeniería de Sistemas". Este es un razonamiento deductivo válido: las premisas hacen inevitable la conclusión, es decir, es imposible que las premisas sean verdaderas y que la conclusión no lo sea. Pero se trata de un razonamiento deductivo que no se ajusta al esquema "aplicación de la regla a un caso, para obtener un resultado"; ni al de "ir de lo general a lo particular".

Un razonamiento deductivo en el cual la conclusión no se sigue necesariamente de las premisas es un razonamiento inválido. Por ejemplo: "Juan es católico. Porque cree en Dios, y todo católico cree en Dios". El razonamiento pretende que la conclusión, "Juan es católico", se sigue en forma necesaria de las premisas, "Juan cree en Dios" y "Todo católico cree en Dios"; por esto es un razonamiento deductivo. No obstante, contiene un error que seguramente usted ya advirtió: atribuirle a "Todo católico cree en Dios" el significado de "Sólo los católicos creen en Dios", (y como Juan es uno de los que creen en Dios, entonces "tiene que ser católico"). En síntesis, razonar así es ignorar que bien puede suceder que alguien crea en Dios, sin ser católico (siendo protestante, por ejemplo). Se trata, entonces, de un razonamiento deductivo en el cual las premisas no garantizan la conclusión; es inválido.

Una observación adicional: a favor de la noción de razonamiento deductivo como "aplicación de **reglas** a **casos** particulares para obtener ***resultados*** particulares" juega el hecho de que es la forma de deducción típica en matemáticas, ciencia deductiva por excelencia. Ilustremos esta observación con un ejemplo:

Ejemplo 1.29 Se nos pide calcular la longitud de la hipotenusa c de un triángulo rectángulo ABC en el cual los catetos a y b miden 3 cm y 4 cm, respectivamente.

Razonamos de la siguiente forma:

Según el Teorema de Pitágoras (sección 1.1.1), **en todo** triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos: (Afirmación general; una **regla**).

Por hipótesis, ABC **es un** triángulo rectángulo. (Un **caso** al cual es aplicable la regla).

Entonces, aplicamos la regla al caso del triángulo ABC y obtenemos este **resultado:** el cuadrado de la hipotenusa c del triángulo rectángulo ABC es igual a la suma de los cuadrados de los catetos a y b. Este resultado se traduce en la igualdad $c^2 = 3^2 + 4^2$, de la cual se obtiene $c = 5$ cm. Por lo tanto, la longitud de la hipotenusa es 5 cm.

Una característica muy importante de los razonamientos válidos es que el hecho de agregar información a la ya expresada en las premisas no tiene ningún efecto sobre la validez. Por ejemplo, supongamos que al razonamiento sobre Sócrates (ejemplo 1.28) se agrega esta información: "Sócrates, maestro de Platón, fue condenado a muerte al ser declarado impío, aun cuando por una mayoría de sólo 6 votos". Esta información no afecta en modo alguno la validez del razonamiento, puesto que su conclusión ya está garantizada por las dos premisas originales. En síntesis, la validez no es una propiedad susceptible de ser mejorada; cuando se ha establecido la validez de un razonamiento, cualquier información adicional, por valiosa que sea en algún sentido, es irrelevante en cuanto a la validez.

EJERCICIOS

Razonamiento, elementos generales

1. Identifique las premisas y las conclusiones en los argumentos siguientes.
   a. La investigación de los fenómenos sobrenaturales está por fuera del campo de acción de las ciencias. Por tanto, ninguna ciencia puede probar o negar la existencia de Dios.
   b. De todos los seres que pueblan la Tierra, los seres humanos son los más nocivos para el ecosistema. En efecto, ellos destruyen anualmente millones de hectáreas de bosques y son los directos culpables de la desaparición masiva de fuentes de agua potable.
   c. Como las palabras por sí solas no pueden enseñar y por sí mismas no producen una comprensión de sus referentes, entonces los modelos educativos de transmisión de conocimientos a través de las palabras colocan al estudiante en una relación de dependencia del profesor.
   d. Los narcotraficantes encuentran un terreno abonado para los cultivos ilícitos en la pobreza y el abandono oficial de extensas regiones de Colombia. Por esta razón, pretender la erradicación de cultivos basándose únicamente en medidas represivas es como pretender jugar ajedrez con sólo las fichas de un único color.
   e. El amor no ve con los ojos, sino con el pensamiento. Por eso a Cupido lo pintan ciego.
   f. Si Dios fuera bueno, querría hacer a sus criaturas perfectamente felices y si fuera omnipotente podría hacer todo lo que quisiera. Si Dios quisiera hacer a sus criaturas perfectamente felices y pudiera hacer todo lo que quisiera, entonces las criaturas serían perfectamente felices. Pero las criaturas no son perfectamente felices. En consecuencia, a Dios le falta poder, o bondad, o ambas cosas.
   g. Las ballenas jorobadas están llegando a las costas de Buenaventura. Por lo tanto las aguas del norte están bajando de temperatura.
   h. No le doy el descuento porque no compró más de 6 unidades.

2. Califique cada una de las afirmaciones como verdadera o como falsa. Justifique su respuesta.

a. El enunciado "Hoy no tengo clase de Lógica porque ni es lunes ni es miércoles" contiene un razonamiento expresado por medio de una sola frase.

b. El enunciado "Si no hay canje entonces se agudiza el conflicto" contiene un razonamiento expresado en una sola frase.

c. El siguiente bloque de proposiciones constituye un razonamiento: "Dado que la utilidad marginal del dinero decrece a medida que más se tiene los contribuyentes de mayores ingresos pueden aceptar un impuesto proporcionalmente mayor sobre sus ingresos que los más pobres".

d. La conocida afirmación "Todos los hombres son iguales", puede ser la conclusión de un razonamiento deductivo basado en la información de que H_1 es hombre y exhibe el comportamiento M; H_2 es hombre y exhibe el comportamiento M; H_3 es hombre y exhibe el comportamiento M, etcétera.

e. En la lista siguiente hay dos indicadores de conclusión; todos los demás son indicadores de premisas: dado que, por esto, en vista de que, teniendo presente que, como, lo cual muestra que.

f. Reescriba el razonamiento "El aborto no es aceptable pues ningún crimen lo es", haciendo explícitos todos sus elementos.

g. La conclusión del razonamiento "Llegué retardado a clase. Porque no me levanté temprano. Y cada vez que me levanto temprano, no llego retardado a clase", no es "lógica".

3. Decida, en cada uno de los puntos siguientes, si el bloque de proposiciones constituye o no un razonamiento. En caso afirmativo, determine sus premisas y conclusión; en caso negativo, indique el propósito del texto:

a. "Para un científico de la computación, el cálculo de predicados es importante por varias razones. En primer lugar, constituye el fundamento lógico de los lenguajes de programación lógica, como puede ser Prolog. En segundo lugar, el cálculo de predicados se utiliza cada vez más para especificar los requisitos de las aplicaciones de computadora. Finalmente, en lo referente a las demostraciones de corrección, el cálculo de predicados nos permite especificar exactamente las condiciones en que los programas proporcionan respuestas correctas" [Grassman y Tremblay, 1997, p. 56].

b. "Quienes han vivido en el extranjero o han tenido extenso contacto con una cultura diferente a la propia, con seguridad han experimentado el hecho de que las verdades que sostenemos constituyen solamente una de muchas verdades posibles. Una forma interesante de proporcionar tal experiencia a los estudiantes es exponerlos a una variedad de prácticas culturales como en el controvertido currículo para estudios sociales de Jerome Bruner, *Man: A course of Study* (Bruner, 1966)" [Cunningham, Duffy & Knuth 1993, p. 21].

c. Sería absurdo sostener que algunos, entre los actores del conflicto armado en Colombia, son mejores o peores que otros. Al fin y al cabo, unos y otros desconocen permanentemente derechos humanos tan básicos como la libertad y el derecho a la vida, y unos y otros son culpables del alto número de desplazados y desarraigados de su tierra en nuestro país.

d. "Cooperativas y empresas de seguridad privada del país están dejando de aportar al estado entre 10.000 y 15.000 millones de pesos anuales, al no cumplir sus compromisos con el Sistema General de Seguridad Social.

   La denuncia la hizo ayer el senador Bernardo Guerra, que citó a la Comisión Séptima del Senado a un debate para indagar sobre las presuntas irregularidades que encontró la Superintendencia de Vigilancia y Seguridad Privada en la Cooperativa de Vigilantes de Antioquia (Coopevián), con 27 años de trayectoria y una de las más importantes del sector" [*El Tiempo,* 5 de mayo de 2004, p. 1-8].

e. "El Génesis dice que durante el Diluvio "... quedaron cubiertos todos los montes sobre la faz de la tierra...". Si se toma esto literalmente, resulta que la capa de agua sobre la tierra tendría entre 5.000 y 6.000 metros de grosor, lo que equivale a más de 2.500 millones de kilómetros cúbicos de agua. Como, según el relato bíblico, el Diluvio duró 40 días con sus noches, es decir, sólo 960 horas, la tasa de caída de la lluvia ha de haber sido por lo menos de 5 metros por hora, suficiente para echar a pique un avión y con mayor motivo un arca cargada con miles de animales a bordo.

   Darse cuenta de inconsistencias internas como ésas es uno de los placeres menores de tener cierta cultura numérica" [Paulos, 1988, p. 25].

4. En cada uno de los puntos a-f siguientes, califique la afirmación como verdadera o como falsa. Justifique su respuesta.

a. La lógica estudia el proceso del pensamiento en los seres humanos.

b. Es posible que un razonamiento válido tenga todas sus premisas falsas.

c. El razonamiento: Como todos los mamíferos tienen alas y todas las ballenas tienen alas, entonces, todas las ballenas son mamíferos, es válido.

d. La caracterización de los razonamientos deductivos como aquellos que "van de lo general a lo particular" es aplicable a todos los razonamientos de este tipo.

e. La afirmación "Toda mujer culta es atractiva" sostiene que "ser mujer culta" es una condición suficiente para "ser mujer atractiva".

f. Este razonamiento es válido: Las personas prudentes evitan los riesgos. Ningún banquero es imprudente. Luego, todo banquero evita los riesgos.

EJERCICIOS DE OPCIÓN MÚLTIPLE

Razonamiento, elementos generales

Instrucciones generales. Lea cuidadosamente los enunciados y seleccione la única respuesta u opción correcta en cada caso. No consulte respuestas individuales. En lugar de ello, anote sus respuestas en bloques de 10 y después compare con las respuestas que se proporcionan al final de los ejercicios.

1. La siguiente es una proposición, expresada mediante una frase interrogativa:

(A) ¿Me pasas la sal?

(B) ¡El que dejó abierta la ventana de mi biblioteca durante el huracán me las va a pagar!

(C) ¿Alguien duda de que las expectativas de la economía para el año 2007 son excelentes?

(D) ¿Hasta cuándo me vas a dejar aquí esperando?

(E) El prisionero escapó sobornando a dos guardas.

2. ¿Cuál de las siguientes es una proposición compuesta en la que aparece la proposición simple "se hospeda un financista con computador portátil"?

(A) La tarifa es reducida si se hospeda un viajero financista con computador portátil, un médico cardiólogo, o una anciana.

(B) La habitación es gratuita si se hospeda un miembro de la asociación Médecins Sans Frontières, o si la cuenta la paga un financista con computador portátil.

(C) Hoy se hospeda un financista con computador portátil.

(D) Entiendo su preocupación, pero esta noche no se hospeda un financista en el hotel.

(E) La habitación tiene un sobrecosto del 33% si se hospeda un gerente o presidente de una compañía transnacional, un campeón de un deporte olímpico, o un financista con computador portátil.

3. Todas las siguientes son proposiciones (aunque no estén expresadas como frases declarativas), <u>excepto</u>:

(A) Las personas de ojos verdes son, en promedio, más alegres que las personas de ojos azules.

(B) ¡El perro se está llevando las chanclas del abuelo otra vez!

(C) Roma fue fundada el 21 de abril del año 753 antes de la era común.

(D) Y, en últimas, ¿quién osa cuestionar la rectitud de Nuestro Líder Guillermo el Grande?

(E) ¿Al fin van a visitarme esta noche o mañana?

4. "Quien aspire a la presidencia debe haber cumplido 30 años como mínimo. Humberto ciertamente aspira a la presidencia, como puede inferirse del hecho de que tiene 40 años". La expresión subrayada en el argumento anterior es:
   (A) Una conclusión.
   (B) Un indicador de conclusión.
   (C) Una premisa.
   (D) Un indicador de premisa.
   (E) Un razonamiento.

5. "Para llegar al espacio, hay que creer en la eficacia de la ciencia. Si alguien cree en la eficacia de la ciencia, entonces es un Ilustrado. Es inevitable afirmar, entonces, que, dado que Lucio llegó al espacio, es un Ilustrado. Ahora, si alguien es Ilustrado, los demás Ilustrados son sus amigos. Dado que tú, papá, te identificas como un Ilustre Caballero en tus cartas, eres un Ilustrado. Un amigo permite que su hija se case con otro de sus amigos. En consecuencia, Lucio debe considerarse amigo tuyo, y tú debes permitir que me case con Lucio".

   De las siguientes partes del razonamiento anterior, ¿cuál es una conclusión intermedia?
   (A) Hay que creer en la eficacia de la ciencia.
   (B) Alguien cree en la eficacia de la ciencia.
   (C) Lucio llegó al espacio.
   (D) Tú, papá, eres un Ilustrado.
   (E) Tú debes permitir que me case con Lucio.

6. "No hay nada nuevo bajo el sol. Dado que el computador que te regalaron forma parte de las cosas que se encuentran bajo el sol, el computador que te regalaron no es nuevo". La expresión subrayada en el argumento anterior es:
   (A) Una conclusión.
   (B) Un indicador de conclusión.
   (C) Un síntoma de conclusión.
   (D) Una premisa.
   (E) Un indicador de premisa.
   (F) Un síntoma de premisa.
   (G) Un razonamiento.

7. "Si hubiéramos escalado la montaña, ya estaríamos en el pueblo. Pero no estamos en el pueblo. Eso quiere decir que no escalamos la montaña. Ahora, a las personas que no escalaron la montaña, les van a quitar el agua caliente esta semana. En consecuencia, nos van a dejar sin agua caliente esta semana".

De las siguientes partes del razonamiento anterior, ¿cuál es la conclusión intermedia?

(A) Si hubiéramos escalado la montaña, ya estaríamos en el pueblo.

(B) No estamos en el pueblo

(C) No escalamos la montaña

(D) A las personas que no escalaron la montaña, les van a quitar el agua caliente esta semana.

(E) Nos van a dejar sin agua caliente esta semana.

8. La siguiente es una frase interrogativa que, funcionalmente, es una proposición:

(A) ¿Quién quiere más helado?

(B) ¡Ni una gota de helado más para este niño!

(C) ¿Busca algún ser humano algo distinto a la felicidad?

(D) ¿Otra vez te vas a indigestar?

(E) ¡Qué angustia la que me genera el calentamiento global!

9. Considere el texto siguiente: "Supongamos que, como sociedad, de verdad nos vamos a comprometer con la causa de la liberación femenina. De ahí tendríamos que deducir el postulado de que, en nuestra sociedad, los sexos van a recibir un trato igual. En este momento es pertinente recordar que si existe la expectativa de que los miembros de uno de los dos sexos van a cubrir los gastos de los miembros del otro, no estamos ante trato igual entre los sexos. De las anteriores razones podemos inferir que, si pago la cuenta del restaurante esta noche, estaría atentando contra la causa de la liberación femenina". Sobre el texto anterior, es <u>correcto</u> afirmar que:

(A) No es un razonamiento.

(B) Las palabras "De las anteriores razones podemos inferir" constituyen un indicador de premisa.

(C) Las palabras "De ahí tendríamos que deducir" constituyen un indicador de premisa.

(D) Es un razonamiento verdadero.

(E) El razonamiento tiene una conclusión intermedia, y es: "en nuestra sociedad, los sexos van a recibir un trato igual".

10. ¿Por qué se justifica (como lo hace el texto guía, citando a Estanislao Zuleta) comparar la lógica con la gramática?

(A) Porque tanto la lógica como la gramática son lenguajes a los cuales nos referimos explícitamente siempre que pensamos.

(B) Porque es imposible hablar sobre la lógica, tanto como lo es hablar sobre la gramática.

(C) Porque ambas constituyen sistemas que subyacen muchas de nuestras actividades cotidianas, pero normalmente no nos referimos a ellas de manera directa.

(D) Porque la gramática es el cuerpo de reglas que explica el funcionamiento de la lógica, y la lógica es el cuerpo de reglas que explica la operación del lenguaje cotidiano.

(E) Porque ambas constituyen conocimientos con los cuales nacemos, pero que no podemos mejorar, expresar, ni estudiar.

11. ¿Cuál de las siguientes es una frase interrogativa que no debe ser entendida como una proposición?

(A) ¡El techo se está cayendo!

(B) ¿A quién se le ocurre decirle al Emperador que está desnudo?

(C) ¿Cuántos años tiene ella?

(D) ¿Acaso alguien prefiere trabajar que escribir poesía?

(E) ¡Dejen la bulla de inmediato!

12. ¿Cuál de las siguientes es una frase que no es declarativa pero puede entenderse como una proposición?

(A) Dios habla hoy.

(B) ¿"Acaso" se escribe con "s" o con "z"?

(C) ¡Soltaron el león!

(D) Los precios del petróleo subirán constantemente durante lo que resta del año.

(E) ¿Como aderezo para este plato prefiere salsa blanca, salsa napolitana, o vinagre balsámico?

13. ¿Cuál de las siguientes es una proposición compuesta, pero no es un razonamiento?

(A) Si encuentro mi lapicero, te escribo el cheque.

(B) En promedio las liebres viven dos meses más de lo que vivían hace cincuenta años.

(C) Simón Bolívar nació en Caracas; mi primo nació en Caracas; por lo tanto, mi primo es Simón Bolívar.

(D) Si recordamos que las temperaturas están subiendo, y que el honor se está perdiendo, no podemos sino concluir que en la medida en que la temperatura sube, la sociedad pierde su sentido del honor.

14. Considere el siguiente texto: "Dado que mañana es sábado, hoy tengo que lavar la ropa. Si tengo que lavar la ropa, no podemos ir a comer. Eso quiere decir que lastimosamente no podemos ir a comer". ¿Cuál de las siguientes es una afirmación correcta al respecto?

(A) La expresión “Dado que” es un conector dentro de una proposición simple.

(B) La expresión “Dado que” es un indicador de premisa.

(C) El razonamiento es deductivo válido, pero la conclusión no se deriva inevitablemente de las premisas.

(D) El razonamiento es deductivo válido, porque las premisas se derivan necesariamente de la conclusión.

(E) La expresión “Eso quiere decir que” es un indicador de premisa.

15. ¿Cuál de las siguientes opciones muestra un razonamiento con una premisa implícita, y además identifica, en paréntesis, la premisa implícita correcta?

(A) La lluvia debe detenerse de inmediato, si queremos llegar a tiempo al cine. (Premisa implícita: Si alguien no quiere llegar al cine a tiempo, es necesario que no llueva).

(B) Dado que es martes, y dado que los martes juega la Lotería del Pacífico, hoy me gano la lotería. (Premisa implícita: Es necesario comprar el martes la boleta de la Lotería del Pacífico para ganarla).

(C) No vas a ganar en las próximas elecciones, porque has vivido mucho tiempo fuera del país. (Premisa implícita: Alguien que ha vivido mucho tiempo fuera del país no ganará las próximas elecciones).

(D) Tú eres alto, y numerosos estudios han demostrado que, en una proporción que no se corresponde con su número dentro de la población general, las personas altas ocupan cargos directivos en las empresas. (Premisa implícita: Tú vas a ocupar un cargo directivo).

(E) Ni el mejor de los computadores actuales puede procesar el número total de juegos de ajedrez, que se estima en 10^{128} juegos posibles. (Premisa implícita: El ajedrez consta de 10^{128} posibilidades de juego).

16. Considere el siguiente texto: “Si hay otro bajón en el flujo eléctrico, el transformador del edificio estallará. Si el transformador estalla, dejaremos de tener electricidad en el apartamento. Si no tenemos electricidad aquí, se apagará el computador, haciéndonos perder por esa razón toda la información. Acabo de notar que está empezando otro bajón en el flujo eléctrico; eso quiere decir que vamos a perder la información”. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones sobre este texto es correcta?

(A) El texto no es un razonamiento, dado que no tiene una conclusión identificable.

(B) El texto es un razonamiento, porque las premisas se desprenden de la conclusión.

(C) El razonamiento es verdadero, dado que, si un computador se queda sin electricidad, efectivamente se pierde la información que no haya sido guardada.

(D) El razonamiento es válido, por su estructura, pero no tenemos suficiente información para decir si sus proposiciones son verdaderas o falsas.

(E) El razonamiento es inválido, porque es falso que un sencillo bajón en el flujo eléctrico vaya a provocar la explosión de un transformador.

17. Podemos considerar que cada una de las siguientes es una proposición, excepto:

(A) Con la toma de la Bastilla empezó la Revolución Francesa en 1789.

(B) ¿Quién cuestionaría hoy en día el fenómeno de la evolución?

(C) ¿Es que acaso alguien cree que puede vivir por fuera de las leyes del mercado?

(D) ¡El calor en este cuarto es insoportable!

(E) ¡No se me vaya a acercar!

18. Considere este razonamiento: "Para empezar, los cerdos son animales muy inteligentes. Además, aprenden con mucha facilidad a ser aseados. Como si esto fuera poco, es muy económico preparar dietas balanceadas para cerdos. Para terminar, no tienen garras ni colmillos que dañen muebles o tapetes. ¿Cómo podremos negar, entonces, que los cerdos son las mejores mascotas?".

¿Cuál es la conclusión del razonamiento anterior?

(A) Los cerdos son animales muy inteligentes.

(B) Los cerdos aprenden con mucha facilidad a ser aseados.

(C) Es muy económico preparar dietas balanceadas para cerdos.

(D) Los cerdos no tienen garras ni colmillos que dañen muebles o tapetes.

(E) Para terminar.

(F) Los cerdos son las mejores mascotas.

19. Considere este razonamiento: "Te voy a dar tres razones en defensa de mi idea: primero, no hay manera de ayudar a alguien que sufre de intenso dolor; segundo, la ausencia de dolor es un requisito mínimo para que cualquiera de nosotros pueda ser un verdadero agente moral dentro de la sociedad; y tercero, algunas personas sufren de dolor sin que haya en sus vidas algo que lo justifique o lo explique. Estas razones me permiten afirmar que la vida de las personas con dolor riñe con la idea de un dios justo y activo. A partir de lo que acabo de señalar, es posible aseverar que si alguien sufre dolor, no hay dioses justos y activos".

En el razonamiento anterior, el siguiente es un indicador de conclusión:

(A) Te voy a dar tres razones en defensa de mi idea.

(B) Primero.

(C) Y tercero.

(D) Estas razones me permiten afirmar que.

(E) Si alguien sufre dolor, no hay dioses justos y activos.

20. ¿Cuál de los siguientes es un razonamiento deductivo?

(A) "Si juego fútbol, me canso. Puedo afirmar esto porque, durante el último mes, me he cansado cada vez que he jugado fútbol".

(B) "Todo malabarista le ha rezado a un ser superior en algún momento. Mario es un malabarista. ¿Acaso no podemos estar seguros de que le ha rezado a un ser superior en algún momento?".

(C) "Anoche metí las monedas en la máquina, y se me las tragó. Esta mañana, cuando más necesitaba café, metí las monedas, y se me las tragó. ¡Esta máquina está dañada!: cada vez que uno le mete monedas, se las traga".

(D) "Las llamas de la chimenea han estado muy azules últimamente. Ah, verdad que si uno usa carburantes a base de alcohol, las llamas resultantes serán azules. Claro, debe ser que han estado usando carburantes a base de alcohol".

(E) "Martín es de las personas más pacientes que conozco. ¿Cómo se me había olvidado que los anémicos se caracterizan por pasar por personas en exceso pacientes? Obviamente, Martín es anémico".

Respuestas a los ejercicios de opción múltiple

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
C	E	E	A	D	E	C	C	E	C	C	C	A	B	C	D	E	F	D	B

1.6 RAZONAMIENTOS INDUCTIVOS

1.6.1 Elementos generales

En la sección anterior dijimos que en el razonamiento deductivo se transmite la idea de que la conclusión se desprende inevitablemente de las premisas; de que está garantizada por ellas. Como veremos pronto, en el razonamiento inductivo no se afirma tácitamente que las premisas dan evidencia terminante de la conclusión; sólo se pretende que la apoyan en mayor o menor grado. Veremos también que este mayor o menor grado de apoyo a la conclusión es un criterio para clasificar un argumento inductivo como **fuerte** o como **débil.**

Supongamos que usted constata que uno y otro y otro miércoles, aparentemente sin excepción, el plato principal del almuerzo en la cafetería de su universidad es espagueti. Entonces decide que no seguirá almorzando los miércoles en la cafetería porque "los miércoles sirven espaguetis", y a usted no le gustan (o que seguirá almorzando los miércoles en la cafetería, porque "los miércoles sirven espaguetis" y a usted le encantan). Esta situación es un ejemplo de r**azonamiento inductivo.** Utilizando la misma terminología que se usó con el razonamiento deductivo, diríamos que este caso corresponde al esquema "inferencia de la regla, a partir del caso y del resultado".

Caso (reiterado): Es miércoles.

Resultado (reiterado): Sirven espaguetis en el almuerzo.

Regla: Los miércoles sirven espaguetis en el almuerzo.

Esta clase de inducción generalmente se da así: Se observa un patrón, una regularidad de resultados para repeticiones del mismo caso y, sobre la base de tal regularidad, se infiere la regla. Por ejemplo, si en épocas diferentes Pedro, María y Antonio le prestaron dinero a Juan, y este no les pagó, posiblemente concluyo, razonando inductivamente, que si le presto dinero a Juan, no me lo pagará. Estos son ejemplos de un tipo muy común de razonamiento inductivo, llamado **generalización inductiva por enumeración** o **generalización por enumeración**.

En la práctica son excepcionales las situaciones en las que se hace inferencia de la regla a partir de un solo caso y su resultado. (Seguramente usted no necesitó vivir varias veces la experiencia de quemarse al tocar sin protección objetos calientes, para inferir una regla como: "Tocar un objeto caliente puede ocasionar quemaduras").

Con relación al valor de la inducción se ha dicho que "Para Aristóteles, la inducción es un razonamiento que permite pasar de lo particular a lo general. Es decir, que la inducción es la operación lógica que se utiliza para generalizar la experiencia" [Ibarra 1994, p. 208]. Esta cita puede complementarse anotando que la inducción permite aprender de la experiencia y que esta es una forma de aprendizaje que practicamos durante toda la vida. Con la experiencia aprendimos que los objetos calientes pueden quemarnos, que el agua moja, que el abuso del licor conduce a la embriaguez, que la ira es enemiga de la sensatez, que la violencia genera más violencia (aun cuando algunas veces genere sumisión), etc. Es un hecho, además, que el razonamiento inductivo es de gran valor en las ciencias físicas y naturales. Típicamente, se llega a los principios científicos mediante generalización a partir de un número limitado de experiencias en las cuales los casos y los resultados permiten identificar patrones estables. (Piense, por ejemplo, en cómo se llegan a establecer las formas de contagio de enfermedades transmisibles).

¿Ha oído alguna vez la expresión "Este es un caso que confirma la regla"? En caso tal, ¿sabe de qué regla se habla? De la regla que dice: "Toda regla tiene su excepción". Es el reconocimiento de que la regla general inferida en un razonamiento inductivo carece de la certeza o inevitabilidad del resultado inferido en los razonamientos deductivos válidos y de que, por lo tanto, es posible que haya casos que escapan a la conclusión: algún miércoles pueden no servir espaguetis; bien puede suceder que Juan sí me pague el préstamo, etc. **Si uno olvida que puede haber casos no cobijados por la regla, el**

razonamiento es débil y la inducción incorrecta. En el caso de inferencias sobre personas o grupos humanos, se cae frecuentemente en generalizaciones injustas y desconsideradas de la forma "¡Todos los... son unos...!" (usted puede llenar los espacios). Se trata de generalizaciones inductivas por enumeración, que atribuyen a todo un grupo humano un calificativo, por desgracia generalmente denigrante, con base en comportamientos negativos (o que así nos lo parecen) de algunos de sus miembros.

De todas maneras, en las inferencias inductivas existe un escudo protector contra el error de la generalización incorrecta. Consiste en hacer explícito el alcance limitado de la conclusión, precediéndola de expresiones como "generalmente", "casi siempre", "probablemente", "posiblemente", u otras equivalentes. Si en el ejemplo de los espaguetis la conclusión se enuncia como "Dado que es miércoles posiblemente (muy posiblemente) (casi con seguridad) servirán espaguetis", la conclusión está más cerca de ser verdadera que falsa. En cambio si la conclusión se expresa como una certeza: "Dado que es miércoles servirán espaguetis", la conclusión está más cerca de ser falsa que de ser verdadera puesto que es suficiente que tan sólo un miércoles no sirvan espaguetis —lo cual es altamente posible— para que la conclusión sea falsa. En su momento hablaremos de "la fuerza" de un argumento inductivo y de la incidencia de expresiones como "generalmente", "casi siempre", "probablemente", "posiblemente", u otras equivalentes, en la fuerza del argumento. Digamos, por el momento, que un argumento inductivo es más fuerte o menos fuerte, según que la conclusión esté más cerca o menos cerca de ser verdadera. Veamos un ejemplo adicional: suponga que una periodista acreditada ante el Palacio de Gobierno conoce a la mayoría de los asesores del Presidente de la República —pero no a todos— y sabe que todos los que conoce militan en partidos políticos tradicionales. Entonces, si cuando le presenten a un asesor presidencial de los que no conocía, prejuzga, basada en su conocimiento anterior, que "el asesor milita en alguno de los partidos políticos tradicionales", el argumento es débil; tiene menos fuerza que si infiere, correctamente, que "**posiblemente** el asesor milita en alguno de los partidos políticos tradicionales".

A la manera de los indicadores de premisa o de conclusión, el término "**posiblemente**", utilizado en el razonamiento del ejemplo anterior es, con frecuencia, un indicador de razonamiento inductivo. También lo son las expresiones, "es posible que…", "es probable que…", "es razonable creer que… (esperar que)". Pero, independientemente de la presencia o no de estos términos, los razonamientos inductivos se caracterizan porque no afirman que la conclusión se deriva necesariamente de las premisas, sino que de la verdad de estas, real o aceptada, es razonable inferir que, en alguna medida, la conclusión es verdadera. Si el soporte que las premisas le dan a la conclusión la hace estar más cerca de ser verdadera que de ser falsa, el razonamiento inductivo es **fuerte**. Pero si el soporte que le dan las premisas a la conclusión es pobre y poco sólido y la hace estar más cerca de ser falsa que de ser verdadera, el razonamiento inductivo es **débil.**

Digamos finalmente que, a diferencia de lo que sucede en los razonamientos deductivos, en los argumentos inductivos la información adicional pertinente, o la verificación del resultado para nuevos casos, puede afectar la aceptación o credibilidad de la regla inferida. Si es cierto que “Casi todos los representantes de la región X se opondrán a la enmienda sobre transferencias a las regiones” y se sabe que “NN es un representante de la región X” entonces es correcto inferir, inductivamente, que “posiblemente NN se opondrá a la enmienda”. Pero si hay información adicional según la cual el representante NN es opositor político del proponente de la enmienda, esta nueva premisa mejora la posibilidad de que la conclusión sea verdadera, pues indica un hecho que incrementa la posibilidad de que NN se oponga a la enmienda.

En las secciones siguientes se presentan otras dos formas de razonamiento inductivo: generalización inductiva (o generalización estadística) y argumentación por analogía. Como veremos, lo importante en cada argumento inductivo es su **fuerza**, o sea la intensidad con la cual las premisas contribuyen a hacer verdadera la conclusión. **La fuerza** de un argumento inductivo es, pues, una valoración de qué tan probable es que la conclusión sea verdadera, si se acepta que las premisas también lo son. Sin embargo, es necesario mencionar que, a diferencia de lo que sucede con los argumentos deductivos**, no existe un criterio decisorio que aplicado a un argumento inductivo permita calificarlo inequívocamente como fuerte o como débil.** La calificación depende, en buena parte, de la capacidad de quien lo usa (lo recibe o lo lee), para encontrarle aspectos que le comunican fuerza o se la restan. En muchos casos, esta capacidad es producto de la experiencia, de la información disponible para el análisis, o de circunstancias particulares de quien analiza el argumento.

1.6.2 Generalización inductiva

La generalización inductiva, más comúnmente conocida como **generalización estadística**, es un tipo de argumento inductivo en el que se extiende, a la totalidad de una población, el resultado de una observación hecha en una parte de la misma. Consideremos este argumento:

Ejemplo 1.30 Seis de ocho alcaldes participantes en un foro regional tienen estudios de posgrado. Por lo tanto 75% de los 1099 alcaldes del país tienen estudios de posgrado.

El resultado de una observación, 6 alcaldes con estudios de posgrado entre los 8 alcaldes participantes en el foro regional, es decir, el 75% de los alcaldes participantes, se generalizó a la totalidad de los alcaldes del país.

Cuando se utiliza con propósitos investigativos, la generalización inductiva procede a sacar conclusiones sobre la población total bajo estudio, a partir de los resultados observados en sólo una parte de ella. A esta parte de la población se le conoce como **muestra poblacional.** La determinación del tamaño apropiado de la muestra y de qué tan fielmente ella representa la población total son aspectos fundamentales para juzgar la fuerza de una generalización estadística. Sin embargo, el tratamiento cuantitativo de lo referente a tamaño y representatividad de una muestra excede los propósitos de este libro; por lo tanto, nuestra aproximación será informal e intuitiva.

Retomemos el ejemplo anterior: “Seis de ocho alcaldes participantes en un foro regional tienen estudios de posgrado. Por lo tanto 75% de los 1099 alcaldes del país tienen estudios de posgrado”.

¿Qué podemos decir sobre la fuerza del argumento? ¿La posibilidad de que la conclusión sea verdadera es más alta que la posibilidad de que sea falsa? ¿Es al revés? Veamos por qué la posibilidad de que la conclusión sea falsa es mucho más alta que la posibilidad de que sea verdadera: El enunciado de la conclusión es taxativo; no da lugar a discusión: “**El 75%** de los alcaldes del país tiene estudios de posgrado”. Esto hace que cualquier diferencia, por mínima que sea, entre el número real de alcaldes con estudios de posgrado y el 75% del total de los alcaldes del país, haga falsa la conclusión. Por lo tanto, se trata de una generalización inductiva débil.

La debilidad del argumento se hace también manifiesta en el tamaño de la muestra y en su no representatividad. En primer lugar, el número de municipios del país considerado es 1099 y por lo tanto una muestra de tamaño 8 no es suficiente para justificar ninguna conclusión. En segundo lugar, porque el carácter regional del foro permite suponer que los 8 alcaldes no representan la diversidad de regiones y circunstancias propias de una población total de 1099 alcaldes del país. En particular, podría tratarse de 8 alcaldes de una región con una oferta particularmente alta de programas de posgrado, por parte de universidades de la misma región.

Ejemplo 1.31 Supongamos ahora que el resultado se observa en 30 de 40 alcaldes: “30 de 40 alcaldes participantes en un foro regional tienen estudios de posgrado. Por lo tanto 75% de los 1099 alcaldes del país tienen estudios de posgrado”. El porcentaje continúa siendo del 75% pero el argumento, que sigue siendo débil por la forma de enunciar la conclusión, tiene más fuerza que el anterior porque ahora es mayor el tamaño de la muestra. Es decir, aumentar el tamaño de la muestra en una generalización inductiva puede mejorar la fuerza del argumento. Sin embargo, hacerlo no garantiza que la muestra sea representativa. En efecto, todavía los 40 alcaldes corresponden a municipios de una misma región y la conclusión sigue generalizada a los 1099 alcaldes del país, presumiblemente formado por múltiples regiones con diferencias étnicas y socioeconómicas notorias. La muestra sigue sin ser representativa. En el ejemplo anterior, la conclusión se ha expresado en forma numérica; más precisamente, en forma porcentual. Pero esto no es siempre así. Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 1.32 Ninguno de los computadores FGH de mi sección ha fallado durante el primer año de uso. Entonces, es muy posible que ningún computador FGH falle durante el primer año de uso.

Este es una generalización inductiva débil. Si no se indica cuántos computadores FGH se utilizan en la referida sección, no está justificado el énfasis en la posibilidad —"muy posible"— de que no se presenten fallas en ningún computador de esa marca durante el primer año.

Ejemplo 1.33 Ninguno de los 15 computadores FGH de mi sección ha fallado durante el primer año de uso. Entonces, ningún computador FGH fallará durante el primer año de uso.

Aunque en este caso se ha precisado el número de computadores en que se fundamenta la conclusión, la generalización inductiva sigue siendo débil, por el nivel de precisión que se ha dado a la conclusión: "ningún computador FGH fallará durante el primer año de uso". Evidentemente, expresada de tal manera, la conclusión está más cerca de ser falsa que de ser verdadera. En efecto, es suficiente que falle un computador FGH durante el primer año de uso, para que la conclusión sea falsa.

Consideremos una variación más del argumento:

Ejemplo 1.34 Ninguno de los 15 computadores FGH de mi sección ha fallado durante el primer año de uso. Entonces, es razonable esperar que pocos computadores FGH fallen durante el primer año de uso.

Ahora la generalización inductiva es fuerte: En efecto, el margen de posibilidad de que la conclusión sea verdadera es amplio, dada la evidencia de ninguna falla en el total de 15 computadores FGH de la sección.

En los capítulos 2 y 3 veremos que, al analizar un razonamiento deductivo para decidir sobre su validez, todos debemos llegar a una misma conclusión, si el criterio de validez se aplica correctamente. Desafortunadamente, y como se anotó en el último párrafo de la sección 1.6.1, no existen **criterios bien definidos** para calificar una generalización inductiva como fuerte o como débil, o para establecer su valor en el continuo entre fuerte y débil. No obstante [Bassham, p. 309], sí existen ciertos parámetros que **ayudan** a decidir entre fuerte y débil, y que se obtienen de responder tres preguntas principales:

- ¿Son verdaderas las premisas?
- ¿El tamaño de la muestra es apropiado?
- ¿La muestra es representativa?

En la sección siguiente nos referimos brevemente a estos parámetros. Una presentación más detallada puede consultarse en el texto mencionado [Bassham, p. 309].

1.6.3 Sobre la verdad de las premisas

Es natural esperar que las premisas de todo argumento sean verdaderas. De hecho, el análisis de todo argumento parte del supuesto de que las premisas son verdaderas y en tal supuesto se fundamenta la conclusión. Por lo demás, los calificativos de "**convincente**" o "**sólido**" (en el sentido de "probado de tal manera que racionalmente no se puede negar") se reservan para los argumentos deductivos válidos cuyas premisas son verdaderas, y para los argumentos inductivos fuertes, cuyas premisas son verdaderas. Y es que el proceso deductivo puede ser impecable; las premisas pueden apoyar con mucha fuerza la conclusión; pero si alguna de las premisas es falsa, el razonamiento no convence. Considérese, por ejemplo, el argumento "Juan Pérez ha escalado el Everest. Porque es alpinista, y todos los alpinistas han escalado el Everest". Este argumento tiene una estructura deductiva correcta; es válido. Pero la afirmación "Todos los alpinistas han escalado el Everest" es falsa. Por lo tanto, aunque formalmente válido, el argumento no es convincente. Situaciones análogas pueden presentarse en la generalización inductiva. "Casi todos los estudiantes de esta universidad obtienen una calificación superior al 80% en sus cursos de matemáticas. Por lo tanto, casi todos ellos finalizan la mayoría de sus cursos con una calificación superior al 80%". Se trata de una generalización inductiva fuerte porque las estadísticas de la Universidad muestran que el promedio de las calificaciones en los cursos de matemáticas es menor que en las otras áreas y entonces, si en matemáticas es del 80%, en las otras áreas será mayor. No obstante, si la afirmación "Casi todos los estudiantes de esta universidad obtienen una calificación superior al 80% en sus cursos de Matemáticas" es falsa, el argumento inductivo no es convincente, pese a ser fuerte.

Nada puede ser más lesivo para la eficacia de un argumento real que detectar, descubrir o establecer falsedad en alguna de sus premisas: GIGO es un acrónimo de *"Garbage in, garbage out"*, aforismo muy conocido entre los programadores de computadores, y que equivale en español a "entra basura, sale basura". Aplicado a la argumentación, destaca la poca o ninguna importancia que merece una conclusión justificada con premisas falsas o una decisión extraída de datos falsos. Las consideraciones anteriores justifican la insistencia en la necesidad de revisar críticamente las premisas de los argumentos propios y ajenos, para utilizar y aceptar sólo aquellas de cuya verdad podemos tener una razonable certeza, bien sea por experiencia directa, o por autoridad legítima, o por testimonio u otras fuentes, o porque se trata de una verdad establecida, y compartida por nuestra audiencia. Poco valor tiene, por ejemplo, una conclusión que se fundamente en mi aseveración de que la deserción universitaria en los estudiantes de Matemáticas y Ciencias es muy alta comparada con la de los estudiantes de Administración y Economía, si no dispongo de datos o estudios que me permitan respaldar dicha afirmación. A propósito, en el caso particular de las generalizaciones inductivas es frecuente, como defensa contra una posible inexactitud, emplear cuantificaciones aproximadas como "la mayor parte", "casi todos", "casi ninguno", "muy pocos" y otras similares. Pero, si bien lo aproximado de ellas es una defensa contra la falsedad o la inexactitud, no puede ignorarse que tienen equivalentes numéricos, así sean también aproximados: "la mayor parte de" indica más del 50%; "casi todos", un valor no inferior al 90%, etcétera.

1.6.4 Sobre el tamaño de la muestra

Lo que se busca con un tamaño "apropiado" de la muestra es que ella sea suficiente para extender la conclusión del estudio a la población total, sin caer en el error conocido como "generalización apresurada". Cuando se trata de estimar algún parámetro poblacional, por ejemplo el porcentaje de pacientes que responderán positivamente a un tratamiento X o la proporción de sufragantes que votarán por el candidato N, se lleva a cabo un estudio estadístico que incluye la determinación del tamaño de la muestra, para unas especificaciones de precisión deseadas que se conocen como **margen de error y nivel de confianza (o confiabilidad)**. Estos parámetros se utilizan para establecer el tamaño de la muestra, aplicando fórmulas desarrolladas con ese propósito. Sin embargo, lo usual en la argumentación cotidiana es generalizar a partir de observaciones circunstanciales que no obedecen a un estudio previamente diseñado. En estos casos, y ante la ausencia de algo mejor, el tamaño de la muestra se juzga como "adecuado" o "suficientemente grande" apelando al sentido de lo razonable, pese a lo subjetivo de este criterio.

Ejemplo 1.35 Nueve de los 12 estudiantes egresados de colegios oficiales y que ingresaron a la universidad X el semestre pasado provienen de familias de estrato socioeconómico cuatro. Entonces el 75% de los estudiantes de colegios oficiales proviene de familias de estrato cuatro.

Es claro que la conclusión obtenida de los resultados observados en solamente 12 estudiantes, de una población de miles de estudiantes, no puede ser extendida a la población total. El argumento incurre en el error o falacia de la "generalización apresurada", conocida también como "falacia de la muestra insuficiente". Es el error que se comete cuando se generaliza, a toda una población, una conclusión obtenida en una muestra que no es lo suficientemente grande.

1.6.5 Sobre la representatividad de la muestra

La muestra del ejemplo anterior no sólo es insuficiente sino que no es representativa, por cuanto no presenta muchas de las características relevantes de la población, que es la totalidad de estudiantes de colegios oficiales. Pudiera pensarse que un aumento en el tamaño de la muestra está ligado a un aumento en la representatividad de la misma, lo cual frecuentemente es cierto, pero no suficiente. Se requiere que se cubran nuevas características relevantes de la población, a medida que se aumenta la muestra. Por ejemplo, en un estudio sobre deserción universitaria nada se gana en representatividad si se toman muestras sucesivamente más grandes, pero sólo de universidades oficiales, o sólo de universidades privadas, o sólo de un mismo programa de estudios o carrera, dada la amplia diversidad de características de la población universitaria: sexo, estrato socioeconómico, carrera, universidad, raza, etc. Sin embargo, cuando la población es muy homogénea, el tamaño de la muestra puede no ser importante. Los profesores de Estadística acostumbran ilustrar esta afirmación indicando que es suficiente la extracción de sólo una gota de sangre como muestra, para medir los niveles de insulina; o probar sólo un sorbo de sopa, para saber qué tan salada está.

Por lo demás, el tema de la representatividad de una muestra es de fundamental importancia en las **encuestas de opinión**. Estos son procesos de generalización inductiva con los cuales se busca determinar qué piensa o cree una población grande sobre un tema determinado, formulando las preguntas pertinentes no a cada miembro de la población, sino a una muestra que es suficientemente grande y representativa de la población total. Seguramente para usted son muy conocidas, entre otras, las encuestas sobre "intención de voto" que contratan los medios de comunicación de los países en la época de las elecciones presidenciales, y las encuestas de mercadeo para el lanzamiento de nuevos productos o para medir el nivel de satisfacción con productos ya existentes en el mercado.

Ejemplo 1.36 Se aproximan las elecciones para alcaldes municipales y el señor X es uno de los candidatos en una ciudad de 10.000 habitantes hábiles para votar. Los encargados de la campaña del candidato contratan una firma consultora para que haga un estudio sobre la intención de voto de los habitantes de la ciudad. La idea es que los resultados indiquen si es o no necesario revisar las estrategias de la campaña. Dados los altos costos de realizar un censo, se opta por conseguir la información a través de un muestreo poblacional. Después de que la empresa consultora presenta varias alternativas sobre confiabilidad y margen de error, el candidato se decide por un estudio con una confiabilidad de 95% y un margen de error de 10%.

Objetivo del estudio: Estimar, con una confiabilidad de 95% y un margen de error de 10%, el porcentaje de personas hábiles para votar que tienen la intención de votar por el candidato X y, basados en el resultado, decidir si se requiere o no revisar las estrategias de campaña.

El tamaño de la muestra: **96** ciudadanos. Se determinó a partir de las especificaciones de margen de error y confiabilidad, aplicando la fórmula correspondiente. En cuanto a representatividad, el grupo consultor determinó que la ciudad podía dividirse en 3 zonas, conformadas por habitantes con características similares en cada zona. Por esta razón, para asegurar la representatividad de la muestra, su tamaño fue distribuido proporcionalmente al número de habitantes de cada zona. Finalmente, la aplicación de la encuesta dio como resultado que 59 de los 96 encuestados pensaban votar por el candidato X.

Con el resultado anterior, la empresa consultora presentó el siguiente informe al equipo asesor del candidato:

"El estudio muestra que 61.4% **de los encuestados** tienen la intención de votar por el señor X. Los parámetros del estudio fueron: Tamaño de la muestra: 96. Confiabilidad: 95%. Margen de error: 10%. Para el caso, la aplicación de los parámetros produce estos resultados:

1. El margen de error de 10% significa que **el verdadero porcentaje** de la intención de voto a favor del candidato deberá estar entre el 51.4%, (61.4 – **10**)%, y el 71.4%, (61.4 + **10**)%.

2. Una confiabilidad de 95% significa que si se tomaran muchas muestras diferentes, todas de tamaño 96, en el **95%** de tales muestras el porcentaje de votantes a su favor estaría entre el 51.4% y el 71.4%".

Con el resultado anterior, el candidato X y sus asesores de campaña decidieron que no era necesario reajustar la estrategia de campaña porque se tenía una probabilidad muy alta, 95%, de ganar las elecciones. Esto porque, según las encuestas, en el 95% de los casos su votación sería por lo menos del 51.4%.

1.6.6 Sobre la presentación de los resultados

Una vez definido el propósito del estudio de opinión, la entidad o persona responsable del estudio define el tamaño de la muestra y el tipo de encuesta (personal, telefónica, por correo), teniendo presentes las ventajas y limitaciones de cada tipo. Después del procesamiento estadístico de los datos se dan a conocer los resultados, acompañados casi siempre de información sobre algunos detalles del diseño: tamaño de la muestra, forma de recolección, margen de error, etc. Es precisamente en el análisis de la presentación, y en la interpretación y uso de los resultados, donde los lectores y los usuarios tienen que aplicar su espíritu crítico, pues si bien es sano presumir siempre la "buena fe" de los estudios, también es cierto que a veces los resultados son presentados, premeditadamente o no, en formas que pueden generar confusión o engaño. No en vano se afirma que "La estadística dice que si usted posee dos carros y yo ninguno, en promedio tenemos uno cada uno", frase atribuida a George Bernard Shaw, escritor irlandés (1856-1950). A este respecto, se recomienda con frecuencia el libro *How to Lie with Statistics*, de Darrel Huff. Con ejemplos reales, el autor ilustra situaciones en las que el diseño equivocado de las preguntas de una encuesta conduce a resultados contrarios a la realidad, y situaciones en las que un cambio en la escala numérica de una gráfica o diagrama, o inclusive la ausencia de escala numérica, produce cambios sustanciales en la percepción de los resultados por parte del lector. Naturalmente, el libro tiene el propósito de destacar la importancia de analizar en forma crítica los resultados de los estudios estadísticos, y no el de generar resistencia o rechazo a las generalizaciones estadísticas, cuya utilidad es incuestionable.

Esperamos que el ejemplo siguiente ilustre las ideas del párrafo anterior, para el caso de uno de los parámetros estadísticos más utilizados en la presentación de datos cuantitativos: la media o promedio aritmético.

Ejemplo 1.37 La tabla siguiente muestra la distribución de salarios mensuales, en pesos, de una pequeña empresa con 12 empleados:

1 — 600.000=	7 — 2.000.000=
2 — 600.000=	8 — 2.300.000=
3 — 700.000=	9 — 2.400.000=
4 — 700.000=	10 — 2.400.000=
5 — 700.000=	11 — 2.400.000=
6 — 700.000=	12 — 2.500.000=

La media o promedio aritmético, que resulta de dividir la suma de salarios, 18.000.000=, entre 12, es $1.500.000=. ¿Qué tanto informa sobre la distribución de los salarios? En realidad, no mucho en este caso. Para empezar, ninguno de los empleados tiene un salario igual a este promedio; es más, seis empleados tienen su salario muy por debajo de este promedio, y los otros seis muy por encima del mismo. Obviamente, en el extremo están la frase atribuida a G. B. Shaw o la parodia de la misma según la cual si su familia dispone de dos pollos para el almuerzo y la mía de ninguno, en promedio disponemos de un pollo para el almuerzo.

1.6.7 Argumentos por analogía

Un argumento (o razonamiento) por analogía es una forma de razonamiento inductivo basado en la existencia de atributos semejantes en seres o cosas diferentes. El ejemplo siguiente es una excelente ilustración al tema [Copi & Cohen 1998, p. 444]:

> "Podemos observar un gran parecido entre la Tierra que habitamos y los otros planetas, Saturno, Júpiter, Marte, Venus y Mercurio. Todos ellos giran alrededor del Sol, lo mismo que la Tierra, aunque a diferentes distancias y con distintos períodos. Todos toman su luz del Sol, al igual que la Tierra, y debido a esto se debe presentar una sucesión similar de día y noche. Algunos de ellos tienen lunas, las cuales les dan luz en ausencias del Sol, como lo hace nuestra Luna para nosotros. En sus movimientos todos ellos están sujetos a la misma ley de gravitación que la Tierra. A partir de esta similitud no es irrazonable pensar que los planetas pueden, como la Tierra, estar habitados por diversas órdenes de criaturas vivientes. Hay cierta probabilidad en esta conclusión obtenida por analogía".

Como puede apreciarse en el texto anterior, en un argumento por analogía se parte de la similitud observada entre dos situaciones (situaciones análogas) y se concluye, por analogía, que alguna característica **adicional** de una de ellas también debe estar (o es posible que esté) presente en la otra.

El argumento por analogía es una de las primeras y espontáneas técnicas argumentativas desde la niñez: "¿Por qué no puedo quedarme a dormir en casa de Andrés si a todos los demás niños de mi salón sí los dejan?" El argumento es claro: "Yo soy como los otros niños de mi salón" (Afirmación respaldada con razones de edad, colegio, estar en el mismo grado y salón, compartir los mismos juegos, etc.). "A los otros niños de mi salón se les permite quedarse a dormir en la casa de Andrés. Por lo tanto, debe permitírseme quedarme a dormir en la casa de Andrés". Se trata de una experiencia temprana con la forma argumentativa "**X es B. Porque X es como A, y los A son B**", llamada precisamente "argumentación por analogía". Naturalmente, la fuerza de un argumento específico de esta forma depende de en qué medida son ciertas las premisas: "X es como A" y "los A son B".

La argumentación por analogía es una de las formas más frecuentes de razonamiento inductivo. Razonamos por analogía cuando decidimos comprar un artículo en determinado almacén porque fueron de buena calidad todos los artículos que compramos anteriormente allí mismo. "Este artículo (X) será de buena calidad (B). Porque (X) proviene de este almacén, del cual provinieron los A (En este sentido X es como los A). Y los A resultaron de buena calidad (los A son B)". También razona por analogía el padre de familia que elige una institución escolar para sus hijos, con base en las recomendaciones de sus amigos, etcétera.

Veamos cómo se presenta el argumento por analogía en un esquema formal:

1. Una situación, S, presenta ciertas características, digamos A, B, C y D.
2. Otra situación, R, es similar a S en cuanto presenta las características A, B y C.
3. Conclusión: La situación R tiene (es posible que tenga) (debe tener) también la característica D.

Dos ejemplos adicionales, como ilustración:

1. Las autoridades atribuyen la autoría de un determinado delito a un grupo específico, razonando por analogía y a partir del conocimiento del *modus operandi* del grupo.
2. Este ejemplo pone de presente la desafortunada costumbre de razonar por analogía en un aspecto tan delicado como es la salud: Juan tuvo dolores abdominales, acidez, indigestión y vómito. El médico le prescribió antiácidos, después de diagnosticarle úlcera péptica. Pedro tuvo dolores abdominales, acidez, indigestión y vómito, y Juan le recomendó los mismos antiácidos que le había prescrito el médico. Pero lo que Pedro tenía era cálculos en la vesícula, y la recomendación de Juan casi lo mata.

Como todo razonamiento de tipo inductivo; el razonamiento por analogía no afirma, ni tácita ni explícitamente, que la conclusión es consecuencia necesaria de las premisas; sólo pretende que es razonable creer que la conclusión es verdadera, con las premisas como fundamento de tal creencia. ¿Qué podemos decir con relación a la eficacia de un argumento por analogía? Como todo razonamiento inductivo, el razonamiento por analogía puede ser fuerte o débil. La clasificación depende de que se cumplan o no ciertas condiciones:

1ª Que las premisas sean verdaderas.

2ª Que las semejanzas entre las dos situaciones sean relevantes, significativas.

3ª Que el número de semejanzas significativas entre las dos situaciones sea suficiente para hacer razonable la conclusión.

4ª Que la conclusión esté enunciada en términos de posibilidad y no con la fuerza de la exactitud.

Veamos un ejemplo que ilustre los cuatro aspectos anteriores:

Ejemplo 1.38 Juan y Pedro son bachilleres del mismo colegio; ambos se graduaron con honores y ambos obtuvieron altos puntajes en el Examen de Estado. Ambos ingresaron a la universidad. Se sabe, además, que Juan ha tenido un destacado desempeño en sus estudios universitarios. Por lo tanto, es muy posible que también Pedro se esté desempeñando exitosamente en su universidad.

Con relación a la primera condición, aquí suponemos que la información es verdadera, es decir, que las premisas son verdaderas. En cuanto a la segunda, todas las premisas son relevantes para la conclusión, pues configuran antecedentes académicos que apuntan a un buen desempeño académico posterior. En tercer lugar, el número de aspectos en que se fundamenta la analogía puede considerarse suficiente. Finalmente, la conclusión está enunciada en términos de "es muy posible", con lo cual se cumple la cuarta condición. Se trata pues de un argumento inductivo fuerte, del tipo "argumento por analogía". Evidentemente, si ambos tuvieron preferencia por las matemáticas y ambos estudian ingeniería, la conclusión está mucho más cerca de ser verdadera, es decir, el razonamiento inductivo es más fuerte.

Ahora, supongamos que a las características originales **adicionamos** una información sobre Juan: Las prefiere rubias. Supongamos, además, que ahora la conclusión del argumento es "muy posiblemente también Pedro las prefiere rubias". Ahora el argumento es débil, pues no se satisface la segunda condición. En efecto, las premisas originales son relevantes académicamente pero no lo son para la nueva conclusión.

Anotemos que si bien una semejanza no es suficiente para armar un buen argumento por analogía, una sola diferencia entre las dos situaciones puede ser tan relevante que desbarate por completo un argumento que parecía exitoso. Es el caso frecuente de personas que desarrollan una misma enfermedad para la cual el único tratamiento eficaz es una intervención quirúrgica. En cada caso particular puede pensarse que la probabilidad de responder igualmente bien a la cirugía es aproximadamente la misma para todos los pacientes. Sin embargo, en uno de tales casos la intervención misma resulta impracticable dados los antecedentes de salud del paciente en cuestión, lo que, de hecho, anula la posibilidad de la misma conclusión.

1.6.8 Refutación mediante analogía lógica

Como se mencionó en el párrafo anterior, un argumento inductivo por analogía queda desvirtuado por completo con sólo exhibir una diferencia tan relevante entre las dos situaciones, que sea imposible mantener la apreciación de que son comparables.

En el caso particular de los razonamientos deductivos, se habla de **analogía lógica** y de **refutación por analogía lógica** en el siguiente sentido: Como usted recordará, la validez de un razonamiento deductivo es una característica formal en cuanto no depende del contenido particular de las premisas y la conclusión, sino de la forma en que se da la conexión entre ellas. Esta propiedad es el fundamento de una excelente forma de argumentación, la **analogía lógica,** que se usa para establecer, por comparación con un razonamiento análogo, la validez (o la invalidez) de un razonamiento deductivo dado. El razonamiento usado para establecer la analogía debe ser un argumento deductivo **que tiene la misma estructura** del razonamiento analizado y cuya validez (o invalidez) es indiscutible, o por evidente, o porque ha sido previamente establecida. Se dice que el argumento se refuta por analogía lógica, cuando se rechaza por invalidez establecida mediante este método. Para ilustrar esta técnica de refutación, consideremos el caso siguiente:

Ejemplo 1.39 Establecer la validez o invalidez del siguiente razonamiento deductivo: "Como algún número par es divisible por 8 y algún número primo es par, entonces algún número primo es divisible por 8".

Individualicemos las premisas y la conclusión del argumento, para establecer el valor de verdad en cada caso:

P_1 Algún número par es divisible por 8.

P_2 Algún número primo es número par.

Por lo tanto, algún número primo es divisible por 8.

Solución 1: Por aplicación de la definición de razonamiento válido: La premisa 1 es verdadera: por ejemplo, 16 es un número par divisible por 8. La premisa 2 también es verdadera: 2, que es un número primo, es par. Pero la conclusión es falsa porque un número primo tiene exactamente dos divisores positivos. Y si un número fuera divisible por 8, lo sería por 1, por 2, por 4, por 8, y entonces no sería número primo. Como las premisas son verdaderas y la conclusión es falsa, el razonamiento es inválido.

Solución 2: Refutación por analogía lógica. Pongamos en paralelo el razonamiento dado y uno que nos servirá para establecer la analogía lógica, con este renombramiento: número par ≈ artista, divisible por 8 ≈ hombre, número primo ≈ mujer.

P_1 Algún <u>número par</u> es <u>divisible por 8</u>.	P_1' Algún <u>artista</u> es <u>hombre</u>.
P_2 Algún <u>número primo</u> es <u>número par</u>.	P_2' Alguna <u>mujer</u> es <u>artista</u>.
C. Entonces, algún <u>número primo</u> es <u>divisible por 8</u>.	C'. Entonces, alguna <u>mujer</u> es <u>hombre.</u>

Como el razonamiento utilizado para la comparación es evidentemente inválido porque las premisas son verdaderas y la conclusión es falsa, entonces rechazamos o refutamos el razonamiento original, por analogía lógica.

Finalmente, digamos que algunas expresiones son características de la refutación por analogía: "Eso es como decir que…", "Con el mismo argumento uno podría justificar que…", y otras que seguramente el lector ha usado u oído. Por ejemplo:

No es lo mismo "decir lo que piensa" que "pensar lo que dice". Afirmarlo sería como decir que "ver lo que come" es lo mismo que "comer lo que ve".

Tratar la rebeldía con represión es como tratar el insomnio con anfetaminas.

Elegir entre un régimen dictatorial de derecha y uno de izquierda debe ser como elegir entre un dolor de muela y un dolor de oído.

1.6.9 Razonamiento abductivo

Charles Sanders Peirce (1839-1914), fue el primero en referirse a una tercera forma de razonamiento: el razonamiento abductivo. Consiste en adoptar una hipótesis para explicar hechos observados, con base en una regla conocida. O, para utilizar los mismos elementos que usamos al describir los razonamientos deductivo e inductivo, este esquema de razonamiento consiste en "inferir *la causa* de un resultado, a partir de *una regla* y del *resultado*". Es una forma de razonamiento muy utilizada en medicina: se tiene *una regla* según la cual la enfermedad X se manifiesta a través de un conjunto Y de síntomas. Un paciente presenta los síntomas (un *resultado*). Entonces, se adopta la hipótesis de que el paciente tiene la enfermedad X (la *causa*), y se procede al tratamiento prescrito. Es una forma débil de inferencia, "inferencia en pos de la mejor explicación", la califican algunos [Wirth, 1998], que es inválida en lógica formal. Por ejemplo, la práctica médica ha establecido que la úlcera péptica se manifiesta con dolores abdominales, acidez, indigestión y vómito. Si un paciente presenta estos problemas, el médico puede inferir, como explicación de tales manifestaciones, que el paciente tiene úlcera péptica. Se configura así este razonamiento:

Premisa 1: Todo el que tiene úlcera péptica presenta dolores abdominales, acidez, indigestión y vómito.

Premisa 2: Juan tiene dolores abdominales, acidez, indigestión y vómito.

Conclusión: Juan tiene úlcera péptica.

¿En qué sentido decimos que esta inferencia no es válida en lógica formal? En el mismo sentido en que no es válido concluir que Juan es católico porque los católicos creen en Dios y Juan cree en Dios. Hay otros cultos en los que se cree en Dios; igualmente, hay otras enfermedades que presentan esos síntomas. Esto, sin embargo, no quita valor o importancia a las inferencias abductivas, pues la validación de las hipótesis que se construyen para explicar resultados observados, tiene aplicaciones de incalculable valor en el desarrollo científico.

Terminamos la presentación de las tres clases de razonamiento que nos han ocupado, citando la presentación que el profesor Wirth hace de las ideas de Peirce sobre la relación entre ellas:

> "Finalmente, la abducción, la deducción y la inducción interactúan y tienen diferentes funciones epistemológicas. La deducción establece las condiciones necesarias mediante la coherencia entre las premisas y la conclusión. La inducción se orienta hacia la coherencia empírica entre las premisas y la experiencia, para concluir en una posible generalización. Pero, en tanto que la inducción se limita a clasificar los resultados, la abducción proporciona una teoría que explica la relación casual entre los hechos. A partir de la sugerencia abductiva, que sintetiza una multitud de observaciones, la deducción puede extraer una predicción que puede ser puesta a prueba por inducción" [Wirth, 1998, p. 1].

Finalizamos esta sección recordando que la validez de un razonamiento no depende de la verdad de las premisas y la conclusión, pero reconociendo que son precisamente los argumentos de premisas verdaderas, sean deductivos, inductivos o abductivos, los que realmente tienen importancia y trascendencia. Esto se refleja en el calificativo de sólidos o convincentes que se les aplica si son, además, válidos o fuertes. Hablando en términos de la "calidad" de un razonamiento, debe ser claro que los razonamientos convincentes son los de más alta calidad. En términos prácticos: ¿de qué valor puede ser un razonamiento cuya conclusión descansa, se fundamenta o se apoya en premisas falsas?

EJERCICIOS

Razonamientos inductivos

Cada enunciado siguiente es un caso de generalización inductiva. Clasifíquelo como generalización inductiva fuerte o como generalización inductiva débil. Justifique su decisión.

1. Todos los paramilitares que han sido interrogados en el proceso de Justicia y Paz han confesado su participación en crímenes atroces. Por lo tanto, es posible que la mayoría de los paramilitares que están siendo juzgados en el proceso de Justicia y Paz hayan participado en crímenes atroces.
2. Ninguno de los estudiantes del grupo xx perdió el segundo parcial de Lógica y argumentación. Entonces, muy posiblemente ningún estudiante de Lógica y argumentación perdió el segundo parcial.
3. Muchos estudiantes venden el texto guía de este curso cuando terminan el semestre. Por lo tanto, posiblemente todos los estudiantes venden la mayoría de sus libros de texto cuando terminan el semestre.

En cada caso siguiente suponga que las premisas son verdaderas. Califique la generalización inductiva como fuerte o como débil. Además, responda, en cada caso, estas preguntas: ¿Puede considerarse que la muestra es suficientemente grande? ¿La muestra es representativa?

4. 120 familias del Departamento XYZ postularon a un subsidio gubernamental de vivienda, y a todas se les otorgó uno. En consecuencia, es razonable pensar que se les otorga el subsidio a casi todas las familias que lo solicitan.
5. Ninguno de los 31 estudiantes que voluntariamente presentaron el Examen de Acreditación para el curso Álgebra y funciones lo aprobó. Entonces, muy posiblemente ninguno de los estudiantes que hubieran podido presentar tal examen lo hubiera aprobado.
6. Las temporadas invernales de los últimos 10 años han ocasionado extensas inundaciones en los departamentos del norte de Colombia. Entonces, es muy posible que la temporada invernal del próximo año ocasione extensas inundaciones en tales departamentos.
7. En los cuatro municipios del norte del país en los cuales la población objetó los resultados de la votación para alcalde se presentaron disturbios que obligaron a las autoridades a adoptar medidas especiales para mantener el orden público. Entonces, posiblemente en la mayoría de los municipios en los cuales la población está objetando los resultados de la votación para alcalde se presentarán disturbios que obligarán a las autoridades a adoptar medidas especiales para mantener el orden público.
8. "No se puede decir que los estudiantes de Derecho tienen aversión a lo numérico", dijo el profesor. "El estudiante de más alta calificación en mi curso de Estadística el semestre pasado era precisamente un estudiante de Derecho".

En los argumentos estadísticos se extraen conclusiones sobre miembros de una población a partir de premisas referidas a un porcentaje de dicha población. Se considera que este porcentaje debe superar al 50% para que el argumento sea fuerte, pero aún así, la conclusión debe enunciarse en términos de "posiblemente", "probablemente", "es razonable concluir que", para dar más fuerza al argumento. No obstante, si el porcentaje está muy cerca de ese 50%, por ejemplo un 55%, hay razones para considerar que, aunque fuerte, según el estándar, la conclusión es poco confiable.

En los casos siguientes, califique el argumento estadístico como débil o fuerte. En este último caso, diga si a pesar de ello es confiable o poco confiable.

9. El 95% de la gente que pierde peso como efecto de una dieta lo gana nuevamente, en todo o en parte, antes de dos años. Juan bajó 15 kilos en una dieta hace 3 años. Por lo tanto, es muy posible que hoy Juan haya aumentado por lo menos parte del peso que había perdido.
10. Sólo el 25% de los habitantes en edad laboral en San Juan de las Angustias tiene empleo. Francisco tiene 28 años y vive en San Juan de las Angustias. Entonces, muy posiblemente Francisco es desempleado.
11. Sólo el 5% de los votantes encuestados que dijeron haber votado por el candidato Zamorano, afirmaron que lo hicieron, no por estar de acuerdo con su programa sino por considerar injusta la campaña desatada en su contra. Juan C. votó por el candidato Zamorano. Entonces muy probablemente lo hizo por estar de acuerdo con su programa.

EJERCICIOS DE OPCIÓN MÚLTIPLE

Razonamientos inductivos

1. A diferencia del razonamiento inductivo, el razonamiento deductivo:
   (A) Distingue entre premisas y conclusión.
   (B) Supone una relación entre la conclusión y las premisas.
   (C) Puede plantear más de una conclusión.
   (D) No dice que un razonamiento válido constituya una "tautología," sino que dice que es "universalmente válido".
   (E) Cuenta con criterios no subjetivos para diferenciar los razonamientos válidos de los no válidos.

2. El hecho de extraer una conclusión sobre una población basándose en una muestra:
   (A) Es un ejemplo de la falacia de la muestra insuficiente.
   (B) Es una aplicación equivocada del criterio decisorio relativo al tamaño de la muestra.

(C) Se conoce como generalización inductiva.

(D) Es un error derivado del mal uso del criterio decisorio relativo a la representatividad de la muestra.

(E) Es un proceso conocido como generalización universal.

3. Al aumentar el tamaño de una muestra,

(A) Mejora su representatividad.

(B) Aumenta la fuerza de una generalización inductiva, siempre y cuando la muestra sea más representativa.

(C) Reduce la fuerza de una generalización inductiva, si la muestra pasa a ser más representativa.

(D) Aumenta la certeza sobre el carácter de "convincente" de la conclusión.

(E) Aumenta la fuerza de la conclusión en un razonamiento deductivo.

4. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

(A) "He visto por lo menos dos docenas de garzas en mi vida, y todas las que he visto son blancas. No me resta sino concluir que es muy probable que todas las garzas sean blancas". El razonamiento anterior es inductivo, y es válido.

(B) "Por definición, las malteadas son hechas a partir de helado. Por lo tanto, si alguien me sirve una malteada, puedo estar seguro de que contiene helado". El razonamiento anterior es deductivo, y es verdadero.

(C) "Siempre he visto que el sol se pone en el occidente, y muchos registros históricos confirman que ha sucedido así durante siglos. En consecuencia, es bastante probable que esta tarde el sol se pondrá en el occidente". El razonamiento anterior es inductivo, y podríamos considerarlo fuerte, en vista de que el tamaño de la muestra es amplio.

(D) "Desde que tengo memoria, la procesión ha empezado en la Plaza de Caicedo y terminado en el Parque del Acueducto. Por lo tanto, es forzoso concluir que esa será la ruta que seguirá la procesión este año". El razonamiento anterior es deductivo, y podríamos considerarlo débil, dado que la muestra no es representativa.

(E) "Si alguien levanta la mano en este momento, se interrumpirá la boda. No puedo creerlo: ¡alguien levantó la mano! Lo siento, pero no se interrumpirá la boda". El razonamiento anterior es deductivo, y no es válido porque comete la falacia de afirmación del antecedente.

5. Considere el siguiente razonamiento: "Entrevistamos a mil soldados retirados que participaron en combates contra los actores armados, y todos ellos están de acuerdo con que la mejor opción para Colombia es continuar con una intervención militar activa e irrestricta. Es evidente, entonces, que la sociedad colombiana está de acuerdo con una salida militar al conflicto armado". ¿Cuál de las siguientes afirmaciones sobre el razonamiento citado es correcta?

(A) Es un razonamiento falaz, dado que practica la "generalización inductiva".

(B) Es un razonamiento inválido, dado que una de sus premisas es falsa: no es cierto que en Colombia haya tan sólo mil soldados retirados que participaron en combates contra los actores armados.

(C) Es un razonamiento inválido, dado que es imposible concluir algo sobre una población a partir de una muestra de mil individuos; este razonamiento es un ejemplo de lo que se llama falacia de generalización apresurada.

(D) Es un razonamiento, ciertamente, pero no podemos pronunciarnos sino aproximadamente sobre su corrección; la cautela que se requiere para valorar este tipo de razonamientos se llama "cuantificación aproximada," y es necesario practicarla porque estos razonamientos, a diferencia de los razonamientos deductivos, dependen de apreciaciones subjetivas, lo que impide inscribirlos dentro de un sistema binario de validez e invalidez, o dentro de un continuo de fortaleza y debilidad.

(E) La debilidad del razonamiento radica en la no representatividad de la muestra.

6. Una asociación hizo una encuesta entre los vecinos de cierto barrio sobre el mejor uso que deberían darle a cierto parque. El 55%, con un porcentaje de error del 10%, y un nivel de confianza del 90%, dijo que deberían mantenerlo como un lugar público, y no hacerlo comercial. Supongamos que una norma de esa ciudad estipulara que para poder cambiar el uso de un sitio público a "comercial," el 60% de los vecinos debe decir que está de acuerdo con el cambio. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones sobre la situación anterior es correcta?

(A) Es muy improbable que cambien el uso del parque a "comercial": si repitieran esta prueba 10 veces, en por lo menos 9 de ellas no obtendrían el porcentaje necesario para que el parque deje de ser un lugar público.

(B) En 10 de cada 100 veces que se realice esta encuesta, se obtendría el porcentaje necesario para que el parque se vuelva comercial.

(C) El parque no podrá cambiar su uso a "comercial," dado que, por el margen de error, nunca se obtendría el 60% necesario para el cambio.

(D) El parque cambiaría su uso a comercial si lograran convencer al 5% de la gente de votar a favor del cambio.

(E) El parque no podrá cambiar su uso a "comercial," dado que el 90% de los encuestados confía en que no cambiará.

7 a 10: En los problemas que siguen, encontrará que cada uno se limita a presentar un razonamiento. Luego, en la tabla que sigue al último de ellos verá una serie de caracterizaciones de razonamientos, como, por ejemplo, "razonamiento deductivo válido y convincente". Cada una de estas caracterizaciones está identificada con una letra. (Puede usar una misma letra más de una vez, y también no usar algunas letras). Determine la letra correspondiente a la caracterización de cada razonamiento.

7. "Queríamos saber cuántos dulces comían los caleños. Por lo tanto, fuimos al Tercer Encuentro Nacional de Amantes del Chocolate, y descubrimos que los caleños ahí presentes comían entre ocho y diez productos dulces al día. Nuestra conclusión fue, por lo tanto, que los caleños son los más dulceros del país, al ingerir, en promedio, nueve productos dulces al día".

8. "La gran mayoría de los ladrones son compositores de música clásica. Dado eso, y el hecho de que casi todos mis compañeros de patio en esta penitenciaría son ladrones, pues me parece sensato afirmar que estoy completamente rodeado de compositores de música clásica".

9. "Martín es un filósofo estoico de nacionalidad danesa. Esto es así porque todos los luchadores de lucha libre son filósofos estoicos de nacionalidad danesa, y Martín es un luchador de lucha libre".

10. "Todo el mundo me habla bellezas del restaurante de Ana, pero la semana pasada me comí un tamal allí, y me cayó terriblemente mal. Es lógico, entonces, que la comida de ese restaurante es terrible para la digestión".

A	Razonamiento deductivo válido y no convincente.
B	Razonamiento deductivo válido y convincente.
C	Razonamiento inductivo válido y convincente.
D	Razonamiento inductivo fuerte y convincente.
E	Razonamiento inductivo que falta al criterio de la verdad de las premisas.
F	Falacia de la generalización inductiva.
G	Falacia de la muestra insuficiente.
H	Razonamiento inductivo que falta al criterio de la representatividad de la muestra.

11. La generalización a partir de una muestra:
    (A) Es una forma de razonamiento deductivo.
    (B) Constituye una falacia, llamada "generalización apresurada".
    (C) Es una forma de razonamiento inductivo, cuya validez se determina con criterios personales.
    (D) Es un razonamiento cuya caracterización como "fuerte" o "débil" depende de criterios subjetivos.
    (E) Es un razonamiento que inevitablemente atenta contra el criterio de la representatividad.

12. A mayor "nivel de confianza" en una encuesta,

(A) Más válido será el razonamiento basado en ella.

(B) Más verdaderas serán las premisas del razonamiento basado en ella.

(C) En el continuo entre "fuerte" y "débil", el razonamiento basado en ella se alejará más de lo "fuerte".

(D) Menos representativa será la muestra poblacional.

(E) Se hace más razonable creer que las conclusiones derivadas de ella serán más parecidas a las que obtendríamos de la población en general.

13. Supongamos que obtenemos los siguientes resultados de una encuesta sobre la intención de viajar a San Andrés en el próximo año: "Porcentaje de personas que dicen que van a viajar a San Andrés en el próximo año: 35%. Margen de error: 10%. Nivel de confianza: 90%". ¿Cuál es una lectura correcta de estos resultados?

(A) 7 de cada 10 personas encuestadas viajará a San Andrés en el próximo año.

(B) El 35% de la población de la cual fue extraída esta muestra viajará a San Andrés en el próximo año.

(C) Si fuéramos a repetir la encuesta 10 veces, en 9 de ellas obtendríamos el resultado de que entre 5 y 9 personas de cada 20 manifestarían su intención de viajar a San Andrés en el próximo año.

(D) Si fuéramos a repetir la encuesta 90 veces, en todas ellas obtendríamos el resultado de que entre el 25% y el 45% de la gente manifestaría su intención de viajar a San Andrés en el próximo año.

(E) Del 90% de la gente, entre 25% y 45% manifestaría su intención de viajar a San Andrés en el próximo año.

14. Una aspirante a la presidencia (que necesita asegurar el 50% de los votos para ganar) pide a cinco compañías encuestadoras que midan la intención de voto por ella en las próximas elecciones. ¿Cuál de los siguientes resultados le daría más razones para creer en su victoria?

(A) Personas que votarían por ella: 50%; Margen de error: 1%; Nivel de confianza: 50%.

(B) Personas que votarían por ella: 55%; Margen de error: 5%; Nivel de confianza: 60%.

(C) Personas que votarían por ella: 60%; Margen de error: 9%; Nivel de confianza: 95%.

(D) Personas que votarían por ella: 65%; Margen de error: 25%; Nivel de confianza: 95%.

(E) Personas que votarían por ella: 69%; Margen de error: 30%; Nivel de confianza: 99%.

15 a 17. En los problemas que siguen, encontrará que cada uno se limita a presentar un razonamiento. Luego, en la tabla que sigue al último de ellos verá una serie de caracterizaciones de razonamientos, como, por ejemplo, "razonamiento deductivo válido y convincente". Cada una de estas caracterizaciones está identificada con una letra. (Pueden usar una misma letra más de una vez; además, no usará algunas letras). Determine la letra correspondiente a cada razonamiento.

15. "De los 300 millones de estadounidenses, una encuesta reciente les preguntó a 2 individuos escogidos al azar si consideraban que el precio del petróleo era alto. Los dos dijeron que no. En consecuencia, es más que razonable afirmar que los estadounidenses estiman que el precio del petróleo no es alto".

16. "El sistema respiratorio de los seres humanos saludables incluye pulmones. Luis es un ser humano saludable, por lo cual su sistema respiratorio incluye pulmones".

17. "Todos los días, en su ciudad natal de Königsberg, el filósofo Immanuel Kant, ya mayor, salía a caminar a una hora precisa y durante un tiempo preciso. [NOTA: Supongan que la frase anterior es cierta.] Por lo tanto, sería muy probable que, en un día cualquiera de esa época, Kant saliera a caminar ese día, a la misma hora".

A	Razonamiento deductivo válido y no convincente.
B	Razonamiento deductivo válido y convincente.
C	Razonamiento inductivo válido y convincente.
D	Razonamiento inductivo fuerte y convincente.
E	Razonamiento inductivo que falta al criterio de la verdad de la conclusión.
F	Falacia de la generalización inductiva.
G	Falacia de la muestra insuficiente.
H	Razonamiento inductivo que falta al criterio de la representatividad de la muestra.

18. Un aspirante al cargo de tesorero de la organización estudiantil a la que pertenece necesita, según los estatutos de la organización, el 80% de los votos para ganar en la primera vuelta. ¿Cuál de los siguientes resultados de encuestas es el que más lo favorece en sus aspiraciones a salir elegido en la primera vuelta?

(A) Porcentaje de personas que votarían por él: 80%; Margen de error: 5%; Nivel de confianza: 30%.

(B) Porcentaje de personas que votarían por él: 90%; Margen de error: 50%; Nivel de confianza: 80%.

(C) Porcentaje de personas que votarían por él: 70%; Margen de error: 10%; Nivel de confianza: 99%.

(D) Porcentaje de personas que votarían por él: 85%; Margen de error: 5%; Nivel de confianza: 95%.

(E) Porcentaje de personas que votarían por él: 99%; Margen de error: 5%; Nivel de confianza: 15%.

19. Supongamos que obtenemos los siguientes resultados de una encuesta sobre los alcances de la gripe en una ciudad: "Porcentaje de personas que han tenido gripe en los últimos seis meses: 75%. Margen de error: 10%. Nivel de confianza: 90%". ¿Cuál es una lectura correcta de estos resultados?

(A) Si practicáramos esta encuesta 100 veces, en 90 de ellas obtendríamos el resultado de que exactamente 15 de cada 20 personas tuvo gripe en los últimos seis meses.

(B) Si practicáramos esta encuesta 20 veces, en por lo menos 18 de ellas obtendríamos el resultado de que entre 26 y 34 personas de cada 40 tuvo gripe en los últimos seis meses.

(C) Si practicáramos esta encuesta 100 veces, obtendríamos el resultado de que el 90% del 75% de los encuestados tuvo gripe en los últimos seis meses.

(D) Si repitiéramos la encuesta 90 veces, en todas ellas veríamos que entre 65 y 85 de cada 100 personas tuvo gripe en los últimos seis meses.

(E) La encuesta fue practicada correctamente, dado que el margen error y el nivel de confianza suman 100%, tal como debería suceder.

20. A mayor "margen de error" en una encuesta:

(A) Más errado estará quien considere que los resultados son válidos.

(B) Mayor es el rango dentro del cual se encuentra la medición real de la población.

(C) Mayor es el número de veces que obtendríamos el mismo resultado, si repetimos la prueba.

(D) Manteniendo constante el nivel de confianza, en el continuo entre "fuerte" y "débil" el razonamiento basado en aquella encuesta se acercará más a lo "fuerte".

(E) Más verdaderas serán las premisas del razonamiento basado en aquella encuesta.

21. Algo que tienen en común la argumentación por analogía y la argumentación por generalización inductiva es que,

(A) En ambos casos, al calificar un argumento como "fuerte" interviene significativamente la apreciación del sujeto que analiza el razonamiento.

(B) En ninguno de estos tipos de razonamiento es posible decir si es “fuerte” o “débil”.

(C) Ambas formas de argumentación postulan que la conclusión es necesaria.

(D) En estos razonamientos, se pasa de lo general a lo particular.

(E) En estos razonamientos, se pasa de lo particular a lo general.

22. Consideren la siguiente discusión entre dos estudiantes de historia:

Andrés: –La economía de la Antigua Grecia era agrícola.

Beatriz: –Eso no es cierto: si bien había agricultura, la economía era marítima, y estaba basada en el comercio.

Andrés: –Lo que estás diciendo tampoco es cierto, dado que en Grecia, como resultado de intensa actividad volcánica, la tierra se había cargado de nutrientes y era muy fértil.

Beatriz: –Pero eso no es una refutación de mi argumento. Lo que estás diciendo es como afirmar que alguien come mucho helado sólo porque en su casa tiene mucho helado.

¿Cuál de las siguientes es una apreciación correcta sobre la discusión anterior?

(A) El uso de la analogía en este ejemplo es evidentemente no argumentativo: la referencia al helado constituye una mera metáfora.

(B) Andrés refuta a Beatriz mediante un uso argumentativo de la analogía, proponiendo que la situación análoga permite concluir algo sobre la situación original.

(C) Beatriz refuta a Andrés mediante un uso argumentativo de la analogía, proponiendo que la situación análoga permite concluir algo sobre la situación original.

(D) Beatriz sugiere que la situación propuesta (la del comercio basado en el helado) tiene ciertas características comunes con la economía griega (el hecho de ser comercial, y no agrícola), lo que permite extraer una conclusión.

(E) El uso de la analogía en este ejemplo es terriblemente pobre: la emplea Andrés comparando la economía agrícola con la economía marítima, y la emplea Beatriz comparando la economía griega con el helado; en ninguno de los casos hay suficientes semejanzas relevantes para justificar la comparación.

Respuestas a los ejercicios de opción múltiple

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
E	C	B	C	E	A	H	E	A	G	D	E	C	C	G	B	D	D	B	B	A	C

CAPÍTULO 2

El silogismo categórico

2.1 INTRODUCCIÓN

Cuando anotamos que el objetivo de la Lógica es el estudio de los criterios que permiten diferenciar entre razonamientos válidos y razonamientos no válidos nos referimos a la lógica formal, a la que se ocupa de los razonamientos deductivos, llamada también lógica clásica o aristotélica. Otros razonamientos son estudiados y modelados por otras lógicas. Por ejemplo, la lógica difusa (*fuzzy logic*) estudia el razonamiento en condiciones de no certeza, lo cual requiere involucrar valores de verdad que fluctúan entre "completamente verdadero" y "completamente falso". Esto permite el razonamiento "aproximado" con conceptos vagos, como "pobre", "alto", "caliente", por ejemplo, y la asignación de grados de pertenencia a las categorías correspondientes, lo cual ha tenido aplicaciones importantes en la industria, particularmente en el campo de los sistemas de control automático. Otros desarrollos importantes son las lógicas multivaluadas, las lógicas modales y la lógica paraconsistente. Cada una estudia, en su ámbito particular, los criterios que permiten diferenciar entre consecuencias admisibles y consecuencias no admisibles, a partir de una base de conocimiento.

Este libro considera exclusivamente los elementos básicos de la lógica clásica o aristotélica y de la lógica simbólica moderna, con énfasis particular en los criterios de validez de razonamientos. En este capítulo nos centraremos en el silogismo, un tipo especial de razonamiento deductivo ampliamente estudiado por Aristóteles, creador del término, y por los lógicos de su escuela. La discusión exigirá hacer algunas precisiones sobre el uso y significado, en lógica, de los cuantificadores presentes en tales razonamientos: "todos", "alguno", "ninguno". El capítulo termina con una sección sobre los llamados "problemas lógicos" o "problemas de razonamiento lógico.

2.2 AFIRMACIONES CATEGÓRICAS Y PROPOSICIONES CATEGÓRICAS

2.2.1 En lógica, "los" son "todos"

Cuando nos enfrascamos en una discusión o debate sabemos que, de quien quiera que sea el punto de vista aceptado, ello se dará sólo como consecuencia de un proceso argumentativo y no simplemente porque se afirme que tal o cual cosa es verdadera. Además, el proceso es más efectivo si las premisas y la conclusión son afirmaciones categóricas, es decir que lo que afirman es preciso, contundente y sin condiciones. Por ejemplo, tiene más trascendencia para un club deportivo concluir, como resultado de un debate sobre el futuro de la institución, que "contrataremos un nuevo director técnico" a concluir que "deberíamos contratar un nuevo director técnico". Sin embargo, la connotación de certeza de las afirmaciones categóricas obliga a ser cuidadosos y responsables en su uso. En el contexto de una investigación judicial, por ejemplo, las afirmaciones "estuvo aquí hasta las 4 de la tarde" y "estuvo aquí más o menos hasta las 4 de la tarde" pueden conducir a conclusiones bien diferentes.

Dado que en este capítulo usaremos repetidamente los cuantificadores lingüísticos "todo" y "algún" o "alguno", es conveniente hacer algunas precisiones sobre su uso y significado. Empecemos por decir que **en el lenguaje cotidiano** dos afirmaciones categóricas como "todos los filósofos son cultos" y "los filósofos son cultos", pueden no ser equivalentes. En efecto, con "todos los filósofos son cultos" se afirma que cada ser que satisface la condición "ser filósofo" satisface también la propiedad "ser culto", y que no hay excepciones a esta norma. En otras palabras: es imposible ser filósofo y no ser culto. En cambio, la segunda afirmación, "los filósofos son cultos", sugiere que "ser culto" es una característica de los filósofos "en general". De tal manera que ante la evidencia de algún filósofo inculto podría reaccionarse diciendo "no se afirmó que **todos** (los filósofos) son cultos". Muy seguramente usted está familiarizado con generalizaciones del tipo "los colombianos son...", "los argentinos son...", "los políticos son..." y entiende que en ningún caso lo afirmado se afirma de "todos". No sucede lo mismo, sin embargo, en afirmaciones como "los menores de edad requieren permiso para salir del país". En este caso entendemos que la afirmación incluye a **todos** los menores de edad. Pero... ¿cómo saber en qué casos en el uso cotidiano "todos los..." y "los..." son o no afirmaciones equivalentes? ¡Imposible saberlo!; lo más que puede decirse es que "depende del contexto". Por esto es recomendable utilizar siempre el lenguaje adecuado: "todos…", "casi todos…", "la mayoría…", "un gran número de…", según sea el caso.

Para terminar esta sección, hacemos una precisión necesaria: tanto en el lenguaje de la lógica, como en el de las matemáticas, los enunciados universales "todos los…" y "los…" se consideran como equivalentes, **independientemente del contexto.** Esto elimina la ambigüedad en el empleo del cuantificador universal "todos" y significa, por ejemplo, que las afirmaciones "todos los alemanes son disciplinados" y "los alemanes son disciplinados" son equivalentes. Significa, igualmente, que al decir "los rusos beben demasiado" se está afirmando que "todos los rusos beben demasiado", y que "las palabras esdrújulas llevan tilde" tiene el mismo significado que "todas las palabras esdrújulas llevan tilde". O, en contextos matemáticos, que "todos los números pares son divisibles por 2" es equivalente a "los números pares son divisibles por 2".

2.2.2 ¿Qué tantos son "algunos"?

Suponga que A es el conjunto A = {alma, árbol, andén, éter, india} y que P es la afirmación "**algunas** palabras del conjunto A empiezan con a". Seguramente usted no duda en calificar a P como afirmación verdadera. Y si P es ahora la afirmación "**algunas** palabras del conjunto A empiezan con vocal", ¿calificaría a P como verdadera? ¿O no lo haría, por considerar que **todas** las palabras de A empiezan con vocal y que para ser verdadera algunas deben empezar con vocal pero otras no? ¿Considera que la afirmación "algunos hombres son sacerdotes" es verdadera en cuanto es un hecho que algunos lo son pero otros no? Confrontemos este uso del cuantificador existencial "algunos", con el siguiente: "Algunas egresadas del programa de psicología serán madres algún día". Evidentemente este enunciado no excluye la posibilidad de que todas las egresadas del programa de psicología sean madres algún día. El uso cotidiano tiende a patentar la creencia de que la afirmación "algunos elementos de un conjunto tienen la propiedad P" lleva implícito el significado de que "algunos elementos tienen la propiedad P, pero algunos otros no la tienen". Nuevamente: los lenguajes formales tienen que eliminar la ambigüedad en el uso y, en rigor, el cuantificador existencial "algún" o cualquiera de sus variantes "alguno(a)", "algunos(as)" significa **por lo menos uno y posiblemente todos.** Entonces la afirmación "algunas palabras del conjunto {alma, árbol, andén, éter, india} empiezan con vocal" es verdadera.

Ejemplo 2.1 Si A y B son conjuntos, uno dice que A no está contenido en B si "algún elemento de A no es elemento de B". Sean A = {1, 2, 3} y B = {a, b, 6, 8}. Como por lo menos un elemento de A —en este caso todos— no está contenido en B, entonces A no está contenido en B.

Una vez hechas las precisiones anteriores sobre los enunciados universal, "todo...", y particular, "algún...", abordamos un tema que hace uso intensivo de ellos. Se inicia con la definición de proposición categórica, concepto que no debe confundirse con el de afirmación categórica de 2.2.1.

Definición 2.2 Una **proposición categórica** es una proposición sujeto-predicado que afirma o niega que una clase o categoría sujeto, S, está contenida, totalmente o en parte, en una clase predicado, P.

Por ejemplo, "Todo deportista es disciplinado" es una proposición categórica en la cual la clase sujeto, S, es "deportista" y la clase predicado, P, es "disciplinado". La proposición afirma que la clase "deportista" está contenida totalmente en la clase "disciplinado". Es una proposición de la forma "Todo S es P", y se la clasifica como proposición tipo (o código) **a**. La expresión *Todo* se llama cuantificador universal; por esta razón, la proposición categórica de este tipo se conoce como **Universal afirmativa.**

La definición 2.2 origina cuatro tipos de proposiciones categóricas. En la tabla 2.1 se presenta un ejemplo de cada tipo y se incluyen, junto a cada uno, el código literal asignado desde los tiempos de la edad media, (**a**, **e**, **i**, **o**), la forma general de la proposición y el nombre que la identifica:

Tabla 2.1 Clasificación de las proposiciones categóricas

	La proposición categórica	Código	Forma general	Nombre
1	Todo político es honesto	**a**	Todo S es P	Universal afirmativa
2	Ningún político es honesto	**e**	Ningún S es P	Universal negativa
3	Algún político es honesto	**i**	Algún S es P	Particular afirmativa
4	Algún político no es honesto	**o**	Algún S no es P	Particular negativa

Para recordar los códigos es suficiente recordar las vocales resaltadas en la palabra **a**f**i**rmo, para las dos proposiciones afirmativas. Las otras dos se recuerdan por exclusión: e, o para las negativas. En cuanto a las denominaciones de "universal" y "particular" es fácil recordar que se corresponden con los cuantificadores "todo" y "algún", estudiados anteriormente.

Ejemplo 2.3 La proposición "Todos los mamíferos son seres de sangre caliente" es una proposición categórica en la cual el sujeto es S = mamíferos, y el predicado es P = seres de sangre caliente. La proposición afirma que cada uno de los elementos de la categoría "mamíferos" es a su vez elemento de la clase de los "seres de sangre caliente". Se trata de una proposición universal afirmativa; su código es **a.**

Ejemplo 2.4 El sujeto y el predicado de la proposición "Algunos presidentes latinoamericanos son partidarios de la integración regional" son, S = presidentes latinoamericanos, P = partidarios de la integración regional. La proposición afirma que **una parte** de la clase "presidentes latinoamericanos" hace parte de la clase "partidarios de la integración regional". Es una proposición particular afirmativa. Su código es **i**.

Definición 2.5 Se dice que un término (sujeto o predicado) de una proposición categórica está distribuido, si en la proposición se hace referencia **a todos** los miembros de la clase designada por el término.

Por ejemplo, en la proposición "todo filósofo es culto" el sujeto, "filósofo", está distribuido porque la proposición involucra la **totalidad** de los elementos del conjunto de los filósofos; asegura algo de **todos** ellos: que son cultos. Por otra parte, la proposición no involucra a la totalidad de las personas cultas; sólo es posible inferir que entre las personas cultas, algunas son filósofos. En consecuencia, el predicado "culto" **no** está distribuido. Generalizando el argumento se concluye que en la proposición universal afirmativa, Todo S es P, el sujeto, S, está distribuido pero el predicado, P, no lo está.

Para decidir sobre términos distribuidos en la proposición universal negativa, Ningún S es P, consideremos una instancia particular: "ningún ateo es cristiano". Es claro que la proposición involucra la totalidad de la clase "ateos" al afirmar que (todos ellos) no son cristianos. Entonces el sujeto, ateos, está distribuido. Además, la afirmación permite concluir que "ningún cristiano es ateo" (si alguno lo fuera, se trataría de alguien que es ateo y cristiano a la vez, lo cual contradice la afirmación original). Entonces "cristiano", el predicado, también está distribuido. En síntesis, ambos términos de la proposición universal negativa "ningún S es P" están distribuidos.

En cuanto a las proposiciones categóricas particulares, el enunciado "algún chileno es Premio Nobel de literatura" ilustra la afirmación de que en la particular afirmativa, "algún S es P", ni el sujeto ni el predicado están distribuidos. En efecto, la afirmación no involucra a todos los chilenos y tampoco a todos los ganadores del Premio Nobel de literatura.

Ejercicio 2.6 Justifique esta afirmación: En la proposición "algún S no es P", el sujeto, S, no está distribuido, pero sí lo está el predicado P.

Para indicar que un término está distribuido se utiliza el símbolo (+) junto a él; para indicar que no lo está, se utiliza el símbolo (–). Con esta convención, la distribución de los términos en las cuatro proposiciones categóricas se resume así:

1. **a**: Todo S (+) es P (–)
2. **e**: Ningún S (+) es P (+)
3. **i**: Algún S (–) es P (–)
4. **o**: Algún S (–) no es P (+)

2.3 EL SILOGISMO CATEGÓRICO

2.3.1 Introducción

Nos proponemos caracterizar gradualmente el tipo de razonamiento conocido como silogismo categórico. Es un tipo de argumento en el que las ideas contenidas en las premisas están conectadas en tal forma que la conclusión se deriva de tales conexiones y las completa. Identificaremos las características del silogismo en el ejemplo siguiente:

P_1 Todo cardiólogo es médico.
P_2 Algún deportista es cardiólogo.
C. Por lo tanto, algún deportista es médico.

1. En primer lugar, el razonamiento está formado por dos premisas y la conclusión, y todas son proposiciones categóricas.

2. En segundo lugar, el razonamiento involucra tres términos: cardiólogo, médico y deportista, cada uno de los cuales aparece exactamente dos veces en el razonamiento.

3. Finalmente, uno, y sólo uno de los términos, cardiólogo en este caso, es común a las premisas. Este término desaparece en la conclusión.

Los tres elementos anteriores caracterizan los argumentos conocidos como silogismos categóricos (o, simplemente, silogismos), que se definen a continuación:

Definición 2.7 Un **silogismo categórico** es un razonamiento deductivo formado por tres proposiciones categóricas, dos premisas y la conclusión, y que satisface estas condiciones:

S1. En el razonamiento se identifican tres términos; cada uno aparece en dos de las tres proposiciones y en ambas es utilizado en el mismo sentido.

Los términos mencionados en la definición anterior se conocen con estos nombres:

- Término mayor: es el predicado de la conclusión; se denota por P.
- Término menor: es el sujeto de la conclusión; se denota por S.
- Término medio: es el término común a las dos premisas; se denota por M. Este término no aparece en la conclusión; establece el nexo entre las premisas y desaparece en la conclusión.

Ejemplo 2.8 De acuerdo con la definición anterior, el razonamiento siguiente es un silogismo categórico:

P_1 Todo cardiólogo es médico.

P_2 Algún deportista es cardiólogo.

C. Por lo tanto, algún deportista es médico.

El término mayor, P, es el predicado de la conclusión: médico; el término menor, S, es el sujeto de la conclusión: deportista; y el término medio, M, es el término común a las dos premisas: cardiólogo. Esta información, y el código de cada proposición categórica, se muestran a continuación:

P_1 Todo <u>cardiólogo</u> es <u>médico</u>. (**a**)

M P

P_2 Algún <u>deportista</u> es <u>cardiólogo</u>. (**i**)

S M

C. Por lo tanto, algún <u>deportista</u> es <u>médico</u>. (**i**)

S P

La **premisa mayor** del silogismo es la premisa que contiene el término mayor y la **premisa menor** es la que contiene el término menor. En este ejemplo, la primera premisa es la premisa mayor porque contiene al término mayor, médico, y la segunda premisa es la premisa menor. Decimos entonces que el silogismo tiene presentación (o forma) estándar, de acuerdo con la siguiente definición:

Definición 2.9 Un silogismo tiene presentación (o forma) estándar si y sólo si la premisa mayor aparece como primera premisa en el enunciado.

Observación 2.10 En lo que sigue consideraremos siempre que el silogismo tiene presentación estándar. Por esto, si en algún caso la premisa mayor no es la primera, es necesario intercambiar el orden de las premisas para darle presentación estándar.

Definición 2.11 El **modo** de un silogismo categórico es la cadena formada con los códigos de las proposiciones categóricas que lo forman, en el orden premisa mayor, premisa menor y conclusión.

Según la definición anterior, el modo del silogismo del ejemplo 2.8 es **aii.** Igualmente, la definición permite concluir que si, por ejemplo, el modo de un silogismo es **aeo** entonces: el silogismo tiene presentación estándar, la premisa mayor es universal afirmativa; la menor, universal negativa; y la conclusión, particular negativa.

Razonamientos como el siguiente son frecuentemente utilizados para insistir en la exigencia de que los términos del silogismo conserven el mismo significado en ambas apariciones:

P_1 Los dulces son fuente de calorías.

P_2 Los niños son dulces.

C. Por lo tanto, los niños son fuente de calorías.

Es evidente que el término "dulces" no tiene el mismo significado en las dos premisas. Por lo tanto no se trata de un silogismo.

2.3.2 La forma de un silogismo

Antes de presentar el criterio de validez de silogismos consideramos una noción adicional: la forma de un silogismo. Para establecerla, recordemos que la primera premisa es la premisa mayor y que el término medio aparece en ambas premisas. Por lo tanto, la primera premisa contiene los términos P y M, y la segunda los términos M y S. La "figura" de un silogismo indica las posiciones que ocupa M en las dos premisas. Las cuatro posibilidades, y la figura correspondiente, se muestran en el siguiente diagrama:

Los segmentos de recta en el diagrama muestran que en la primera figura el término medio es el sujeto de la premisa mayor y el predicado de la menor; en la segunda, es el predicado en ambas premisas; en la tercera es el sujeto de ambas premisas y, en la cuarta, es el predicado de la primera y el sujeto de la segunda. Evidentemente, recordar los diagramas es la forma fácil de determinar la figura en cada caso concreto. Finalmente, con el modo y con la figura se establece **la forma del silogismo.** Por ejemplo, el silogismo del ejemplo 2.8 es modo **aii** y es de la primera figura. Se dice entonces que el silogismo es de **la forma aii** –**1**.

Ejemplo 2.12 Construir un silogismo categórico de la forma **eio – 4.**

La estructura de un silogismo de la cuarta figura es

$$\begin{array}{cc} P & M \\ M & S \\ \hline S & P \end{array}$$

Además, el modo **eio** indica que la premisa mayor es universal negativa, la menor es particular afirmativa y la conclusión es particular negativa. Supongamos entonces que la primera premisa es "Ningún abogado constitucionalista es penalista". Con esto quedan establecidos los términos P = abogado constitucionalista y M = penalista. Para asignar S podemos pensarlo como predicado de la segunda premisa o como sujeto de la conclusión. En el segundo caso, y dado que el predicado es "abogado constitucionalista", la conclusión tiene la forma "Algún S no es abogado constitucionalista". Démosle a S un valor coherente con el predicado. Por ejemplo, S = escritor. Con esto obtenemos un silogismo de la forma propuesta,

P_1 Ningún abogado constitucionalista es penalista.
P_2 Algún penalista es escritor.
C. Por lo tanto, algún escritor no es abogado constitucionalista.

No es difícil mostrar, pero no lo haremos aquí, que existen 256 formas distintas de silogismos categóricos en presentación estándar. No obstante, sólo un número relativamente pequeño de ellas produce silogismos válidos, es decir, silogismos en los cuales la conclusión se deriva de las premisas en forma inevitable. Finalmente: aunque una proposición como "todos los poetas **usan** analogías" no es de la forma "todo S **es** P", se la acepta como universal afirmativa y así se la clasifica, dado que su significado es equivalente a "todo poeta **es** usuario de analogías" o a "todo poeta **es** una persona que usa analogías". En el ejercicio siguiente haremos uso de esta observación.

Ejercicio 2.13 Determine la forma (modo-figura), del silogismo siguiente:

Como algunos deportistas son personas sensatas, entonces algunos deportistas no abusan del licor, pues ninguna persona sensata abusa del licor.

Solución: Individualizando las premisas en orden de aparición, y la conclusión, tenemos:

P_1 Algunos deportistas son personas sensatas.
P_2 Ninguna persona sensata abusa del licor.
C. Algunos deportistas no abusan del licor.

El sujeto y el predicado de la conclusión son, en su orden, "deportistas" y "abusan del licor". Por lo tanto, S = deportistas, P = abusan del licor y M = personas sensatas. De acuerdo con esto, la premisa que contiene el término mayor, P, aparece como segunda y, en consecuencia, debemos intercambiar el orden de las premisas antes de establecer la forma del silogismo. Obtenemos:

P_1 Ninguna **persona sensata** abusa del licor. (e)

P_2 Algunos deportistas son **personas sensatas.** (i)

C. Algunos deportistas no abusan del licor. (o)

Por la posición del término medio, persona sensata, el silogismo pertenece a la primera figura. En consecuencia, se trata de un silogismo **eio–1.**

En la sección siguiente se presenta un criterio de validez de silogismos. Se trata de un conjunto de condiciones tales que todo silogismo que las satisfaga en su totalidad es válido y todo silogismo que no satisfaga alguna de ellas es inválido. Se discutirá también una forma de representación gráfica de las proposiciones categóricas, que puede ser utilizada para decidir sobre validez de silogismos, en casos concretos.

2.3.3 Validez de silogismos

Dado que el silogismo es un tipo particular de razonamiento deductivo, se le aplica la noción general de razonamiento válido: un silogismo es válido cuando, y sólo cuando, el aceptar como verdaderas las premisas implica aceptar como verdadera la conclusión. En otras palabras: cuando es imposible que siendo verdaderas las premisas, o aceptándolas como tales, sea falsa la conclusión, o se acepte como tal. Complementariamente, un silogismo es inválido cuando la conclusión no se deriva en forma necesaria de las premisas, como sucede en el caso siguiente:

Ejercicio 2.14 Establecer la invalidez del silogismo siguiente:

P_1 Algún número par es divisible por 8.

P_2 Algún número primo es par.

C. Por lo tanto, algún número primo es divisible por 8.

Este silogismo, de la forma **iii**–**1**, es el mismo razonamiento del ejemplo 1.39.

Aristóteles y posteriores tratadistas de la lógica se dieron a la tarea de establecer patrones válidos de razonamiento silogístico, que hoy se conocen como formas válidas de silogismo. Observe que se atribuye la validez **a la forma** y no al contenido del razonamiento, hecho que, extendido a todo tipo de razonamiento, tiene una importancia crucial en lógica y en argumentación: **si un silogismo de una forma determinada es válido (o inválido), todo silogismo de la misma forma es válido (o inválido), respectivamente.** Esta propiedad no es otra cosa que la analogía lógica aplicada a los silogismos.

Ejemplo 2.15 Supongamos que una persona sostiene esta opinión:

> "Ningún ser apático es ambicioso. Porque es un hecho que ninguno de ellos es científico y también es un hecho que todo científico es ambicioso".

Escribamos el silogismo en forma estándar, para hacer evidente su estructura:

P_1 Todo científico es ambicioso.
P_2 Ningún ser apático es científico.
C. Por lo tanto, ningún ser apático es ambicioso.

Es fácil concluir que el razonamiento siguiente, que tiene la misma forma del anterior, es inválido:

P_1 Todo hombre es mortal.
P_2 Ninguna mujer es hombre.
C. Por lo tanto, ninguna mujer es mortal.

Puede afirmarse, en consecuencia, que el argumento dado es inválido; su validez ha sido rebatida mediante analogía lógica. Adicionalmente, se concluye que todo silogismo de la forma **aee-1** es inválido.

No es casual el hecho de haber ilustrado el principio de la analogía lógica con dos silogismos inválidos. En efecto, tal como hemos dicho reiteradamente, para establecer la invalidez de un razonamiento es suficiente mostrar que las premisas son verdaderas y que la conclusión es falsa; establecer la validez de un silogismo es un poco más laborioso.

2.3.4 Un criterio de validez de silogismos

Para que un silogismo en forma estándar sea válido, es suficiente y necesario que se satisfagan simultáneamente cinco condiciones que llamaremos "condiciones S2 a S6" y que presentamos a continuación. Cada condición es necesaria para validez, es decir, si no se cumple alguna de ellas el silogismo no es válido.

S2. *El término medio debe estar distribuido en por lo menos una de las premisas.*

Esta condición falla cuando el término medio no está distribuido en ninguna premisa, como sucede en el ejemplo siguiente:

Ejemplo 2.16 Los alemanes son disciplinados. Los deportistas son disciplinados. Por lo tanto, los deportistas son alemanes.

Escribamos las premisas y la conclusión como proposiciones categóricas equivalentes:

Todos los alemanes son disciplinados. Todos los deportistas son disciplinados. Por lo tanto, todos los deportistas son alemanes.

El termino medio, "disciplinados" no está distribuido en ninguna de las premisas; por lo tanto, el silogismo es inválido. Como el silogismo es de la forma aaa–2, **todo silogismo de la forma aaa-2 es inválido.**

Ejercicio 2.17 Considere este razonamiento: Los caballos son vertebrados. Los gatos son vertebrados. Por lo tanto, los gatos son caballos. ¿Sirve este razonamiento para establecer la invalidez de todo silogismo de la forma **aaa**–**2**? Argumente en forma completa.

S3. *Todo término distribuido en la conclusión debe estar distribuido en la premisa que lo contiene.*

Un ejemplo de silogismo inválido por violación de esta regla es:

Ejemplo 2.18 Todo político es sagaz. Ningún tonto es político. En consecuencia, ningún tonto es sagaz.

La conclusión es una proposición universal negativa y en ella tanto el sujeto, "tonto", como el predicado, "sagaz", están distribuidos. Sin embargo, el término "sagaz" no está distribuido en la premisa mayor. Por lo tanto, el silogismo no es válido.

Ejercicio 2.19 Considere el silogismo "Toda palabra esdrújula lleva tilde pero ninguna palabra de dos sílabas es esdrújula. Por lo tanto ninguna palabra de dos sílabas lleva tilde". Muestre que este silogismo,

a. Tiene premisas verdaderas y conclusión falsa.
b. Es de la misma forma que el silogismo del ejemplo 2.18.
c. Permite concluir que la condición S3 es razonable.

S4. *Alguna premisa debe ser afirmativa*. (En efecto, de dos premisas negativas no es posible inferir válidamente ninguna relación necesaria entre S y P, los términos contenidos en la conclusión).

Ejemplo 2.20 Consideremos el silogismo con premisas negativas, de la siguiente forma general:

P_1 Ningún M es P.

P_2 Algún M no es S.

Mostraremos que cualquiera de las siguientes conclusiones es posible, 1: Todo S es P, 2: Algún S es P, 3: Algún S no es P, y 4: ningún S es P. Esta pluralidad de conclusiones posibles indica que ninguna de ellas se sigue inevitablemente de las premisas. Por lo tanto, con cualquiera de ellas el silogismo es inválido. Indiquemos todas estas posibilidades en la forma siguiente:

P_1 Ningún M es P

P_2 Algún M no es S

C. (Todo) (algún) (algún) (ningún) **S** (es) (es, no es) (es) **P**

1 2 3 4 1 2 3 4

El caso siguiente es un silogismo de premisas P_1, P_2 y conclusión C_1:

P_1 Ningún ecuatoriano es peruano.

P_2 Algún ecuatoriano no es limeño. (Recuerde la discusión: "alguno" puede ser "todos" 2.2.2)

C_1. Todo limeño es peruano.

Salvo consideraciones de posible doble nacionalidad, tanto las premisas como la conclusión son verdaderas. Sin embargo el razonamiento es inválido, como se ve por analogía lógica en el caso siguiente:

P_1 Ningún hombre es inmortal.

P_2 Algún hombre no es criminal.

C. Todo criminal es inmortal.

Ahora bien, si mantenemos las premisas de este ejemplo pero usamos la conclusión 2, algún S es P, obtenemos el silogismo,

P_1 Ningún hombre es inmortal.

P_2 Algún hombre no es criminal.

C. Algún criminal es inmortal, que también es inválido. (El lector puede construir ejemplos para los casos restantes)

S5. *Si la conclusión es afirmativa, las dos premisas tienen que ser afirmativas; si la conclusión es negativa, una de las premisas también debe serlo.*

Ejemplo 2.21 Uno de los casos en que se viola la regla anterior es un silogismo en el que la conclusión es afirmativa y por lo menos una de las premisas es negativa. (Si las dos premisas son negativas, se viola la condición S4 y no procede otro análisis). Consideremos el ejemplo siguiente:

P_1 Ningún miembro del Opus Dei es ateo.

P_2 Algunos católicos son miembros del Opus Dei.

C. Algunos católicos son ateos.

Evidentemente, las premisas de este silogismo son verdaderas pero la conclusión es falsa.

Finalmente, tenemos

S6. *Si conclusión es particular exactamente una de las premisas debe ser particular; si la conclusión es universal, ambas premisas deben ser universales*.

El lector puede establecer la invalidez de algunos casos en los cuales se viola la regla anterior. Posteriormente haremos algunas consideraciones sobre la misma.

Ejemplo 2.22 Determinar la forma del silogismo siguiente y, por aplicación de las reglas S2 a S6, decidir sobre su validez:

Dado que los mamíferos son seres de sangre caliente, entonces ningún reptil es mamífero porque ningún reptil es de sangre caliente.

Solución: Individualicemos las premisas y la conclusión, en tal forma que el silogismo tenga forma estándar:

P_1 Los mamíferos son seres de sangre caliente.

P_2 Ningún reptil es de sangre caliente.

C. Ningún reptil es mamífero.

Elementos: Término mayor, P = mamífero; término menor, S = reptil; término medio, M = seres de sangre caliente. Premisa mayor = P_1, (por lo tanto el silogismo tiene presentación estándar), premisa menor = P_2. Forma: **aee-2**.

Silogismo vs. reglas S2 a S6

S2. El término medio “seres de sangre caliente” debe estar distribuido en alguna de las premisas. Lo está en la premisa 2. Se cumple.

S3. Tanto el término mayor, "mamífero", como el término menor "reptil", que están distribuidos en la conclusión, están distribuidos en sus respectivas premisas. Se cumple.

S4. Alguna premisa debe ser afirmativa. La premisa P_1 lo es. Se cumple.

S5. Como la conclusión es negativa, una premisa debe ser negativa. Lo es la premisa 2. Se cumple.

S6. La conclusión es universal. Entonces ambas premisas deben serlo, y en efecto lo son.

En consecuencia, este silogismo es válido. Se infiere, adicionalmente, que todos los silogismos de la **forma aee-2** son válidos.

Ejemplo 2.23 Consideremos el razonamiento siguiente:

P_1 Todos los leones son criaturas feroces.

P_2 Algunos leones no beben café.

C. Algunas criaturas que beben café no son feroces.

Este silogismo, con premisas y conclusión verdaderas, satisface S2 porque el término medio, "leones", está distribuido en alguna premisa (la mayor, en este caso). Sin embargo, no satisface S3. (¿Por qué?). Como todas las condiciones S2 a S6 son necesarias, este silogismo es inválido. Incidentalmente, de esto se sigue que todos los silogismos de la **forma aoo–3** son **inválidos.**

Observación: Recordemos que cada una de las reglas S2 a S6 es una condición necesaria para la validez del silogismo y que, en conjunto, forman una condición suficiente para la validez. Por esta razón, tan pronto como se establece la violación de alguna de las reglas se concluye que el silogismo es inválido; sin embargo es necesario constatar el cumplimiento de todas, para concluir que el silogismo es válido. Por lo demás, ellas se aplican sólo a silogismos en forma estándar.

Ejercicio 2.24 i) Construya un silogismo de la forma aaa –1. Establezca su validez.

ii) Pruebe que ninguna otra figura del modo aaa produce un silogismo válido.

Solución: i) Se deja al lector.

ii) **Forma: aaa–2.** P_1 Todo P es M.

P_2 Todo S es M.

C. Todo S es P.

Los silogismos de esta forma son inválidos porque el término medio no está distribuido en ninguna de las premisas.

Forma: aaa–3. P_1 Todo M es P.

P_2 Todo M es S.

C. Todo S es P.

Los silogismos de esta forma son inválidos porque S, distribuido en la conclusión, no está distribuido en la premisa que lo contiene. Por esta misma razón no es válido el silogismo de la forma aaa–4.

2.3.5 Formas válidas de silogismo categórico

Pudo parecerle sorprendente que muchos de los silogismos utilizados como ejemplos en las secciones anteriores resultaran inválidos. La razón es sencilla: la aplicación de las reglas S2 a S6 da como resultado sólo 15 formas válidas, de entre las 256 formas posibles de silogismo que se mencionaron en la sección 2.3.2 (El uso de un criterio menos restrictivo, cuya descripción excede los propósitos de esta presentación, origina 19 formas válidas de silogismo). Estas son las 15 formas válidas:

1. **De la primera figura**: aaa–1, eae–1, aii–1, eio–1.
2. **De la segunda figura**: aee–2, eae–2, aoo–2, eio–2.
3. **De la tercera figura**: aii–3, iai–3, eio–3, oao–3.
4. **De la cuarta figura**: aee–4, iai–4, eio–4.

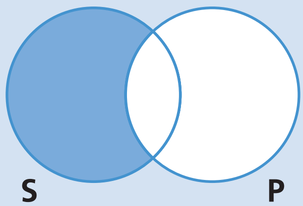
2.4 REPRESENTACIÓN DE PROPOSICIONES CATEGÓRICAS MEDIANTE DIAGRAMAS DE VENN

Los lectores que alguna vez han utilizado diagramas de Venn muy posiblemente lo han hecho para representar operaciones entre conjuntos: unión, intersección y diferencia. En esta sección se presenta un uso alternativo interesante cuyo resultado es un criterio visual y alternativo para establecer la validez o invalidez de un silogismo. Para desarrollar este criterio mostraremos primero cómo representar los cuatro tipos de proposiciones categóricas. Una idea básica en la representación consiste en sombrear una región determinada por un diagrama de Venn para indicar que el conjunto correspondiente a dicha región es vacío, es decir, que no tiene elementos.

2.4.1 Representación gráfica de "Todo S es P"

Cuando decimos "Todo S es P" estamos afirmando que "no existe un S que no sea P". Esto significa que "el conjunto de los S que no son P es vacío" y, por lo tanto, en un diagrama de Venn la región que representa la parte de S que está por fuera de P no tiene elementos; es vacía. Por esta razón, "Todo S es P" se representa como la parte sombreada que se muestra en la figura 2.1.

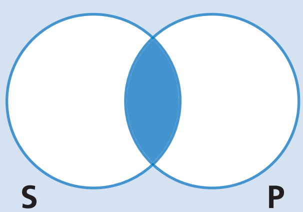
Figura 2.1 Todo S es P



2.4.2 Representación gráfica de "Ningún S es P"

Afirmar que "Ningún S es P", es equivalente a afirmar que "No hay un S que a su vez sea un P". Entonces la región que representa el conjunto de elementos que son S y P a la vez es vacía. Por esto "Ningún S es P" se representa por la región sombreada de la figura 2.2.

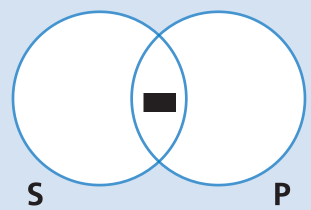
Figura 2.2 Ningún S es P



2.4.3 Representación gráfica de "Algún S es P"

La proposición categórica "Algún S es P" afirma la existencia de por lo menos un S que es a la vez un P. Para representar este hecho en un diagrama de Venn utilizaremos un pequeño rectángulo en la región correspondiente, que representa el elemento cuya existencia se afirma. En este caso el elemento es S y P a la vez y por lo tanto el símbolo que lo designa está en la región de intersección de S con P, como se ve en la figura 2.3.

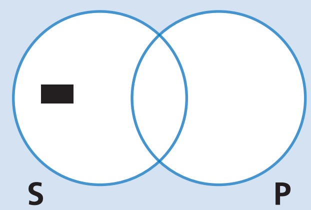
Figura 2.3 Algún S es P



2.4.4 Representación gráfica de "Algún S no es P"

La proposición "Algún S no es P" indica la existencia de por lo menos un elemento en la región que representa a S pero que queda por fuera de la región que representa a P, como en la figura 2.4.

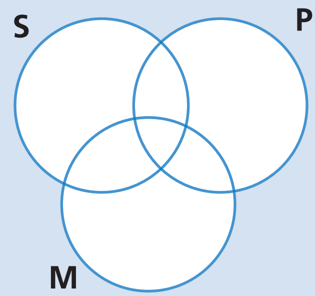
Figura 2.4 Algún S no es P



2.4.5 Diagramas de Venn y un criterio gráfico de validez de silogismos

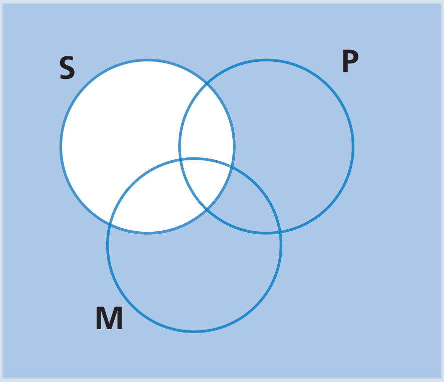
La aplicación de diagramas de Venn para decidir si un silogismo es o no válido exige un diagrama en el que se representen los conjuntos correspondientes a los tres términos: menor, S; medio, M, y mayor, P, tal como se observa en la figura 2.5.

Figura 2.5 Diagrama de Venn para tres conjuntos



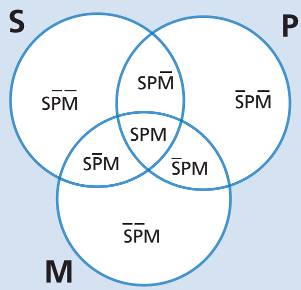
Los tres conjuntos determinan 8 regiones. Cada una de las 8 regiones se denota con **una terna** en la que aparecen símbolos del conjunto {S, M, P, $\overline{S}$, $\overline{M}$, $\overline{P}$} donde el trazo sobre un símbolo se usa para denotar el complemento de la región designada por tal símbolo. Por ejemplo, $\overline{S}$ representa la región complementaria de la región S, es decir la que excluye a S. Tal región aparece sombreada en la figura 2.6.

Figura 2.6 La región sombreada es $\overline{S}$



El símbolo SPM en la región común a los tres círculos denota el conjunto de elementos que son S, M y P a la vez. El símbolo $SP\overline{M}$ denota el conjunto de elementos que son S y P a la vez, pero no son M. Por esta razón está en la intersección de S, P y $\overline{M}$ En forma análoga se interpreta en la figura 2.7 la designación de las restantes 6 regiones.

Figura 2.7 Regiones asociadas a un silogismo



En las páginas siguientes mostraremos cómo utilizar diagramas de Venn para establecer validez o invalidez de silogismos. Adoptamos la convención de que el círculo superior izquierdo corresponde a S, el término menor; el círculo superior derecho, a P, el término mayor; y el círculo inferior a M, el término medio. El silogismo es válido si y sólo si la conclusión está representada por una región que queda totalmente incluida en la unión de las regiones que representan las premisas. Veamos un primer ejemplo:

Ejemplo 2.25 Consideremos el silogismo del ejemplo 2.15:

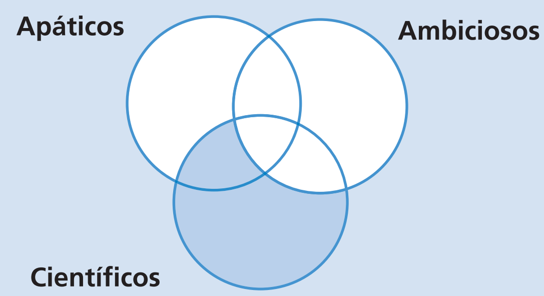
P_1 Todo científico es ambicioso.

P_2 Ningún ser apático es científico.

C. Ningún ser apático es ambicioso.

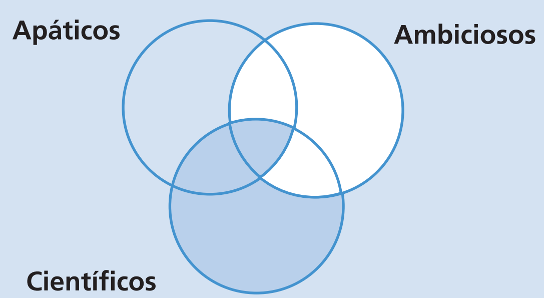
Usando la convención adoptada en el párrafo anterior, el círculo superior izquierdo representa “seres apáticos”; el superior derecho, “seres ambiciosos”; y el inferior, “científicos”. Además, de acuerdo con lo dicho en 2.4.1, al representar la premisa P_1 la región de “científicos no ambiciosos” es vacía, y por tal razón aparece sombreada en la figura 2.8.

Figura 2.8 Todo científico es ambicioso



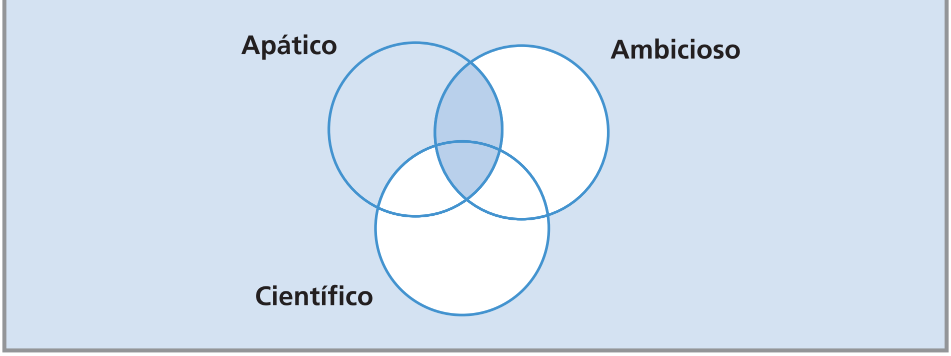
Para representar la premisa P_2 utilizamos 2.4.2. La región de los "seres apáticos que son científicos", intersección de las regiones superior izquierda e inferior, es vacía. Al sombrearla sobre el diagrama de la figura anterior para indicar que las dos premisas se satisfacen simultáneamente, se obtiene la figura 2.9 siguiente:

Figura 2.9 P_1 Todo científico es ambicioso
P_2 Ningún ser apático es científico



Pensemos ahora en la conclusión: "Ningún ser apático es ambicioso". Ella se sigue necesariamente de las premisas si y sólo si la región que la representa, y que aparece sombreada en la figura 2.10, está completamente contenida en la región sombreada de la figura anterior. Como este **no es el caso**, el silogismo es inválido.

Figura 2.10 Ningún ser apático es ambicioso



Ejemplo 2.26 Utilizar diagramas de Venn para establecer la validez del silogismo siguiente, establecida en el ejemplo 2.22, mediante las reglas S2 a S6.

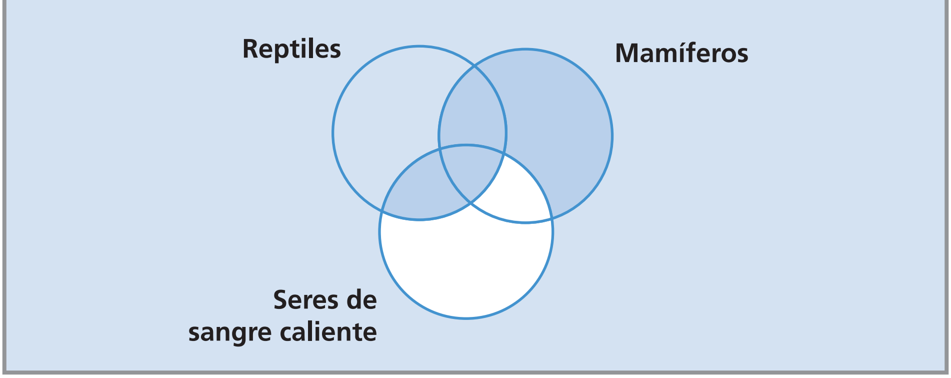
P_1. Todos los mamíferos son seres de sangre caliente.

P_2. Ningún reptil es de sangre caliente.

C. Luego, ningún reptil es mamífero.

La siguiente figura 2.11 es la representación de las premisas en un diagrama de Venn. Observe que el área común a "reptiles" y "mamíferos", que representa la conclusión, está contenida en el área que representa la conjunción de las dos premisas. En consecuencia, el silogismo es válido.

Figura 2.11 El silogismo del ejemplo 2.26



Ejemplo 2.27 En los dos ejemplos anteriores tanto las premisas como la conclusión son proposiciones universales. El ejemplo siguiente ilustra el uso de diagramas de

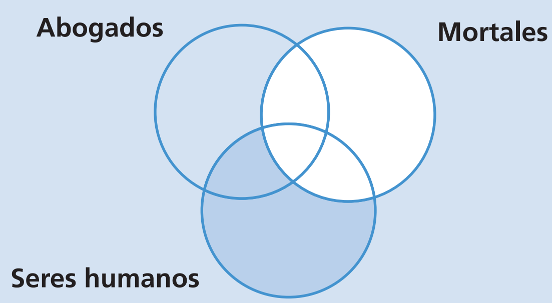
Venn, cuando alguna de las premisas, o la conclusión, es una proposición particular (afirmativa o negativa):

P_1 Todos los seres humanos son mortales.
P_2 Algún abogado es un ser humano.
C. Algún abogado es mortal.

En este caso, el término menor, S, es "abogados"; el término medio, M, es "seres humanos"; y el término mayor, P, es "mortales".

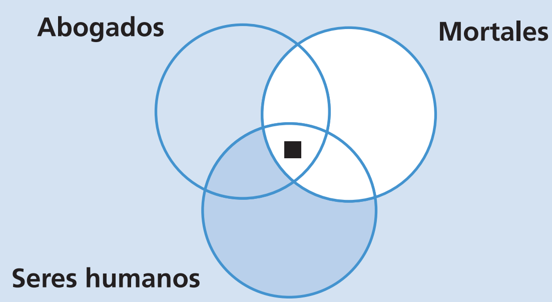
Para representar a P_1 sombreamos la porción de "seres humanos" que está por fuera de la región correspondiente a "mortales", como en la figura 2.12:

Figura 2.12 Todos los seres humanos son mortales



A continuación añadimos P_2. El rectángulo que represente al individuo que es abogado y ser humano simultáneamente, debe estar en la intersección de las regiones correspondientes. Pero, dado que la premisa 1 es verdadera, tal individuo, no puede estar en la porción sombreada de esa intersección, pues allí no hay elementos. Por lo tanto, podemos ubicar el rectángulo tal como se muestra en la figura 2.13. El individuo así representado, por estar en la intersección de las tres regiones, es abogado, ser humano y mortal simultáneamente. En consecuencia, es abogado y mortal, tal como lo estipula la conclusión. El razonamiento es válido.

Figura 2.13 El silogismo del ejemplo 2.27



2.5 CONDICIONES NECESARIAS, SUFICIENTES Y SUFICIENTES Y NECESARIAS

2.5.1 Condiciones necesarias

Un evento o condición A es necesario para un evento B, si B no puede suceder cuando A no sucede o no se da, es decir, A se requiere para que se produzca B (aun cuando pueden requerirse, junto a A, otras condiciones para que se produzca B). Un caso bien conocido por el lector: Cada una de las condiciones S2 a S6 es necesaria para la validez de un silogismo; tener zanahorias es condición necesaria para preparar una torta de zanahoria, por cuanto **si no** se tienen zanahorias **no** se puede preparar una torta de zanahoria. Sin embargo, junto a esta condición se requieren otras, pues tener zanahorias no basta para hacer la torta.

Ejemplo 2.28 Saber primeros auxilios es condición necesaria para ser médico, pero ser médico no es condición necesaria para saber primeros auxilios.

Ejemplo 2.29 Ser número par es condición necesaria para ser divisible por 2. Pero ser divisible por 2 también es condición necesaria para que un entero sea par.

Los dos ejemplos anteriores muestran que si A es condición necesaria para B, entonces B puede, o no, ser condición necesaria para A.

2.5.2 Condiciones suficientes

Un evento o condición A es suficiente para un evento B, si A basta para que se produzca B (aun cuando puedan existir otras formas de que se produzca). Por ejemplo: correr la ½ maratón de Cali es suficiente para terminar cansado. Pero hay otras formas de terminar cansado: correr la maratón de Nueva York, jugar un partido de tenis, etcétera.

Ejemplo 2.30 Ser católico es suficiente para creer en Dios. Pero, como no sólo los católicos creen en Dios, ser católico no es necesario para creer en Dios.

Ejemplo 2.31 Creer en Dios no es condición suficiente para ser católico, pues la iglesia católica impone condiciones adicionales para ser católico (Obediencia al Papa, por ejemplo).

Ejemplo 2.32 ¿Qué significa la afirmación "Ser oficial del ejército es condición suficiente pero no necesaria para saber manejar armas de fuego"?

Respuesta: Significa que todo oficial del ejército sabe manejar armas de fuego, pero que existen personas que saben manejar armas de fuego y no son oficiales del ejército.

2.5.3 Condiciones necesarias y suficientes

Un evento o condición A es necesario y suficiente para un evento B, cuando A se requiere y basta para que se produzca B, es decir, si no sucede A entonces no sucede B, y si sucede A entonces sucede B. Por ejemplo, es necesario y suficiente ocupar uno de los tres primeros lugares en una carrera de la Fórmula Uno, para subir al podio; en condiciones normales, es suficiente y necesario obtener el mayor número de votos en las elecciones presidenciales, para ser elegido presidente.

Ejemplo 2.33 Es suficiente, pero no necesario, haber nacido en Quito, para ser ecuatoriano; es necesario, pero no suficiente, ser ecuatoriano para haber nacido en Quito.

Distinguir correctamente entre condiciones suficientes, necesarias, y suficientes y necesarias, es de fundamental importancia en el proceso de formación teórica en prácticamente cualquier disciplina. Pero también lo es en la práctica cotidiana. Estos dos hechos justifican nuestro énfasis en el tratamiento del tema.

2.5.4 El condicional "si… entonces…" y las condiciones suficientes

La forma de expresar condiciones suficientes guarda una estrecha relación con el condicional "si… entonces…", que es la siguiente:

> *Si A es condición suficiente para B, el condicional "Si A entonces B", es un condicional verdadero.*

Observe que la condición suficiente es el antecedente del condicional: **Si** (condición suficiente) **entonces** (evento). En un ejemplo anterior dijimos que correr la ½ maratón de Cali es suficiente para terminar cansado. Entonces, el condicional correspondiente, "**si** corre la ½ maratón de Cali **entonces** termina cansado", es verdadero. Recíprocamente:

Un condicional verdadero establece una relación en la que el antecedente es condición suficiente para el consecuente.

Si el enunciado condicional "**Si** es domingo **entonces** visito a mis abuelos" es verdadero, entonces ser día domingo es condición suficiente para visitar a los abuelos. En términos generales: cuando la afirmación "A es condición suficiente para B" es verdadera (falsa) el enunciado condicional "Si A entonces B" también es verdadero (falso).

Como aplicación directa del tema anterior consideremos este caso: Como es suficiente saber que una persona es buzo profesional, para asegurar que tal persona sabe nadar, el condicional "Si alguien es buzo profesional, entonces sabe nadar" es verdadero. En particular, si Juan es buzo profesional, podemos asegurar que Juan sabe nadar. Esto indica que el razonamiento "Si todos los buzos profesionales saben nadar y Juan es buzo profesional, entonces Juan sabe nadar", es un razonamiento deductivo válido. El razonamiento tiene esta forma general: La primera premisa declara que A es condición suficiente para B: Si A entonces B. La segunda premisa **afirma el antecedente** del condicional: A se satisface. Entonces la conclusión **afirma el consecuente**: B se satisface. Este esquema de razonamiento válido se conoce con el nombre ***Modus ponens:***

P_1 Si A entonces B

P_2 A

C. Entonces B

El esquema *Modus ponens* forma parte de la vida cotidiana, aparentemente desde siempre. El niño malcriado que hace un berrinche para lograr algo porque sabe que si lo hace entonces lo obtiene; el universitario que va a cine los martes o los jueves porque si es martes o jueves la entrada tiene un descuento del 50%, el empleado que almuerza cada viernes en la cafetería de su empresa porque si es viernes sirven su plato preferido, etc., ilustran ajustes espontáneos de la conducta al esquema *Modus ponens.*

2.5.5 El condicional "si… entonces…" y las condiciones necesarias

En el contexto de las matemáticas, si A y B son eventos tales que el condicional "si A entonces B" es verdadero, se dice que B es necesario para A, o que B es condición necesaria para A. Por ejemplo, un teorema algebraico establece que "**si** ab = 0 **entonces** a = 0 o b = 0". Decimos entonces que es necesario que alguno de los factores de un producto sea 0, para que el producto sea 0. Otro teorema establece que "**si** dos rectas del plano son paralelas **entonces** sus pendientes son iguales". Entonces, es necesario que las pendientes de dos rectas del plano sean iguales, para que las rectas sean paralelas.

La relación anterior entre condicional y condición necesaria también está presente en contextos cotidianos, aunque su identificación no es siempre evidente. Por ejemplo, el condicional “Si alguien es cardiólogo, entonces es médico”, es verdadero, y tiene sentido la afirmación “Ser médico es necesario para ser cardiólogo” o, lo que es equivalente, si alguien no es médico, entonces no es cardiólogo. Análogamente, la afirmación “Todo católico cree en Dios” se traduce en el condicional “Si alguien es católico, entonces cree en Dios”, según el cual creer en Dios es necesario para ser católico o, lo que es equivalente: no creer en Dios implica no ser católico. Finalmente, la afirmación “Si es domingo, entonces voy al cine” equivale a la afirmación “Si no voy al cine, entonces no es domingo”; si no se da lo primero, ir a cine, no se da lo segundo, ser domingo. ¿Y no significa esto último que “ir a cine” es condición necesaria para “ser domingo”? Este giro, lógicamente correcto, es semánticamente inaceptable y es a esta dificultad que nos referimos al comienzo de este párrafo.

La relación descrita en los párrafos anteriores indica que cuando B es necesaria para A se configura un razonamiento deductivo válido que tiene esta forma general: La primera premisa es el condicional A entonces B. La segunda premisa **niega el consecuente** del condicional: B no se satisface. Entonces la conclusión **niega el antecedente**: A no se satisface. Este esquema de razonamiento válido se conoce con el nombre ***Modus tollens:***

P_1 Si A entonces B

P_2 no B

C. Entonces no A

~~Como el esquema~~ *Modus ponens,* también el esquema *Modus tollens* hace parte del arsenal de esquemas básicos de razonamientos válidos: Si incurro en fraude en el examen entonces corro el riesgo de que mi examen sea anulado. Pero no correré el riesgo de que me anulen el examen, por lo tanto no haré fraude; no abusaré del licor, porque quien abusa del licor se comporta como un idiota y yo no me comporto como un idiota; si me levanto tarde entonces no llegaré a tiempo a la universidad. Pero debo llegar a tiempo, entonces no me levantaré tarde. Estos son sólo algunos de los muchos casos en los cuales en forma inadvertida y espontánea aplicamos el esquema *Modus tollens.*

2.5.6 El condicional “si… entonces…” y las dos condiciones involucradas en el mismo

Reunamos las discusiones de las dos subsecciones anteriores: un condicional verdadero “si A entonces B” indica simultáneamente que A es condición suficiente para B y que B es condición necesaria para A. Volviendo a los ejemplos anteriores: “Si alguien es cardiólogo, entonces es médico”, es un condicional verdadero del cual se deduce que ser cardiólogo es condición suficiente para ser médico, en el sentido de llevarlo implícito y se deduce también que ser médico es una condición necesaria para ser cardiólogo. De la misma manera, la afirmación "Todo buzo profesional sabe nadar" se traduce en el condicional "si es buzo profesional, entonces sabe nadar", el cual afirma que ser buzo profesional es suficiente para saber nadar, es decir, implica saber nadar, y saber nadar es necesario para ser buzo profesional. Finalmente, el conocido resultado relativo a los números reales, "si ab = 0 entonces a = 0 o b = 0", indica que ab = 0 es suficiente para afirmar que a = 0 o b = 0 y también que es necesario tener a = 0 o b = 0 para que ab sea 0.

2.5.7 El bicondicional "...si y sólo si..." y la condición suficiente y necesaria

En ocasiones dos eventos A y B están relacionados de tal manera que el condicional "Si A entonces B" es verdadero y también lo es su condicional recíproco "Si B entonces A". De acuerdo con las discusiones anteriores, el primero de estos condicionales establece que A es suficiente para B, y el segundo que A es necesario para B. Se dice entonces que A es suficiente y necesario para B. Por ejemplo, el condicional "si la suma de las cifras de un número es divisible por 3, entonces el número es divisible por 3" es un condicional verdadero. Establece que **es suficiente** que la suma de las cifras de un número sea divisible por 3 para que "el número sea divisible por 3". Pero también el condicional "Si un número es divisible por 3, entonces la suma de sus cifras es divisible por 3" es verdadero. Establece que **es necesario** que "la suma de las cifras de un número sea divisible por 3" para que "el número sea divisible por 3". En consecuencia, **es suficiente y necesario** que la suma de las cifras de un número sea divisible por 3 para que el número sea divisible por 3, lo cual se expresa con el bicondicional "si y sólo si" en la forma: "Un número es divisible por 3 si y sólo si la suma de sus cifras es divisible por 3". Observe muy bien la estructura de la frase anterior en relación con las condiciones que ella establece: "Un número es divisible por 3 <u>si</u> y sólo si <u>la suma de sus cifras es divisible por 3</u>" (es suficiente que la suma de las cifras sea divisible por 3, para que el número sea divisible por 3); "Un número es divisible por 3 si y <u>sólo si</u> <u>la suma de sus cifras es divisible por 3</u> (es necesario que la suma de las cifras sea divisible por 3, para que el número sea divisible por 3).

Generalicemos la discusión anterior: Si los condicionales "Si A entonces B" y "si B entonces A" son simultáneamente verdaderos, entonces A es condición suficiente y necesaria para B, lo cual se expresa mediante el condicional "B si y sólo si A" (B si A: A es suficiente para B, y B sólo si A: A es necesaria para B). Por otra parte, tomando los condicionales en el orden "si B entonces A" y "si A entonces B" resulta que B es condición suficiente y necesaria para A, lo cual se expresa como "A si y sólo si B".

En síntesis, cuando dos condiciones A y B están relacionadas de tal manera que cada una es suficiente para la otra, entonces cada una resulta necesaria para la otra; se implican y se requieren mutuamente. Esto hace razonable llamarlas “equivalentes”. Es indiferente en tal caso si se expresa la equivalencia en la forma “A si y sólo si B”, o en la forma “B si y sólo si A”. Lo importante es que si una es verdadera (falsa) la otra es verdadera (falsa).

Una observación necesaria 2.34 La terminología de los párrafos anteriores no es usual en el lenguaje cotidiano, lo que contribuye en gran medida a la ambigüedad en su uso, pero es indispensable en los lenguajes formales. Por ejemplo, eventualmente usted escuchará o leerá esta afirmación: “Si f es una función derivable, entonces f es continua”. La afirmación debería generar en usted reflexiones como estas:

1. Entonces, saber que una función es derivable es suficiente para poder afirmar que es continua.
2. Ser continua es condición necesaria para ser derivable y, por lo tanto, si sé que una función es discontinua en un punto puedo afirmar que no es derivable en ese punto.
3. El resultado establece que la derivabilidad es suficiente para la continuidad. ¿También será necesaria? Es decir, ¿podré afirmar que si f es continua entonces f es derivable?

Ejercicio 2.35 Explique las diferencias entre estos tres anuncios:

1. “Usted puede solicitar el subsidio de vivienda si es cabeza de familia de estrato 1”.
2. “Usted puede solicitar el subsidio de vivienda sólo si es cabeza de familia de estrato 1”.
3. “Usted puede solicitar el subsidio de vivienda si y sólo si es cabeza de familia de estrato 1”.

Ahora, discuta esta afirmación: Se ha publicado el anuncio 1 y Juan solicita el subsidio de vivienda, no obstante ser cabeza de familia de estrato 2.

Ejercicio 2.36 Considere que en la reglamentación establecida por la Dirección de Impuestos y Aduanas Nacionales se lee “Si sus ingresos totales durante el 2007 superaron los 69 millones de pesos, usted debe presentar declaración de renta correspondiente a ese año”. ¿Por qué razón alguien cuyos ingresos totales fueron de 54 millones de pesos fue multado por no presentar declaración de renta?

Ejemplo 2.37 Anteriormente anotamos que el enunciado "un numero es divisible por 3 si y sólo si la suma de sus cifras también es divisible por 3" es verdadero. Entonces,

1. 1347 es divisible por 3, puesto que satisface **la condición suficiente** para ello: la suma de sus cifras 1 + 3 + 4 + 7 = 15 es divisible por 3.
2. 257 no es divisible por 3 porque **no** satisface la **condición necesaria** para ello. En efecto, la suma 2 + 5 + 7 = 14 **no** es divisible por 3.
3. Puede afirmarse, aun sin conocer el resultado de la multiplicación, que la suma de las cifras del producto 3 x 547688 es divisible por 3. (¿Por qué?)

Conviene anotar que **toda definición convencional es un enunciado de la forma "si y sólo si",** hecho que con frecuencia es omitido en el enunciado de las definiciones y que puede originar confusiones. No es incorrecto decir, por ejemplo, que "Un triángulo es equilátero **si** sus lados son iguales" porque la igualdad de los lados es condición suficiente para que el triángulo sea equilátero. Pero sí es incompleto, porque la condición también es necesaria. Entonces, debería decirse: Un triángulo es equilátero **si y sólo si** sus lados son iguales. Análogamente, debería decirse: una palabra es aguda **si y sólo si** tiene el acento tónico en la última sílaba, un número natural es primo **si y sólo** si tiene exactamente dos divisores, etc.

2.6 FALACIAS LÓGICAS

2.6.1 Falacias

Con los ejercicios 2.35 y 2.36 se quiso mostrar que las conexiones lógicas se pueden distorsionar con facilidad, algunas veces inadvertidamente. Dos ilustraciones adicionales de esta afirmación son las siguientes: la proposición "todos los pájaros pueden volar" no implica lógicamente que todas las criaturas que pueden volar son pájaros; "todos los católicos creen en Dios", no implica lógicamente que quienes no son católicos no creen en Dios. En ambos casos encontramos fácilmente ejemplos que respaldan la afirmación: un murciélago puede volar, y no es pájaro; un protestante no es católico, pero cree en Dios. Igualmente, la afirmación "si compra más de 6 unidades tiene un descuento", **no** implica lógicamente que por **no** comprar más de 6 unidades **no** se obtenga el descuento. Es decir, la situación siguiente **no** es un error contra la lógica:

P_1 Si compra más de 6 unidades tiene un descuento.

P_2 Juan no compró más de 6 unidades.

C. Juan obtuvo el descuento.

En efecto, puede haber múltiples razones por las cuales el dependiente decida hacer un descuento a un cliente que no ha comprado más de 6 unidades, sin transgredir el ofrecimiento hecho (Se trata de un amigo o familiar, son las últimas unidades disponibles, etc.). Lo que no es "lógico" es que el cliente compre más de 6 unidades y no reciba el descuento. Igualmente, supongamos que un padre dice a su hijo: "Si apruebas todas tus materias, te compro el nuevo computador". Supongamos, además, que el hijo no aprueba alguna de sus materias. Si el padre argumenta "No te compro el nuevo computador porque no aprobaste todas las materias", se configura esta situación:

P_1 Si apruebas todas tus materias, te compro el nuevo computador.

P_2 No aprobaste todas tus materias.

C. No te compro el nuevo computador.

Razonar de esta forma es tan incorrecto como afirmar que no crees en Dios porque no eres católico siendo un hecho que todos los católicos creen en Dios. En ambos casos se está incurriendo en distorsiones lógicas. (Una recomendación: si eventualmente usted se encuentra en situación cercana a la del estudiante del ejemplo, no trate de cambiar la decisión de su padre alegando que "su argumento es una distorsión lógica", que "atenta contra la lógica formal"; muy seguramente empeorará la situación). El hecho es que "la lógica cotidiana" tiende a patentar ciertos errores de razonamiento originados muchas veces en imprecisiones del lenguaje. Como lo expresa la profesora Deborah J. Bennett. "Casi todos incurrimos en errores de razonamiento; cometemos errores similares, y los cometemos una y otra y otra vez" [Bennett, p. 15]. En efecto, entendemos que se concluya que no hay descuento por no comprar más de 6 unidades, porque la práctica con el lenguaje nos ha enseñado que la afirmación "**si** compra más de 6 unidades **entonces** tiene un descuento" debe entenderse como, "si compra más de 6 unidades tiene un descuento… pero si no compra más de 6 unidades no lo tiene", es decir, como "tiene descuento si y sólo si compra más de 6 unidades" ¡Y esto <u>sí</u> implica lógicamente que al no comprar más de 6 unidades no se obtiene descuento! De igual manera, el sentido real del ofrecimiento del padre era "Si apruebas todas tus materias, te compro el nuevo computador,… pero si no, no te lo compro", y por esto su decisión de no comprarle el computador por haber perdido alguna materia se entiende como algo lógico o natural. En síntesis, culturalmente "aprendimos" que cuando un condicional expresa un ofrecimiento o una promesa, hay significados implícitos que trascienden el significado y el uso formal del condicional, haciendo más difícil la erradicación de los errores contra la lógica. ¿Cómo no se va a perpetuar el uso incorrecto, con situaciones tan familiares (literal y coloquialmente hablando) como "Si te tomas toda la sopita, puedes comer helado", cuando la intención es "si no te tomas toda la sopita no puedes comer helado"?

La distorsión, en contextos lógicos como los mencionados en el párrafo anterior, recibe el nombre de falacia. Pero en su sentido más amplio, la palabra “falacia” señala un error o una falta en un razonamiento, o en la argumentación. De acuerdo con esto, cada silogismo inválido presenta alguna falacia: la falacia del término medio no distribuido, si no se satisface la condición S2; la falacia del término mayor, si dicho término está distribuido en la conclusión pero no en la premisa mayor, con lo cual no se satisface S3; la falacia de la conclusión afirmativa, cuando la conclusión es afirmativa y alguna premisa es negativa, etc. En término generales, en lógica formal la palabra “falacia” se usa casi siempre con referencia a ciertos errores típicos contra la lógica, presentes en argumentos deductivos inválidos pero aparentemente correctos. En este capítulo nos ocuparemos estrictamente de dos falacias que se presentan cuando una condición suficiente se interpreta como si fuera una condición necesaria, y recíprocamente.

2.6.2 Falacia de la negación del antecedente

En la sección anterior se ilustró repetidamente este error contra la lógica, que se origina al interpretar como necesaria una condición que es sólo suficiente: De “Si es católico entonces cree en Dios” no se concluye que quien no es católico no cree en Dios. Concluirlo así es consecuencia de interpretar erróneamente la condición suficiente “ser católico”, como condición necesaria para creer en Dios, ignorando que se puede creer en Dios sin ser católico. El siguiente es el esquema de la **falacia de la negación del antecedente:**

P_1 Si A entonces B

P_2 No A

C. Entonces no B

Observe que en cada argumento siguiente se incurre en la falacia de la negación del antecedente.

- Beatriz no tiene dentadura perfecta porque no usa crema dental ‘Sonrisas’, dado que toda persona que la usa tiene dentadura perfecta.
- Hoy llegué puntualmente a clases. Porque no había congestión de tráfico. Y cuando hay congestión de tráfico no llego puntualmente a clases.

Es posible que, a primera vista, usted haya considerado que estos razonamientos son válidos. Si así fue, esta es una razón adicional para insistir en que el análisis crítico de los argumentos incluye tanto su contenido como su forma o estructura, por sencillos que parezcan.

2.6.3 Falacia de la afirmación del consecuente

Sabemos que si B es condición necesaria para A, y B no se satisface, es correcto concluir que A no se satisface. Pero cuando la relación de condición necesaria entre dos hechos se expresa en forma de condicional, el manejo inapropiado de tal relación puede originar un error de razonamiento, conocido como **falacia de la afirmación del consecuente.** Se incurre en este error cuando una premisa establece que B es condición necesaria para A, otra establece que B se satisface, y se afirma, como conclusión, que entonces A también se satisface. Lo correcto, insistimos, es que si B no se satisface entonces A no se satisface. Se incurre en la falacia de la afirmación del consecuente cuando se afirma, por ejemplo, que "Juan es buzo profesional porque todo buzo profesional sabe nadar, y Juan sabe nadar".

La falacia de la afirmación del consecuente tiene entonces esta forma:

P_1 Si A entonces B

P_2 B

C. Entonces A

2.7 PROBLEMAS LÓGICOS O DE RAZONAMIENTO LÓGICO

En términos generales, consideramos que tenemos un problema cuando nos vemos obligados a pensar en que debemos hacer algo al respecto de una situación que ha requerido de nuestra atención, voluntaria o involuntariamente. Cada ser humano enfrenta permanentemente problemas de muchas clases y niveles de dificultad: problemas sociales, personales, académicos, abstractos, lógicos, técnicos, etc. La solución de un problema puede ser el resultado de un esfuerzo personal de pocos minutos, o de un empeño colectivo mantenido durante largos períodos; o puede ser una tarea que se adivina ardua y penosa (las investigaciones biomédicas para el desarrollo de una vacuna sintética) o que ha desafiado siglos de esfuerzos (¿Recuerda la conjetura de Goldbach?).

En esta sección trataremos con problemas lógicos, o de razonamiento, como el siguiente:

Ejemplo 2.38 El piloto, el copiloto y el ingeniero de vuelo de una tripulación se llaman Juan, Pedro y Simón, no necesariamente en este orden. El copiloto, hijo único, es el de menor salario. Simón, casado con una hermana de Pedro, gana más que el piloto.

Relacione el nombre de cada persona, con su cargo en la tripulación. [Adaptado de Copi y Cohen, 2004, p. 82].

Los problemas de esta clase, verdaderos rompecabezas lógicos, son diseñados para el ejercicio de la capacidad de razonamiento. Se caracterizan por un enunciado fácil de entender, que proporciona toda la información necesaria para alcanzar la solución y presenta un número relativamente alto de relaciones entre los datos. Estos problemas exigen del lector un proceso continuo de inferencias y de confrontación de estas con las restricciones o condiciones del problema, para decidir si son o no compatibles con ellas. Aun cuando no pertenezcan a la esfera de los problemas del mundo real, retan la habilidad para encontrar formas apropiadas de representar información y la capacidad para concentrar la atención en cada pieza de información y en su relación con los demás.

La solución: En primer lugar, es conveniente separar las premisas y numerarlas porque puede ser necesario hacer referencia a ellas durante el proceso argumentativo.

P_1 El piloto, el copiloto y el ingeniero de vuelo de una tripulación se llaman Juan, Pedro y Simón, no necesariamente en este orden.

P_2 El copiloto, hijo único, es el de menor salario.

P_3 Simón, casado con una hermana de Pedro, gana más que el piloto.

Ahora diseñamos una tabla de tres filas etiquetadas con las profesiones y tres columnas encabezadas con los nombres:

	Juan	Pedro	Simón
Piloto			
Copiloto			
Ing. de vuelo			

1. De P_2 y P_3 se sigue que <u>Pedro no es el copiloto</u> pues Pedro tiene una hermana pero el copiloto es hijo único. Además, según P_3 <u>Simón no es el piloto</u> y <u>tampoco el copiloto</u> que, de acuerdo con P_3, es el de menor salario. Podemos representar estos hechos en la tabla escribiendo “No” en las celdas correspondientes, como se muestra a continuación:

	Juan	Pedro	Simón
Piloto			No
Copiloto		No	No
Ing. de vuelo			

2. De la tercera columna de la tabla anterior se concluye que Simón es el ingeniero de vuelo; de la segunda fila se concluye que Juan es el copiloto.

	Juan	Pedro	Simón
Piloto			No
Copiloto	Si	No	No
Ing. de vuelo			Si

3. Finalmente, Pedro desempeña el cargo que falta, es decir, Pedro es el piloto

Respuesta: Copiloto, Juan; piloto, Pedro; ingeniero de vuelo, Simón.

Ejemplo 2.39 Las piezas de cerámica [Moore 1991, p. 21].

Blanca y sus cuatro amigas, que asistieron a las mismas clases de cerámica, terminaron hace poco sus respectivas obras maestras. Cada una de ellas eligió un tipo distinto de pieza decorativa. Por ejemplo, hubo una que hizo una figura que era el vivo retrato de su perro. Partiendo de las pistas que damos a continuación, determine quién hizo cada una de las piezas y el orden en que las acabaron.

1. Quien hizo el frutero terminó después de quien hizo el cenicero, pero antes que Flora.
2. Carolina, que no eligió hacer una maceta, fue la primera en terminar.
3. Martina terminó antes de que estuviesen terminados el cenicero, que no fue obra de Elvira, y las palmatorias.

Solución: Dispongamos la información original, y la que se deduzca en el proceso de solución, en una tabla, como sigue:

Orden de terminación	1	2	3	4	5
Nombre de la artesana					
Obra maestra					

Indicaremos la precedencia con el símbolo $\rightarrow$. Por ejemplo, para indicar que quien hizo el frutero terminó después de quien hizo el cenicero, pero antes que Flora escribiremos h(ce) $\rightarrow$h(fr) $\rightarrow$ F. 1. La premisa 2 dice que Carolina fue la primera, y la premisa 1 establece que h(ce) $\rightarrow$h(fr) $\rightarrow$ F. Esto último sólo deja dos posibilidades: cenicero (2º) $\rightarrow$frutero (3º) $\rightarrow$Flora (4ª) **o** cenicero (3º) $\rightarrow$frutero (4º) $\rightarrow$Flora (5ª). La primera no es posible porque entonces Martina hubiera acabado en primer lugar según la premisa 3, y esto contradice el hecho de que Carolina fue la primera. Entonces: Carolina fue la primera, Martina la segunda, el cenicero fue hecho de tercero, el frutero de cuarto y Flora fue la quinta en terminar. Traslademos estos resultados a la tabla anterior:

Orden de terminación	1	2	3	4	5
Nombre de la artesana	Carolina	Martina			Flora
Obra maestra			cenicero	frutero	

2. También por la premisa 3 se sabe que Martina terminó antes de que hicieran las palmatorias. Esto deja las palmatorias en quinto lugar. Además, Elvira no hizo el cenicero. Esto significa que en la tabla anterior Elvira no puede ocupar la columna 3. Se configura entonces una nueva tabla:

Orden de terminación	1	2	3	4	5
Nombre de la artesana	Carolina	Martina		Elvira	Flora
Obra maestra			cenicero	frutero	palmatorias

3. Finalmente: de la tabla anterior se deduce que Blanca terminó en tercer lugar. Además, Carolina no hizo la maceta, y esto significa que la hizo Martina, lo cual implica que Carolina hizo el perro. Los resultados finales se muestran en esta última tabla:

Orden de terminación	1	2	3	4	5
Nombre de la artesana	Carolina	Martina	Blanca	Elvira	Flora
Obra maestra	perro	maceta	cenicero	frutero	palmatorias

La prueba conocida como LSAT, Law Schools Admission Test, constituye uno de los criterios de admisión más importantes para las escuelas de Derecho en los Estados Unidos. El examen incluye problemas de razonamiento lógico y de razonamiento analítico. En los de razonamiento lógico es usual encontrar un razonamiento (o un diálogo), y una pregunta relativa al mismo. Una habilidad esencial para responderla es encontrar premisas implícitas o conclusiones implícitas. Los problemas de este tipo generalmente presentan un texto y piden señalar, entre un conjunto dado de opciones, la razón que más debilitaría (o fortalecería) el argumento. El valor de este tipo de ejercicios, en el plano argumentativo, es innegable. También es usual que una pregunta presente un razonamiento equivocado, y pida encontrar, entre cinco opciones, aquella en la que se incurra en el mismo tipo de error. Es frecuente, igualmente, que el examen pida diagnosticar, sin lenguaje técnico, el error presente en un argumento. En los problemas de razonamiento analítico se presenta un conjunto de condiciones, al estilo de los dos problemas lógicos que resolvimos anteriormente, pero esta vez seguidas de un grupo de preguntas basadas en ellas. Esta parte del examen pone a prueba la habilidad para el manejo simultáneo de información compleja y para efectuar procesos de deducción formal. Los dos problemas siguientes corresponden a las dos clases de problemas mencionadas, y aparecen propuestos en *LSAT, Comprehensive program* de Kaplan Publishing, una de las obras más completas y detalladas de preparación para este examen que, incidentalmente, es considerado como muy difícil.

Ejemplo 2.40 Considere este razonamiento: La imprenta produjo libros que resultaron ser significativamente más económicos que las ediciones manuscritas. La demanda de libros impresos en los primeros años después de la invención de la imprenta fue muy superior a la demanda que había existido antes por libros manuscritos. El aumento demuestra que ocurrió un ascenso dramático en el número de personas que aprendieron a leer en los años que le siguieron al inicio de la producción de libros en la imprenta.

¿Cuál de las siguientes afirmaciones, de ser cierta, nos llevaría a **dudar** del razonamiento?

(A) Durante los primeros años después de la invención de la imprenta, hubo un aumento dramático en la práctica de escribir cartas sin la ayuda de escribanos o secretarios.

(B) Los libros producidos en la imprenta a menudo exhiben comentarios escritos en los márgenes, a mano, por las personas que compraron los libros.

(C) En los primeros años después de la invención de la imprenta, los libros impresos fueron adquiridos, principalmente, por personas que siempre habían comprado y leído libros manuscritos costosos, pero ahora podían comprar, por el mismo dinero, una mayor cantidad de libros impresos.

(D) Los libros producidos en la imprenta durante los primeros años después de su invención a menudo eran rotados entre amigos en clubes de lectura informales o en bibliotecas.

(E) Los primeros libros impresos, publicados después de la invención de la imprenta, hubieran sido inútiles para personas analfabetas, dado que los libros casi no tenían ilustraciones.

Solución: El texto concluye que después de que se empezó a usar la imprenta para producir libros aumentó de manera dramática el número de personas que aprendieron a leer. La justificación es que aumentó la demanda de libros, cuando la imprenta los hizo más económicos. En resumen, el argumento es este: aumentó la compra de libros; por lo tanto, aumentó el número de lectores. El razonamiento supone que si se compran más libros, más gente está leyendo. Pero eso no tiene por qué ser verdad: si cierto barón hubiera empezado a comprar un número elevado de libros en aquella época (tal vez aprovechando la reducción en el precio), la demanda hubiera aumentado sin incrementarse la alfabetización. En consecuencia, debemos buscar alguna afirmación que rompa la asociación entre una mayor demanda de libros y un mayor índice de lectores.

La opción (A) dice que aumentó el número de cartas escritas sin escribanos. Esta opción es tentadora, porque es un indicio de que aumentó el número de personas que podían escribir por sí mismas. Sin embargo, esta opción se refiere al número de personas que *escribían*, no al número de personas que *leían*. A pesar de estar relacionados entre sí, estos son conceptos diferentes, y el razonamiento se refiere a *leer*, no a escribir. En todo caso, aun si no hiciéramos la distinción entre leer y escribir, esta opción ayudaría a *fortalecer* el razonamiento, no a debilitarlo; recordemos que debemos ponerlo en duda.

La opción (B) señala que las personas que compraban los libros a menudo les hacían comentarios marginales. Esto indica que los libros no sólo eran comprados, sino leídos. Sin embargo, esto no controvierte el hecho de que más gente hubiera aprendido a leer. De hecho, esta observación no afecta el razonamiento.

La opción (C) indica que los principales compradores de libros fueron los mismos individuos que adquirían libros antes de la imprenta, sólo que ahora aumentaron su demanda de textos en vista del precio más económico. Esta es precisamente la opción que buscamos: es evidente que, si esta afirmación es cierta, la idea de que aumentó el número de lectores colapsa. Son, en efecto, los mismos lectores, pero comprando más libros. La respuesta es **C**.

La opción (D) afirma que los libros impresos a menudo fueron rotados en clubes de lectura. Esto ciertamente no controvierte el hecho de que aumentó el número de lectores. Es más, no nos dice nada sobre lo que sucedía antes de que existieran libros impresos, lo que nos impide comparar los patrones de lectura previos a la imprenta y posteriores a ella. Por ejemplo, si también existían clubes de lectura antes de la imprenta, esta afirmación no afectaría el argumento.

La opción (E) dice que los primeros libros impresos no tenían ilustraciones, por lo cual eran inútiles para analfabetos. De nuevo, como en el caso de la opción (D), esta afirmación no se pronuncia sobre el mundo previo a la imprenta, impidiendo así una comparación efectiva. No obstante, la opción (E), como la (D), ofrece elementos para fortalecer el argumento: los clubes de lectura tendrían un efecto multiplicador frente al número de lectores, y los libros sin ilustraciones exigen verdaderos lectores de textos. Recordemos que estamos buscando información que debilite el razonamiento. Las opciones (D) y (E) no nos ayudan.

Ejemplo 2.41 En una programadora radial disponen de siete espacios consecutivos para cierta transmisión, numerados de 1 a 7. La programadora llenará estos espacios con exactamente seis canciones —G, H, L, O, P, S— y exactamente un boletín de noticias. A cada una de las siete grabaciones se le asignará un espacio distinto, y todas las grabaciones son de la misma extensión. La transmisión está sujeta a las siguientes restricciones:

1. L debe transmitirse inmediatamente antes que O.
2. El boletín de noticias debe transmitirse en algún momento posterior a la transmisión de L.
3. Entre G y P deben existir dos espacios para transmisión, bien sea que G venga antes que P o que P venga antes que G.

Si G se transmite de segunda, ¿cuál de las siguientes grabaciones se transmitirá de tercera?

(A) El boletín de noticias.

(B) H

(C) L

(D) O

(E) S

Solución: En la tabla siguiente se han numerado, desde 1 hasta 7, los espacios consecutivos de transmisión. En ellos debemos programar las seis canciones (G, H, L, O, P, S) y el boletín de noticias (que llamaremos B), todos de igual largo y sin repetición.

1	2	3	4	5	6	7
		?				

1. Simbolicemos con **LO** la primera restricción: L debe transmitirse inmediatamente antes de O.

De esta condición se desprenden dos consecuencias: O no puede ir en el espacio 1, y L no puede ir en el espacio 7 ¿Por qué?) Representemos estos hallazgos en la tabla, así:

1	2	3	4	5	6	7
		?				
¬O						

2. La segunda condición dice que el boletín de noticias, (que hemos decidido llamar B) debe transmitirse en *algún momento posterior* a L. Entonces B debe venir después de L, pero no es necesario que venga inmediatamente después. De hecho, no aparecerá inmediatamente después, porque ese espacio lo ocupa O. Una manera de representar este tipo de relaciones, frecuente en los problemas de lógica, es mediante el uso de puntos suspensivos: **LO … B**

De lo anterior podemos concluir que B no puede ocupar ni el primer puesto ni el segundo en la programación de los espacios y que L no puede ocupar el lugar 6. Llevamos esta información a la tabla:

1	2	3	4	5	6	7
		?				
¬O	¬B				¬L	¬L

3. La tercera restricción señala que entre G y P deben existir dos espacios para transmisión, y que no es necesario que G o que P venga primero. Podemos representar estos espacios intermedios con guiones (un guión por espacio), recordando mediante una disyunción que ni G ni P tienen un puesto fijo, así:

$$(G - - P) \vee (P - - G)$$

A diferencia de lo que sucedió con las restricciones anteriores, de esta no podemos concluir nada definitivo sobre el orden de las grabaciones. Pasemos al supuesto contenido en la pregunta: G se transmite de segunda, y representemos esta información adicional en la tabla:

1	2	3	4	5	6	7
	G	?				
¬O	¬B				¬L	¬L

Ahora, dado que P debe estar separada de G por dos espacios intermedios, concluimos que P tiene que ocupar el lugar 5:

1	2	3	4	5	6	7
	G	?		P		
¬O	¬B				¬L	¬L

Volvamos a la restricción **LO … B.** L no puede ir en el espacio 1, dado que necesitaría a O en el espacio 2, y ese lugar está ocupado por G. Por similar razón L no puede ir en el espacio 4. Como ya se habían descartado 6 y 7 para L, se concluye que L va en el espacio 3. Representémosla, seguida de O, que tiene que venir inmediatamente después de L.

1	2	3	4	5	6	7
	G	L	O	P		
¬O¬B	¬B				¬L	¬L

Se concluye entonces que la respuesta es la C.

Ejercicio 2.42 Con los mismos datos y restricciones del problema anterior, ¿cuál es la respuesta correcta a la pregunta siguiente?

¿El espacio en el que se transmitirá O estará completamente determinado si se transmite G en cuál de los siguientes espacios?

(A) Primero

(B) Tercero

(C) Cuarto

(D) Quinto

(E) Sexto

EJERCICIOS

1. Califique cada una de las afirmaciones siguientes como verdadera o como falsa. Justifique su respuesta:
   a. Se puede mostrar, haciendo explícitos todos sus elementos, que el razonamiento "El aborto no es aceptable pues ningún crimen lo es", es un silogismo de la forma eio–1.
   b. El razonamiento "Llegué retardado a clase. Porque no me levanté temprano. Y cada vez que me levanto temprano, no llego retardado a clase", es un razonamiento falaz.
   c. Para algún valor de n el silogismo de la forma aao–n es válido.
   d. Los silogismos del modo oai son inválidos, no importa cuál sea la figura.

2. Determine la forma de estos silogismos:
   a. Todos los cetáceos son acuáticos.
      Algunos mamíferos son cetáceos;
      Entonces, algunos mamíferos son acuáticos.
   b. Ningún científico es irresponsable
      Todos los ociosos son irresponsables;
      luego, ningún ocioso es científico.

3. En los puntos a–e se dan las dos premisas de un silogismo en forma estándar. Determine, si existe, una posible conclusión tal que el silogismo es válido. Determine la forma del mismo.

   a. Ningún mamífero respira por branquias.
      Todos los solípedos son mamíferos;
      luego...

   b. Todas las personas cultas son atentas.
      Algunos funcionarios no son atentos;
      luego...

   c. Ningún gas tiene volumen constante.
      Todos los gases son cuerpos.
      luego...

   d. Todos los atletas cuidan su salud.
      Nadie que cuida su salud es vicioso;
      luego...

   e. Todos los planetas están sujetos a la gravedad.
      Las estrellas fijas no son planetas;
      luego...

4. ¿Es posible construir un silogismo válido en el cual las dos premisas son particulares?

5. Indique las reglas no satisfechas por los silogismos inválidos, de las formas siguientes:

   a. aaa–2 b. eao–4 c. iaa–3 d. oai–3.

6. Considere el razonamiento siguiente: Si es cierto que algunos insectos no tienen alas y que todos los insectos son animales articulados, entonces algunos animales articulados no tienes alas.

   a. Escriba las premisas y la conclusión del razonamiento.

   b. Determine los términos mayor, menor y medio.

   c. Confronte el razonamiento con las condiciones S2 a S6 y decida si es o no válido.

7. Determine la forma del silogismo siguiente y decida sobre su validez. Si es inválido, detenga su análisis tan pronto encuentre una regla S2-S6 que así lo indique:

   Todo el que estudia cuidadosamente obtiene resultados aceptables en sus exámenes. Ningún haragán estudia cuidadosamente. Entonces, ningún haragán obtiene resultados aceptables en sus exámenes.

8. ¿Encuentra alguna relación entre el resultado que obtuvo en el punto anterior y la falacia de la negación del antecedente? Explique su respuesta.

9. Escriba un silogismo de la forma iai–3. (Los ejemplos en los que se desprestigia a profesionales o a sus profesiones son de muy mal gusto y, por lo tanto, no son bienvenidos). Después, decida sobre la validez del silogismo, usando los dos criterios vistos.

Premisa 1. ______________________________

Premisa 2. ______________________________

Conclusión ______________________________

10. Indique alguna regla S2–S6 no satisfecha por los silogismos de la forma oai–3.

11. Subraye la opción correcta: De las dos afirmaciones siguientes, (ambas) (sólo a) (sólo b) (ninguna) establece(n) que "Tener actitud positiva" es condición suficiente para "no deprimirse con facilidad":

a. No se deprime con facilidad, si tiene actitud positiva.

b. Si no tiene actitud positiva, entonces se deprime con facilidad.

12. Considere esta observación de un funcionario a uno de sus subalternos:

"Usted no me prestó atención. Porque malinterpretó mis indicaciones, y esto no pasa cuando me presta atención". Aquí se identifica un razonamiento que tiene estos elementos:

Premisa 1. ______________________________

Premisa 2. ______________________________

Conclusión ______________________________

Ahora, subraye las opciones correctas: El razonamiento anterior (presenta) (no presenta) la falacia de afirmación del consecuente (pero no) (pero sí) (ni) la de negación del antecedente.

13. Las proposiciones siguientes son la premisa mayor y la premisa menor de un silogismo válido. Escriba la conclusión, determine la forma y pruebe que es válido.

P_1 Todos los viciosos son irresponsables.

P_2 Algunos deportistas no son irresponsables.

C.

14. El propietario de una joyería tiene 10 diamantes, nueve de ellos con exactamente el mismo peso y el décimo con un peso ligeramente diferente. Los diamantes están mezclados. El problema es seleccionar el diamante diferente y decir si es más pesado o más liviano que los otros, utilizando sólo tres veces la balanza.

15. Alicia sabe que el león miente siempre en lunes, martes y miércoles y que nunca miente en los otros días; a su vez, el unicornio miente siempre en jueves, viernes y sábado, pero nunca miente en los otros días. Con este corto diálogo entre león y unicornio, ¿sabe Alicia qué día es?

León: —Ayer tenía que mentir.

Unicornio: —Ayer tenía que mentir.

16. El juego que se describe a continuación es conocido como "La torre de Hanoi". Consta de tres pivotes y un número no fijo de discos ordenados, según el diámetro, de mayor a menor, colocados en el primer pivote. El problema consiste en pasar los discos al tercer pivote de tal manera que al final queden ordenados en la misma forma. Se puede mover sólo un disco a la vez —el de la cima en la pila—, se puede usar como auxiliar el segundo pivote, y nunca puede quedar, en ninguno de los pivotes, un disco sobre otro de menor diámetro. Resuelva el problema, para tres y para cuatro discos. ¿Cuántos movimientos se requieren en cada caso?

17. Un pastor, acompañado de un lobo, una oveja y un bulto de coles, debe cruzar un río, para lo cual debe usar un bote en el cual sólo hay espacio para él y uno de los animales o para él y las coles. Es claro que sin la presencia del pastor, el lobo se comería a la oveja y esta las coles. Dado que el lobo no es vegetariano, el pastor puede dejar al lobo con las coles. Además, si se requiere, en algún momento puede cruzar el río yendo solo en el bote. ¿Qué debe hacer el pastor?

18. Tres misioneros y tres caníbales se encuentran a la orilla izquierda de un río y desean pasar a la orilla opuesta, para lo cual cuentan con un bote que tiene capacidad para dos personas. ¿Cómo pueden pasar todos a la orilla opuesta, si en ningún momento en ninguna orilla puede haber más caníbales que misioneros? (En las comunidades caníbales la restricción se da al contrario: los caníbales no quieren correr el riesgo de ser evangelizados).

19. De los tres prisioneros que había en una cierta celda, uno tenía visión normal, otro sólo un ojo y el otro era completamente ciego. El carcelero les dijo a los prisioneros que, de tres gorros blancos y dos rojos, seleccionaría tres para poner uno en la cabeza de cada prisionero. Nadie podría ver qué color le había correspondido. El carcelero ofreció la libertad al prisionero con visión normal, si podía decir qué color usaba, pero amenazándolo con ejecución si respondía incorrectamente. El primer prisionero no pudo decir qué color tenía. A continuación el carcelero hizo el mismo ofrecimiento al prisionero de un solo ojo, pero tampoco este acertó. Aun cuando no pensaba en molestarse haciendo el ofrecimiento al prisionero ciego, el carcelero accedió a hacerlo, cuando este se lo solicitó. El prisionero ciego dijo:

¡No necesito de mi vista; de lo que mis compañeros de celda han dicho "veo claramente" que el color de mi sombrero es _____! ¿Cómo lo supo?

20. Considere un tablero de ajedrez en el cual las filas están numeradas de 1 a 8, a partir de la base, y las columnas indicadas por letras de a a h, de izquierda a derecha. Suponga que en un momento determinado hay sólo cuatro fichas en el tablero, así: rey negro, en a8; peón blanco, en h2; alfil blanco, en g1 y rey blanco en c8. El problema es este: Acaban de mover las negras. ¿Cuál fue su movimiento? ¿Cuál fue el movimiento de las blancas justo antes de ese movimiento de las negras?

21. Tres hombres terriblemente celosos llegan a la orilla izquierda de un río, en compañía de sus esposas. Las seis personas deben pasar a la orilla opuesta, en un bote con capacidad para sólo dos personas. Ninguna mujer puede quedarse en compañía de un hombre, a menos que su esposo esté presente. ¿Cómo hacerlo?

22. En cierta comunidad mítica los políticos nunca dicen la verdad y los no-políticos siempre dicen la verdad. Un extranjero se encuentra con tres nativos de tal comunidad y le pregunta al primero de ellos: "¿Es usted político?". El nativo responde la pregunta. El segundo nativo dice entonces que el primer nativo negó ser un político. El tercer nativo dice que el primer nativo sí es un político. Sobre la base de esta información justifique estas afirmaciones: el segundo nativo es no-político y sólo uno entre el primero y el tercero es político.

23. Un problema de razonamiento: Elisa, Carla, Ángeles y Esther son artistas de gran talento. Una de ellas es danzarina, otra es cantante, otra es pintora y la otra es escritora, no necesariamente en este orden. Se sabe que: 1. Elisa y Ángeles estaban entre los asistentes al concierto de estreno de la cantante. 2. La pintora ha hecho retratos en vivo de Carla y de la escritora. 3. La escritora, cuya biografía de Esther fue un *best-seller*, piensa escribir una biografía de Elisa. 4. Elisa nunca ha oído hablar de Ángeles. ¿Cuál es cada una de las artistas?

24. Avelino y cuatro jóvenes asisten a clases de Inglés y de Matemáticas en la misma academia de la ciudad. Partiendo de las pistas que vamos a exponer, deduzca el nombre completo de cada estudiante (uno se apellida Cisneros) y a qué horas tiene la clase de Inglés y la de Matemáticas:

1. Todas las clases de la academia empiezan a las horas en punto y duran 50 minutos. El primer período comienza a las 8 de la mañana.
2. Los 5 estudiantes han terminado sus clases de Inglés y de Matemáticas a la 1.50 en la tarde, y todos tienen sus clases de Inglés y de Matemáticas en horas consecutivas, aunque el orden varía. Ninguno de los cinco coincide con otro en ninguna de las clases.
3. Ninguno de los cinco va a clase de Inglés a la una.
4. La única chica que tiene clase de Inglés o de Matemáticas a las ocho coincide todos los días con Alcañiz en la cafetería a las 10.15 de la mañana.

5. Deva tiene clase de Matemáticas durante la hora siguiente a la de Lupe.
6. Alejo, que no se apellida Deva, tiene clase de Inglés mientras Blanes la tiene de Matemáticas, y clase de Matemáticas mientras Blanes la tiene de Inglés.
7. Antes de que Escudero vaya a clase de Inglés o de Matemáticas, Nicolás ha terminado ya las suyas.
8. Nélida, que no se apellida Blanes y que tiene la clase de Inglés antes que la de Matemáticas, ha terminado sus clases a las 11.50 (Tomado de *Los mejores problemas lógicos 2*, Moore, R., p. 124, 1991).

25. El siguiente problema lógico es conocido como "el acertijo de Einstein":

En cada una de cinco casas de color diferente vive una persona con diferente nacionalidad. Los cinco dueños beben una determinada bebida, fuman una determinada marca de cigarrillos y tienen una determinada mascota. Ninguno tiene la misma mascota, fuma la misma marca de cigarrillos o bebe la misma bebida. La pregunta es: ¿Quién tiene el pez? Esta es la información disponible:

1. El británico vive en la casa roja.
2. El sueco tiene como mascota un perro.
3. El danés toma té.
4. La casa verde está a la izquierda de la casa blanca.
5. El dueño de la casa verde toma café.
6. La persona que fuma Pall Mall tiene un pájaro.
7. El dueño de la casa amarilla fuma Dunhill.
8. El que vive en la casa del centro toma leche.
9. El noruego vive en la primera casa.
10. La persona que fuma Blends vive junto a la que tiene un gato.
11. La persona que tiene un caballo vive junto a la que fuma Dunhill.
12. El que fuma Bluemaster bebe cerveza.
13. El alemán fuma Prince.
14. El noruego vive junto a la casa azul.
15. El que fuma Blends tiene un vecino que toma agua.

26. Bevex, un edulcorante artificial que sólo se usa en gaseosas, produce cáncer en ratones, pero sólo cuando se consume en cantidades muy grandes. Para ingerir una cantidad de Bevex equivalente a la que les dieron a los ratones en los estudios pertinentes, una persona necesitaría tomarse 25 latas diarias de gaseosas endulzadas con Bevex. Por esa razón, Bevex no genera problemas de salud para las personas.

Para poder concluir adecuadamente que Bevex no genera problemas de salud para las personas, ¿cuál de las siguientes afirmaciones debe ser cierta?

El cáncer resultante del consumo de sustancias carcinogénicas se desarrolla más lentamente en ratones que en personas.

Si todos los aditivos para la comida que se usan actualmente fueran examinados, algunos demostrarían ser carcinogénicos para los ratones.

La gente toma menos de 25 latas de gaseosa endulzada con Bevex cada día.

Las personas pueden obtener importantes beneficios para su salud si controlan su peso a través del consumo de gaseosas endulzadas con edulcorantes artificiales.

Algunos de los estudios sobre Bevex no se relacionaban con la pregunta acerca de si Bevex produce o no cáncer en las personas.

EJERCICIOS DE OPCIÓN MÚLTIPLE

Instrucciones generales. Lea cuidadosamente los enunciados y seleccione la única respuesta u opción correcta en cada caso. No consulte respuestas individuales. En lugar de ello anote sus respuestas y después compare con las respuestas que se proporcionan al final del texto.

1. "Algunos ex presidentes colombianos reciben la pensión presidencial". La proposición anterior es de tipo:
   (A) a
   (B) e
   (C) i
   (D) o
   (E) u

2. ¿Cuál de las siguientes es una proposición categórica en la que el predicado está distribuido, pero el sujeto no lo está?
   (A) Todos los abogados son amables.
   (B) Algunos bueyes son animales de tiro.
   (C) Dos de cada tres gerentes no son melancólicos.
   (D) Ningún pingüino vuela.
   (E) Casi todas las azafatas son cantantes.

3. Todos los siguientes son silogismos (aunque no sean válidos), **excepto**:
   (A) Todos los cartageneros son alegres. Lo anterior se desprende del hecho de que algunos cartageneros no son médicos, y ningún médico es alegre.
   (B) Algunas liebres no son amables, y toda persona amable es alemana. En consecuencia, algunas liebres son alemanas.
   (C) Todo ornitorrinco nada, y ningún nadador corre. Por lo tanto, algunos ornitorrincos corren.

(D) El 30% de los colombianos fuma, y el 15% de los fumadores contrae cáncer. Por lo tanto, algunos colombianos contraen cáncer.

(E) Algunos pensadores son ágiles, y ningún ser ágil es afortunado. Ciertamente, algunos seres ágiles son pensadores.

4. ¿Cuál es el **modo** del siguiente silogismo?: "Ningún explorador es tacaño, dado que los seres tacaños les temen a las alturas, y ningún ser que le tema a las alturas es explorador".

(A) aee

(B) aee-3

(C) aee-4

(D) eae

(E) eae-3

(F) eaa

(G) 4

5. ¿Cuál es la **figura** del siguiente silogismo?: "Todos los osos comen peces de río. Ningún ser que coma pez de río tiene buen aliento. Por lo tanto, ningún oso tiene buen aliento".

(A) aee-2

(B) aee

(C) 1

(D) 2

(E) eae-2

(F) eae

6. ¿Cuál es la **forma** del siguiente silogismo?: "Algunos animales son afables. Todos los seres afables tienen espinas. En consecuencia, algunos seres con espinas no son animales".

(A) iao

(B) iao-3

(C) iao-4

(D) 3

(E) aio

(F) aio-4

7. ¿Cuál de los siguientes es un silogismo válido?

(A) Algunos samaritanos no son fisiculturistas, y ningún fisiculturista es alegre. En conclusión, todos los samaritanos son alegres.

(B) Todo roedor es inquieto, y todo felino es inquieto. Por lo tanto, algunos roedores no son felinos.

(C) Ningún guarda duerme mientras trabaja. Esto es así, dado que todo guarda medita, y ninguna persona que duerme mientras trabaja medita.

(D) Ningún músico se aburre. Esto es evidente, si tenemos en cuenta que algunas personas que se aburren no son creativas, y además que ningún músico es creativo.

(E) Algunos viajeros no son buenos deportistas, y algunos viajeros no son tranquilos. En consecuencia, algunos buenos deportistas no son tranquilos.

8. ¿Cuál de los siguientes es un silogismo inválido por incumplir el criterio S3 ("Todo término distribuido en la conclusión debe estarlo en la premisa que lo contiene")?

(A) Algunos magos no son profundos. Podemos concluir lo anterior, por dos razones: Ninguna persona profunda es rápida con sus manos, y todo mago es rápido con sus manos.

(B) Todo almirante es atleta. Es correcto llegar a la anterior conclusión, si recordamos que ningún almirante es dócil, y que algunos atletas no son dóciles.

(C) Algunos comerciantes son correctos, dado que todo comerciante es ágil con los números, y dado que algunas personas buenas con los números no son correctas.

(D) En vista de que ningún gato es sacrificado cada año, y de que ningún gato es buey, entonces es claro que algunos bueyes son sacrificados cada año.

(E) Algunos comerciales son violentos, y ningún comercial es un programa de televisión. En consecuencia, algunos programas de televisión no son violentos.

9. Un silogismo de forma eae-1 contiene la siguiente proposición: "Ningún saltimbanqui escala montañas". El término medio del silogismo es "nadador". ¿Qué podemos decir correctamente sobre este silogismo?

(A) Su premisa mayor afirma que el término "saltimbanqui" no está contenido, en su totalidad, dentro de la categoría "nadadores".

(B) Su premisa menor afirma que el término "nadador" está contenido, en su totalidad, dentro de la categoría "saltimbanquis".

(C) El término "nadador" está distribuido en la conclusión, pero no en la premisa menor.

(D) El término "nadador" está distribuido en exactamente una premisa.

(E) El término "nadador" está distribuido en exactamente dos premisas.

10. "Todo actor es modelo, dado que algún cibernauta es actor y además que todo cibernauta es modelo". ¿Cuál es el **modo** del silogismo anterior?

(A) aia

(B) aia-3

(C) iaa

(D) iaa-1

(E) aai

(F) No tiene modo porque en realidad no es un silogismo.

11. Considere las siguientes premisas, que no están en ningún orden particular: "Todo maestro es paciente. Algunas personas alegres no son pacientes". Si añadimos una de las siguientes afirmaciones como conclusión de estas premisas, ¿cuál produciría un **silogismo válido**?

(A) Algunas personas alegres son maestros.

(B) Algunas personas alegres no son pacientes.

(C) Ningún maestro es alegre.

(D) Algunas personas alegres no son maestros.

(E) Ninguna persona alegre es maestro.

12. ¿En cuál de las siguientes oraciones aparece "vestirse a la moda" como una *condición suficiente*?

(A) Todo el que se viste a la moda va a ir a la fiesta.

(B) Si no se viste a la moda, no podrá entrar a la discoteca.

(C) Sólo si se viste a la moda, será admitido a nuestro exclusivo y apetecido club.

(D) Se viste a la moda, si compra nuestro nuevo conjunto de verano colección 2007.

(E) No les daremos tarjetas de invitación al ExpoShow a quienes no se vistan a la moda.

13. ¿En cuál de las siguientes oraciones aparece "programar una reunión" como una *condición suficiente y necesaria*?

(A) Si programamos una reunión, te doy mi teléfono; pero si no lo hacemos, me abstendré de darte mi teléfono.

(B) Sólo si programamos una reunión alcanzaremos a cumplir las metas; eso quiere decir que la única manera de cumplir las metas consiste en programar una reunión.

(C) Si programamos una reunión, nos rinde el tiempo; es más, sólo si programamos una reunión, te obsequio la agenda que te interesaba.

(D) Todo aquel que programe una reunión será admitido al proceso de selección, pero no al revés.

(E) Quienes no programen una reunión habrán perdido su tiempo en este evento.

14. ¿Cuál de los siguientes razonamientos constituye una *falacia de afirmación del consecuente*?

(A) Si alguien mueve esta planta, me dejará sin luz solar. Claramente alguien me dejó sin luz solar, porque movió la planta.

(B) Cualquiera que sepa esquiar puede nadar. Noté que Jaime pudo nadar. Evidentemente, Jaime sabe esquiar.

(C) Sólo si un individuo es socio vitalicio del club, el club organiza una fiesta en su honor. Vi que el club organizó una fiesta en honor de Rodrigo. En consecuencia, Rodrigo es socio vitalicio del club.

(D) Si me gano el concurso, me mandan a Canadá. No me gané el concurso. Lastimosamente, eso quiere decir que no me van a mandar a Canadá.

(E) Si no lleno los formularios a tiempo, no me dan el acta de grado. Me dieron el acta de grado. Por lo tanto, llené los formularios a tiempo.

15. ¿Cuál de los siguientes muestra una proposición en la que "vestirse de negro" es una *condición suficiente (y no necesaria)*?

(A) Nos vestimos de negro y fuimos al matrimonio.

(B) Vamos al coctel si nos vestimos de negro.

(C) Comemos ostras o nos vestimos de negro, pero no ambas.

(D) Si vamos al matrimonio, entonces nos vestimos de negro.

(E) Nos invitan a la ceremonia si y sólo si nos vestimos de negro.

16. ¿En cuál de los siguientes razonamientos vemos que "usar guantes" es una *condición necesaria*?

(A) No voy a la comida de esta noche, y menos si la gente espera que yo use guantes.

(B) La próxima luna llena, si usas guantes, te llamo.

(C) No voy al circo a menos que uses guantes.

(D) Todo el que use guantes va a triunfar en la vida.

(E) Sólo quien se protege del sol usa guantes.

17. ¿Cuál de los siguientes razonamientos muestra una falacia de *afirmación del consecuente*?

(A) Todos los martes vamos a cine. El próximo 13 de febrero es martes. Sobra decir que vamos a ir al cine ese día.

(B) Sólo los que venden repuestos pueden distinguir una pieza original de una pieza china. Mauricio vende repuestos. Por lo tanto, Mauricio puede distinguir una pieza original de una pieza china.

(C) Yo sé que quien ame la música de Madonna está atrapado en los ochentas. No te preocupes, que Laura no está atrapada en los ochentas, porque ella odia la música de Madonna.

(D) Es necesario hervir agua para hacer pasta. Al mediodía comimos pasta. Por lo tanto, quien hizo la pasta hirvió agua.

(E) Yo te había dicho que íbamos a la fiesta, si te dejabas de poner esas gafas oscuras. Veo que te quitaste esas gafas oscuras. ¡Qué bien, eso quiere decir que vamos a la fiesta!

Respuestas a los ejercicios de opción múltiple

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
C	C	E	A	C	C	C	E	D	A	D	A	A	B	B	C	B

CAPÍTULO 3

Lógica simbólica
Lógica proposicional

3.1 INTRODUCCIÓN

En el primer capítulo se indicó que la Lógica tiene como objetivo diferenciar entre razonamientos válidos y razonamientos no válidos, y en el segundo se consideró el aporte de la lógica aristotélica al logro de este objetivo, para el caso de los silogismos categóricos. Sin embargo, como no todo argumento es silogístico —o susceptible de ser puesto en forma silogística equivalente—, los criterios estudiados resultan insuficientes para decidir sobre la validez de los razonamientos deductivos en general. En este capítulo aprenderemos que la lógica simbólica moderna proporciona criterios más generales de validez y herramientas de uso sistemático para la aplicación de tales criterios. Esto amplía la capacidad para decidir sobre validez de razonamientos deductivos.

Para aplicar el criterio de validez de razonamientos provisto por la lógica simbólica, el razonamiento debe ser representado con símbolos de un alfabeto previamente establecido. Por esta razón inicialmente nos referiremos al uso de la lógica simbólica como sistema de representación de información. Sin embargo, es necesario tener siempre en cuenta que este uso es convencional, es decir, que deben convenirse previamente su alcance y limitaciones, puesto que ningún sistema simbólico logra capturar con exactitud todos los matices y peculiaridades del lenguaje natural. Por ejemplo, es un hecho que los enunciados “Juan es pobre y generoso” y “Juan es pobre pero generoso” tienen significados diferentes en el lenguaje cotidiano. No obstante, veremos que los dos enunciados se representan de igual forma en el lenguaje de la lógica proposicional. Sin embargo, veremos también que estas simplificaciones no afectan el valor práctico del criterio de decisión para validez de razonamientos deductivos.

En español —y posiblemente esto es cierto en todos los lenguajes naturales— no siempre los enunciados tienen un significado inequívoco. Por ejemplo, la expresión "La vendedora entró colada por la puerta del estadio" tiene dos significados en nuestra región, según el uso del término "colada". Uno de estos significados es que la vendedora entró al estadio eludiendo el pago; el otro, que la vendedora —presumiblemente vendedora de colada— entró ese tipo de bebida a través de la puerta del estadio. Análogamente, la frase "Ayer vi a un señor con un telescopio" tiene dos significados posibles, como bien puede concluir el lector.

El uso del condicional proporciona ejemplos adicionales de ambigüedad. Por ejemplo, con la expresión "Juan me explica el problema si tengo alguna duda", se está indicando que es suficiente tener alguna duda, para contar con la ayuda de Juan, esto es, que tener alguna duda es condición suficiente para recibir la explicación de Juan. En cambio, en la afirmación "Juan me explica el problema, si tiene tiempo", el contexto permite pensar que "tener tiempo" es condición necesaria para que Juan le explique el problema. Las dos proposiciones tienen la misma estructura y, sin embargo, el condicional está utilizado con diferente propósito. La lógica simbólica debe precisar significados para eliminar ambigüedades como esta.

La multiplicidad de significados y funciones gramaticales de una misma palabra, el empleo de expresiones idiomáticas y la carga emocional de las frases son algunos factores que deben considerarse en el análisis de los argumentos para decidir sobre su corrección o admisibilidad. Por esto, un primer paso en el desarrollo de herramientas formales de análisis para validez de razonamientos deductivos es eliminar, en lo posible, las imprecisiones y ambigüedades propias del lenguaje natural. Con este propósito se construye un lenguaje formal, lo cual requiere:

1. Especificar el alfabeto utilizado.
2. Hacer explícitas las reglas para producir elementos del lenguaje y para decidir si una cadena específica es o no un elemento de ese lenguaje.
3. Asignar significados inequívocos a los elementos del lenguaje.

La lógica simbólica moderna es un lenguaje que satisface estos requerimientos.

3.2 EL LENGUAJE DE LA LÓGICA PROPOSICIONAL, L(P)

La lógica proposicional es un lenguaje formal que permite decidir acerca de la validez o invalidez de una amplia clase de razonamientos deductivos, sobre la base de la representación simbólica de las proposiciones que intervienen en el razonamiento y de las conexiones entre ellas.

El alfabeto o conjunto de caracteres de la lógica proposicional, que representaremos con P, tiene símbolos de cuatro clases:

1. <u>Símbolos de variables proposicionales o átomos</u>: p, q, r, s,..., w (p_1, p_2,..., si se requiere).

   Estos símbolos se utilizan para representar proposiciones atómicas, es decir, proposiciones que no pueden descomponerse en otras más simples. Ejemplos:

   p: llueve, q: hace frío, r: hoy es martes.

2. <u>Símbolos de conectivos (u operadores) lógicos o proposicionales</u>. Son los símbolos que se presentan en la Tabla 3.1. Se utilizan en la representación de proposiciones compuestas, mediante una conexión entre los símbolos que representan las proposiciones atómicas que las componen. Por ejemplo, con los símbolos p y q como en el numeral 1 anterior, "llueve y hace frío" se representaría por $p \wedge q$, en tanto que "llueve pero no hace frío" se representaría por $p \wedge \neg q$. En la tercera columna de la tabla se indica cómo se lee cada conectivo en una expresión de la lógica proposicional. Por ejemplo: $\neg p$ se lee como "no p" o como "es falso que p" o "p es falso". En la última de la derecha se da un ejemplo para cada caso.

3. <u>Símbolos de puntuación.</u> Son los paréntesis abierto "(" y cerrado ")". Se utilizan para agrupar, con fines sintácticos o de claridad, partes de una expresión. Por ejemplo, en lugar de escribir $p \vee q \Rightarrow r$ escribiremos $(p \vee q) \Rightarrow r$ o $p \vee (q \Rightarrow r)$, según el significado de la expresión representada.

4. <u>Símbolos de constantes lógicas</u>. Son los símbolos V y F. Su significado se presenta en la sección 3.6.1.

Tabla 3.1 Conectivos lógicos o conectivos proposicionales

Símbolo	Nombre usual	En una fórmula se lee	Ejemplo
$\neg$	negación	no, es falso que	$\neg p$: no p
$\vee$	disyunción	o	$p \vee q$: p o q
$\wedge$	conjunción	y	$p \wedge q$: p y q
$\Rightarrow$	condicional	si… entonces…	$p \Rightarrow q$: si p entonces q
$\Leftrightarrow$	bicondicional	…si y sólo si…	$p \Leftrightarrow q$: p si y sólo si q

Se llaman **fórmulas** de la lógica proposicional a las cadenas o expresiones resultantes de concatenar o yuxtaponer símbolos del alfabeto **P**. Por ejemplo: p, $\neg p \vee q$, $((\neg q \Rightarrow s) \Rightarrow q)$, y $(\neg\neg r \Leftrightarrow (r \neg \Rightarrow t))$, son fórmulas. Pero sólo las fórmulas que satisfacen ciertas reglas de sintaxis, y que se llaman fórmulas bien formadas, (FBF), hacen parte de lo que llamaremos el lenguaje de la lógica proposicional, L(**P**).

3.3 FÓRMULAS BIEN FORMADAS. SINTAXIS EN LA LÓGICA PROPOSICIONAL

El proceso de comprensión de una oración en lenguaje natural requiere del análisis sintáctico. Este análisis permite decidir si la frase está o no construida de acuerdo con las reglas gramaticales propias del lenguaje. Por ejemplo, "el llanero solitario canta una canción", es una frase sintácticamente correcta, pero no lo es "una el solitario canción llanero canta". Cada lenguaje, natural o artificial, requiere un criterio para decidir cuándo una cadena de símbolos de su alfabeto pertenece al lenguaje, es decir, está bien construida. En el caso particular del lenguaje de la lógica proposicional ese criterio debe concluir que una cadena como $((\neg q \Rightarrow s) \Rightarrow q)$ está bien construida —y por lo tanto pertenece al lenguaje L(P)— mientras que otra como $(\neg\neg r \Leftrightarrow (r \neg \Rightarrow t))$ presenta por lo menos un error de sintaxis y por lo tanto no pertenece a dicho lenguaje.

Definición 3.1 Las siguientes cadenas de símbolos de **P**, el alfabeto de la lógica proposicional, son fórmulas bien formadas y no hay otras que lo sean:

F1. Los símbolos de variables proposicionales o átomos: p, q, r, s,..., w.

F2. Las fórmulas que resulten de anteponer a una fórmula bien formada el símbolo de negación $\neg$.

Por ejemplo, $\neg p$ es fórmula bien formada, porque p lo es. Y con base en esto, $\neg\neg p$ también es FBF.

F3. Las fórmulas que resulten de conectar con un conectivo binario y después delimitar con paréntesis, dos fórmulas bien formadas. Si A y C son tales FBF, las nuevas FBF serán $(A \vee C)$, $(A \wedge C)$, $(A \Rightarrow C)$ y $(A \Leftrightarrow C)$.

Por ejemplo, ya sabemos que $\neg p$ es FBF y que también lo es q. Según F3, $(\neg p \vee q)$ es FBF. Porque conectamos mediante el conectivo $\vee$ dos FBF y obtuvimos $\neg p \vee q$, y después delimitamos con paréntesis la expresión resultante. Observe que reiterando el argumento podemos concluir que $((\neg p \vee q) \Rightarrow (s \Leftrightarrow r))$ es una FBF.

Recuerde: Las cadenas que resulten de aplicar los casos anteriores son FBF y sólo ellas lo son.

Ejemplo 3.2 Mostremos que $((p \Rightarrow q) \wedge r)$ es fórmula bien formada.

Sabemos que p, q y r son FBF, según F1. Entonces $(p \Rightarrow q)$ es FBF, por F2. Finalmente, también por F2, $((p \Rightarrow q) \wedge r)$ es una fórmula bien formada.

Ejemplo 3.3 $(p \vee \neg r \Rightarrow t)$ no es FBF. En efecto, cada vez que dos FBF se enlazan con un conectivo binario el resultado debe delimitarse con paréntesis. Esto no es así en $p \vee \neg r$, ni en $\neg r \Rightarrow t$. Por lo tanto la fórmula no es FBF.

Observación 3.4 Note que, según los casos descritos en la definición 3.1, ninguna de las cadenas $p \vee q$, $\neg r \Rightarrow s$, $(p \vee r) \Rightarrow t$ es FBF y que la única razón para no serlo es la ausencia de paréntesis exteriores. Pero, ¿hay riesgo de ambigüedad por no utilizarlos? Realmente no, pues los paréntesis determinan las subfórmulas de una fórmula dada, así que no es necesario usarlos como delimitadores de la fórmula total, pues no hay lugar a ambigüedad. Esta es la única excepción que haremos al uso de los paréntesis al calificar una fórmula como FBF.

Observación 3.5 A veces se hace una reducción adicional del número de paréntesis, mediante la adopción de una jerarquía entre los conectivos. Haciendo uso de tal jerarquía y de lo anotado anteriormente sobre los paréntesis externos, se escribiría $p \Rightarrow q \wedge r$ en lugar de $(p \Rightarrow (q \wedge r))$. Sin embargo, aquí no haremos uso de jerarquía de conectivos como elemento para eliminación de paréntesis porque es preferible mantenerlos, así parezcan innecesarios, que correr el riesgo de alterar el significado de una expresión o de obtener una expresión ambigua, por no utilizarlos.

3.4 CONTENIDO SEMÁNTICO DE LAS FÓRMULAS BIEN FORMADAS

3.4.1 Introducción

Ya consideramos la sintaxis de las cadenas de símbolos en el lenguaje L(P) y presentamos un criterio para decidir cuándo una fórmula es fórmula bien formada. Si este fuera el único aspecto por considerar, la lógica proposicional sería de poca o ninguna utilidad para los propósitos de este curso. Sin embargo, dotando de significados a las fórmulas bien formadas se obtiene una aplicación de la lógica formal en la determinación de la validez o invalidez de una amplia clase de razonamientos deductivos.

Los conectivos lógicos $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ son elementos del alfabeto P de la lógica proposicional que operan sobre átomos o fórmulas y producen nuevas fórmulas. Estos conectivos serán presentados aquí en una doble perspectiva: para propósitos de representación simbólica, y definiéndolos mediante sus valores de verdad. En el primer caso se utilizan para representar determinadas expresiones del lenguaje ordinario; en el segundo se establece un criterio para asignar los valores V o F —que interpretaremos como verdadero o falso— a las fórmulas bien formadas. El criterio para asignar a una FBF un valor V o F debe reflejar, en cada caso, el uso dado al conectivo en la representación simbólica. En ambas perspectivas se mantiene el acuerdo implícito en la comunicación ordinaria, según el cual el enunciado de una proposición declarativa lleva implícita la afirmación de que lo que afirma es verdad. Por ejemplo, cuando decimos "el oxígeno es necesario para la vida" estamos afirmando que "es verdad que el oxígeno es necesario para la vida". Igualmente, la declaración "Juan sabe inglés y alemán", conlleva el significado "es verdad que Juan sabe inglés y también lo es que sabe alemán". La situación es similar en lógica simbólica: si el átomo p simboliza una proposición, la notación p conlleva el significado "p es verdadera", o "es verdad que p". Por ejemplo, si utilizamos el símbolo p para representar la proposición atómica "el oxígeno es necesario para la vida" la aparición de p en una fórmula debe entenderse como la afirmación "el oxígeno es necesario para la vida". Como veremos, esta convención se extiende a los significados de las FBF.

En lo que sigue se describe la función de los conectivos lógicos, específicamente entre átomos. Posteriormente se generaliza su función para conectar fórmulas en general.

3.4.2 Negación

Supongamos que el átomo p representa la afirmación p: Isabel es calculista. Entonces cualquiera de las afirmaciones "Isabel no es calculista", "es falso que Isabel es calculista", "es un hecho que Isabel no es calculista", "no es el caso que Isabel es calculista", formas de negar la afirmación inicial, se representa con la fórmula $\neg p$. La FBF $\neg p$, que leeremos "no p" representa la negación de p. En el lenguaje natural corresponde a las expresiones que se enuncian, a partir de la proposición representada por p, como "no p", "es falso que p", "no es cierto que p", "p es falsa" y otras equivalentes. Otros ejemplos: Si q representa la afirmación $a = b$, $\neg q$ representa la afirmación $a \neq b$; si con r representamos el enunciado $a \in A$, entonces representaremos con $\neg r$ la afirmación $a \notin A$.

3.4.3 Conjunción

Si p y q representan proposiciones atómicas, la cadena de símbolos $p \wedge q$ (se lee "p y q") representa la conjunción de tales proposiciones. Con esta fórmula se representan las expresiones que se enuncian, a partir de las proposiciones representadas por p y q, como "p y q", "p pero q", "p y también q", "p y sin embargo q", y otras equivalentes. Indica la ocurrencia simultánea de los eventos enunciados por las dos proposiciones. Por ejemplo, si con p y q se representan las afirmaciones "Pedro es alto" y "Pedro es delgado", respectivamente, entonces la fórmula $p \wedge q$ representa cualquiera de las afirmaciones "Pedro es alto y delgado", "Pedro es alto pero delgado", "Pedro es alto y sin embargo es delgado", "Pedro es alto aunque también es delgado", y otras equivalentes. El símbolo $p \wedge q$ conlleva la afirmación de que las dos proposiciones, p y q, son verdaderas, tanto en el contexto de conjunción copulativa: "Juan es pobre y generoso", como de conjunción adversativa: "Juan es pobre pero generoso".

Cabe aquí una observación: en el proceso de representación simbólica es necesario tener siempre presentes los significados convencionales. Por ejemplo: la proposición "Los números 2 y 7 son primos" es una proposición compuesta, de la forma $p \wedge q$, pero la proposición "Los estudiantes Diego y Andrés son primos" es una proposición atómica.

3.4.4 Disyunción

Si p y q representan proposiciones atómicas, la cadena de símbolos $p \vee q$ (se lee "p o q") representa la disyunción de tales proposiciones. Corresponde a las expresiones del lenguaje natural que se enuncian, a partir de las proposiciones representadas por p y q, como "p o q", "p o q o ambas", "por lo menos una, entre p y q", y otras equivalentes. Indica que por lo menos una de las dos proposiciones es verdadera. Por ejemplo, si p representa la proposición "los funcionarios de la embajada saben inglés" y q "los funcionarios de la embajada saben francés", entonces la FBF $p \vee q$ representa las afirmaciones "los funcionarios de la embajada saben inglés o francés", "los funcionarios de la embajada saben por lo menos inglés o francés", "los funcionarios de la embajada saben inglés o francés o los dos".

En el lenguaje cotidiano la disyunción tiene dos usos. Uno de estos es conocido como "inclusivo": lo uno, o lo otro, o ambos; el segundo es conocido como "exclusivo": lo uno, o lo otro, pero no ambos. El primer caso se presenta, por ejemplo, cuando decimos: Si ab = 0 entonces a = 0 o b = 0, porque en este caso una opción no excluye a la otra porque puede suceder que ambos, a y b, sean 0. "Lleve con usted la cédula o el pasaporte", es también un ejemplo de uso inclusivo de la disyunción. En contraste, "Llegaré el miércoles en la noche o el jueves en la mañana" y "Permítame ver su cédula o su pasaporte" ilustran usos de la disyunción en sentido exclusivo. En el primero de estos casos es evidente que una alternativa excluye a la otra, pero en el segundo la exclusión es convencional, pues aun cuando no se espera que el aludido muestre ambos documentos, la expresión no indica que no pueda hacerlo.

El doble uso de la disyunción en el lenguaje usual y la ambigüedad que de ello puede derivarse, son incompatibles con la unicidad de significados deseable en un lenguaje formal como lo es la lógica simbólica. Para eliminar tal ambigüedad adoptaremos esta convención: La disyunción "o" será usada siempre en sentido inclusivo, es decir, el símbolo $p \vee q$ tiene siempre el significado "p, o q, o ambas". El sentido exclusivo debe ser declarado explícitamente utilizando la forma "… o …, pero no ambos", como en "x pertenece al conjunto A o x pertenece al conjunto B, pero no a ambos". Algunas veces se usa la forma "o…, o..." para significar que la disyunción es exclusiva, como en "o x pertenece a A, o x pertenece a B", pero esta práctica no es tan generalizada como para considerarla segura y nosotros no la utilizaremos con este significado. Tampoco la notación simbólica es única para la disyunción exclusiva, pero nosotros adoptaremos una de las más utilizadas: $p \oplus q$. (Tenga presente que $\oplus$ no es un conectivo proposicional; es un símbolo creado para denotar un vínculo que, como veremos a continuación, puede expresarse por intermedio de los conectivos proposicionales ya definidos).

La cadena de símbolos $p \oplus q$ indica que exactamente una entre p y q es verdadera, es decir, que alguna de las dos es verdadera pero es falso que ambas lo son. Este significado se puede expresar mediante los conectivos ya estudiados. En efecto: "alguna de las dos es verdadera" se representa como $(p \vee q)$; "ambas son verdaderas", se representa con $(p \wedge q)$; y, "es falso que ambas son verdaderas" se representa con $\neg(p \wedge q)$. Finalmente, "alguna de las dos (es verdadera) pero no las dos", se representa con $(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$. Por esta razón adoptamos la siguiente definición del conectivo derivado "o exclusivo", donde el símbolo $\equiv$ se lee "es lógicamente equivalente a":

$$p \oplus q \equiv (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q) \qquad (3.1)$$

3.4.5 Condicional

Si p y q representan proposiciones atómicas, la fórmula $p \Rightarrow q$ (se lee "si p entonces q" o, con menos frecuencia, "p implica q"), representa la relación entre p y q que se expresa en el lenguaje usual en cualquiera de estas formas: "si p entonces q", "p sólo si q", "q, si p", "es necesario q para p", "es suficiente p para q", "no p a menos que q", "no es posible que p y no q", "p implica q" y las que les sean equivalentes. Por ejemplo, si con p y q representamos las proposiciones p: hoy es martes y q: mañana es miércoles, con $p \Rightarrow q$ representamos cualquiera de las siguientes afirmaciones:

Si hoy es martes, **entonces** mañana es miércoles.

Hoy es martes, **sólo si** mañana es miércoles.

Mañana es miércoles, **si** hoy es martes.

Es necesario que mañana sea miércoles para que hoy sea martes.

Es suficiente que hoy sea martes para que mañana sea miércoles.

Hoy no es martes, **a menos** que mañana sea miércoles.

No es posible que hoy sea martes **y** mañana **no** sea miércoles.

En un enunciado condicional, la proposición que acompaña a "si" es llamada **antecedente**; la otra, que puede o no estar precedida de "entonces" es llamada **consecuente**. Esto significa que al escribir la proposición en cualquiera de las formas "si p entonces q", "si p, q", o "q, si p", p es el antecedente y q el consecuente. En la proposición "si hoy es martes, (entonces) mañana es miércoles", "hoy es martes" es el antecedente y "mañana es miércoles" es el consecuente. Observe que la última expresión en la lista de usos del condicional equivale a, "**No es posible** que el antecedente sea verdadero y que el consecuente sea falso", una de las caracterizaciones más significativas del condicional, como se ilustra en estos ejemplos:

1. Si es médico, entonces sabe anatomía $\equiv$ No es posible ser médico y no saber anatomía.
2. Si un número es divisible por 2, termina en cifra par $\equiv$ No es posible que un número sea divisible por 2 y no termine en cifra par.
3. Si el silogismo es válido, satisface S2 $\equiv$ No es posible que el silogismo sea válido y no satisfaga S2.

Es necesario reiterar que el condicional nada afirma sobre la verdad del antecedente o la del consecuente por separado; sólo afirma que si el antecedente es verdadero, el consecuente también lo es, o, en forma equivalente, que no es posible que el antecedente sea verdadero y simultáneamente el consecuente sea falso. Esto significa que el condicional puede considerarse como un conectivo derivado, en cuyo caso podría definirse de esta forma:

$$p \Rightarrow q \equiv \neg(p \wedge \neg q) \qquad (3.2)$$

Ejemplo 3.6 Supongamos que los átomos p y q representan estas proposiciones:

p: El entero n es divisible por 3.

q: La suma de las cifras del número n es múltiplo de 3.

¡Cada una de las 7 oraciones siguientes se representa simbólicamente como $p \Rightarrow q$!:

1. Si el entero n es divisible por 3, entonces la suma de los dígitos de n es múltiplo de 3.
2. El entero n es divisible por 3 sólo si la suma de los dígitos de n es múltiplo de 3.
3. La suma de los dígitos del número n es múltiplo de 3 si n es divisible por 3.
4. Es necesario que la suma de los dígitos de n sea múltiplo de 3 para que n sea divisible por 3.
5. Es suficiente que el entero n sea divisible por 3 para que la suma de sus dígitos sea múltiplo de 3.
6. Un entero no es divisible por 3, a menos que la suma de sus dígitos sea múltiplo de 3.
7. No es posible que un entero sea divisible por 3 y que la suma de sus dígitos no sea múltiplo de 3.

Ninguna de las oraciones anteriores afirma que "el entero n es divisible por 3" (antecedente), ni que "la suma de los dígitos de n es múltiplo de 3" (consecuente). Sólo afirman que cada vez que un entero es divisible por 3, la suma de los dígitos del número es múltiplo de 3.

3.4.6 Usos del condicional

En la sección anterior mencionamos los usos diferenciados de la disyunción "o" y convinimos en atribuirle sentido inclusivo —salvo que explícitamente se dijera otra cosa— para evitar ambigüedad en las aplicaciones de la lógica simbólica. También el condicional se utiliza con diferentes significados, como puede apreciarlo el lector en los casos siguientes:

1. **Si** ABC es un triángulo rectángulo, **entonces** ABC tiene un ángulo recto.
2. **Si** todo asesor tributario es contador o economista y Joaquín es asesor tributario pero no es economista, **entonces** Joaquín es contador.
3. **Si** una mujer da a luz una niña, **entonces** el sexo de esta fue determinado por el aporte de un cromosoma X de parte de su progenitor masculino.
4. **Si** tu papá es multimillonario, **entonces** yo soy Bill Gates.

Observe que en el primer caso la relación entre el antecedente y el consecuente se origina en la definición misma de triángulo rectángulo; en el segundo, el consecuente es una consecuencia lógica del antecedente; en el tercero, la relación expresa un hecho de la naturaleza. Finalmente, en el cuarto caso el condicional se utiliza con la intención de negar enfáticamente la posibilidad de que el antecedente sea verdadero.

Pese a su aparente diversidad, estos cuatro usos del condicional "si…entonces…" comparten un carácter esencial: afirmar que si el antecedente es verdadero, el consecuente también debe serlo, es decir, que no es posible que el antecedente sea verdadero y simultáneamente el consecuente sea falso: No es posible que ABC sea un triángulo rectángulo y no tenga un ángulo recto; no es posible que todo asesor tributario sea contador o economista y que Joaquín sea asesor tributario no economista, y sin embargo Joaquín no sea contador; etc. Como se dijo anteriormente, este significado se recoge en la definición $p \Rightarrow q \equiv \neg(p \wedge \neg q)$.

Se recomienda al lector repasar en este momento la sección 2.5, que establece la relación entre el enunciado condicional y las condiciones suficiente y necesaria.

3.4.7 El bicondicional

Si p y q representan proposiciones, el símbolo $p \Leftrightarrow q$ (que se lee "p si y sólo si q") se utiliza como expresión abreviada de la conjunción $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$, y por lo tanto deriva de esta su significado: si p es verdadera, entonces q es verdadera, y si q es verdadera, entonces p es verdadera. (De aquí se deduce que si una de las dos proposiciones es falsa, la otra también lo es). En síntesis, la fórmula $p \Leftrightarrow q$ afirma que p y q son ambas verdaderas o son ambas falsas. Cuando esto es verdad decimos que p y q son lógicamente equivalentes y escribimos $p \equiv q$. En la sección siguiente estudiaremos el significado del bicondicional como parte esencial de algunas definiciones y del enunciado de algunos teoremas.

3.4.7.1 El bicondicional y las definiciones

Al finalizar la sección 2.5 dijimos que toda definición convencional es un enunciado de la forma "… si y sólo si…". En estas definiciones se estipulan condiciones suficientes y necesarias para la propiedad definida. Es el caso de definiciones como:

- Un entero positivo es primo si y sólo si tiene exactamente dos divisores positivos: 1 y el mismo entero.
- Una cadena, palabra o frase sobre un alfabeto dado es un palíndromo si y sólo si se lee igualmente de izquierda a derecha que de derecha a izquierda (haciendo caso omiso de los espacios en blanco, si existen).

Como es de esperar, la definición de un concepto en términos de condición suficiente y necesaria establece condiciones de inclusión y exclusión en el conjunto de los elementos caracterizados por el concepto. Así, por ejemplo, la definición de número primo incluye en esta categoría a todos los enteros que tienen exactamente dos divisores positivos en tanto que excluye de ella al 1 y a los enteros que tienen más de dos divisores. Entonces, $n = 17$ es primo porque tiene exactamente dos divisores positivos: 1 y 17. Análogamente, como los únicos divisores positivos de 23 son 1 y 23, entonces 23 es número primo. En cuanto a la condición necesaria, 9 no es primo porque tiene más de dos divisores : 1, 3, y 9; 1 no es primo, porque tiene sólo un divisor positivo: 1.

En la sección 2.5.7 mencionamos el hecho de que si A es condición suficiente y necesaria para B, entonces B es también condición suficiente y necesaria para A, dado que las dos condiciones se implican mutuamente. Para el caso de la definición de número primo, esto significa que tener exactamente dos divisores es condición suficiente y necesaria para que un número sea primo. Entonces, si un enunciado particular afirma que un entero p es primo, de inmediato sabemos que p es diferente de 1 y tiene sólo dos divisores positivos, que son 1 y p; igualmente, si un enunciado afirma que un número p distinto de 1 no es primo, de inmediato sabemos que tiene algún divisor d, que es distinto de 1 y de p mismo. En los ejercicios sobre técnicas de demostración se pide al estudiante probar este resultado: Si p es un número primo, y p no es divisor de a, entonces el máximo común divisor de p y a, es 1. (Por ejemplo, 5 es primo y no es divisor de 12 y el máximo divisor común de 5 y 12 es 1). En la demostración se utiliza el hecho de que por ser p un número primo, sus únicos divisores son 1 y p.

En cuanto a la noción de palíndromo, la condición suficiente o de inclusión indica que "amor a Roma", "20 02 2002" (20 de febrero de 2002), "A man, a plan, a canal: Panama", y el famoso "dábale arroz a la zorra el abad", son palíndromos, porque se leen igualmente de izquierda a derecha, que de derecha a izquierda. Por otra parte, la condición necesaria o de exclusión indica que cadenas como "2003", "no tienes espíritu aventurero", no son palíndromos.

3.4.7.2 El bicondicional y los teoremas

Un teorema como "Si a y b son reales positivos entonces el producto ab es un real positivo" es de la forma "si H entonces T". El resultado recíproco, "si ab es un real positivo entonces a y b son reales positivos", es falso. (¿Por qué?). Sin embargo, muchos teoremas tienen la forma "H si y sólo si T". Por ejemplo:

1. El cuadrado de un entero es par si y sólo si el entero es par.
2. El producto ab es 0 si y sólo si a es 0 o b es 0.

Estos enunciados establecen una relación mutua de suficiencia y necesidad entre dos propiedades. El primero asegura que es suficiente y necesario que un entero sea par, para que el cuadrado del entero sea par y asegura también que es suficiente y necesario que el cuadrado de un entero sea par para que el entero mismo sea par. Esta relación mutua de suficiencia y necesidad entre H y T explica por qué al demostrar estos teoremas, se debe desarrollar una argumentación que pruebe dos hechos: Uno, que H es suficiente para T (con lo cual quedará probado que T es necesario para H); el otro, que T es suficiente para H (con lo cual quedará probado que H es necesario para T). Sólo así quedará establecida la validez del teorema propuesto.

En la sección destinada a técnicas de demostración volveremos sobre el tema. En este momento nos interesa solamente establecer la relación entre el bicondicional y los teoremas de este tipo.

3.5 REPRESENTACIÓN SIMBÓLICA

Los elementos desarrollados en la sección anterior permiten avanzar en uno de los propósitos más importantes de este capítulo: el uso del lenguaje L(**P**) para representar simbólicamente enunciados del lenguaje natural. A continuación se presentan algunos ejemplos.

Ejemplo 3.7 Representar en el lenguaje L(**P**) la frase: "Si la sequía persiste no sólo se secarán los pastos sino que aumentarán los incendios forestales".

Solución: Primero se identifican las proposiciones atómicas que intervienen en el enunciado. Ellas son: "la sequía persiste", "se secarán los pastos" y "aumentarán los incendios forestales".

A continuación se las representa con átomos. Por ejemplo:

p: La sequía persiste.

q: Se secarán los pastos.

r: Aumentarán los incendios forestales.

Escribamos el enunciado original en una forma que permita identificar más fácilmente los conectivos que contiene: "Si la sequía persiste, entonces se secarán los pastos y aumentarán los incendios forestales". El contexto y la forma del enunciado original indican que la representación correspondiente es $p \Rightarrow (q \wedge r)$.

Ejemplo 3.8 Representar la afirmación: "Se sabe que si continúa la incertidumbre habrá un aumento en las tasas de interés; se sabe también que la devaluación será acelerada".

Utilizaremos los átomos p y q con los significados siguientes:

p: Continúa la incertidumbre.

q: Habrá alza en la tasa de interés.

r: La devaluación será acelerada.

Con estos átomos y significados la afirmación dada se representa como $(p \Rightarrow q) \wedge r$.

Ejercicio 3.9 Utilizando las mismas proposiciones y símbolos del ejemplo anterior, ¿cuál es el enunciado que se representa por $p \Rightarrow (q \wedge r)$?

Ejercicio 3.10 Considere los enunciados:

A: Juan regresa temprano, y va a misa o se queda en casa.

B: Juan regresa temprano y va a misa, o se queda en casa.

Es un hecho que A y B tienen distinto significado. Determine cuál de las representaciones $(p \wedge q) \vee r$, y $p \wedge (q \vee r)$, se corresponde con A y cuál con B. Posteriormente veremos que la diferencia de significados se refleja en la no equivalencia de las fórmulas que los representan.

Ejemplo 3.11 Representar el razonamiento siguiente, en el lenguaje de la lógica proposicional:

> "Si es verdad que si llueve entonces los estudiantes se acuestan, entonces no estudian. Si los estudiantes aprueban el examen entonces, o estudian o el examen es trivial. Pero si el examen es trivial, entonces los estudiantes son flojos. Y es un hecho que los estudiantes aprueban el examen y no son flojos. En consecuencia, llueve y los estudiantes no se acuestan".

Solución: Inicialmente utilizamos átomos para simbolizar las proposiciones atómicas involucradas en el razonamiento. Al hacerlo deben tenerse en cuenta estos aspectos:

Primero: La fórmula que represente una proposición negativa debe empezar efectivamente con el símbolo ¬. Por ejemplo, debemos representar el enunciado "Juan no sabe alemán", en la forma ¬p, donde p representa la proposición atómica "Juan sabe alemán".

Segundo: La proposición representada por un átomo debe enunciarse completamente. Esto significa, por ejemplo, que para representar el enunciado "Juan sabe inglés y alemán" debemos escribir p = Juan sabe inglés, q = Juan sabe alemán, y no p = Juan sabe inglés, q = alemán.

Sobre la base de lo anterior, representaremos las proposiciones atómicas del ejemplo 3.11 así:

p: Llueve.

q: Los estudiantes se acuestan.

r: Los estudiantes estudian.

s: Los estudiantes aprueban el examen.

t: El examen es trivial.

v: Los estudiantes son flojos.

Ahora representaremos simbólicamente cada premisa y la conclusión, utilizando los paréntesis para reflejar adecuadamente sus significados:

P_1 Si es verdad que si llueve entonces los estudiantes se acuestan, entonces no estudian: $(p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg r$

P_2 Si los estudiantes aprueban el examen entonces, o estudian o el examen es trivial: $s \Rightarrow (r \vee t)$

P_3 Si el examen es trivial, entonces los estudiantes son flojos: $t \Rightarrow v$

P_4 Es un hecho que los estudiantes aprueban el examen y no son flojos: $s \wedge \neg v$

C. Llueve y los estudiantes no se acuestan: $p \wedge \neg q$

Finalmente, el argumento se representa por un condicional que tiene como antecedente la conjunción de las premisas y como consecuente la conclusión. Esta fórmula debe incluir adecuadamente los paréntesis como signos de puntuación, para delimitar las premisas y la conclusión:

$$\{[(p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg r] \wedge [s \Rightarrow (r \vee t)] \wedge (t \Rightarrow v) \wedge (s \wedge \neg v)\} \Rightarrow (p \wedge \neg q)$$

3.6 CONECTIVOS LÓGICOS Y TABLAS DE VERDAD

Supongamos que la fórmula $p \wedge q$ representa la afirmación "2 es un número primo y sin embargo es par". Esta afirmación es verdadera, porque "2 es un número primo" es una proposición verdadera y "2 es un número par" también lo es. Dado que $p \wedge q$ es la fórmula que representa tal afirmación, tiene sentido decir que en este caso la fórmula $p \wedge q$ es verdadera. En forma similar, como la afirmación "Roma es la capital de Grecia o de Noruega" es falsa, entonces, si $p \vee q$ es la fórmula que la representa, tiene sentido decir que $p \vee q$ es falsa.

3.6.1 Valores de verdad de un átomo

Supongamos que p es un átomo. Como p puede representar proposiciones verdaderas o proposiciones falsas, decimos que p puede tener dos valores de verdad, V y F, lo cual denotamos como v(p)=V y v(p)=F. Los símbolos V y F, que se interpretan como "verdadero" y "falso" respectivamente, reciben el nombre de constantes lógicas. Como vimos en la sección 3.2, hacen parte del alfabeto **P** de la lógica proposicional.

3.6.2 Valor de verdad de una FBF

Una vez definido el valor de verdad de un átomo, ampliamos la definición al valor de verdad de una fórmula bien formada E. Para esto utilizaremos las diferentes formas de obtener FBF, establecidas en la definición 3.1 según la cual una FBF es un átomo o es la negación de una FBF, $\neg A$, o es de la forma $(A*B)$ donde A y B son FBFs y $*$ es un conectivo binario. Definimos los valores de verdad de E, en la forma siguiente:

1. v(p) = V o v(p) = F según el átomo p represente una proposición verdadera o falsa, respectivamente.
2. $v(\neg A) = F$ si $v(A) = V$ y $v(\neg A) = V$, si $v(A) = F$.
3. $v(A \wedge B) = V$, si $v(A) = v(B) = V$; $v(A \wedge B) = F$, en cualquiera otro caso.
4. $v(A \vee B) = F$, si $v(A) = v(B) = F$; $v(A \vee B) = V$, en cualquiera otro caso.
5. $v(A \Rightarrow B) = F$ si $v(A) = V$ y $v(B) = F$; $v(A \Rightarrow B) = V$, en cualquiera otro caso.
6. $v(A \Leftrightarrow B) = V$ si y sólo si $v(A) = v(B)$.

Con la posible excepción del condicional en la línea 5, los valores definidos en la lista anterior reflejan el uso y significado de los conectivos, estudiados en la sección 3.4. Por ejemplo, sobre la base del significado de la conjunción "y" es natural, como se hace en la línea 3, asignar a A $\wedge$ B el valor V si (y sólo si) ambas fórmulas tienen el valor V. Este hecho se expresa usualmente como "La conjunción A $\wedge$ B es verdadera si y sólo si A **y** B son verdaderas". Esto, porque las constantes V y F se han escogido teniendo presentes los significados de "verdadero" y "falso" respectivamente. De igual manera, es natural asignar los valores de verdad para ¬A y para A$\vee$B como aparecen en las líneas 2 y 4. Sin embargo, el lector puede preguntarse: ¿con qué criterio se han asignado los valores de verdad para el condicional como aparecen en la línea 5? ¿Por qué cuando el antecedente es falso el condicional tiene valor verdadero? En la sección 3.7 proponemos respuestas para estas preguntas.

Los valores de verdad para las proposiciones compuestas definidos anteriormente se recogen en la Tabla 3.2, para el caso en que A y B son átomos. Observe que las dos primeras columnas contienen las 4 posibles combinaciones de valores de verdad de los átomos p y q, que intervienen en las fórmulas. En forma de lista ordenada donde el primer elemento es el valor de verdad de p y el segundo es el de q, estas 4 combinaciones son: V–V, V–F, F–V y F–F. La tabla se construye escribiendo en cada casilla el valor de verdad del átomo o de la fórmula A que encabeza la columna correspondiente. Cada columna es la "tabla de verdad" del conectivo que la encabeza. Por ejemplo, la columna 3 es la tabla de verdad de la negación; la columna 4 es la tabla de verdad de la conjunción, etc. Usted debe memorizar esta tabla, para usos futuros.

Tabla 3.2 Las tablas de verdad de los conectivos proposicionales

p	q	¬p	p$\wedge$q	p$\vee$q	p$\Rightarrow$q	p$\Leftrightarrow$q
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V
1	2	3	4	5	6	7

Definición 3.12 Dada una fórmula A en el lenguaje L(**P**) de la lógica proposicional, **una interpretación** para A es cualquiera de las posibles asignaciones de valores de verdad a los átomos que aparecen en A. Por ejemplo, si A es la fórmula A = (p$\Rightarrow$q) $\wedge$ (¬q$\vee$r), una posible interpretación es un caso en el que p represente una proposición verdadera, q una proposición falsa y r una proposición verdadera. Claro que lo usual en este caso sería decir: "p es verdadera, q falsa y r verdadera". En notación de terna ordenada en el orden de aparición p–q–r, denotaríamos esta interpretación en la forma V–F–V.

Ejercicio 3.13 Establecer el número de interpretaciones posibles para una fórmula que contiene 3 átomos (como la fórmula anterior, $A = (p \Rightarrow q) \wedge (\neg q \vee r)$) y, en general, para una fórmula que tiene n átomos.

Solución: El número de interpretaciones está dado por el total de combinaciones posibles de valores V y F, para los tres átomos p, q y r que intervienen en la fórmula. Como cada átomo puede tomar dos valores, el total de combinaciones coincide con el número de ternas x–y–z, donde cada variable puede tomar uno de los valores V o F. Este número es 2^3, es decir, una FBF que tiene tres átomos tiene 8 interpretaciones posibles. Una de estas es v(p) = V, v(q) = V y v(r) = V, que denotamos como V–V–V. Otra es v(p) =V, v(q) =F y v(r) =V, que denotamos como V–F–V, etc. Los resultados, 2^2 interpretaciones para una fórmula de 2 átomos y 2^3 interpretaciones para una de 3 átomos, se generalizan a una fórmula de n átomos**: el número de interpretaciones posibles para una fórmula que tiene n átomos está dado por 2^n.**

Observación 3.14 Las 2^n interpretaciones para una fórmula de n átomos deben escribirse en un orden preestablecido para no perder tiempo tratando de establecer cuál o cuáles quedan por escribir, cuando el número es alto y se escriben sin seguir un orden prefijado. En este libro se escribirán siempre así: al primer átomo se le asignan la mitad de 2^n valores V e igual número de valores F. Para el caso de $2^3 = 8$, al primer átomo se le asignan "4 verdaderos y 4 falsos", como se ve en la primera columna de la tabla 3.3. Al segundo "2 verdaderos y 2 falsos, y otra vez 2 verdaderos y dos falsos" como en la segunda columna de la misma tabla. Finalmente, al tercer átomo se le asignan "uno verdadero, uno falso, uno verdadero, uno falso, hasta la última fila de la tabla". Este es el proceso a seguir en general, aun cuando en ningún caso construiremos aquí tablas de verdad para n >4.

Ejemplo 3.15 Determinaremos el valor de verdad de la fórmula $C = (p \Rightarrow r) \wedge (\neg q \vee r)$, para dos de sus 8 interpretaciones posibles: I_1 = V–V–F e I_2 = F–F–V.

Los paréntesis en $C = (p \Rightarrow r) \wedge (\neg q \vee r)$, muestran que C es de la forma $C = A \wedge B$, con $A{:}(p \Rightarrow q)$ y $B{:}(\neg q \vee r)$. Entonces, v(C) depende de v(A) y v(B). Por esto, debemos calcular los valores de verdad de $p \Rightarrow r$ y $\neg q \vee r$ para estas interpretaciones, según lo establecido en la tabla 3.2. Para la interpretación V–V–F, $v(p \Rightarrow r)$ se transforma en $v(V \Rightarrow F)$ y, de la tabla 3.2, $v(V \Rightarrow F)=F$. Análogamente, $v(\neg q \vee r)$ equivale a $v(\neg V \vee F)$ que es $v(F \vee F)=F$. Finalmente, $v((p \Rightarrow r) \wedge (\neg q \vee r))$ es $v(F \wedge F) = F$. Este es el valor de verdad de C, para I_1.

Análogamente, para la interpretación I_2 = F–F–V es decir, v(p)=F, v(q)=F y v(r)=V, se obtiene $v(p \Rightarrow r)=V$, y $v(\neg q \vee r)=V$. En consecuencia, v(C)=V para esta interpretación.

Observación 3.16 Cuando interesa establecer el valor de verdad para una interpretación en particular se escriben, en una línea 1 directamente debajo de los átomos —y de sus negaciones si aparecen en la fórmula— sus valores de verdad. A continuación, y de acuerdo con la sintaxis de la fórmula, se van determinando los valores de verdad de las subfórmulas en nuevas líneas. El proceso termina cuando se tiene el valor de verdad de la fórmula completa. Como ilustración, encontraremos el valor de verdad de la fórmula anterior para la otra interpretación propuesta, I_2 = F–V–F.

	(p	⇒	q)	∧	(¬	q	∨	r)
línea 1	F		V			V		F
línea 2		<u>V</u>			F			F
línea 3							<u>F</u>	
línea 4				**F**				

Una tabla que muestra el valor de verdad de una fórmula para todas sus interpretaciones posibles, se llama tabla de verdad de la fórmula. Se construye listando las 2^n interpretaciones posibles, donde n es el número de átomos en la fórmula. Luego se procede a establecer los valores de verdad de las subfórmulas, hasta obtener la evaluación de la fórmula completa. Como ejemplo, se muestra la tabla de verdad 3.3 de la fórmula A: $[\{p \Rightarrow (q \vee r)\} \wedge (p \wedge \neg q)] \Rightarrow r$.

Tabla 3.3 Tabla de verdad de la fórmula $[\{p\Rightarrow(q\vee r)\}\wedge(p\wedge\neg q)]\Rightarrow r$

p	q	r	¬q	q∨r	p⇒(q∨r)	p∧¬q	(p⇒(q∨r))∧(p∧¬q)	[{p⇒(q∨r)}∧(p∧¬q)]⇒r
V	V	V	F	V	V	F	F	V
V	V	F	F	V	V	F	F	V
V	F	V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V	F	V
F	V	V	F	V	V	F	F	V
F	V	F	F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V	F	F	V
F	F	F	V	F	V	F	F	V

Observe que las $2^3 = 8$ interpretaciones se han dispuesto, conforme a lo establecido en la observación 3.14, como se ve en las tres primeras columnas. Observe, además, algo notorio en esta tabla: la última columna de la derecha muestra que el valor de verdad de esta fórmula es V, **para todas sus interpretaciones posibles**. Las fórmulas que tienen esta propiedad, llamadas **tautologías**, son las más importantes en las aplicaciones de la lógica simbólica al estudio de validez de razonamientos, como veremos oportunamente.

3.6.3 Clasificación de las FBF según sus valores de verdad.

1. Una interpretación para la cual una fórmula dada es verdadera es **un modelo** para la fórmula. Por ejemplo, v(p) =F y v(q) =V es un modelo para la fórmula $\neg p \wedge q$. Sin embargo, no lo es para $q \Rightarrow p$ porque si el antecedente es verdadero y el consecuente falso, el condicional es falso.
2. Una fórmula A es **satisfacible** si y sólo si existe alguna interpretación que la hace verdadera, es decir, si y sólo si tiene algún modelo. Por ejemplo, la fórmula A: $\neg p \wedge q$, es satisfacible porque la interpretación v(p) =F y v(q) =V la hace verdadera.
3. Una fórmula es una **tautología**, si y sólo si es verdadera para todas sus interpretaciones. Por ejemplo, la fórmula $[\{p \Rightarrow (q \vee r)\} \wedge (p \wedge \neg q)] \Rightarrow r$ de la tabla 3.3 es una tautología. También es una tautología la fórmula $((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$, conocida con el nombre *Modus ponens* (ver sección 2.5.4). La notación $\models A$ se usa para indicar que A es una tautología.

Observación 3.17 Con lamentable frecuencia algunos estudiantes de lógica "definen" tautología como "una fórmula que tiene todas sus interpretaciones verdaderas". Esto es consecuencia de una lectura no crítica: no tiene sentido hablar de "interpretaciones verdaderas"; las interpretaciones son asignaciones de valores de verdad a los diferentes átomos que intervienen en una fórmula y, por lo tanto, no son ni verdaderas ni falsas, sino que producen valores V o F para dicha fórmula.

4. Una **contradicción** o fórmula **insatisfacible** es una fórmula que resulta falsa para todas sus interpretaciones. Por ejemplo, si A es una FBF, la conjunción $A \wedge \neg A$ es una contradicción dado que A no puede ser simultáneamente verdadera y falsa.

Finalmente:

5. Una FBF es una **contingencia** si es verdadera para alguna interpretación, pero es falsa para otras. Es el caso de $p \Rightarrow (q \wedge r)$ que es verdadera para la interpretación F–V–F, por ejemplo, y es falsa para la interpretación V–V–F.

3.7 FÓRMULAS LÓGICAMENTE EQUIVALENTES

Consideremos los enunciados siguientes:

A. Juan desayuna con tostadas, y café o chocolate: $p \wedge (q \vee r)$.

B. Juan desayuna con tostadas y café, o con tostadas y chocolate: $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.

En A se afirma que Juan desayuna con tostadas, acompañadas de café o chocolate, (¿"o" exclusivo?, ¿inclusivo?). Entonces, el desayuno de Juan es tostadas y café, o tostadas y chocolate, precisamente lo que se afirma en el enunciado B. Uno dice que A y B son enunciados equivalentes para indicar que tienen idéntico significado. Examinemos ahora las tablas de verdad de las fórmulas, A = p∧(q∨r) y B = (p∧q)∨(p∧r), que representan los enunciados A y B respectivamente. Como se ve en las columnas 5 y 8 de la tabla 3.4, las tablas de verdad de estas dos fórmulas son iguales. Esto sugiere que podemos formalizar el concepto de equivalencia, mediante valores de verdad.

Tabla 3.4 Dos proposiciones lógicamente equivalentes

p	q	r	q∨r	**p ∧ (q∨r)**	(p ∧ q)	(p ∧ r)	**(p ∧ q) ∨ (p∧ r)**
V	V	V	V	**V**	V	V	**V**
V	V	F	V	**V**	V	F	**V**
V	F	V	V	**V**	F	V	**V**
V	F	F	F	**F**	F	F	**F**
F	V	V	V	**F**	F	F	**F**
F	V	F	V	**F**	F	F	**F**
F	F	V	V	**F**	F	F	**F**
F	F	F	F	**F**	F	F	**F**
1	2	3	4	5	6	7	8

Definición 3.18 Dos fórmulas A y B son **lógicamente equivalentes** (o equivalentes) si y sólo si tienen el mismo valor de verdad para cada posible interpretación común.

Para denotar que A y B son lógicamente equivalentes escribiremos A ≡ B o B ≡ A. Estas expresiones se leen como "A es equivalente a B" y "B es equivalente a A", respectivamente. Tenga presente que el símbolo ≡ no es un conectivo lógico, no hace parte del alfabeto **P**, sino que es un nuevo símbolo usado para indicar que las dos fórmulas que separa tienen las mismas tablas de verdad, esto es, que si una de ellas es verdadera (falsa) la otra es verdadera (falsa).

El resultado siguiente expresa una importante relación entre el bicondicional y la equivalencia lógica:

Teorema 3.19 Dos fórmulas A y B son lógicamente equivalentes si y sólo si la fórmula A ⇔ B es una tautología.

Demostración: El teorema establece una condición suficiente y necesaria para la equivalencia de FBF. Por lo tanto (ver sección **3.4.7.2**) debemos construir argumentos que demuestren la validez de dos afirmaciones:

1. Si A y B son lógicamente equivalentes, entonces la fórmula A ⇔ B es una tautología.

2. Si la fórmula A ⇔ B es una tautología, entonces A y B son lógicamente equivalentes.

Demostración de 1: Supongamos que A y B son lógicamente equivalentes. Mostraremos que A⇔B tiene el valor V en todas sus interpretaciones. En efecto: si para alguna interpretación v(A) =V, entonces para esa interpretación v(B)=V porque la hipótesis establece que A y B son lógicamente equivalentes. Por lo tanto v(A ⇔ B) es v(V ⇔ V), es decir, v(A ⇔ B) = V. Igualmente, si v(A) =F para una interpretación, también v(B) = F y se sigue que v(A ⇔ B)=V. Esto muestra que para todas las interpretaciones comunes de A y B, v(A ⇔ B)=V. En consecuencia, la fórmula A ⇔ B es una tautología, como lo afirma el teorema.

Demostración de 2: Supongamos ahora que la fórmula A⇔B es una tautología. Entonces, para cada interpretación común de las fórmulas A y B, v(A⇔B) =V. Esto significa que A y B tienen el mismo valor de verdad para cada interpretación común y, por lo tanto, A ≡ B, como lo asegura el teorema.

La tabla 3.5 muestra, en las columnas 5 y 6, la equivalencia entre las fórmulas p⇒q y su contrarrecíproca o contrapositiva ¬q⇒¬p. Esta equivalencia tiene un significado muy claro en términos de suficiencia y necesidad para el caso de implicaciones formales: si p es suficiente para q (columna 5), entonces q es necesario para p; es decir, si no se da q, entonces no se puede dar p (columna 6). Por ejemplo, la afirmación: “si un triángulo es equilátero, entonces (el triángulo) tiene sus lados iguales” es equivalente a su afirmación contrarrecíproca: “si un triángulo no tiene sus tres lados iguales, entonces (el triángulo) no es equilátero”.

La columna 7 muestra, de conformidad con el teorema anterior, que el bicondicional (p⇒q)⇔ (¬q⇒¬p) es una tautología.

Tabla 3.5 La equivalencia lógica (p⇒q)≡(¬q⇒¬p)

p	q	¬p	¬q	**p⇒q**	**¬q⇒¬p**	(p ⇒ q) ⇔ (¬q ⇒ ¬p)
V	V	F	F	**V**	**V**	V
V	F	F	V	**F**	**F**	V
F	V	V	F	**V**	**V**	V
F	F	V	V	**V**	**V**	V
1	2	3	4	**5**	**6**	7

Ahora el lector está en condiciones de responder estas preguntas:

1. ¿Qué se requiere para probar que dos fórmulas dadas no son lógicamente equivalentes?

2. Si, dadas dos fórmulas A y B, usted encuentra que $v(A)=v(B)$ para alguna interpretación, ¿puede concluir que son lógicamente equivalentes?
3. Dadas dos fórmulas A y B, usted encuentra que sus valores difieren por lo menos para una interpretación. ¿Qué puede concluir?

Ejercicio 3.20 Muestre que la fórmula $A = \neg(p \vee q)$ es equivalente a una de las fórmulas $B = \neg p \vee \neg q$ y $C = \neg p \wedge \neg q$. Según la fórmula encontrada, ¿cómo se niega la conjunción de dos proposiciones? ¿Cuál es la negación de "Juan está en el cine o en el estadio"? ¿Cuál es la forma correcta de negar la afirmación "Juanita es novia de Pedro o de Juan"?

Ejercicio 3.21 Muestre que la fórmula $A = \neg(p \wedge q)$ es equivalente con alguna de las fórmulas $B = \neg p \wedge \neg q$ o $C = \neg p \vee \neg q$. Entonces, ¿cómo se niega la conjunción de dos proposiciones? ¿Cúal es la forma correcta de negar la afirmación "Juana sabe inglés y francés"? ¿Puede afirmarse que la negación del enunciado anterior es equivalente a "Juana sabe inglés pero no francés, o Juana sabe francés pero no inglés"?

(Recuerde que ahora usted cuenta con definiciones y criterios formales para responder en forma correcta preguntas como las anteriores)

Definición 3.22 El condicional "si q, entonces p", es el recíproco del condicional "si p, entonces q".

De acuerdo con esta definición, el recíproco de "si m es divisor de n y de s, entonces m es divisor de la suma n + s", es el condicional "si m es divisor de la suma n + s, entonces m es divisor de n y de s"; el recíproco de "si una palabra es aguda, entonces tiene acento en la última sílaba" es "si una palabra tiene acento en la última sílaba entonces es aguda". El primero de estos ejemplos muestra que el recíproco de un condicional verdadero puede ser falso (muéstrelo con un contraejemplo); el segundo, que el recíproco de un condicional verdadero puede ser verdadero. Por esta razón es una práctica conveniente, ante un condicional verdadero, indagar por el carácter de verdad de su recíproco.

Definición 3.23 La fórmula $B \Rightarrow A$ es el recíproco de la fórmula $A \Rightarrow B$.

Ejercicio 3.24 Muestre que $A \Rightarrow B$ y su recíproco $B \Rightarrow A$ no son lógicamente equivalentes. Relacione este hecho con los ejemplos que acompañan a la definición 3.22.

Ejercicio 3.25 Muestre que las fórmulas $A \Rightarrow B$ y $\neg A \vee B$, son lógicamente equivalentes.

Observación 3.26 También la equivalencia anterior se corresponde con la igualdad de significados en expresiones del lenguaje natural. La lista siguiente presenta algunos ejemplos; a la izquierda en forma de condicional $A \Rightarrow B$, y a la derecha el enunciado equivalente en la forma $\neg A \vee B$ (o $B \vee \neg A$, según el caso).

1. **Si** miente, **entonces** no podré creerle nunca más.
   No mienta, **o** no podré creerle nunca más.
2. **Si** llega tarde, (**entonces**) perderá el cupo.
   No llegue tarde, **o** perderá el cupo.
3. **Si** es médico, (**entonces**) sabe primeros auxilios. Sabe primeros auxilios, **o no** es médico.

La equivalencia del ejercicio 3.25 da respuesta a las preguntas que se formularon en la sección 3.6.2 sobre la asignación de valores al condicional: sus valores se han escogido para que coincidan con los valores de la fórmula $\neg p \vee q$. De alguna manera, podríamos decir que $p \Rightarrow q$ es, "por definición", equivalente a $\neg p \vee q$.

$$p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q \qquad (3.3)$$

3.8 EQUIVALENCIAS Y CÁLCULO PROPOSICIONAL

Una aplicación importante de la equivalencia lógica es la simplificación o manipulación de fórmulas, sin alterar su valor de verdad. Esto, porque la aplicación de cada equivalencia sustituye la fórmula a la cual se aplica, por otra lógicamente equivalente. Por ejemplo, aplicando algunas equivalencias de la tabla 3.6 puede mostrarse que la fórmula $[(p \vee q) \wedge (p \vee r) \wedge \{\neg(\neg p \wedge q)\}]$ es lógicamente equivalente al átomo p, es decir, que $[(p \vee q) \wedge (p \vee r) \wedge \{\neg(\neg p \wedge q)\}] \equiv p$. El proceso de simplificación de FBFs es tan similar al de simplificación algebraica que usted conoce, que a veces se le llama "método algebraico" y es importante no sólo porque produce fórmulas más sencillas, pero con igual significado, sino porque genera habilidades en otra clase de cálculos, con el consiguiente beneficio en la capacidad para manipular símbolos no numéricos. En su momento mostraremos ejemplos de reducción de tautologías para mostrar algebraicamente que ellas son lógicamente equivalentes con V. Esta equivalencia es razonable pues, como se ha reiterado, son fórmulas verdaderas, independientemente de la interpretación particular y esto explica la eliminación de todos los átomos que figuran en la fórmula original.

En la tabla 3.6 se presentan las equivalencias más importantes para nuestros propósitos. Usted debe aprenderlas con su nombre y significado. Para esto es conveniente que idee términos propios para enunciar cada ley en forma tan descriptiva como le sea posible. Por ejemplo, la ley del tercio excluido $A \vee \neg A \equiv V$ podría describirse como "una fórmula es verdadera o es falsa y no hay una tercera alternativa, es decir, queda excluida cualquiera otra posibilidad"; la ley de dominación $V \vee A \equiv V$, como "cuando uno de los miembros de una disyunción es verdadero, la disyunción también lo es independientemente del otro”, o, alternativamente “verdadero o algo, es verdadero”, como a veces lo aprenden los estudiantes, etc. Por otra parte, conviene pensar que los símbolos V y F, de mucha utilidad en el proceso de simplificación, son formas simplificadas de denotar una tautología y una contradicción, respectivamente. Las dos leyes conmutativas encabezan la lista de equivalencias, con el propósito de no incluir en la tabla equivalencias derivadas por conmutatividad. Por ejemplo, la ley 2 —tercio excluido— se ha expresado como $A \vee \neg A \equiv V$ y la conmutatividad del operador $\vee$ permite saber que puede expresarse también como $\neg A \vee A \equiv V$.

Observe que, con pocas excepciones, las equivalencias de la tabla 3.6 se han agrupado en parejas. Cada fórmula de la pareja se llama el dual de la otra. Por ejemplo, el dual de $A \vee \neg A \equiv V$ es $A \wedge \neg A \equiv F$. El dual de una fórmula A es la fórmula que se obtiene sustituyendo en ella cada aparición del conectivo $\wedge$ por el conectivo $\vee$; cada aparición del conectivo $\vee$ por el conectivo $\wedge$; cada aparición de la constante V, por F y cada aparición de la constante F por V. Por ejemplo, el dual de $p \vee (q \wedge (r \vee V))$ es $p \wedge (q \vee (r \wedge F))$. Este hecho debe facilitar al lector el aprendizaje de las equivalencias, pues es suficiente aprender una equivalencia de la pareja; la otra se construye por dualidad.

Tabla 3.6 Algunas equivalencias

Leyes	Nombre
1. $A \vee B \equiv B \vee A$ 1'. $A \wedge B \equiv B \wedge A$	Leyes conmutativas
2. $A \vee \neg A \equiv V$ 2'. $A \wedge \neg A \equiv F$	Ley del tercio excluido Ley de contradicción
3. $A \vee F \equiv A$ 3'. $A \wedge V \equiv A$	Leyes de identidad
4. $A \vee V \equiv V$ 4'. $A \wedge F \equiv F$	Leyes de dominación
5. $A \vee A \equiv A$ 5'. $A \wedge A \equiv A$	Leyes de idempotencia
6. $\neg(\neg A) \equiv A$	Ley de doble negación
7. $(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$ 7'. $(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$	Leyes asociativas
8. $(A \vee B) \wedge (A \vee C) \equiv A \vee (B \wedge C)$ 8'. $(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \equiv A \wedge (B \vee C)$	Leyes distributivas
9. $(A \Rightarrow B) \equiv (\neg B \Rightarrow \neg A)$	Ley de trasposición o de la contrarrecíproca
10. $A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \equiv (A \wedge B) \Rightarrow C$	Ley de la deducción
11. $\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A \vee \neg B)$ 11'. $\neg(A \vee B) \equiv (\neg A \wedge \neg B)$	Leyes de De Morgan
12. $A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$	Def. de condicional

Ejemplo 3.27 Muestre que $(p \vee \neg p) \wedge q$ puede reducirse a q, es decir, $(p \vee \neg p) \wedge q \equiv q$.

1. $(p \vee \neg p) \wedge q \equiv V \wedge q$ (Por la ley del tercio excluido).
   Se remplaza $p \vee \neg p$ por su equivalente V.
2. $V \wedge q \equiv q$ (Por la ley de identidad para la conjunción)

Ejercicio 3.28 Establecer la equivalencia siguiente, transformando la fórmula de la izquierda en la de la derecha, mediante el uso de equivalencias conocidas (Método algebraico) $((p\vee q) \wedge (p\vee r)) \wedge (\neg(\neg p\wedge q)) \equiv p$

1. $((p\vee q) \wedge (p\vee r)) \wedge (\neg(\neg p \wedge q)) \equiv ((p\vee q) \wedge (p\vee r)) \wedge (\neg(\neg p)\vee \neg q)$
   L. de De Morgan.
2. $\equiv ((p\vee q) \wedge (p\vee r)) \wedge (p\vee \neg q)$
   L. doble negación.
3. $\equiv (p\vee (q\wedge r)) \wedge (p \vee \neg q)$
   L. distributiva.
4. $\equiv p\vee ((q\wedge r) \wedge \neg q)$
   L. distributiva.
5. $\equiv p\vee((q \wedge \neg q) \wedge r)$
   L. conmutativa + L. asociativa
6. $\equiv p\vee (F \wedge r)$
   L. de contradicción.
7. $\equiv p \vee F$
   L. de dominación.
8. $\equiv p$
   L. de identidad.

3.9 CONSECUENCIA LÓGICA

Nos proponemos ahora formalizar la noción de "consecuencia lógica", en el marco de la lógica simbólica. Naturalmente, esta formalización debe reflejar el uso cotidiano del concepto, según el cual B es consecuencia lógica de A cuando la ocurrencia de A ocasiona necesariamente la ocurrencia de B.

Ejemplo 3.29 Consideremos el texto siguiente:

> "Todos los miércoles la universidad presenta un grupo de cuenteros o un grupo musical. Además, no se hace una presentación de la misma clase de grupos en dos miércoles seguidos. Hoy es miércoles, y el pasado miércoles se presentó un grupo musical".

Uno deduce como "consecuencia lógica" de estos hechos (premisas), que "la universidad presenta hoy un grupo de cuenteros" ¿Está de acuerdo?

Dado que en el dominio de la lógica simbólica los hechos se representan por medio de fórmulas, su validez simultánea por medio de conjunciones, y la causalidad por medio de condicionales, es natural que la noción formal de consecuencia lógica se dé en función de estos elementos.

Definición 3.30 Supongamos que P_1, P_2,...P_t y Q son fórmulas bien formadas. Se dice que Q es consecuencia lógica de P_1, P_2,...,P_t, si y solamente si el condicional $(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_t) \Rightarrow Q$ es una tautología.

Para indicar que Q es consecuencia lógica de P_1, P_2,..., P_t, se utiliza la notación $\{P_1, P_2, \ldots, P_t\} \models Q$. Veamos cómo se aplica esta definición al ejemplo 3.29:

Para empezar, se representan simbólicamente las proposiciones atómicas contenidas en las premisas:

p: Es miércoles

q: La universidad presenta hoy un grupo de cuenteros.

r: La universidad presenta hoy un grupo musical.

s: El miércoles pasado la universidad presentó un grupo de cuenteros.

t: El miércoles pasado la universidad presentó un grupo musical.

Con base en lo anterior, se representan las premisas en símbolos de la lógica proposicional:

P_1 $p \Rightarrow (q \vee r)$

P_2 $s \Rightarrow \neg q$

P_3 $t \Rightarrow \neg r$

P_4 $p \wedge t$

En el ejemplo se afirmó que de este grupo de premisas se deduce como consecuencia lógica que "La universidad presenta hoy un grupo de cuenteros". Esto, de acuerdo con la definición 3.30, es cierto si y sólo si el condicional $((P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge P_4) \Rightarrow q$ es una tautología, es decir, si y sólo si la fórmula A siguiente es una tautología:

A: $[(p \Rightarrow (q \vee r)) \wedge (s \Rightarrow \neg q) \wedge (t \Rightarrow \neg r) \wedge (p \wedge t)] \Rightarrow q$

Es posible establecer que A es una tautología, sin necesidad de hacer la tabla de verdad completa con sus 32 interpretaciones. En efecto, es suficiente considerar las interpretaciones en las cuales cada premisa tiene valor V, porque si alguna tiene valor

F, entonces el valor del antecedente es F (recuerde que es una conjunción) y en tal caso v(A)=V. Por esto se supone que $v(P_i)$ =V para cada premisa P_i y se procede a calcular el valor de verdad del consecuente. Si este es V, la fórmula es una tautología.

En la primera línea del arreglo siguiente hemos asignado el valor V al conectivo principal de cada premisa, para indicar que ella es verdadera. El subíndice 1 indica que esta ha sido la primera asignación de valores de verdad; además, usamos el mismo subíndice en cada premisa para indicar que la asignación ha sido simultánea.

$$[(p \Rightarrow (q \vee r)) \wedge (s \Rightarrow \neg q) \wedge (t \Rightarrow \neg r) \wedge (p \wedge t)] \Rightarrow q$$
$$V_1 \qquad\qquad V_1 \qquad\qquad V_1 \qquad\qquad V_1$$

A continuación, procuramos establecer qué valores deben tener las subfórmulas de cada premisa, para que ella tenga el valor V asignado. Recuerde que si se trata de un condicional A⇒B, hay para ello tres interpretaciones posibles: V–V, F–V y F–F. Entonces, considerar cada posibilidad, para cada condicional, haría el proceso tal vez más complicado que elaborar la tabla completa. Por esta razón continuamos el proceso de asignación de valores con la conjunción ($p \wedge t$) que presenta una sola opción. En efecto, $v(p \wedge t)$= V si y sólo si v(p) =V y v(t) =V. Esta inferencia se agrega al paso anterior, como se ve a continuación. El subíndice 2 indica que esta ha sido la segunda inferencia en el proceso.

$$[(p \Rightarrow (q \vee r)) \wedge (s \Rightarrow \neg q) \wedge (t \Rightarrow \neg r) \wedge (p \wedge t)] \Rightarrow q$$
$$V_1 \qquad\qquad V_1 \qquad\qquad V_1 \qquad\qquad V_2 V_1 V_2$$

Seguidamente se trasladan los valores obtenidos de p y t a las fórmulas que los contienen, identificados con el subíndice 3 como se ve a continuación:

$$[(p \Rightarrow (q \vee r)) \wedge (s \Rightarrow \neg q) \wedge (t \Rightarrow \neg r) \wedge (p \wedge t)] \Rightarrow q$$
$$V_3\, V_1 \qquad\qquad V_1 \qquad\qquad V_3 V_1 \qquad\qquad V_2 V_1 V_2$$

En el primero y en el tercer condicionales, de izquierda a derecha, se conocen el valor del condicional y el de su antecedente. En ambos casos se tiene "un condicional verdadero con antecedente verdadero", lo cual exige que el consecuente tenga el valor V. Estas inferencias se incorporan al desarrollo, indicadas con el subíndice 4. Tenga presente que en el condicional $t \Rightarrow \neg r$, la subfórmula que tiene valor V es $\neg r$. Por lo tanto V_4 va directamente bajo el símbolo ¬.

$$[(p \Rightarrow (q \vee r)) \wedge (s \Rightarrow \neg q) \wedge (t \Rightarrow \neg r) \wedge (p \wedge t)] \Rightarrow q$$
$$V_3\, V_1 \quad V_4 \qquad\qquad V_1 \qquad\qquad V_3\, V_1\; V_4 \qquad\qquad V_2 V_1 V_2$$

Al llegar a este punto, tenemos dos subfórmulas con valor conocido para continuar el análisis: $q \vee r$ y $\neg r$. Como $v(q \vee r)$=V origina varias opciones, escogemos $v(\neg r)$=V, de la cual se infiere, en quinto lugar, que v(r) =F. Trasladamos este resultado a r como F_6 en la disyunción ($q \lor r$):

$$[(p \Rightarrow (q \lor r)) \land (s \Rightarrow \neg q) \land (t \Rightarrow \neg r) \land (p \land t)] \Rightarrow q$$

$$V_3 \; V_1 \quad V_4 \; F_6 \qquad V_1 \qquad\qquad V_3 \; V_1 \; V_4 \; F_5 \qquad V_2 V_1 V_2$$

Finalmente, de v($q \lor r$)=V pero v(r) =F, se concluye que v(q) =V, valor que registramos en la estructura anterior de valores de verdad como V_7. Tenemos entonces:

$$[(p \Rightarrow (q \lor r)) \land (s \Rightarrow \neg q) \land (t \Rightarrow \neg r) \land (p \land t)] \Rightarrow q \quad (*)$$

$$V_3 \; V_1 \; V_7 \; V_4 \; F_6 \qquad V_1 \qquad\qquad V_3 \; V_1 \; V_4 \; F_5 \qquad V_2 V_1 V_2 \qquad V_7$$

Hemos llegado así a la conclusión de que las interpretaciones que hacen verdadero el antecedente hacen necesariamente verdadero el consecuente q. Entonces el condicional es una tautología y, por lo tanto, q es consecuencia lógica del conjunto dado de premisas, es decir, $\{p \Rightarrow q \lor r, s \Rightarrow \neg q, t \Rightarrow \neg r, p \land t\} \models q$.

En la práctica, el proceso de asignación se hace en un solo renglón, que se verá finalmente como (*). Es indispensable indicar con subíndices el orden de las inferencias parciales para que, de ser necesario, usted mismo, o alguien que lee su trabajo, pueda reconstruir el proceso.

3.10 RAZONAMIENTO VÁLIDO

La noción formal de consecuencia lógica permite, a su vez, formalizar el concepto de razonamiento válido, en el sistema de la lógica proposicional.

Definición 3.31 Sea R = ($\{P_1, P_2, \ldots, P_t\}$, C) un razonamiento deductivo de premisas P_1, $P_2, \ldots, P_t$ y conclusión C. Este razonamiento R es válido si y sólo si C es consecuencia lógica de $P_1, P_2, \ldots, P_t$

La definición anterior puede entonces expresarse así:

El razonamiento R = ($\{P_1, P_2, \ldots, P_t\}$, C) es válido si y sólo si $\{P_1, P_2, \ldots, P_t\} \models C$

De acuerdo con esta definición, el procedimiento para decidir si un argumento deductivo es o no válido es el siguiente: Se representa el argumento en el lenguaje L(**P**) de la lógica proposicional en la forma de un condicional $(P_1 \land P_2 \land \ldots \land P_t) \Rightarrow C$, donde las fórmulas $P_1, \ldots, P_t$ representan las premisas, y C la conclusión. Si este condicional es una tautología, el razonamiento deductivo es válido; si no lo es, el razonamiento es no válido. En este último caso **es necesario** mostrar una interpretación para la cual las premisas son verdaderas pero la conclusión es falsa. A tal **interpretación** se le llama un contraejemplo.

Ejercicio 3.32 Utilice el criterio de validez presentado en el párrafo anterior para mostrar que el razonamiento siguiente es válido (ejemplo 3.11).

> "Si es verdad que si llueve entonces los estudiantes se acuestan, entonces no estudian. Si los estudiantes aprueban el examen, entonces, o estudian o el examen es trivial. Pero si el examen es trivial, entonces los estudiantes son flojos. Y es un hecho que los estudiantes aprueban el examen y no son flojos. En consecuencia, llueve y los estudiantes no se acuestan".

El criterio de validez para razonamientos deductivos en L(P) es un criterio correcto. Esto significa que cuando el criterio indica que un razonamiento deductivo es válido, efectivamente lo es. Sin embargo, es conveniente anotar que el disponer de este criterio no significa necesariamente eliminar de la práctica cotidiana el análisis informal. El criterio aquí expuesto es una herramienta útil cuando se exige un método formal de deducción o cuando la complejidad del argumento no permite mostrar informalmente que la conclusión es consecuencia lógica de las premisas.

3.11 REGLAS DE INFERENCIA. DEDUCCIÓN NATURAL

Si el condicional $(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_t) \Rightarrow C$ que representa un razonamiento deductivo contiene n átomos o variables proposicionales, la tabla de verdad correspondiente tiene 2^n filas, una por cada interpretación. Aun cuando sólo requerimos considerar aquellas líneas en las cuales todas las premisas son verdaderas, en la práctica el número de interpretaciones que deben considerarse puede ser todavía muy alto. Una forma alternativa de establecer la validez de un argumento es usar el método de deducción natural, que consiste en deducir la conclusión a partir de las premisas, mediante el uso de un conjunto de reglas llamadas reglas de inferencia. Estas reglas son esquemas deductivos cuya validez aceptamos sin discusión y que se corresponden con estructuras simples de razonamiento válido identificadas como tales en la lógica clásica. Un ejemplo es la regla *"Modus ponens"*, denotada como $\{A \Rightarrow B, A\} \models B$. Se trata de una regla natural de deducción que aplicamos inconsciente pero permanentemente: Si es un hecho que "cada vez que se da A, se tiene que dar B" y es un hecho también que "se da A", entonces "debe darse B". Como puede verse, es una regla de aplicación espontánea y cotidiana: Si es miércoles, y si cuando es miércoles tengo clase de lógica, entonces "es natural" concluir que tengo clase de lógica.

Tan naturales como la anterior son las reglas de inferencia o deducción que se listan a continuación.

El lector debe aprender cada regla con el nombre correspondiente y estar en capacidad de identificarlas cuando las utilice en el proceso de determinar la validez de un razonamiento deductivo.

Las reglas de inferencia:

1. *Modus ponens* (MP): $\{A, A \Rightarrow B\} \models B$
2. *Modus tollens* (MT): $\{A \Rightarrow B, \neg B\} \models \neg A$
3. Silogismo hipotético (SH): $\{A \Rightarrow B, B \Rightarrow C\} \models (A \Rightarrow C)$
4. Silogismo disyuntivo (SD): $\{A \vee B, \neg A\} \models B$
   $\{A \vee B, \neg B\} \models A$
5. Dilema constructivo (DC): $\{(A \Rightarrow B), (C \Rightarrow D), A \vee C\} \models (B \vee D)$
6. Simplificación (Sim.): $\{A \wedge B\} \models A$
   $\{A \wedge B\} \models B$
7. Conjunción (Con.): $\{A, B\} \models (A \wedge B)$
8. Adjunción (Adj.): $\{A\} \models (A \vee B)$
   $\{A\} \models (B \vee A)$

Como en el caso de las leyes de equivalencia, puede ser útil idearse formas de recordar el significado de las reglas, formas que pueden ser graciosas sin que ello signifique trivializar el tema bajo estudio. En particular, la *Modus ponens* podría describirse como "la regla del: si... sí, entonces sí"; la *Modus tollens* como "la regla del: "si... no, entonces no"; el Silogismo hipotético, como "soñar no cuesta nada", etc.

Ejemplo 3.33 Para ilustrar el uso de la deducción natural, estableceremos por este método la validez del razonamiento considerado en el ejemplo 3.29:

> "Todos los miércoles la universidad presenta un grupo de cuenteros o un grupo musical. Además, no se hace una presentación de la misma clase de grupos en dos miércoles seguidos. Hoy es miércoles, y el pasado miércoles se presentó un grupo musical. Por lo tanto, la universidad presenta hoy un grupo de cuenteros".

Los símbolos que se utilizaron para representar las proposiciones atómicas fueron:

p: Es miércoles.

q: La universidad presenta hoy un grupo de cuenteros.

r: La universidad presenta hoy un grupo musical.

s: El miércoles pasado la universidad presentó un grupo de cuenteros.

t: El miércoles pasado la universidad presentó un grupo musical.

Sobre la base de lo anterior, las premisas y la conclusión quedan representadas en esta forma:

P_1 $p \Rightarrow (q \vee r)$

P_2 $s \Rightarrow \neg q$

P_3 $t \Rightarrow \neg r$

P_4 $p \wedge t$

C. **q**

Ahora utilizaremos deducción natural para derivar la conclusión. Las inferencias graduales constituyen nuevas premisas y se identifican como tales por el símbolo ‘. En cada línea se citan la regla de inferencia aplicada en ese momento del proceso y las premisas involucradas. El proceso termina cuando la línea derivada es justamente la conclusión del razonamiento.

P_1	$p \Rightarrow (q \vee r)$	(Premisa)
P_2	$s \Rightarrow \neg q$	(Premisa)
P_3	$t \Rightarrow \neg r$	(Premisa)
P_4	$p \wedge t$	(Premisa)
P_5'	t	(Sim. 4) ← Indica que se utilizó la regla de Simplificación en la línea 4.
P_6'	$\neg r$	(MP 3, 5’) ← Indica que se utilizó *Modus ponens* entre las líneas 3 y 5.
P_7'	p	(Sim. 4)
P_8'	$q \vee r$	(MP 1, 7’)
C.	**q**	(SD 6’, 8’) ← Silogismo disyuntivo entre las líneas 6 y 8.

Ejemplo 3.34 Utilizar deducción natural para establecer la validez del razonamiento en el caso del ejemplo 3.11.

Las premisas y la conclusión del razonamiento fueron representadas de esta forma:

P_1 $(p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg r$

P_2 $s \Rightarrow (r \vee t)$

P_3 $t \Rightarrow v$

P_4 $s \wedge \neg v$

C. $p \wedge \neg q$

Deducción:

P_1	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg r$	(Premisa)
P_2	$s \Rightarrow (r \vee t)$	(Premisa)
P_3	$t \Rightarrow v$	(Premisa)
P_4	$s \wedge \neg v$	(Premisa)
P_5'	s	(Sim 4)
P_6'	$\neg v$	(Sim 4)
P_7'	$r \vee t$	(MP 2, 5')
P_8'	$\neg t$	(MT 3, 6')
P_9'	r	(SD 7', 8')
P_{10}'	$\neg(\neg r)$	(DN 9') $\leftarrow$ Doble negación en la línea 9.
P_{11}'	$\neg(p \Rightarrow q)$	(MT 1,10')
P_{12}'	$\neg(\neg(p \wedge \neg q))$	(Def. Condicional)
C.	$\mathbf{p \wedge \neg q}$	(DN 12')

Ejemplo 3.35 Utilice deducción natural para deducir que $\neg r$ es consecuencia lógica de este conjunto de premisas $\{p \Rightarrow \neg q, \neg p \Rightarrow (r \Rightarrow \neg q), (\neg s \vee \neg r) \Rightarrow \neg\neg q, \neg s\}$.

Solución: Que $\neg r$ sea consecuencia lógica del conjunto dado de premisas es equivalente a afirmar que el razonamiento siguiente es válido:

P_1 $p \Rightarrow \neg q$

P_2 $\neg p \Rightarrow (r \Rightarrow \neg q)$

P_3 $(\neg s \vee \neg r) \Rightarrow \neg\neg q$

P_4 $\neg s$

C. $\neg r$

Deducción:

P_1	$p \Rightarrow \neg q$	(Premisa)
P_2	$\neg p \Rightarrow (r \Rightarrow \neg q)$	(Premisa)
P_3	$(\neg s \vee \neg r) \Rightarrow \neg\neg q$	(Premisa)
P_4	$\neg s$	(Premisa)
P_5'	$\neg s \vee \neg r$	(Adj, 4) $\leftarrow$ Regla de adjunción en la línea 4.
P_6'	$\neg\neg q$	(MP 3, 5')
P_7'	$\neg p$	(MT 1, 6')
P_8'	$r \Rightarrow \neg q$	(MP 2, 7')
C.	$\mathbf{\neg r}$	(MT 6', 8')

Para establecer la validez de un argumento se muestra que la conclusión es consecuencia lógica de las premisas. Esto requiere, o probar que la fórmula que lo representa es una tautología o, alternativamente, utilizar deducción natural para derivar la conclusión a partir de las premisas. Naturalmente, si el razonamiento es inválido, lo anterior no será posible. En tal este caso, debe mostrarse un contraejemplo, es decir, exhibir alguna interpretación para la cual todas las premisas son verdaderas y, sin embargo, la conclusión es falsa. Si usted asegura que un razonamiento no es válido, debe mostrar siempre un contraejemplo; no es suficiente decir que "no se puede llegar a la conclusión".

Ejemplo 3.36 Decidir si el razonamiento representado a continuación es válido o es inválido:

P_1 $\quad p \Rightarrow (q \vee r)$

P_2 $\quad q \Rightarrow (s \vee t)$

P_3 $\quad t \Rightarrow u$

P_4 $\quad \neg(u \vee s)$

C. $\quad \neg p$

Razonemos de esta manera: Las tres primeras premisas son condicionales... pero un condicional nada nos asegura sobre la verdad del antecedente o del consecuente. Entonces, no podemos hacer ninguna inferencia a partir de ellas. Buscamos si hay una premisa formada por la disyunción de los antecedentes de un par de estos condicionales ($p \vee q$ o $p \vee t$ o $q \vee t$), con el fin de utilizar la regla de Dilema constructivo, pero no la hay. Se concluye así que no hay un proceso deductivo que pueda iniciarse con alguna de las tres primeras premisas y, por tanto, examinamos la posibilidad de iniciarlo con la cuarta premisa. Esta es equivalente a la conjunción $\neg u \wedge \neg s$, por una de las leyes de De Morgan, y de esta conjunción sí podemos hacer nuevas inferencias aplicando la regla de simplificación: A continuación se presenta el desarrollo obtenido a partir de esta única opción:

P_1	$p \Rightarrow (q \vee r)$	
P_2	$q \Rightarrow (s \vee t)$	
P_3	$t \Rightarrow u$	
P_4	$\neg(u \vee s)$	
P_5'	$\neg u \wedge \neg s$	(Equivalencia con 4; ley de De Morgan)
P_6'	$\neg u$	(Simplificación, en 5)
P_7'	$\neg s$	(Simplificación, en 5)
P_8'	$\neg t$	(*Modus tollens*, 6 y 3)

P_9' $\neg s \wedge \neg t$ (Conjunción 7 y 8)

P_{10}' $\neg(s \vee t)$ Equivalencia con 9; ley de De Morgan)

P_{11}' $\neg q$ (*Modus tollens*, 2 y 10)

Hasta el momento se ha inferido ¬q, pero la conclusión del razonamiento es ¬p. Y como p figura solamente en P_1, se concluye que tendríamos que deducir $\neg(q \vee r)$ para deducir posteriormente ¬p, por *Modus tollens.* Ahora bien: $\neg(q\vee r) \equiv \neg q \wedge \neg r$ y en P_{11}' tenemos ¬q. Entonces, requerimos ¬r. Sin embargo, nada permite deducir ¬r porque ni aparece en otra premisa ni es una tautología. (A propósito, siempre que sea útil o necesario, se puede insertar una tautología entre las premisas originales o derivadas en un razonamiento. ¿Por qué?). Al llegar a este punto en el análisis es razonable conjeturar que el razonamiento es inválido. Para probarlo, debemos encontrar una interpretación para la cual todas las premisas son verdaderas y la conclusión falsa. Veamos: P_{11}' establece que v(q) =F. De manera que, tomando v(r) =V, se tiene $v(q \vee r)$=V, y con v(p) = V se garantiza que la primera premisa, $p \Rightarrow (q \vee r)$, es verdadera. De esto se desprende que v(¬p) =F, en contra de lo que afirma la conclusión. Finalmente, para la interpretación v(p) = v(r) =V, v(q) = v(s) = v(t) = v(u) = F, todas las premisas son verdaderas y la conclusión falsa. Este contraejemplo muestra que el razonamiento no es válido. Asegúrese de comprender el significado del proceso anterior: hemos mostrado que es posible tener proposiciones p, q, r, s, t, u con los valores encontrados, para las cuales todas las premisas son verdaderas pero la conclusión es falsa. Por analogía lógica, el razonamiento es falso, independientemente de cuál fuera el significado de las proposiciones atómicas que intervienen en él.

3.12 REGLA DE LA DEDUCCIÓN

En muchos casos la conclusión de un razonamiento es un condicional. Esto sucede con mucha frecuencia en los teoremas. Consideremos por ejemplo estos resultados:

R1. Sean a y b números reales positivos. Entonces si a<b, $a^2 < b^2$”.

R2. Sean A, B y C conjuntos tales que $A \cap B = \phi$. Entonces, si AUB=C, B=C-A.

Por último, un ejemplo en el cual las premisas y la conclusión se representan como sigue:

P_1 $p \Rightarrow \neg q$

P_2 $r \Rightarrow \neg q$

P_3 $(s \vee t) \Rightarrow u$

P_4 $(\neg p \wedge \neg r) \Rightarrow s$

C. $\mathbf{q \Rightarrow u}$

En cada uno de los casos anteriores la argumentación debe establecer la verdad de un condicional $S \Rightarrow T$ a partir de un conjunto de premisas $\{P_1, P_2 \ldots P_n\}$. El esquema general de demostración hace uso de la Ley de deducción (Nro. 10 de la tabla 3.6) y se describe en el recuadro siguiente:

> El proceso argumentativo para establecer la validez de un razonamiento en el cual la conclusión es un condicional, $((P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n) \Rightarrow (S \Rightarrow T))$, empieza por la aplicación de la Ley de deducción al esquema anterior, para transformarlo en un esquema equivalente $((P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \wedge \mathbf{S}) \Rightarrow T))$. Esto equivale a suponer que el antecedente del condicional que representa la conclusión es verdadero, incorporarlo como nueva premisa y probar que el consecuente es consecuencia lógica del conjunto de premisas así aumentado.

En el caso del resultado R1, diríamos: Supongamos que a y b son números reales positivos, y que $a<b$. A partir de esta información y de los conocimientos sobre números reales probaríamos que $a^2 < b^2$.

Para el resultado R2, supondríamos que A, B y C son conjuntos tales que $A \cap B = \varnothing$ y $A \cup B = C$, para concluir, basándonos en lo anterior, que $B = C - A$.

Finalmente, en el tercer caso incorporaríamos a q como premisa P_5, para deducir u como consecuencia lógica del conjunto ampliado de premisas.

La generalización del proceso anterior se conoce con el nombre de **Regla de la deducción (RD)** que puede simbolizarse así:

$$\mathbf{(W \models A \Rightarrow B) \equiv (W \cup \{A\} \models B) \quad (4)}$$

Regla de la deducción: Sea W un conjunto de fórmulas y sean A y B fórmulas. Entonces, del conjunto W se deduce como consecuencia lógica $A \Rightarrow B$, es decir, $W \models A \Rightarrow B$, si y sólo si del conjunto que resulta al adicionar a W la fórmula A, $\mathbf{W \cup \{A\}}$, se deduce como consecuencia lógica B, es decir, $(W \cup \{A\}) \models B$.

Esta importantísima regla establece que una forma de probar que un condicional $A \Rightarrow B$ es consecuencia lógica de un conjunto dado de premisas es añadir el antecedente A al conjunto de premisas y mostrar que B es consecuencia lógica del conjunto así ampliado de premisas, como se ve en el ejemplo siguiente:

Ejemplo 3.37 Probar que $\{p \Rightarrow \neg q, r \Rightarrow \neg q, (s \vee t) \Rightarrow u, (\neg p \wedge \neg r) \Rightarrow s\} \models q \Rightarrow u$

Premisas:

P_1	$p \Rightarrow \neg q$
P_2	$r \Rightarrow \neg q$
P_3	$(s \vee t) \Rightarrow u$
P_4	$(\neg p \wedge \neg r) \Rightarrow s$

Deducción:

P_5'	q	(RD) ← Se incorpora q como nueva premisa.
P_6'	$\neg p$	(MT 1, 5′)
P_7'	$\neg r$	(MT 2, 5′)
P_8'	$\neg p \wedge \neg r$	(Con 6′, 7′)
P_9'	s	(MP 4, 8′)
P_{10}'	$s \vee t$	(Adj 9′)
P_{11}'	u	(MP 3, 10′)
P_{12}	$\mathbf{q \Rightarrow u}$	(RD: Regla de la deducción)

El proceso anterior muestra que u es consecuencia lógica del conjunto aumentado de premisas dadas. En consecuencia, según la equivalencia (4), $\{p \Rightarrow \neg q,\ r \Rightarrow \neg q,\ (s \vee t) \Rightarrow u,\ (\neg p \wedge \neg r) \Rightarrow s\} \models (q \Rightarrow u)$.

Observe que, una vez obtenida u en la línea 11, completamos el proceso escribiendo **q⇒u** y reiterando el uso de la regla de la deducción. Esto, para insistir en que q no es una premisa original sino que se asume como verdadera por ser el antecedente de la conclusión.

Ejemplo 3.38 A continuación presentamos, a manera de ejemplo, la demostración del resultado R1: "Sean a y b números reales positivos. Entonces, si $a<b$, $a^2 < b^2$". La demostración se comprende fácilmente, pues sólo requiere algunos elementos de álgebra básica:

P_1	a es un real positivo	
P_2	b es un real positivo	
P_3'	$a<b$	(Regla de la deducción)
P_4'	$b + a$ es un real positivo	(Porque la suma de reales positivos es real positivo)
P_5'	$b-a$ es un real positivo	(Porque si $a<b$ entonces $b>a$ y la diferencia $b-a$ es positiva)
P_6'	$(b + a)(b-a)$ es un real positivo	(Porque el producto de reales positivos es real positivo)
P_7'	b^2-a^2 es real positivo	(Porque $(b+a)(b-a)= b^2-a^2$)
P_8'	$a^2<b^2$	(Porque la diferencia en P_7' es positiva)

P_9' Si a es real positivo y b real positivo, entonces ($a<b \Rightarrow a^2<b^2$). (Regla de la deducción)

3.13 INCONSISTENCIA

Para mostrar que un razonamiento es inválido debemos exhibir un contraejemplo, es decir, una interpretación para la cual todas las premisas son verdaderas pero la conclusión es falsa. Si no existe una interpretación tal, el razonamiento es válido. Como veremos, este hecho tiene consecuencias que en algunos casos pueden parecer extrañas.

Ejemplo 3.39 Consideremos el argumento siguiente:

Si el presidente es amonestado, el gran público quedará insatisfecho. Pero si el presidente no es amonestado, la clase política quedará insatisfecha. Sin embargo, ninguno de estos sectores quedará insatisfecho. Por lo tanto, el presidente será declarado "Gran Héroe Nacional".

El razonamiento tiene esta representación simbólica en el lenguaje L(**P**):

$$\{p \Rightarrow q, \neg p \Rightarrow r, \neg q \wedge \neg r\} \models s$$

La desconexión simbólica entre las premisas y la conclusión podría hacer pensar en la invalidez del razonamiento. En efecto, **si** para alguna interpretación las premisas **fueran** simultáneamente verdaderas sería suficiente añadir v(s)=F y esto mostraría la invalidez del razonamiento. Sin embargo, la tabla siguiente, que presenta los valores de las premisas para las 8 interpretaciones posibles de la terna p–q–r, muestra que las premisas no pueden ser simultáneamente verdaderas, que no pueden coexistir como premisas de un razonamiento:

Tabla 3.7 Un conjunto inconsistente de premisas

p	q	r	¬p	¬q	¬r	p⇒q	¬p⇒r	¬q∧¬r
V	V	V	F	F	F	V	V	**F**
V	V	F	F	F	V	V	V	**F**
V	F	V	F	V	F	**F**	V	**F**
V	F	F	F	V	V	**F**	V	V
F	V	V	V	F	F	V	V	**F**
F	V	F	V	F	V	V	**F**	**F**
F	F	V	V	V	F	V	V	**F**
F	F	F	V	V	V	V	**F**	V

Observe que cada interpretación hace falsa por lo menos a una de las premisas. En este caso decimos que las premisas son inconsistentes —y por extensión, que el argumento es inconsistente— para significar que no pueden aceptarse simultáneamente como premisas de un argumento sólido o convincente. (Recuerde que un argumento sólido o convincente es un argumento válido cuyas premisas son verdaderas). Lo extraño de los argumentos inconsistentes, desde el punto de vista de la lógica formal, es que son válidos. En efecto, la conjunción de sus premisas es falsa y por lo tanto el condicional que tiene tal conjunción como antecedente es verdadero. Formalmente, entonces, el razonamiento es válido. El resultado es sorprendente: sin importar s, el condicional es una tautología; es decir, no importa cuál sea la conclusión, todo razonamiento que tenga las premisas de este ejemplo es un razonamiento válido. Sin embargo, no puede ser convincente, porque sus premisas tendrían que ser simultáneamente verdaderas y, como vemos, esto es imposible.

Definición 3.40 Un conjunto de premisas es inconsistente, si es imposible que sean simultáneamente verdaderas. Es usual decir, en este caso, que "las premisas son inconsistentes".

Definición 3.41 Si el conjunto de premisas de un razonamiento es inconsistente se dice que el razonamiento es inconsistente o contradictorio.

Como lo dijimos anteriormente, cualquier cosa puede deducirse válidamente de un conjunto inconsistente de premisas, lo cual despoja de valor a cualquier conclusión que se derive de ellas. ¿De qué puede servir un conjunto de premisas que permite deducir tanto una afirmación como su contradictoria? Supongamos que a partir de un conjunto de premisas, deducimos A y su fórmula contradictoria ¬A, como se ve en a continuación:

P_1 ----
P_2 ----
.
.
P_m A
.
P_t ¬A

A partir de este momento podemos argumentar así: Por adjunción en la línea m obtenemos

P_{t+1} $A \vee Q$, donde Q representa una conclusión arbitraria propuesta.

Y por Silogismo disyuntivo entre las líneas t y t+1, se obtiene la conclusión Q:

C. Q

Con lo anterior queda establecido que cualquiera sea la conclusión Q ella puede derivarse en forma válida como consecuencia lógica de tal conjunto inconsistente de premisas.

Apliquemos las anotaciones anteriores, al ejemplo 3.39:

P_1	$p \Rightarrow q$	
P_2	$\neg p \Rightarrow r$	
P_3	$\neg q \wedge \neg r$	
C.	// s	
P_4'	$\neg q$	(Sim. 3)
P_5'	$\neg r$	(Sim. 3)
P_6'	$\neg p$	(MT 1, 4’)
P_7'	$\neg(\neg p)$	(MT 2, 5’)
P_8'	p	(DN 7’) (Aquí es evidente la inconsistencia: P_6, P_8’)
P_9'	$p \vee s$	(Adj 8’) (s es la conclusión pretendida)
C.	**s**	(SD 6’, 9’)

La detección de una inconsistencia en un argumento dialéctico puede significar el desplome de todo el edificio argumentativo erigido hasta ese momento. Sin embargo, la detección de una inconsistencia en un cuerpo de conocimiento no necesariamente es una catástrofe: bien puede constituir el punto de partida para bienvenidas revisiones que conduzcan a los ajustes necesarios para eliminarla, con todo lo que de positivo ello puede significar para el área de conocimiento en cuestión. La paradoja de Russell en el desarrollo de la teoría de conjuntos es un ejemplo de ello.

3.14 EL MÉTODO INDIRECTO EN LAS PRUEBAS DE VALIDEZ DE RAZONAMIENTOS

3.14.1 El método indirecto por asignación de valores

En la sección 3.9 probamos que el condicional

$$((p \Rightarrow (q \vee r)) \wedge (s \Rightarrow \neg q) \wedge (t \Rightarrow \neg r) \wedge (p \wedge t)) \Rightarrow q$$

es una tautología, considerando solamente las interpretaciones que hacen verdaderas las subfórmulas del antecedente, y mostrando que para ellas el consecuente tiene que ser verdadero. Nos referiremos a este método como “método directo por asignación de valores". Ahora ilustraremos un método alternativo conocido como "método indirecto por asignación de valores".

Ejemplo 3.42 Probar, utilizando el método indirecto por asignación de valores, que el siguiente condicional es una tautología:

$$[(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [(p \vee q) \Rightarrow r]$$

El método indirecto consiste en suponer que el condicional **no** es una tautología, es decir, que existe por lo menos una interpretación para la cual el condicional es falso. A partir de este supuesto desarrollamos un proceso "hacia atrás", tratando de establecer cuál es esa interpretación. Si en algún momento se llega a una contradicción es porque tal interpretación no existe y, en consecuencia, habremos mostrado que el condicional sí es una tautología.

Entonces, empecemos suponiendo que el condicional puede ser falso en alguna línea de su tabla de verdad y denotemos este hecho asignándole el valor F_1 como se ve en seguida:

$$[(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)] \underset{\mathbf{F_1}}{\Rightarrow} [(p \vee q) \Rightarrow r]$$

Ahora razonamos así: para que el condicional sea falso se requiere que el antecedente sea verdadero y el consecuente falso. Indicamos este hecho con los valores V_2 y F_2 bajo los conectivos principales en el antecedente y en el consecuente. (Hemos usado el mismo subíndice porque esta nueva asignación es simultánea pero hubiéramos podido V_2 y F_3).

$$[(p \Rightarrow r) \underset{V_2}{\wedge} (q \Rightarrow r)] \underset{\mathbf{F_1}}{\Rightarrow} [(p \vee q) \underset{F_2}{\Rightarrow} r]$$

En este momento podemos continuar el análisis con el antecedente (V_2) o con el consecuente (F_2) pues en ambos casos hay sólo una opción posible. Hagámoslo con el consecuente: para que el condicional $((p \vee q) \Rightarrow r)$ sea falso, el antecedente debe ser verdadero y el consecuente falso. Marquemos esta deducción con V_3 y F_3, respectivamente.

$$[(p \Rightarrow r) \underset{V_2}{\wedge} (q \Rightarrow r)] \underset{\mathbf{F_1}}{\Rightarrow} [(p \underset{V_3}{\vee} q) \underset{F_2}{\Rightarrow} \underset{F_3}{r}]$$

¡Hemos encontrado un primer valor de verdad: el del átomo r! Entonces lo trasladamos simultáneamente a todas las apariciones de r como F_4, donde el subíndice indica que es una deducción inmediatamente siguiente a las obtenidas en el paso 3.

$$[(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [(p \vee q) \Rightarrow r]$$
$$F_4 \quad V_2 \qquad\qquad F_4 \quad \mathbf{F_1} \qquad\quad V_3 \qquad F_2\ F_3$$

¿Cómo continuar en este momento? Sabemos que la disyunción ($p \vee q$) es verdadera, pero eso conduce a tres alternativas: V–V, V–F, F–V y no hay ninguna razón para seleccionar una en particular. Entonces examinamos el antecedente: Para que la conjunción sea verdadera (V_2), los dos condicionales deben ser verdaderos. Los marcamos con V_5:

$$[(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [(p \vee q) \Rightarrow r]$$
$$V_5\ F_4 \quad V_2 \qquad V_5\ F_4 \quad \mathbf{F_1} \qquad\quad V_3 \qquad F_2\ F_3$$

Ahora tenemos dos condicionales verdaderos con consecuente falso, lo cual sólo es posible si los antecedentes son falsos. Por esta razón asignamos valores de verdad F_6 y F_7 a p y a q. Con esto hemos determinado los valores de p, q, y r, es decir, sólo la interpretación F–F–F para la terna p–q–r podría hacer falso el condicional. Esta es la situación hasta ahora:

$$[(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [(p \vee q) \Rightarrow r]$$
$$F_6\ V_5\ F_4 \quad V_2 \quad F_7\ V_5\ F_4 \quad \mathbf{F_1} \qquad\quad V_3 \qquad F_2\ F_3$$

Sin embargo, cuando trasladamos los valores de p y q a la disyunción como F_8 y F_9, como se ve a continuación, nos encontramos con esta contradicción: la disyunción tendría dos valores de verdad, lo cual es imposible en la lógica proposicional.

$$[(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [(p \vee q) \Rightarrow r]$$
$$F_6\ V_5\ F_4 \quad V_2 \quad F_7\ V_5\ F_4 \quad \mathbf{F_1} \qquad F_8\ \underset{\substack{\uparrow \\ F_{10}}}{V_3}\ F_9 \quad F_2\ F_3$$

La conclusión: el supuesto de que hay por lo menos una línea en la que el condicional es falso lleva a la interpretación F–F–F y a dos valores contradictorios de una fórmula. Esto prueba que tal línea no existe. En consecuencia, aun sin construir la tabla de verdad podemos afirmar que el condicional nunca será falso y, por lo tanto, que es una tautología.

3.14.2 El método indirecto y la deducción natural

Dado que la validez de un razonamiento se establece mostrando que el condicional que lo representa es una tautología, también es posible establecerla utilizando el método indirecto en combinación con las reglas de deducción natural. El fundamento de la prueba es el mismo: se supone que las premisas son verdaderas y que la conclusión es falsa (significa suponer, como en el método anterior, que el condicional es falso). Esto equivale a considerar que la negación de la conclusión es verdadera y, por lo tanto, puede ser incorporada a la lista de premisas como una nueva premisa. El razonamiento será válido si y sólo si el conjunto así ampliado de premisas es inconsistente o contradictorio.

En este punto se le pide al lector reflexionar cuidadosamente sobre la diferencia de significado entre estas dos situaciones:

Un conjunto inconsistente de premisas.

El conjunto que resulta de adicionar a las premisas de un razonamiento la negación de la conclusión es inconsistente.

En el primer caso el conjunto es de poca utilidad: es posible derivar cualquier conclusión. En el segundo, la inconsistencia es importantísima: muestra que el razonamiento es válido.

Ejemplo 3.43 Utilizar el método indirecto y deducción natural para establecer la validez del razonamiento siguiente:

> "El alza en los precios del petróleo es imparable. Esto obligará a disminuir los niveles de consumo mundial de petróleo o a incrementar la producción de biocombustibles. Todo indica, sin embargo, que el mundo no está dispuesto a disminuir los niveles de consumo de petróleo. La otra cara de la moneda es que el incremento en la producción de biocombustibles obliga a dedicar cada vez más tierras a cultivos aprovechables para producción de biocombustibles. Esto traerá como consecuencia alzas exageradas en los precios de alimentos básicos para consumo humano. Lo anterior muestra que el mundo experimentará alzas exageradas en los precios de los alimentos básicos para la especie humana".

Solución: En primer lugar representaremos con átomos las proposiciones atómicas que intervienen en el razonamiento:

p: El alza en los precios del petróleo es imparable.

q: Disminuirá el consumo mundial de petróleo.

r: Se incrementará la producción de biocombustibles.

s: Se dedicarán más tierras a cultivos aprovechables para la producción de biocombustibles.

t: Habrá alzas exageradas en los precios de los alimentos básicos para consumo humano.

En segundo lugar, simbolizaremos las premisas y la conclusión del argumento:

P_1 p

P_2 $p \Rightarrow (q \vee r)$

P_3 $\neg q$

P_4 $r \Rightarrow s$

P_5 $s \Rightarrow t$

C. t

En una demostración indirecta (llamada también demostración por contradicción o por reducción al absurdo) se supone que la conclusión es falsa y se incorpora tal hecho al conjunto de premisas:

P_1	p	
P_2	$p \Rightarrow (q \vee r)$	
P_3	$\neg q$	
P_4	$r \Rightarrow s$	
P_5	$s \Rightarrow t$	
C.	$\mathbf{t}$	
P_6'	$\neg t$	(Método indirecto; negación de la conclusión)
P_7'	$\neg s$	(MT, 5 y 6)
P_8'	$\neg r$	(MT, 4 y 7)
P_9'	$\neg q \wedge \neg r$	(Conj, 3 y 8)
P_{10}'	$\neg(q \vee r)$	(Ley de De M, 9)
P_{11}'	$\neg p$	(MT, 2 y 10)
P_{12}'	$\mathbf{p \wedge \neg p}$	(Conj. 1 y 11)
C.	t	(La conclusión no puede ser falsa, método indirecto)

Ejercicio 3.44 Utilice deducción natural para demostrar la validez del razonamiento anterior, pero esta vez por demostración directa. Aunque en este caso la demostración directa es mucho más sencilla, ello no siempre es así.

EJERCICIOS

1. Represente simbólicamente los enunciados a-j, utilizando los átomos p, q, r y s, con estos significados: p: 2 es número primo, q: 2 es número par, r: le entrego el libro, s: usted me entrega la fotografía.
   a. 2 es número primo, pero es par.
   b. es número par; sin embargo, es primo.
   c. 2 es número primo no obstante que es par.
   d. Es falso que 2 no es primo o no es par.
   e. Es falso que 2 no es primo o es falso que 2 no es par.
   f. Le entrego el libro si me entrega la fotografía.
   g. Le entrego el libro sólo si me entrega la fotografía.
   h. Si no me entrega la fotografía, entonces no le entrego el libro.
   i. Sólo si me entrega la fotografía le entrego el libro.
   j. No le entrego el libro, a menos que me entregue la fotografía.

2. Sobre la base de las definiciones de los conectivos lógicos, establezca el valor de verdad de los enunciados a–j.
   a. (Roma es la capital de Italia)$\wedge$(Viena no es la capital de Suiza).
   b. Aun cuando es cierto que París es la capital de Francia, es falso que Roma es la capital de Italia.
   c. Ni Viena es la capital de Suiza ni París es la capital de Francia.
   d. $\neg$(Viena es la capital de Suiza) $\wedge$ $\neg$(París es la capital de Francia).
   e. $\neg$(Viena es la capital de Suiza) $\Rightarrow$ (París es la capital de Italia).
   f. ($\neg$ Viena es la capital de Austria $\vee$ París es la capital de Italia) $\Leftrightarrow$ Roma es la capital de Francia.
   g. Viena es la capital de Austria $\wedge$ $\neg$(Roma es la capital de Italia $\wedge$ $\neg$ París es la capital de Francia).
   h. $\neg$(Todo número impar es primo $\wedge$ todo número primo es impar).
   i. Todo número primo es impar si y sólo si todo número impar es primo.
   j. (Todo número impar es primo) $\vee$ $\neg${(todo número primo es impar) $\Leftrightarrow$ [$\neg$(todo número impar es primo)]}.

3. Considere las proposiciones “Álvaro Uribe es presidente de Colombia” y “Álvaro Uribe es ciudadano colombiano”. Utilice los átomos p y q para representarlas, en ese orden, y escriba por lo menos seis enunciados que se representarían en este caso como p $\Rightarrow$ q.

4. Ilustre, con un ejemplo diferente a los que se proporcionaron en este capítulo, los diferentes usos del condicional (definición, consecuencia lógica, rechazo absoluto, etcétera).

5. En cada uno de los puntos a–h proceda como se le indica en la palabra subrayada:

a. Complete: La expresión "Llueve pero no hace frío ni calor" se puede representar en el cálculo proposicional como ____________.

b. Complete: Según su significado, la disyunción exclusiva entre p y q se puede representar por la fórmula $(p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)$ y también por la fórmula ___________________.

c. Responda: Si A y B representan fórmulas bien formadas tales que $A \equiv B$ y una interpretación para ellas hace que $v(A)=F$, ¿qué puede decirse de $v(\neg B)$ para esta interpretación?

d. Complete cada línea desde a hasta e para obtener una expresión verdadera:

a. $p \wedge (p \vee q) \equiv$ ____________ (Equivalencia: ley de absorción)

b. $\{$ ____ $, \neg p \vee q\} \models q$ (Silogismo disyuntivo)

c. $p \vee q \equiv$ __________ (fórmula equivalente que usa solamente $\neg$ y $\wedge$)

d. $\{\qquad\qquad\qquad\} \models$ (Dilema constructivo)

e. $\{p \wedge q, (r \Rightarrow \neg s) \Rightarrow \neg(p \Rightarrow q)\} \models r$____ *(Modus tollens)*

e. Califique como verdadero o falso: Toda contingencia es una fórmula satisfacible, pero no toda fórmula satisfacible es una contingencia. Escriba un ejemplo de fórmula que es una contingencia.

f. Califique como verdadero o falso: Un razonamiento que tiene como premisas las que aparecen en la lista siguiente es inconsistente:

$$\{(p \vee q) \Rightarrow (r \Rightarrow s), p, (r \Rightarrow s) \Rightarrow (t \Rightarrow w), t \wedge \neg w\}$$

g. Responda: ¿Cuándo y cómo se utiliza la Regla de la Deducción?

h. Suponga que usted se propone demostrar, a partir de un conjunto de premisas, que $a=0 \vee b=0$. ¿Qué haría, si su plan consistiera en demostrar el resultado por método indirecto? ¿Cuál sería entonces la nueva premisa? ¿En qué momento consideraría finalizada la demostración?

6. Deduzca esta equivalencia: $p \wedge (q \Rightarrow r) \equiv \neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg p \vee \neg r)$.

7. A continuación se da un grupo de fórmulas bien formadas. Escriba, para cada una, dos enunciados que se representen simbólicamente con dicha fórmula. Por ejemplo, si la fórmula es $p \Rightarrow (q \wedge r)$, un enunciado podría ser: Si un triángulo es equilátero entonces sus tres lados y sus tres ángulos son iguales; un segundo enunciado de la misma forma: Si hoy es miércoles, entonces tengo clases de Lógica y de Algoritmos.

a. $p \Rightarrow (q \vee \neg r)$

b. $(p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$

c. $(p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \wedge \neg q) \Rightarrow r$

d. $((p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow s)) \Rightarrow ((p \wedge q) \Rightarrow (r \wedge s))$

8. Represente simbólicamente cada razonamiento a-j. Utilice los átomos p, q, r... en el mismo orden en el cual aparecen las proposiciones atómicas en el razonamiento correspondiente. No olvide indicar explícitamente qué proposición está representada por cada átomo.

a Si el ratón se come el queso, entonces el gato atrapa al ratón. Pero el ratón no se come el queso. Por lo tanto, el gato no atrapa al ratón.

b. Si el ratón se come el queso, entonces el gato atrapa al ratón. Pero el gato no atrapa al ratón. Por tanto, el ratón no se come el queso.

c. Si el asalto ocurrió después de las 4 de la mañana, pero antes de las 5, entonces los guardianes se habían quedado dormidos. Si ocurrió a una hora diferente, entonces los guardianes son cómplices necesariamente; en tal circunstancia, hay personas externas involucradas. Por tanto, si los guardias no se quedaron dormidos, el asalto involucra a personas externas.

d. Si resuelvo un ejercicio sin quejarme, entonces lo puedo entender. Yo no puedo entender ejercicios de los cuales no tengo un ejemplo resuelto previamente. Los ejercicios que puedo entender no me producen dolor de cabeza. Este ejercicio tiene un ejemplo previamente resuelto. Por lo tanto, resuelvo este ejercicio sin quejarme, pero me produce dolor de cabeza.

e. Mi padre me anima si estudio diariamente. O me va bien en los cursos o no estudio diariamente. Si duermo en exceso, entonces no me va bien en los cursos. Por lo tanto, si mi padre me anima, entonces no duermo en exceso.

f. Si Dios fuera bueno, querría hacer a sus criaturas perfectamente felices. Y si fuera omnipotente podría hacer todo lo que quisiera. Si Dios quisiera hacer a sus criaturas perfectamente felices y pudiera hacer todo lo que quisiera, entonces las criaturas serían perfectamente felices. Pero las criaturas no son perfectamente felices. En consecuencia, a Dios le falta poder, o bondad, o ambas cosas. (Tomado del artículo "Cazadores de la verdad", de Daniel J. Boorstin. Lecturas Dominicales de El Tiempo, 22/02/98. Se modificó el texto original solamente para hacer explícita una premisa implícita).

g. Si Dios quisiera prevenir el mal pero fuera incapaz de hacerlo, entonces no sería todopoderoso; si fuera capaz de prevenir el mal, pero no quisiera hacerlo, sería malévolo. Existe el mal sólo si Dios es malévolo o incapaz de prevenirlo. Es un hecho que el mal existe. Si Dios existe, entonces es todopoderoso y no es malévolo. En consecuencia, Dios no existe.

h. La convivencia social se deteriorará sensiblemente. Las razones son claras: no hay duda de que si hay alza general de salarios no se podrá contener el desempleo, y si hay paro general no se alcanzarán las metas de producción. Sin embargo, las más recientes intervenciones del ministro de Hacienda y de los sindicalistas indican que habrá alza general de salarios, pero insuficiente para evitar el paro general. Pero se alcanzarán las metas de producción. Lamentablemente, si no puede contenerse el desempleo, o si hay alza general de salarios, la convivencia social se deteriorará sensiblemente.

i. Cualquiera sea la situación del dólar con respecto al peso, algún sector de la economía resulta perjudicado: Si el peso se revalúa, se lamenta el sector exportador porque los dólares que recibe representan menos pesos al traerlos al país; si el peso se devalúa, los importadores tienen que pagar más caros los bienes que importan y se reduce el consumo de los mismos. Además, en este caso se encarece la deuda externa del país, lo cual nos afecta a todos negativamente.

j. Las siguientes razones permiten afirmar que la inversión social disminuirá drásticamente: Según los analistas, si el alza en el salario mínimo es superior a la inflación, entonces no disminuirá el desempleo y, si hay otro paro general, no se alcanzarán las metas del sector productivo. Por otro lado, la dirigencia sindical amenaza con otro paro general, si el alza en el salario mínimo no es superior al nivel de inflación. Esto se complementa con el hecho de que si no disminuye el desempleo o no se alcanzan las metas del sector productivo, entonces habrá una baja en las exportaciones. Y una baja en las exportaciones hará que la inversión social disminuya drásticamente.

9. Clasifique cada fórmula siguiente como satisfacible, tautología, contingencia, o insatisfacible. Recuerde que eventualmente una fórmula puede ser clasificada en diferentes grupos:

a. $(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$

b. $p \wedge ((p \vee q) \Rightarrow \neg q)$

c. $(p \Rightarrow (q \wedge r)) \wedge \neg (p \Rightarrow (q \wedge r))$

d. $((p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)) \Leftrightarrow (p \Rightarrow (q \wedge r))$

e. $((p \Rightarrow q) \wedge (p \wedge r)) \Rightarrow q$

10. Utilice el método directo por asignación de valores para establecer cuáles de las fórmulas siguientes son tautologías. En caso de no serlo, indique en su conclusión una interpretación para la cual la fórmula es falsa:

a. $((p \Rightarrow q) v \neg q) \Rightarrow \neg p$

b. $((p \Rightarrow q) \wedge \neg q) \Rightarrow \neg p$

c. $((p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$

d. $((p \vee q) \wedge (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow r$

e. $[p \Rightarrow (q \vee r)] \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)]$

11. Pruebe las siguientes equivalencias. Un * indica que se exige una prueba algebraica, como en el ejercicio 3.28.

a. $(p \Rightarrow q) \equiv (\neg q \Rightarrow \neg p)$

b. $p \vee (p \wedge q) \equiv p$ *

c. $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

d. $(p \vee q) \wedge p \wedge (q \vee r) \wedge (p \vee \neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r) \equiv (p \wedge r)$ *

e. $(\neg(p \wedge (\neg p \vee q)) \vee q) \equiv V$ *

f. $(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vee (\neg(\neg p \vee q)) \equiv p$ *

g. $\neg[(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)] \vee r \equiv V$

13. En cada caso muestre, sin hacer las tablas de verdad, una interpretación que le permita concluir que las fórmulas de cada par no son equivalentes:

a. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$ y $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$

b. $p \wedge (q \vee r)$ y $(p \wedge q) \vee r$

c. $p \Rightarrow q$ y

d. $q \Rightarrow p$

14. Califique cada afirmación a -e como verdadera o como falsa. Justifique plenamente su respuesta.

a. La notación $\{p, p \Rightarrow q\} \models q$ es ambigua.

b. Un razonamiento deductivo es válido si y sólo si la conjunción de las premisas y la conclusión es una tautología.

c. La afirmación $\{p \Rightarrow q, \neg p\} \models \neg q$ es falsa, porque el razonamiento $((p \Rightarrow q) \wedge \neg p) \Rightarrow \neg q$ es una falacia.

d. Toda regla de inferencia es un razonamiento válido, y todo razonamiento válido es una regla de inferencia.

e. En los razonamientos inválidos las premisas son inconsistentes.

15. Establezca la validez de los razonamientos siguientes:

1. P_1 $(p \vee q) \wedge (r \vee s)$
   P_2 $(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow s)$
   P_3 $\neg r$
   C. s

2. P_1 $p \Rightarrow \neg q$
   P_2 $\neg p \Rightarrow (r \Rightarrow \neg q)$
   P_3 $(\neg s \vee \neg r) \Rightarrow \neg\neg q$
   P_4 $\neg s$
   C. $\neg r$

3 P_1 $(p \vee q) \Rightarrow r$
   P_2 $(r \vee q) \Rightarrow (p \Rightarrow (s \Leftrightarrow t)$
   P_3 $p \wedge s$
   C. $s \Leftrightarrow t$

4 P_1 $x = 5 \vee x < y$
   P_2 $(x>3 \vee z<2) \Rightarrow (z<x \vee y=1)$
   P_3 $x<y \Rightarrow z<2$
   P_4 $x = 5 \Rightarrow x>3$
   P_5 $z<x \Rightarrow x = 4$
   P_6 $y=1 \Rightarrow \neg(x>3 \vee z<2)$
   C. $x=4$

16. Decida sobre la validez de los razonamientos del punto 8 de esta lista de ejercicios.

17. En los casos siguientes, construya una prueba formal de validez o pruebe la invalidez encontrando una interpretación para los átomos involucrados.

a. P_1 $((p \wedge q) \wedge r) \Rightarrow s$
P_2 $(r \Rightarrow s) \Rightarrow (t \Rightarrow w)$
P_3 t
C. $p \Rightarrow w$

b. P_1 $((p \vee q) \wedge r) \Rightarrow s$
P_2 $(r \Rightarrow s) \Rightarrow (t \Rightarrow w)$
P_3 t
C . $p \Rightarrow w$

18. Decida si este argumento es o no válido: Si usted es autosuficiente, entonces sus acciones no están determinadas por eventos previos. En estas circunstancias, sus acciones no son predecibles y no es posible anticipar las consecuencias de ellas. En consecuencia, si usted es autosuficiente, las consecuencias de sus acciones no se pueden anticipar.

19. Pruebe que la fórmula, $((p \wedge \neg q) \Rightarrow r) \wedge (\neg r \wedge p) \Rightarrow q$ es una tautología,

a. Por método indirecto, suponiendo que no lo es y derivando una contradicción.

b. Algebraicamente, utilizando equivalencias para probar que la fórmula dada es lógicamente equivalente con V.

20. Complete los pasos que faltan en la siguiente demostración incompleta de la ley de absorción,

$[p \wedge (p \vee q)] \equiv p$:

$p \wedge (p \vee q) \equiv (p \vee F) \wedge (p \vee q)$	Ley de identidad
$\equiv$ ____________________	Ley distributiva
$\equiv$ ____________________	Ley ____________________
$\equiv p$	Ley ______________

21. Complete el enunciado para obtener una afirmación verdadera.

La expresión "Malo porque sí y malo porque no" es una forma, en el lenguaje cotidiano, de una ley de inferencia (dilema), que se representa así: {_______ , _______ } ⊨ ___.

22. Decida si esta afirmación es falsa o si es verdadera. Justifique su respuesta:

Si la negación de una fórmula A es una tautología, entonces la fórmula A tiene que ser lógicamente equivalente con $p \wedge \neg p$.

23. Complete cada línea en esta demostración algebraica de que $((p \vee q) \wedge \neg p) \Rightarrow q$ es una tautología. (La aparición de ______ y _______indica que usted debe escribir los nombres de dos leyes que se han aplicado simultáneamente):

$((p \vee q) \wedge \neg p) \Rightarrow q \equiv ((p \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg p)) \Rightarrow q$ ______________________________

$\equiv (\_\_\_ \vee (q \wedge \neg p)) \Rightarrow q$ ______________________________

$\equiv (q \wedge \neg p) \Rightarrow q$ Ley de identidad

$\equiv \neg(q \wedge \neg p) \vee q$ definición de $\Rightarrow$

$\equiv (\neg q \vee p) \vee q$ ________________ y ________________

$\equiv (q \vee \neg q) \vee p$ ________________ y ________________

$\equiv$ ____________ ___________________________

$\equiv V$ Ley de dominación

24. Escriba una prueba algebraica de que $[((p \vee \neg q) \Rightarrow r) \wedge \neg q] \Rightarrow r$ es una tautología. Escriba también una prueba por el método indirecto con asignación de valores de verdad.

25. A continuación se dan las premisas de un razonamiento válido en el cual falta la conclusión. Obténgala, utilizando todas las premisas:

> "Si no tenemos fe en la recuperación del país y tambalea la esperanza, no tendremos un futuro mejor. Es cierto que tambalea la esperanza, pero también que tendremos un mejor futuro. Por lo tanto…".

26. Utilice deducción natural para mostrar que este razonamiento es válido:

$$\{\neg s \Rightarrow q,\ (u \vee p) \Rightarrow (v \vee t),\ (r \wedge s) \Rightarrow t,\ \neg r \Rightarrow q,\ q \Rightarrow u\} \models (\neg t \Rightarrow v)$$

27. Suponga que los símbolos p y q tienen estos significados:

p: Estudiaremos Lógica este domingo.

q: Tenemos parcial de Organizaciones el lunes.

Represente simbólicamente el enunciado «Estudiaremos Lógica este domingo sólo si no tenemos parcial de Organizaciones el lunes» .

28. Llene los espacios provistos en cada caso, para obtener fórmulas lógicamente equivalentes con la fórmula $\neg r \Rightarrow s$. No use dobles negaciones ($\neg\neg A$).

a. ___ =>___ b. ___ v ___ c. $\neg($ ___ $\wedge$ ___ $)$

29. Suponga que A y B son fórmulas lógicamente equivalentes. Entonces, se puede asegurar que $A \wedge \neg B \equiv F$. Seleccione, entre los siguientes enunciados, las posibles justificaciones de tal afirmación:

a. Si $A \equiv B$, no es posible que A y $\neg B$ sean simultáneamente verdaderas para alguna interpretación.

b. $\neg B$ es falso. Por lo tanto la conjunción $A \wedge \neg B$ también lo es.

c. Si $A \equiv B$, por lo menos una entre A y $\neg B$ tiene que ser falsa para cada interpretación.

d. Si $A \equiv B$ entonces los valores de A y B son iguales, para cada interpretación.

30. Decida sobre la validez del razonamiento siguiente:

"Si pago matrícula completa no me quedará dinero. Pero si no pago matrícula completa no puedo matricularme en todos los cursos. Por otra parte, no aprenderé Programación de computadores a menos que me compre un computador, lo cual podré hacer sólo si me queda dinero. Además, si no me matriculo en todas las clases no me compraré un computador. Como es un hecho que pago matrícula completa o no pago matrícula completa entonces, con seguridad, no aprenderé Programación de computadores".

31. Decida si este conjunto de premisas es o no, inconsistente:

$$\{r \Rightarrow \neg s,\ p \vee q,\ (\neg r \wedge w) \Rightarrow \neg p,\ \neg q \wedge w,\ \neg s\}$$

32. Decida si esta afirmación es o no verdadera. Justifique su respuesta:

Ser fórmula satisfacible es condición necesaria pero no suficiente para ser tautología. En cambio, ser tautología es condición suficiente pero no necesaria para ser satisfacible.

EJERCICIOS DE OPCIÓN MÚLTIPLE

1. ¿Cuál de las siguientes fórmulas representa este enunciado: "Te ayudo si me devuelves mi calculadora" (donde p = "te ayudo" y q = "me devuelves mi calculadora")?

(A) $p \wedge q$

(B) $p \vee q$

(C) $p \Rightarrow q$

(D) $q \Rightarrow p$

(E) $(p \vee q) \wedge \neg (p \wedge q)$

2. ¿Cuál de las siguientes es una fórmula bien formada?

(A) $\{\neg\neg\neg p \wedge [q \Rightarrow (r \vee \neg s)]\}$

(B) $(p \wedge \neg\neg r) \Rightarrow (t \wedge s)$

(C) $[p \vee \neg (s)]$

(D) $p \vee r \Rightarrow s$

(E) $(p \Rightarrow\Rightarrow s)$

3. Considere el siguiente texto: "Los radicales libres pueden, por un lado, deteriorar las membranas celulares o pueden, por otro, intervenir en la producción de enfermedades como el cáncer; es más, pueden pasar ambas cosas".

Simbolizando los átomos en el orden en que aparecen, ¿cuál de las siguientes es una FBF que representa el texto?

(A) $[(p \vee q) \wedge \neg (p \wedge q)]$

(B) $(p \vee q)$

(C) $(p \wedge q)$

(D) $[(p \vee q) \vee \neg (p \vee q)]$

(E) $[(p \vee q) \vee r]$

4. Considere el siguiente texto: "Sólo con un uso adecuado del poder y con una interpretación apropiada de la voluntad del pueblo, una democracia es verdaderamente legítima; si es cierta la anterior afirmación, entonces hay un uso adecuado del poder o no habrá reelección". Simbolizando el texto con los átomos p, q, r,..., en el mismo orden en que aparecen en el texto, ¿cuál de las siguientes opciones es una representación simbólica de ese texto?

(A) $\{ [(p \wedge q) \Rightarrow r] \Rightarrow [(p \vee \neg s) \wedge \neg (p \wedge \neg s)] \}$

(B) $\{ [r \Rightarrow (p \wedge q)] \wedge (p \vee \neg s) \}$

(C) $\{ [(p \wedge q) \Rightarrow r] \Rightarrow (p \vee \neg s) \}$

(D) $\{ [r \Rightarrow (p \wedge q)] \Rightarrow (\neg p \vee \neg s) \}$

(E) $\{ [r \Rightarrow (p \wedge q)] \Rightarrow (p \vee \neg s) \}$

(F) $\{ [(p \wedge q) \Rightarrow r] \vee (p \vee \neg s) \}$

(G) $\{ [r \Rightarrow (p \vee q)] \Rightarrow (\neg p \vee \neg s) \}$

(H) $\{ [p \Rightarrow (q \wedge r)] \Rightarrow (p \vee \neg r) \}$

5. Considere el texto siguiente: "No es cierto que el nuevo equipo sea un equipo ganador, como tampoco es cierto que el nuevo técnico sea responsable. Si la afirmación anterior es verdadera, entonces es falso que si el nuevo equipo no es un equipo ganador entonces el nuevo técnico es responsable". Simbolizando las proposiciones atómicas del texto con los átomos p, q, r, ..., en el mismo orden de aparición, ¿cuál de las siguientes opciones es una representación simbólica del texto?

(A) $\neg [(\neg p \wedge \neg q) \Rightarrow \neg (\neg p \Rightarrow q)]$

(B) $[\neg (p \wedge q) \Rightarrow \neg (\neg p \Rightarrow q)]$

(C) $[(\neg p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow \neg (\neg p \Rightarrow q)]$

(D) $[(\neg p \wedge \neg q) \Rightarrow \neg (\neg p \Rightarrow q)]$

(E) $[(\neg p \wedge \neg q) \Rightarrow (\neg p \Rightarrow \neg q)]$

(F) $[(\neg p \wedge \neg q) \Rightarrow \neg (\neg p \Rightarrow \neg q)]$

(G) $[(\neg p \wedge \neg q) \Rightarrow \neg\neg (p \Rightarrow q)]$

(H) $\{ (\neg p \wedge \neg q) \Rightarrow \neg [\neg (p \Rightarrow q)] \}$

1.

6. Considere el texto siguiente: "Si alguien no tiene paciencia, entonces obtendrá beneficios a corto plazo. Además, sucede que alguien tiene paciencia o tiene carisma. Por otra parte, una persona no obtendrá beneficios a corto plazo o al menos no es el caso que tenga carisma. En consecuencia, tiene paciencia". Simbolizando el texto con los átomos p, q, r, ..., en el mismo orden en que aparecen en el razonamiento, ¿cuál de las siguientes opciones es una representación simbólica del razonamiento?

(A) $[(\neg p \Rightarrow q) \wedge (p \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg r)] \Rightarrow p$

(B) $[(p \Rightarrow q) \wedge (p \vee r) \wedge \neg (\neg q \vee \neg r)] \Rightarrow p$

(C) $[(\neg p \Rightarrow \neg r) \wedge (p \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg r)] \Rightarrow p$

(D) $[(\neg p \Rightarrow q) \wedge (p \vee r)] \wedge [(\neg q \vee \neg r) \Rightarrow p]$

(E) $[\neg (p \Rightarrow q) \wedge (p \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg r)] \Rightarrow p$

(F) $\neg [(p \Rightarrow q) \wedge (p \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg r)] \Rightarrow p$

(G) $[(\neg p \Leftrightarrow q) \wedge (p \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg r)] \Rightarrow p$

(H) $\{(\neg p\Rightarrow q) \wedge (p\vee r) \wedge [(\neg q\vee\neg r) \wedge \neg(\neg q\wedge\neg r)\}\Rightarrow p$

7. Todas las afirmaciones siguientes se refieren a la misma fórmula referida en el punto anterior. Cada una de las afirmaciones es verdadera, **excepto**:

(A) La fórmula tiene ocho interpretaciones.

(B) Por lo menos una de las interpretaciones de la fórmula hace que su valor de verdad sea verdadero; por lo tanto, es una fórmula satisfacible.

(C) Si la fórmula representa en el lenguaje de la lógica proposicional un razonamiento deductivo, no podríamos referirnos al razonamiento como "verdadero" o "falso".

(D) Si negáramos la fórmula completa, el valor de verdad de la fórmula negada, para la interpretación v(p) = V, v(q) = V, y v(r) = F, sería falso.

(E) Si negáramos la conclusión del razonamiento, el valor de verdad de la fórmula que expresa el razonamiento modificado sería verdadero para la interpretación v(p) = V, v(q) = V, y v(r) = F.

8. Sobre el problema anterior, podemos concluir lo siguiente:

(A) El enunciado define un razonamiento en el cual la expresión "no obtengo plata" es la conclusión.

(B) El enunciado establece una condición necesaria para obtener plata.

(C) El enunciado establece que en este caso "perder materias" es suficiente para no obtener plata.

(D) Puede asegurarse que, si el autor del enunciado obtuvo plata, entonces no perdió ni una materia.

(E) El enunciado está representado por una fórmula lógicamente equivalente a $p \Rightarrow \neg q \wedge \neg r$.

9. Sobre la fórmula del problema anterior, podemos concluir lo siguiente:

(A) La fórmula nos permite decir que la expresión "si preferimos vino, entonces no me como las ostras o pido una ensalada" es lógicamente equivalente a "no preferimos vino",", dado que el conector que los une en la fórmula tiene un valor de verdad de V para todas las interpretaciones.

(B) La fórmula nos permite decir que la expresión "si preferimos vino, entonces no me como las ostras o pido una ensalada" **no** es lógicamente equivalente a "no preferimos vino", dado que el conector que los une en la fórmula **no** tiene un valor de verdad de V para todas las interpretaciones.

(C) La fórmula nos permite decir que la expresión "no preferimos vino"es una consecuencia lógica de "si preferimos vino, entonces no me como las ostras o pido una ensalada", dado que el conector que los une en la fórmula tiene un valor de verdad de V para todas las interpretaciones.

(D) La fórmula nos permite decir que la expresión "no preferimos vino" **no** es una consecuencia lógica de "si preferimos vino, entonces no me como las ostras o pido una ensalada", dado que el conector que los une en la fórmula **no** tiene un valor de verdad de V para todas las interpretaciones.

(E) La fórmula nos permite decir que la expresión "si preferimos vino, entonces no me como las ostras o pido una ensalada" **no** es una consecuencia lógica de "no preferimos vino", dado que el conector que los une en la fórmula **no** tiene un valor de verdad de V para todas las interpretaciones.

10. ¿Cuál de las siguientes es una fórmula bien formada que tiene 8 interpretaciones?

(A) $[\, p \vee (r \wedge p)\,]$

(B) $\{ (p \wedge q) \Rightarrow [(p \vee p) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q)] \}$

(C) $\{ p \vee \neg [(\neg p \wedge \neg q) \Rightarrow \neg (\neg p \vee \neg r)] \}$

(D) $(p \Rightarrow q \vee r)$

(E) $\{ (p \vee q) \wedge [(q \Rightarrow r) \vee (q \Leftrightarrow s)] \}$

11. Dada la fórmula $([p \Rightarrow (q \vee r)] \wedge (p \wedge \neg q)) \Rightarrow r$, una sola de las afirmaciones siguientes sobre ella <u>es falsa</u>:

(A) La fórmula expresa una verdad lógica fácilmente ilustrable con situaciones cotidianas.

(B) La fórmula es satisfacible.

(C) Cada interpretación para la fórmula es a su vez un modelo para ella.

(D) La fórmula es satisfacible pero no es una tautología.

(E) La negación de la fórmula total es lógicamente equivalente con F.

12. Considere la siguiente afirmación: "Puede suceder alguna de estas cosas: en primer lugar, el timerosal causa autismo si y sólo si el autismo es el resultado del envenenamiento con mercurio; en segundo lugar, es suficiente que retiren el timerosal de las vacunas para que se reduzcan las tasas de autismo". Si p = el timerosal causa autismo, q = el autismo es el resultado del envenenamiento con mercurio, r = retiran el timerosal de las vacunas, y s = se reducen las tasas de autismo, entonces ¿cuál de las siguientes es una representación simbólica de la afirmación anterior?

(A) $[(p \Leftrightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)]$

(B) $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)] \wedge (r \Rightarrow s)$

(C) $[(p \Leftrightarrow q) \vee (s \Rightarrow r)]$

(D) $[(q \Leftrightarrow p) \vee (r \Rightarrow s)] \wedge \neg [(q \Leftrightarrow p) \wedge (r \Rightarrow s)]$

(E) $[(p \Leftrightarrow q) \vee (r \Rightarrow s)]$

13. Considere la siguiente fórmula: $\{ (p \vee q) \Rightarrow \neg (q \wedge r) \}$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones acerca de esa fórmula es correcta?

(A) La fórmula tiene 2 modelos.

(B) El valor de verdad de la fórmula es F cuando v(p)=V, v(q)=V, y v(r)=F.

(C) La fórmula es una contradicción.

(D) La fórmula es contingente, teniendo en cuenta que su valor de verdad es V cuando v(p)=F, v(q)=F, y v(r)=F; y su valor de verdad es F cuando v(p)=F, v(q)=V, y v(r)=V.

(E) El valor de verdad de la fórmula sólo es F cuando v(p)=V, v(q)=V, y v(r)=V.

14. Supongamos que dos fórmulas, A y B, son lógicamente equivalentes. Podemos concluir entonces que:

(A) Si las unimos mediante un condicional, la fórmula resultante será una contingencia.

(B) Si las unimos mediante un bicondicional, la fórmula resultante será una contradicción.

(C) Si el valor de verdad de A para cierta asignación de valores de verdad es V, entonces el valor de verdad de ¬B para la misma asignación de valores de verdad será F.

(D) Como A y B tienen los mismos valores de verdad para cada interpretación, la fórmula $A \wedge B$ es una tautología.

(E) La fórmula $\neg (A \Leftrightarrow B)$ tendrá por lo menos un modelo.

15. Dada la fórmula: $p \Rightarrow \{ q \wedge [r \vee (s \vee r)] \}$ determine, entre las siguientes, una fórmula que le es lógicamente equivalente y a la cual se puede llegar por simplificación algebraica.

(A) $p \Rightarrow [(q \wedge r) \wedge (q \wedge s)]$

(B) $[\neg (q \wedge r) \wedge \neg (q \wedge s)] \Rightarrow \neg p$

(C) $\neg [\neg (q \wedge r) \wedge \neg (q \wedge s)] \Rightarrow \neg p$

(D) $[\neg (q \vee r) \wedge \neg (q \vee s)] \Rightarrow \neg p$

(E) $[\neg (q \wedge r) \wedge \neg (q \wedge s)] \Rightarrow p$

16. Supongamos que A es una consecuencia lógica de B. Podemos concluir entonces que:

(A) A y B son lógicamente equivalentes.

(B) A es válida.

(C) A es verdadera.

(D) Un razonamiento en el cual A constituye las premisas y B la conclusión es un razonamiento válido.

(E) Un razonamiento en el cual B constituye las premisas y A la conclusión es un razonamiento válido.

17. ¿En cuál de los siguientes ejemplos vemos una aplicación de la **ley de dominación**?

(A) $[(p \vee q) \Rightarrow r] \equiv \{ [(p \vee q) \wedge (p \vee q)] \Rightarrow r]$

(B) $\{ [(p \wedge p) \vee (p \vee \neg p)] \Rightarrow (r \Rightarrow \neg r) \} \equiv \{ [(p \wedge p) \vee V] \Rightarrow (r \Rightarrow \neg r) \}$

(C) $\{ [(p \wedge V) \Rightarrow (p \vee V)] \Leftrightarrow (r \wedge F)] \} \equiv \{ [p \Rightarrow (p \vee V)] \Leftrightarrow (r \wedge F)] \}$

(D) $\{ [(p \wedge V) \Rightarrow (p \vee V)] \Leftrightarrow (r \wedge F)] \} \equiv \{ [(p \wedge V) \Rightarrow V] \Leftrightarrow (r \wedge F)] \}$

(E) $\{ [(p \wedge V) \Rightarrow (p \vee V)] \Leftrightarrow (r \wedge \neg r)] \} \equiv \{ [(p \wedge V) \Rightarrow V] \Leftrightarrow F] \}$

18. Considere la expresión: $p \vee (q \wedge r)$. ¿Cuál de las siguientes expresiones es equivalente a ella *únicamente* por la aplicación de la ley distributiva?

(A) $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

(B) $(p \vee p) \vee (q \wedge r)$

(C) $\neg p \Rightarrow (q \wedge r)$

(D) $p \vee [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$

(E) $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$

19. Dada la fórmula $(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$ ¿Cuál de los textos siguientes representa una lectura incorrecta de la fórmula o de una equivalente (donde p = quiero paz, y q = quiero armonía)?

(A) Quiero paz y no armonía o quiero armonía pero no paz.

(B) Quiero paz o armonía, pero no ambas cosas simultáneamente.

(C) Quiero paz o no quiero armonía y quiero armonía o no quiero paz.

(D) Es falso que si quiero paz armonía o es falso que si quiero armonía quiero paz.

20. ¿Cuál de las siguientes fórmulas corresponde a un *razonamiento inconsistente*?

(A) $\{ (p \Rightarrow q) \wedge p \wedge (s \vee t) \wedge \neg(q \vee \neg p) \} \Rightarrow [s \Rightarrow (p \wedge t)]$

(B) $\{ (p \Rightarrow q) \wedge p \wedge (s \vee t) \wedge \neg(q \vee \neg p) \} \Leftrightarrow [s \Rightarrow (p \wedge t)]$

(C) $\{ (q \wedge s) \wedge [\neg p \Rightarrow (\neg q \vee \neg s)] \} \Rightarrow (p \vee r)$

(D) $\{ p \wedge (p \Rightarrow \neg q) \} \Rightarrow [(q \wedge r) \Rightarrow p]$

(E) $\{ (p \vee q) \wedge (r \wedge s) \wedge [r \Rightarrow (p \Rightarrow t)] \wedge [s \Rightarrow (q \Rightarrow u)] \} \Rightarrow (t \vee u)$

21. ¿Cuál de las siguientes es una tautología?

(A) $\{ (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow s) \} \Rightarrow \neg(\neg s \Rightarrow \neg p)$

(B) $\{ [p \wedge (q \vee s)] \wedge [p \Rightarrow \neg s] \} \Rightarrow \neg q$

(C) $\{ [p \wedge (q \vee s)] \wedge [p \Rightarrow (p \Rightarrow \neg q)] \} \Rightarrow (s \wedge p)$

(D) $\{ [(p \vee p) \vee (q \vee q)] \wedge (p \wedge q) \} \Leftrightarrow (p \wedge q)$

(E) $\{ [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)] \wedge q \} \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$

22. Considere la prueba siguiente, que utiliza deducción natural pero deja una de sus columnas en blanco:

1.	$(p \wedge q) \vee (p \Rightarrow q)$	
2.	$(\neg p \vee \neg q) \wedge (q \Rightarrow r)$	C: $\boldsymbol{\neg p \vee r}$
3.		Simplificación (2)
4.		Simplificación (2)
5.		De Morgan (3)
6.		SD (1,5)
7.		SH (4,6)
8.		Def. cond. (7)

¿Cuál de las siguientes opciones muestra la información que completa correctamente la prueba?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
3. $\neg p \vee \neg q$ 4. $q \Rightarrow r$ 5. $\neg (p \wedge q)$ 6. $p \Rightarrow q$ 7. $p \Rightarrow r$ 8. $\neg p \vee r$	3. $\neg p \vee \neg q$ 4. $q \Rightarrow r$ 5. $(p \wedge q)$ 6. $\neg (p \Rightarrow q)$ 7. $p \Rightarrow r$ 8. $\neg p \vee r$	3. $q \Rightarrow r$ 4. $\neg p \vee \neg q$ 5. $\neg (q \wedge \neg r)$ 6. $p \Rightarrow q$ 7. $p \Rightarrow r$ 8. $\neg p \vee r$	3. $\neg p \vee \neg q$ 4. $q \Rightarrow r$ 5. $\neg (p \vee q)$ 6. $p \wedge q$ 7. $p \vee r$ 8. $\neg p \vee r$	3. $\neg p \vee \neg q$ 4. $q \Rightarrow r$ 5. $\neg (p \wedge q)$ 6. $\neg (p \Rightarrow q)$ 7. $q \Rightarrow r$ 8. $\neg p \vee r$

23. Considere la siguiente prueba, que utiliza deducción natural pero deja una de sus columnas en blanco:

1.	$r \wedge s$	
2.	$(q \Rightarrow t) \Rightarrow (\neg p \wedge \neg t)$	
3.	$[(r \wedge s) \vee q] \Rightarrow (p \vee t)$	**C:** $\boldsymbol{q \wedge \neg t}$
4.		Adj. (1)
5.		MP (3,4)
6.		De Morgan (5)
7.		MT (2,6)
8.		Def. cond. (7)

¿Cuál de las siguientes opciones muestra la información que completa correctamente la prueba?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
4. $(r \wedge s) \wedge q$ 5. $p \vee t$ 6. $(\neg p \wedge \neg t)$ 7. $(q \Rightarrow t)$ 8. $q \wedge \neg t$	4. $(r \wedge s) \vee q$ 5. $p \vee t$ 6. $\neg(\neg p \wedge \neg t)$ 7. $\neg(q \Rightarrow t)$ 8. $q \wedge \neg t$	4. $(r \wedge s) \vee q$ 5. $\neg(p \vee t)$ 6. $\neg(\neg p \wedge \neg t)$ 7. $q \Rightarrow t$ 8. $q \wedge \neg t$	4. $(r \wedge s) \vee q$ 5. $p \vee t$ 6. $\neg(\neg p \vee \neg t)$ 7. $(q \Rightarrow t)$ 8. $q \wedge \neg t$	4. $(r \wedge s) \vee q$ 5. $p \vee t$ 6. $\neg p \wedge \neg t$ 7. $\neg(q \Rightarrow t)$ 8. $\neg(\neg q \vee t)$

24. Como en los puntos anteriores:

1.	$\neg(r \Rightarrow p)$	
2.	$[(p \vee \neg r) \vee q] \wedge [(p \vee \neg r) \vee s]$	
3.	$[s \vee (t \Rightarrow q)] \Rightarrow (p \Leftrightarrow t)$	**C : $p \Leftrightarrow t$**
4.		Dist. (2)
5.		Transp. (1)
6.		Def. cond. (5)
7.		SD (4,6)
8.		Simp. (7)
9.		Adj. (8)
10.		MP (3,9)

¿Cuál de las siguientes opciones muestra la información que completa correctamente la prueba?

(A)	**(B)**	**(C)**	**(D)**	**(E)**
4. $(p \vee \neg r) \wedge (q \vee s)$ 5. $\neg(\neg p \Rightarrow \neg r)$ 6. $\neg(p \vee \neg r)$ 7. $q \wedge s$ 8. s 9. $s \vee (t \Rightarrow q)$ 10. $p \Leftrightarrow t$	4. $p \vee [\neg r \vee (q \wedge s)]$ 5. $\neg(\neg p \Rightarrow \neg r)$ 6. $\neg(p \vee \neg r)$ 7. $[\neg r \vee (q \wedge s)]$ 8. s 9. $s \vee (t \Rightarrow q)$ 10. $p \Leftrightarrow t$	4. $(p \vee \neg r) \vee (q \wedge s)$ 5. $\neg(\neg p \Rightarrow \neg r)$ 6. $\neg(p \vee \neg r)$ 7. $q \wedge s$ 8. s 9. $s \vee (t \Rightarrow q)$ 10. $p \Leftrightarrow t$	4. $(p \vee \neg r) \vee (q \wedge s)$ 5. $\neg(\neg p \Rightarrow \neg r)$ 6. $\neg(p \vee \neg r)$ 7. $\neg(q \wedge s)$ 8. s 9. $s \vee (t \Rightarrow q)$ 10. $p \Leftrightarrow t$	4. $(p \vee \neg r) \vee (q \wedge s)$ 5. $\neg p \Rightarrow \neg r$ 6. $\neg(p \vee \neg r)$ 7. $q \wedge s$ 8. s 9. $s \vee (t \Rightarrow q)$ 10. $p \Leftrightarrow t$

25. Sobre la regla de la deducción, es correcto decir lo siguiente:

(A) Es aplicable adecuadamente en el primer paso de la prueba por deducción natural de la validez del razonamiento representado por la siguiente fórmula:

$$\{ (p \wedge q) \wedge (q \vee r) \wedge (r \Rightarrow p) \} \Rightarrow p.$$

(B) Es aplicable adecuadamente en el primer paso de la prueba por deducción natural de la validez del razonamiento representado por la siguiente fórmula:

$$\{ (p \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow t) \} \Rightarrow t.$$

(C) Es el único método aplicable en la prueba por deducción natural de la validez del razonamiento representado por la siguiente fórmula:

$$\{ (p \vee r) \wedge (\neg p \wedge q) \wedge [(r \wedge q) \Rightarrow (s \Rightarrow t)] \} \Rightarrow (s \Rightarrow t).$$

(D) Por su carácter de ley de inferencia, puede ser aplicada a parte de una fórmula.

(E) Es aplicable en el primer paso de la prueba por deducción natural de la validez del razonamiento representado por la siguiente fórmula:

$$\{ (p \wedge r) \wedge (q \vee \neg r) \wedge [(r \wedge \neg t) \Rightarrow \neg (q \vee q)] \} \Rightarrow (r \Rightarrow t).$$

Respuestas a los ejercicios de opción múltiple

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
D	A	B	E	D	A	E	No	No	C	D	E	D	C	B	E	D	E	B	A	C	A	B	C	E

CAPÍTULO 4

Lógica simbólica
Fundamentos de cálculo de predicados

4.1 INTRODUCCIÓN: LIMITACIONES DE LA LÓGICA PROPOSICIONAL

Hasta el momento hemos establecido criterios de validez para dos tipos de razonamientos deductivos: los silogismos, en el segundo capítulo y los del tipo considerado en el capítulo 3 sobre lógica proposicional. Estos criterios son correctos. Con esto queremos decir que si la aplicación del criterio indica que el razonamiento es válido (inválido), el razonamiento efectivamente es válido (inválido). Sin embargo, estos criterios no son completos. En el primer caso, porque no todo razonamiento es un silogismo; en el segundo, porque hay razonamientos que tienen una estructura deductiva correcta en el lenguaje usual pero que no responden adecuadamente a la aplicación del criterio de validez provisto por la lógica proposicional. Esto sucede, por ejemplo, con el razonamiento siguiente:

Juan es el padre de José.
Pedro es hermano de Juan.
El hermano del padre de una persona es tío de esta.
Entonces, Pedro es tío de José.

Con el supuesto implícito de que cada nombre hace referencia a la misma persona cada vez que es utilizado, es indudable que la conclusión de este razonamiento se desprende inevitablemente de sus premisas; por lo tanto, es un razonamiento deductivo válido.

Entonces, es natural suponer que la validez formal del razonamiento puede establecerse mediante alguno de los criterios de validez disponibles hasta ahora. No obstante, esto no es así: En primer lugar, es claro que el razonamiento no es un silogismo; por lo tanto el criterio de validez de silogismos no es aplicable a este caso. En cuanto al criterio de validez provisto por la lógica proposicional, recordemos que, para su aplicación, inicialmente debemos asignar un símbolo de átomo a cada proposición atómica. En este caso, asignaremos los átomos p, q, r y s, con los siguientes significados:

p: Juan es el padre de José.
q: Pedro es hermano de Juan.
r: El hermano del padre de una persona es tío de esta.
s: Pedro es tío de José.

El paso siguiente es representar simbólicamente las premisas y la conclusión. Es aquí cuando se advierte algo que no se había presentado en ninguno de los argumentos analizados en los capítulos anteriores: las premisas y la conclusión son proposiciones atómicas, y precisamente las que se simbolizaron con los átomos p, q, r y s. Entonces, con los símbolos y significados definidos antes, estos son los elementos del razonamiento:

P_1 p
P_2 q
P_3 r // C. s

¡Observe que ni las premisas ni la conclusión presentan conectivo alguno!

Finalmente, según el criterio desarrollado en el capítulo anterior, este razonamiento es válido si y sólo si el condicional que lo representa, $(p \wedge q \wedge r) \Rightarrow s$, es una tautología. Sin embargo, es fácil ver que:

$$\mathbf{(p \wedge q \wedge r) \Rightarrow s}$$

no es una tautología y, por lo tanto, la aplicación del criterio estudiado en el capítulo 3 indica que ¡el razonamiento es inválido! Obviamente, esto muestra que el criterio de validez proporcionado por la lógica proposicional tiene limitaciones en su alcance, puesto que no funciona en un razonamiento como este, en el que es evidente una estructura deductiva absolutamente correcta. Sin embargo, en este capítulo veremos que existe un sistema en el cual no sólo se superan estas limitaciones sino que siguen siendo válidos todos los razonamientos que resultan válidos por aplicación de los criterios ya estudiados. Este sistema, que se conoce con el nombre de **Cálculo de predicados**, proporciona herramientas adicionales que permiten establecer la validez formal de razonamientos deductivos que escapan al alcance del criterio desarrollado en el capítulo 2.

4.2 EL CÁLCULO DE PREDICADOS

Como un primer paso hacia el estudio del cálculo de predicados, consideremos nuevamente el razonamiento que puso en evidencia la necesidad de un sistema ampliado:

p: Juan es el padre de José.
q: Pedro es hermano de Juan.
r: El hermano del padre de una persona es tío de esta.
s: Pedro es tío de José.

Empecemos por reiterar algo que fue evidente cuando se simbolizaron las premisas y la conclusión: ninguna de las proposiciones atómicas presentes en el razonamiento vuelve a utilizarse completa después de aparecer. Es como si se fraccionara su estructura interna, separándose en sujeto y predicado y este a su vez en una relación entre individuos, para reunir y utilizar algunas de tales componentes en diferentes partes del razonamiento. Por ejemplo, "Juan" —el sujeto gramatical de la primera premisa— es uno de los términos del predicado binario "hermano de", en la segunda premisa (el otro término del predicado es "Pedro"). A su vez "Pedro" es el sujeto tanto en la segunda premisa como en la conclusión. Estos y otros fraccionamientos cuyas componentes vuelven a utilizarse en una u otra premisa o en la conclusión, imponen dos exigencias al sistema en el cual pueda concluirse la validez de razonamientos como estos: La primera, capacidad para trabajar por separado con el sujeto y con el predicado de una proposición atómica; la segunda, capacidad para reconocer, en el predicado, la relación o relaciones que contiene y los términos que intervienen en ellas. La lógica proposicional carece de capacidad para manejar estos fraccionamientos, pues en este sistema las unidades mínimas representables simbólicamente son las proposiciones atómicas. Como veremos, el cálculo de predicados tiene las herramientas necesarias para superar esta limitación.

El lector podrá concluir fácilmente que cualquier silogismo categórico comparte con el razonamiento anterior las razones para escapar al dominio de razonamientos cuya validez es decidible con el criterio de la lógica proposicional. En efecto, los tres términos, mayor, medio y menor aparecen dos veces cada uno, y con diferentes funciones gramaticales. Una aplicación importante de este capítulo será mostrar que la validez de silogismos es un caso particular de la validez aquí estudiada.

En la oración "Juan es deportista", "Juan" es el sujeto y "es deportista" es el predicado. Usualmente identificamos el sujeto como la respuesta a la pregunta ¿De quién (de quiénes o de qué) se afirma algo? y el predicado como la respuesta a la pregunta ¿Qué se afirma? Por ejemplo, en la oración "Juan es el padre de José" se afirma, de Juan, que es el padre de José. Entonces, "Juan" es el sujeto y "es el padre de José" es el predicado. Un predicado como "es deportista" es un predicado **unario** porque indica una propiedad o atributo del sujeto, mientras que el predicado "es el padre de" es un predicado **binario** porque establece una relación entre dos individuos.(Aquí usaremos el término "individuos" como referencia general y no únicamente referido a personas). Análogamente, en "la casa es grande", el predicado "es grande" es unario, mientras que en "Bogotá es más grande que Cali", el predicado "es más grande que" es un predicado binario. Los individuos de los cuales se predica una propiedad o una relación se denominan **términos del predicado**. Estos pueden ser términos constantes o términos variables. En "Juan es el padre de José", Juan y José son términos constantes; en "x es el padre de z", x y z son términos variables; y en "x es el padre de Juanita", uno de los términos es variable y el otro es constante. Por último, la afirmación "Si Juanita es hermana de Pedro y Pedro es el padre de Santiago, entonces Juanita es tía de Santiago", contiene tres predicados binarios "es hermana de", "es padre de" y "es tía de", y tres términos constantes: Juanita, Pedro y Santiago.

4.3 EL ALFABETO DEL CÁLCULO DE PREDICADOS

El estudio de un lenguaje simbólico debe empezar con la definición de su alfabeto. Aquí presentaremos una versión simplificada del alfabeto del cálculo de predicados, que incluye solamente los elementos necesarios para nuestro estudio. (No se incluyen los símbolos de función).

1. Las primeras letras del alfabeto, a, b, c, d, denotan constantes, es decir, elementos fijos del dominio.
2. Las letras finales del alfabeto, x, y, z, w, t, denotan variables.
3. Una letra mayúscula seguida de un paréntesis con símbolos de variable o constante denota un predicado. <u>Es usual utilizar la primera letra del nombre del predicado</u>, como se ilustra en los ejemplos siguientes:

   D(x) : x es <u>d</u>eportista

   H(x, Juan): x es <u>h</u>ermano de Juan

   P(x, y): x es el <u>p</u>adre de y

   T(x,y): x es <u>t</u>ío de y

   M(x, a): x es <u>m</u>ayor que a

Con los significados anteriores, la expresión $\{[P(x, y) \wedge H(z, x)] \Rightarrow T(z, y)\}$ corresponde al enunciado, "si x es el padre de y y z es hermano de x entonces z es tío de y".

4. Conectivos lógicos : $\{\neg, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$ y constantes logicas: V, y F.

5. Cuantificador universal $\forall$ y cuantificador existencial $\exists$. (Se estudiarán en la sección 4.4).

6. Símbolos de puntuación: paréntesis abierto y cerrado, curvos ( ) o rectangulares [ ], y las llaves { }. En rigor, son sólo los paréntesis curvos. El uso de otra clase de paréntesis se incluye aquí únicamente por motivos de claridad en la escritura de fórmulas complejas.

Para finalizar esta sección presentaremos el concepto de dominio, en el cálculo de predicados. En términos generales, es un conjunto $\mathcal{D}$ que contiene todos los valores posibles de los términos (variables y constantes) de los predicados considerados. Es preciso tener en cuenta que cada vez que los términos de un predicado se instancian con valores del dominio, se produce una proposición que, en consecuencia, será verdadera o falsa. Veamos unos ejemplos:

Ejemplo 4.1 Sea P(x) el predicado "x es número par". Dado que el concepto de número par se aplica solamente a los números enteros, es razonable tomar como dominio el conjunto $\mathcal{D}$ = conjunto de los números enteros. En este caso, P(6) es la proposición verdadera "6 es número par", P(–15) es la proposición falsa "–15 es número par" y P(¾) carece de significado porque ¾ no es un elemento del dominio.

Ejemplo 4.2 Consideremos el mismo predicado del ejemplo anterior, P(x) = x es número par, pero tomando ahora como dominio el conjunto $\mathcal{D} = \{0, 1, 2, 3, 7, 10\}$. En este caso P(0), P(2) y P(10) son proposiciones verdaderas, pero P(1), P(3) y P(7) son proposiciones falsas.

Ejemplo 4.3 Sea P(x, y): x es el padre de y. En este caso tanto x como y representan seres humanos y, dado un par ordenado (a, b) de seres humanos, P(a, b) representa la afirmación "a es el padre de b". Se requieren pues dos valores, uno para cada variable, y por eso en principio diríamos que $\mathcal{D}$ es el conjunto de todas las parejas ordenadas (a, b) de seres humanos. No obstante, el hecho de que las dos variables toman sus valores en el mismo conjunto nos permite tomar este conjunto como dominio, sin lugar a confusión. Haremos uso de esta simplificación cada vez que todas las variables tomen sus valores en el mismo conjunto.

Ejemplo 4.4 En el contexto de una institución educativa, sea M(x, y): el estudiante de código x está matriculado en la asignatura y. Entonces, bajo el supuesto de que el código del estudiante es una cadena de 7 dígitos y el de la asignatura una cadena de

4 dígitos, el dominio $\mathcal{D}$ puede considerarse como $\mathcal{D}$ = { (a, b) | a es una cadena de 7 dígitos y b es una cadena de 4 dígitos}. Con la notación M(0721428, 8273) indicaríamos que el estudiante de código 0721428 está matriculado en la materia de código 8273. Observe que en este caso $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 x \mathcal{D}_2$, donde $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$ son los dominios de la primera y la segunda componentes del par ordenado, respectivamente.

Ejemplo 4.5 Sean $\mathcal{D}$ = {1, 2, 3, 4, 8} y D(x, y): x es divisor de y (en símbolos: x | y). Como el dominio no es un conjunto de pares ordenados, como en el ejemplo anterior, entendemos (ver ejemplo 4.3) que las dos variables toman sus valores en el mismo conjunto $\mathcal{D}$ = {1, 2, 3, 4, 8}. La Tabla 4.1 muestra el valor de D(x, y) para cada par (x, y) tal que x∈ $\mathcal{D}$ y y∈ $\mathcal{D}$. Por ejemplo, el valor en cada entrada de la primera fila es V, porque 1 (leído en la columna de la izquierda) es divisor de todo número entero. En particular, 1 es divisor de 1, de 2, de 3, de 4 y de 8, es decir, de cada uno de los elementos de $\mathcal{D}$; en la segunda fila, y dado que 2 es divisor de 2 (2 | 2), 2 | 4, y 2 | 8, hemos escrito V en las celdas respectivas, para denotar que D(2, 2), D(2, 4) y D(2, 8) son proposiciones verdaderas. También, el valor F en la celda (2, 3) indica que 2 no es divisor de 3, es decir, que la proposición M(2, 3) es falsa. En forma análoga se interpretan todas las entradas de la tabla.

Tabla 4.1 M(x, y) es V si y sólo si x | y

x | y	1	2	3	4	8
1	V	V	V	V	V
2	F	V	F	V	V
3	F	F	V	F	F
4	F	F	F	V	V
8	F	F	F	F	V

Observación 4.6 En cada uno de los ejemplos anteriores se ha especificado un dominio $\mathcal{D}$. Sin embargo, en ocasiones diremos que el dominio “es el universo”. Entenderemos entonces que se trata de un conjunto que lo contiene “todo”, y en particular todos los valores que específica o teóricamente pueda tomar cualquiera de las variables consideradas. Cuando en el tema siguiente estudiemos uno de los aspectos centrales del cálculo de predicados, los cuantificadores, veremos cómo influye este hecho en la representación simbólica en este sistema. Por ahora debemos tener claro que, si por ejemplo, C(x) representa el enunciado C(x) = “x es coleccionista”, y no se menciona explícitamente el dominio, se entenderá que es el conjunto de los seres humanos. Por otra parte, si C(x, y) representa el enunciado “x colecciona el objeto y”, y decimos que $\mathcal{D}$ es “el universo”, entonces cualquier par (a, b) donde a es una persona y b un objeto cualquiera es un elemento del dominio.

4.4 CUANTIFICADORES

En el capítulo 2 nos referimos a los cuantificadores lingüísticos “todos” y “algún”, para introducir el estudio del silogismo. Estos cuantificadores se utilizan para denotar el alcance de una afirmación. “Todo filósofo es buen lector” es un enunciado que atribuye la propiedad “ser buen lector” **a todos** los filósofos. “Todo” es un cuantificador universal; en el cálculo de predicados se representa con el símbolo $\forall$. A diferencia del anterior, el enunciado “Algún filósofo es buen lector” restringe el alcance de “ser buen lector” **a un subconjunto** del conjunto de los filósofos. “Algún” es un cuantificador existencial; se representa con el símbolo $\exists$. En las dos secciones siguientes se presenta una descripción más amplia de estos cuantificadores.

4.4.1 El cuantificador universal

Consideremos el enunciado “Todo paramédico sabe primeros auxilios”, que para la lógica proposicional es una proposición atómica (¿por qué?). El enunciado establece la siguiente conexión entre los predicados “es paramédico” y “sabe primeros auxilios”: “ser paramédico” es condición suficiente para “saber primeros auxilios”. Esta conexión se puede representar simbólicamente en el cálculo de predicados estableciendo un dominio y utilizando estos elementos: el cuantificador universal, una variable, símbolos para los dos predicados que intervienen en el enunciado y el conectivo $\Rightarrow$. Como es natural, sea $\mathcal{D}$ = conjunto de los seres humanos; además, sea x la variable que representa un elemento arbitrario del dominio. Entonces el enunciado puede expresarse mediante la frase “Si x es paramédico, entonces x sabe primeros auxilios”. Ahora, para indicar que esta conexión es verdadera para cada elemento del dominio que tenga la propiedad de ser paramédico, utilizamos un **cuantificador universal** y escribimos “Para todo x, si x es paramédico, entonces x sabe primeros auxilios”. Si ahora remplazamos los predicados “x es paramédico” y “x sabe primeros auxilios” con los **símbolos de predicado** P(x) y S(x) respectivamente, la afirmación toma la forma “Para todo x, si P(x) entonces S(x)”. Finalmente, insertamos los símbolos para el cuantificador universal y para el condicional y concluimos que el enunciado “Todo paramédico sabe primeros auxilios” se representa, en el cálculo de predicados, con la fórmula $\forall x(P(x) \Rightarrow S(x))$, que se lee en la forma “Para todo x, si P de x entonces S de x”.

Resumiendo: la notación $\forall xA$ se utiliza para afirmar que A es verdadera para cada valor de x en un dominio previamente establecido. Si esto es así, $\forall xA$ es verdadera;

pero si A es falsa por lo menos para un elemento del dominio, entonces la fórmula $\forall xA$ es falsa. El símbolo $\forall$, que se lee "para todo", "para cada", "para cualquiera" u otras formas equivalentes, se denomina cuantificador universal; la variable x se dice ligada al cuantificador, y la expresión A es el alcance del cuantificador. Por ejemplo, el alcance del cuantificador universal $\forall$ en $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))$ es la cadena de símbolos $(P(x) \Rightarrow Q(x))$. Cuando el alcance no es una fórmula compuesta omitiremos los paréntesis que lo limitan. Por ejemplo, escribiremos $\forall xP(x)$, en lugar de $\forall x(P(x))$.

Ejemplo 4.7 Representar en el cálculo de predicados cada afirmación siguiente, en la cual la letra subrayada indica el símbolo que, en mayúscula, se usará para definir el predicado. (Convención que utilizaremos en adelante, sin mencionarlo nuevamente). Definir $\mathcal{D}$ en cada caso.

1. Todo entero par es divisible por 2.
   $\mathcal{D}$ = conjunto de números enteros.
   P(x): x es entero par, D(x): x es divisible por 2.
   El enunciado se representa como $\forall x(P(x) \Rightarrow D(x))$.
2. Los abogados estudian Derecho laboral y Derecho penal.
   $\mathcal{D}$ = conjunto de seres humanos.
   A(x): x es abogado   L(x): x estudia Derecho laboral   P(x): x estudia Derecho penal.
   El enunciado se representa así: $\forall x[A(x) \Rightarrow (L(x) \wedge P(x))]$.
3. Las palabras agudas tienen tilde sólo si terminan en vocal, en n o en s.
   $\mathcal{D}$ = conjunto de palabras del idioma español.
   A(x): x es palabra aguda, T(x): x tiene tilde, V(x): x termina en vocal, N(x): x termina en n, S(x): x termina en s.
   El enunciado se representa así: $\forall x\{A(x) \Rightarrow [T(x) \Rightarrow (V(x) \vee N(x) \vee S(x))]\}$.
   Un entero es divisible por 6 sólo si es divisible simultáneamente por 2 y por 3.
   $\mathcal{D}$ = conjunto de números enteros.
   D(x): x es divisible por 2   T(x): x es divisible por 3   S(x): x es divisible por 6
   Con estas convenciones, el enunciado se simboliza como $\forall x\{[S(x) \Rightarrow (D(x) \wedge T(x))]\}$.
5. Todas las águilas vuelan.
   $\mathcal{D}$ = conjunto de todas las aves. Denotando los predicados con las letras subrayadas en el nombre, el enunciado se simboliza así: $\forall x(A(x) \Rightarrow V(x))$. Observe que se requiere el predicado A(x) para indicar que la variable x denota, entre el conjunto de todas las aves, un águila.
6. Todas las águilas vuelan.
   $\mathcal{D}$ = conjunto de todas las águilas. Ahora el dominio no es el conjunto de todas las aves sino el conjunto de las águilas. Entonces el enunciado afirma que "cada elemento del dominio tiene la propiedad de volar". Por lo tanto no requerimos el predicado A(x): x es un águila y simbolizaremos este enunciado como $\forall xV(x)$.

4.4.2 El cuantificador existencial

La afirmación "Existe algún estudiante universitario que sabe alemán" es verdadera. Expresa que por lo menos una persona tiene **simultáneamente** las propiedades "ser estudiante universitario" y "saber alemán". Utilizando la variable x para denotar a tal persona, el enunciado es equivalente a la frase "Existe por lo menos un x tal que x es estudiante universitario y x sabe alemán". Utilizando ahora los símbolos de predicado E(x): x es estudiante universitario y A(x): x sabe alemán, la afirmación toma la forma "Existe algún x tal que E(x) y A(x)". Finalmente, insertando los símbolos para el cuantificador existencial y para la conjunción, concluimos que el enunciado "Existe algún estudiante universitario que sabe alemán" se representa, en el cálculo de predicados, con la fórmula $\exists x(E(x) \wedge A(x))$. Leemos esta expresión como "existe por lo menos un x tal que E de x y A de x". El símbolo $\exists$, el cuantificador existencial, se lee "existe por lo menos un", "existe algún", "para algún", o en forma equivalente. La fórmula $\exists x(E(x) \wedge A(x))$ representa entonces cualquiera de estos enunciados: "Existe algún estudiante universitario que sabe alemán", "Hay por lo menos un estudiante universitario que sabe alemán" y "Algunos estudiantes universitarios saben alemán".

En general, supongamos que A es una fórmula que contiene la variable x. La expresión $\exists xA$ representa la afirmación de que hay por lo menos un elemento del dominio para el cual la fórmula A es verdadera. Si ello es así, la fórmula $\exists xA$ (se lee existe algún x tal que A) es verdadera; pero si la expresión A es falsa para todos los elementos del dominio, entonces la fórmula $\exists xA$ es falsa. Por ejemplo, sean $\mathcal{D}$ el conjunto de los seres vivos, B(x): x es bondadoso, R(x): x respira, y A(x): x tiene alas. Entonces, las dos fórmulas $\exists xB(x)$, $\exists xR(x)$ son verdaderas, pero $\exists xA(x)$ es falsa porque no existe un ser humano que tenga alas. Como en el caso del cuantificador universal, la variable x se dice ligada al cuantificador, y la expresión A es el alcance del mismo.

Ejemplo 4.8 Representar en el cálculo de predicados cada afirmación siguiente:

1. Existe por lo menos un triángulo que tiene sus lados iguales y sus ángulos iguales (representarla en dos formas: primera, cuando se toma como dominio el conjunto de todos los polígonos; segunda, cuando se toma como dominio el conjunto de todos los triángulos).

   Primera: $\mathcal{D}$ = conjunto de todos los polígonos.
   T(x): x es un triángulo.
   L(x): x tiene los lados iguales.
   A(x): x tiene los ángulos iguales.

   En este caso el enunciado 1 se representa así: $\exists x[T(x) \wedge L(x) \wedge A(x)]$.

Segunda: $\mathcal{D}$ = conjunto de todos los triángulos.

En este caso no requerimos el predicado "es un triángulo", puesto que todos los elementos del dominio son triángulos. Entonces, con los mismos predicados del caso anterior, el enunciado se simboliza como $\exists x[L(x) \wedge A(x)]$.

2. José tiene padre.

   Para la representación simbólica, determinemos primero una expresión equivalente a "José tiene padre" pero que involucre cuantificadores. Una expresión posible es: "Existe alguien que es el padre de José". Si designamos a ese alguien con la variable x podemos escribir "Existe algún x tal que x es el padre de José". Ahora sólo nos falta insertar el predicado "es padre de" y el cuantificador existencial, para obtener la expresión simbólica: $\exists x P(x, \text{José})$. Hemos supuesto que el dominio $\mathcal{D}$ es el conjunto de todas las personas y que $P(x, y)$ tiene el significado "x es el padre de y".

3. José es el padre de alguien.

   Procediendo como en el caso anterior obtenemos sucesivamente los enunciados "Existe alguien de quien José es el padre", "Existe algún x tal que José es el padre de x" y, finalmente, $\exists x P(\text{José}, x)$.

La comparación entre las formas simbólicas de los enunciados 2 y 3, $\exists x P(x, \text{José})$ y $\exists x P(\text{José}, x)$ muestra la necesidad de definir con precisión el papel de cada variable en los predicados binarios: si $P(x, y)$ representa "x es el padre de y", tendremos que utilizar sistemáticamente la primera componente del par ordenado (a, b) en P(a, b), para referirnos al padre. En este sentido, P(Jacob, José) representa la afirmación "Jacob es el padre de José". En cambio, si se definiera $P(x, y)$ como "y es el padre de x", sería la segunda componente la que hace referencia al padre. Por esto la misma afirmación, "Jacob es el padre de José", se representaría invirtiendo el orden de las componentes, así: P(José, Jacob).

Observación 4.9 Para evitar posibles confusiones en situaciones como la descrita en el párrafo anterior, en este texto adoptamos esta convención: En la notación $A(x, y)$, x, la primera componente del par (x, y), representa siempre el sujeto de la acción indicada por el verbo. A continuación proponemos algunos ejercicios en los cuales se utiliza la convención mencionada:

Ejercicio 4.10 Enuncie la afirmación representada en cada uno de los puntos siguientes, en los cuales los predicados tienen los significados que se indican. $P(x, y)$: x es el padre de y, $M(x, y)$: x es la madre de y.

1. P(Jacob, José) $\wedge$ M(Rebeca, Jacob). ¿Qué relación hay entre Rebeca y José?
2. $\exists x[P(\text{Francisco}, x) \wedge M(\text{Claudia}, x)]$ Observe el alcance del cuantificador existencial. ¿Puede afirmarse que Francisco y Claudia son los padres de x?

3. ∃x[P(Francisco, x)] ∧ ∃x[M(Claudia, x)] Observe el alcance de cada cuantificador. La variable x puede representar individuos diferentes en los dos predicados.

   ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones expresan con más exactitud el significado de la expresión 3?

   a. Francisco y Claudia son los padres de alguna persona.
   b. Francisco y Claudia tienen hijos.
   c. Francisco tiene hijos; Claudia también.

4.4.3 Uso combinado de cuantificadores universal y existencial

En las dos subsecciones siguientes consideramos situaciones en las cuales se presentan combinaciones de cuantificadores. Como veremos, el orden de aparición de tales cuantificadores es de fundamental importancia en el significado de las expresiones.

4.4.3.1 En los ejemplos siguientes se utilizan simultáneamente un cuantificador universal y un cuantificador existencial, en este orden. La combinación "Para todo x… existe algún y…", en símbolos ∀x…∃y…, afirma que **para cada** individuo x de un conjunto dado **existe** un individuo y (puede o no ser el mismo x) tales que x y y están relacionados en una forma dada. La combinación de cuantificadores en este orden es muy frecuente en la vida cotidiana: "Todo ser humano tiene una madre", "Cada número natural tiene un sucesor", "Todo estudiante aprecia a algún compañero", "Cada estudiante prefiere alguna de sus materias", "Todo número diferente de cero tiene un inverso multiplicativo", "Toda persona es ciudadano(a) de algún país" son ejemplos de esta combinación. Para su representación simbólica en el cálculo de predicados se requieren, en cada caso: un cuantificador universal y un cuantificador existencial, en este orden, y por lo menos un predicado binario correspondiente a la relación. En los ejemplos siguientes haremos uso de la convención ya mencionada para elección del símbolo de predicado. En cada caso $\mathscr{D}$ es el universo.

1. Todo ser humano tiene una madre: ∀x[H(x) ⇒ ∃y(M(y, x))]
2. Cada número natural tiene un sucesor: ∀x[N(x) ⇒ ∃y(S(y, x))]
3. Todo estudiante aprecia a alguno de sus compañeros: ∀x[E(x) ⇒ ∃y {C(y, x) ∧ A(x, y)}]
4. Cada estudiante prefiere alguna de sus materias: ∀x[E(x) ⇒ ∃y {M(y) ∧ P(x, y)}]
5. Todo número diferente de cero tiene un inverso multiplicativo:
   ∀x[(N(x) ∧ D(x)) ⇒ ∃yV(y, x)]
6. Toda mujer es ciudadana de algún país: ∀x[M(x) ⇒ ∃y {P(y) ∧ C(x, y)}]

Para generar progresivamente habilidad en la simbolización de enunciados y en la interpretación de expresiones simbólicas es recomendable leer las formas simbólicas de enunciados complejos en forma tal que la lectura nos comunique significados claros. Por ejemplo, la expresión obtenida para el enunciado 3 podría leerse así: Para cada x, si x es estudiante, entonces debe existir un y, tal que y es compañero de x y es apreciado por x.

4.4.3.2 La otra combinación de cuantificadores que es de uso frecuente corresponde a expresiones del tipo "**Existe algún** (o existe por lo menos un) x tal que **para todo** y". Esta combinación se presenta en el orden $\exists x \ldots \forall y \ldots$ y se usa para representar la afirmación de que hay, o existe, un individuo x, en un dominio dado, que guarda una relación dada con todos los elementos de un conjunto. Este conjunto puede ser el mismo dominio, o una parte de él.

Algunas oraciones que tienen la forma de la combinación anterior son, por ejemplo, "Algún profesor aprecia a todos los estudiantes", "existe un golfista que vence a todos los demás", "hay un primer número natural" (existe un número natural que es menor o igual que todos). Como veremos a continuación, en la representación de enunciados de este tipo se requieren: un cuantificador existencial, un cuantificador universal (en este orden) y por lo menos un predicado binario.

1. Algún <u>p</u>rofesor <u>a</u>precia a todos los <u>e</u>studiantes: $\exists x[P(x) \wedge \forall y\{E(y) \Rightarrow A(x, y)\}]$

2. Existe un <u>g</u>olfista que <u>v</u>ence a <u>todos los demás</u>. En el enunciado anterior hemos subrayado la expresión "todos los demás", por su importancia en la definición de un predicado implícito en estos casos. En efecto, en principio podríamos proponer la expresión $\exists x[G(x) \wedge \forall y\{(G(y) \Rightarrow V(x, y)\}]$ como expresión simbólica del enunciado 2. Esta expresión afirma que existe algún golfista, x, tal que si y es un golfista cualquiera, entonces x vence a y. ¿Qué problema tiene esta propuesta? Que el dominio común a las dos variables es el conjunto de los seres humanos: y es cualquier golfista y x es golfista. Por lo tanto, en rigor y puede ser el mismo x. Entonces, V(x, y) sería V(x, x) y esto significa que x se vence a sí mismo, lo cual es absurdo.

   Con el comentario anterior se justifica la inclusión del predicado D(x, y): x es distinto de y, para obtener la simbolización correcta: $\exists x[G(x) \wedge \forall y\{(G(y) \wedge D(y, x)) \Rightarrow V(x, y)\}]$. ¿Cómo lee usted esta expresión?

3. Hay un primer número natural. Para representar este enunciado en el lenguaje del cálculo de predicados debemos construir primero una afirmación equivalente, que involucre cuantificadores: Existe un número natural que es <u>menor o igual</u> que todos los naturales con los cuales se lo compare.

Utilicemos estos predicados:

N(x): x es número natural

I(x, y): x es igual a y

M(x, y): x es menor que y

Entonces, la representación simbólica del enunciado es:
$\exists x[N(x) \wedge \forall y\{N(y) \Rightarrow [M(x, y) \vee I(x, y)]\}]$

Observación 4.11 Cuando se combinan un cuantificador universal y un cuantificador existencial es necesario atender al orden de aparición de los mismos. En este sentido, la combinación $\forall x \ldots \exists y \ldots$ establece que **a cada** x le corresponde **algún y,** que posiblemente va cambiando a medida que cambia x. Para representar la afirmación "Cada ser humano tiene un padre" tendremos en cuenta que **a cada ser humano** x le corresponde **un ser humano y** y que al cambiar el valor de x cambia el valor de y, en términos generales. Por esta razón el orden apropiado de aparición de los cuantificadores es $\forall x \ldots \exists y \ldots$. A su vez, la combinación $\exists x \ldots \forall y \ldots$ indica que hay <u>un mismo valor de x</u> que guarda una relación dada con **todos** los valores de y, como en "hay un primer número natural". En este caso el número cuya existencia se asegura es 1, que, en efecto, es menor o igual que cualquier número natural con el cual se le compare. En términos, coloquiales podríamos decir que $\exists x \ldots \forall y \ldots$equivale a "uno para todos", en tanto que $\forall x \ldots \exists y \ldots$ equivale a "Para cada uno, uno". Como ejercicio, sea P(x, y): x es el padre de y. El lector puede confrontar los significados de las expresiones $\exists y[\forall x(P(y,x))]$ y $\forall x[\exists y(P(y, x))]$, con el supuesto de que $\mathcal{D}$ es el conjunto de los seres humanos. Sólo una es verdadera. Esto muestra que, en general, $\forall x[\exists y Q(x,y)]$ no es equivalente a $\exists y[\forall x Q(x,y)]$. El lector puede aportar otros ejemplos.

Cuando en un razonamiento hay varios predicados, las variables que se usan **en su definición** son variables "mudas", sin más significado que el que le asigna la definición. Por esta razón podemos utilizar las mismas variables en diferentes definiciones, lo cual puede ser muy conveniente para manejar un reducido número de variables en la sección de definición de los predicados. Por ejemplo, se pueden definir simultáneamente los predicados:

P(x, y): x es el padre de y

H(x, y): x es hijo de y

T(x, y): x es tío de y

Hacemos la aclaración porque a veces se piensa, equivocadamente, que si P(x, y) representa "x es el padre de y" entonces al definir el predicado "es hijo de" tenemos que invertir el orden de las variables y escribir H(y, x): y es el hijo de x. La confusión nace de considerar que al definir P(x, y) como "x es el padre de y" entonces "x **es** el padre" y "y **es** el hijo". No; debemos insistir en que el único papel de las variables en el par (x, y) es indicar cuál componente del par representa el sujeto de la relación definida por el predicado binario. Sin embargo, el uso de diferentes predicados **en una misma expresión** sí exige tener presentes las relaciones mutuas entre las variables, según las definiciones. Por ejemplo, tomando $\mathcal{D}$ como el conjunto de los seres humanos, la afirmación verdadera "Si x es el padre de y entonces y es hijo de x" se representa simbólicamente como $\forall x \forall y[P(x, y) \Rightarrow H(y, x)]$. Esta expresión se lee "Para todo x **y** para todo y, si x es el padre de y, entonces y es hijo de x". Los cuantificadores universales indican que la relación mutua se mantiene para todos los seres humanos representados por las variables x y y. Pregunta: ¿Tendrá alguna incidencia en el significado de $\forall x \forall y[P(x,y) \Rightarrow H(y,x)]$ intercambiar los cuantificadores universales?

Ejercicio 4.12 Establecer los significados de las dos fórmulas siguientes, en las que P, H, T denotan las relaciones "padre de", "hermana de" y "tía paterna de":

1. $\forall x \forall y \forall z([P(y,x) \wedge H(z,y)] \Rightarrow T(z,x))$
2. $\forall x \forall z(T(z,x) \Leftrightarrow \exists y([P(y,x) \wedge H(z,y)]))$

Ahora estamos en capacidad de representar simbólicamente el razonamiento de la introducción a este capítulo:

Juan es el padre de José.
Pedro es hermano de Juan.
El hermano del padre de una persona es tío de esta.
Entonces, Pedro es tío de José.

Para hacerlo, definimos el dominio $\mathcal{D}$ = conjunto de seres humanos, y los símbolos P, H, T para los predicados "padre de", "hermano de", "tío de".

P_1 P(Juan, José).
P_2 H(Pedro, Juan).
P_3 $\forall x \forall y \forall z[\{P(x, y) \wedge H(z, x)\} \Rightarrow T(z, y)]$.
___
C. T(Pedro, José).

Ejemplo 4.13 Representaremos cada uno de los enunciados siguientes en el cálculo de predicados. La mayúscula correspondiente a la letra subrayada denota el predicado correspondiente:

1. El <u>p</u>apá de cada <u>s</u>er humano es uno de sus <u>f</u>amiliares.
   $\forall x \forall y[(S(x) \wedge P(y, x)) \Rightarrow F(y,x)]$

2. Todo el que aprecie a Jorge escogerá a Pedro para su partido.
   $\forall x \forall y[A(x, \text{Jorge}) \Rightarrow E(x, \text{Pedro})]$

3. Pedro no es amigo de nadie que sea amigo de Juan.

La afirmación anterior declara que es suficiente que alguien (x) sea amigo de Juan para que Pedro decida no ser amigo de ese alguien (x). Entonces, usando el predicado A(x, y), podremos escribir:

$\forall x[A(x, \text{Juan}) \Rightarrow \neg A(\text{Pedro}, x)]$ (Para todo x, si x es amigo de Juan, entonces Pedro no es amigo de x).

4.5 INTERPRETACIONES EN EL CÁLCULO DE PREDICADOS

Recordemos que en lógica proposicional una interpretación para una FBF que contiene n átomos, es cualquiera de las 2^n posibles asignaciones de valores V o F a sus átomos. Esto indica que tal sistema el número de interpretaciones de toda FBF es finito. La fórmula A: $(p \Rightarrow (q \Rightarrow \neg r))$, por ejemplo, tiene $2^3 = 8$ interpretaciones, una de las cuales es la terna (V, V, F), para la cual A es verdadera. Recordemos también que una fórmula A es una tautología si y sólo si A es verdadera para cada una de sus interpretaciones.

De acuerdo con lo anterior, dada una FBF es posible, por lo menos teóricamente, construir la tabla de verdad de la fórmula, tabla que muestra todas sus interpretaciones y el valor de verdad para cada una de ellas. Sin embargo, la situación es muy distinta en el cálculo de predicados: el concepto de interpretación en este sistema es tal que es suficiente que una fórmula contenga **un** predicado, para que dicha fórmula tenga infinitas interpretaciones. Evidentemente, esto tiene consecuencias importantes que iremos considerando gradualmente.

Dada una fórmula en el cálculo de predicados, **una interpretación** para la misma es una terna formada por:

1. Un dominio $\mathscr{D}$ en el cual están los valores que pueden tomar las variables y las constantes.

2. Un valor para cada símbolo de constante, si aparece en la fórmula.

3. Un significado para cada predicado presente en la fórmula.

Consideremos algunos ejemplos:

Ejemplo 4.14 A continuación se definen diferentes interpretaciones de la expresión A: $\forall x P(x)$ y se establece el valor de verdad de A para cada interpretación.

1. Sean $\mathcal{D}$ = conjunto de los seres humanos y P(x): x es bondadoso. En esta interpretación A expresa que todo ser humano es bondadoso. A es falsa para esta interpretación.
2. Sean $\mathcal{D} = \{0, 4, 20, 36, 38\}$ y P(x): x es un número par. En esta interpretación A afirma que todo elemento del conjunto $\mathcal{D}$ es un número par. Entonces, A es verdadera para esta interpretación.
3. Sean $\mathcal{D}$ como en el punto anterior, pero P(x): x es divisible por 4. A es falsa para esta interpretación, pues P(38) = 38 es divisible por 4, es falso.
4. Sean $\mathcal{D}$ = {Cali, Popayán, Buga, Neiva, Medellín, Pasto} y P(x): x es capital de un departamento colombiano. Entonces, la asignación del valor Buga a la variable x, lo cual denotaremos como x←Buga produce P(Buga): Buga es capital de un departamento colombiano. Esta es una proposición falsa. Entonces, la fórmula $\forall x P(x)$ es falsa para esta interpretación.

Ejemplo 4.15 Definir diferentes interpretaciones de la expresión B: $\forall x[P(x) \Rightarrow Q(x)]$ y, de ser posible, establecer el valor de A en cada interpretación.

1. Definamos esta interpretación: $\mathcal{D}$ = conjunto de seres humanos.

   P(x): x es premio Nobel de literatura.

   Q(x): x es un buen lector.

Entonces, la expresión $\forall x[P(x) \Rightarrow Q(x)]$ afirma, en esta interpretación, que todo premio Nobel de literatura es un buen lector. La definición de los términos permite afirmar que la fórmula es verdadera para esta interpretación, es decir, que “ser premio Nobel de literatura” es condición suficiente para “ser un buen lector”.

Ejercicio 4.16 Enunciar en lenguaje natural el contenido de la expresión siguiente según la interpretación dada, y establecer el valor de verdad de la expresión en cada caso:

C : $\forall x \forall y[(S(x) \wedge P(y, x)) \Rightarrow F(y, x)]$, en cada una de las siguientes interpretaciones:

1. $\mathcal{D}$ = el universo, S(x): x es un ser humano, P(x, y): x es el padre de y, F(x, y): x es familiar de y.
2. $\mathcal{D}$ = el universo, S(x): x es un ser humano, P(x, y): x es profesor de y, F(x, y): x es familiar de y.

Sobre la base de los ejemplos y ejercicios propuestos concluimos que, como sucede con las FBF de la lógica proposicional, el valor de verdad de una expresión del cálculo de predicados depende de la interpretación. Sin embargo, como en este caso es suficiente la presencia de un predicado para que la fórmula tenga infinitas interpretaciones, no es posible saber por un procedimiento exhaustivo si una fórmula es verdadera para todas sus interpretaciones posibles.

Definición 4.17 Si una fórmula A del cálculo de predicados es verdadera para una interpretación dada, se dice que la fórmula es **satisfacible** y que la interpretación es un **modelo** para la fórmula.

De acuerdo con esta definición, cuando se pide hallar un modelo para una fórmula A debemos encontrar una interpretación que la haga verdadera.

Por ejemplo, la fórmula $\forall x \forall y[P(x,y) \Rightarrow Q(y,x)]$ es satisfacible. Para encontrar un modelo basta pensar en dos relaciones binarias tales que cuando en una de ellas x está relacionado con y, en la otra y esté relacionado con x. Entonces, sean $\mathcal{D}$ = conjunto de los seres humanos y sean P(x, y): x es el padre de y, Q(x, y): x es hijo de y. La fórmula establece que si x, y son seres humanos tales que x es el padre de y, entonces y es el hijo de x. La verdad de esta afirmación hace que la interpretación dada sea un modelo para la fórmula dada.

Ejemplo 4.18 Hallar un modelo para la fórmula A: $\forall x \exists y Q(x, y)$.

Solución: Sean $\mathcal{D}$ = conjunto de letras y palabras del idioma español y Q(x, y) el predicado “la palabra x empieza con la letra y”. Esta interpretación es un modelo para la fórmula A. En efecto, esta interpretación de A corresponde a afirmar que “dada una palabra cualquiera, x, existe una letra, y, tal que x empieza con y”, lo cual es evidentemente cierto.

Ejercicio 4.19 Muestre que la interpretación en la que $\mathcal{D}$ = conjunto de los números enteros y Q(x, y) = “x es menor que y” también es un modelo para la fórmula A: $\forall x \exists y Q(x, y)$. Asegúrese de comprender el significado de la interpretación.

Ejercicio 4.20 Suponga que intercambiamos los cuantificadores en A del ejemplo anterior, con lo cual se obtiene la expresión B = $\exists y \forall x Q(x, y)$. Muestre que ahora la interpretación definida en ese ejemplo no es un modelo para B, es decir, muestre que B es falsa para tal interpretación.

Definición 4.21 Dos fórmulas A y B del cálculo de predicados son **lógicamente equivalentes** si y sólo si tienen los mismos modelos, es decir, si y sólo si una interpretación hace verdadera (falsa) a A si y sólo si hace verdadera (falsa) a B.

Ejemplo 4.22 Contrariamente a lo que uno pueda pensar inicialmente, las fórmulas $\forall x[P(x) \vee Q(x)]$ y $\forall xP(x) \vee \forall xQ(x)$ no son lógicamente equivalentes. Para ello, leámoslas enfatizando su significado:

$\forall x[P(x) \vee Q(x)]$: "Cada elemento x del dominio tiene la propiedad P o tiene la propiedad Q"

$\forall xP(x) \vee \forall xQ(x)$: "Cada elemento x en el dominio tiene la propiedad P o cada elemento x del dominio tiene la propiedad Q". Veamos una interpretación en la cual la primera de estas fórmulas es verdadera pero la segunda es falsa.

Interpretación: $\mathcal{D}$ = conjunto de estudiantes de la universidad, P(x): x es mujer, Q(x): x es hombre.

1. $\forall x[P(x) \vee Q(x)]$: Afirma que los estudiantes de la universidad son hombres o mujeres, es decir, que si <u>a</u> es un estudiante cualquiera, <u>la proposición</u> (P(<u>a</u>) $\vee$ Q(<u>a</u>)) es verdadera. Esto es cierto, porque <u>a</u> es mujer, en cuyo caso P(a) es verdadera, o <u>a</u> es hombre, en cuyo caso Q(a) es verdadera. Por lo tanto, la disyunción (P(<u>a</u>) $\vee$ Q(<u>a</u>)) es verdadera. Entonces, de acuerdo con el significado del cuantificador universal $\forall$, la fórmula es verdadera para esta interpretación, es decir, la interpretación es un modelo para esta fórmula.
2. $\forall xP(x) \vee \forall xQ(x)$: Afirma que todos los estudiantes de la universidad son hombres o todos son mujeres. Es claro que la fórmula es falsa para esta interpretación.
   Sobre la base de la discusión anterior se concluye que las fórmulas propuestas no son lógicamente equivalentes. Podríamos decir que "el cuantificador universal no es distributivo con respecto al operador de disyunción". Recuerde: no es lo mismo $\forall x[P(x) \vee Q(x)]$ que $(\forall xP(x) \vee \forall xQ(x))$.

Definición 4.23 Una fórmula es **universalmente válida** (o simplemente, **válida**), si es verdadera para toda interpretación, esto es, si cada interpretación es un modelo. Es usual utilizar el símbolo $\models A$ para indicar que A es una fórmula válida.

Según esta definición, las tautologías son casos particulares de fórmulas válidas. Sin embargo, el término tautología se reserva para las fórmulas válidas de la lógica proposicional.

Ejemplo 4.24 La fórmula A: $\forall x[P(x) \wedge Q(x)] \Rightarrow [\forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)]$ es válida, es decir, cualquiera sea la interpretación, si cada x tiene las propiedades P y Q, entonces cada x tiene la propiedad P y cada x tiene la propiedad Q. Intuitivamente, la afirmación anterior es verdadera. Por ejemplo: si todos los mineros del carbón son hombres adultos, entonces todos los mineros del carbón son hombres y todos los mineros del carbón son adultos. Pero es claro que un ejemplo no sirve como demostración; el argumento debe probar que A es verdadera para todas sus (infinitas) interpretaciones. En este sentido, debemos considerar una interpretación que de alguna manera las representa a todas o, como se dice formalmente, **una interpretación arbitraria**, y probar que si el antecedente es verdadero para la interpretación, el consecuente también lo es. (¿Por qué no tenemos que considerar interpretaciones para las cuales el antecedente es falso?). Este es el argumento general:

Si una interpretación hace verdadero el antecedente $\forall x[P(x) \wedge Q(x)]$ entonces la conjunción $[(P(x) \wedge Q(x)]$ es verdadera para cada elemento x del dominio, y por lo tanto $P(x)$ y $Q(x)$ son verdaderas por separado para cada x del dominio. En consecuencia, $\forall xP(x)$ es verdadera y $\forall xQ(x)$ es verdadera, lo cual determina que la conjunción $[\forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)]$ es verdadera. Se concluye así que la fórmula A: $\forall x[P(x) \wedge Q(x)] \Rightarrow [\forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)]$ es verdadera para todas sus interpretaciones y, por consiguiente, la fórmula es válida.

Similarmente se puede probar que la fórmula $[\forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)] \Rightarrow \forall x[P(x) \wedge Q(x)]$, la recíproca de la fórmula anterior, también es válida. En consecuencia, $\forall x[P(x) \wedge Q(x)] \Leftrightarrow [\forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)]$ es una fórmula válida. De esto se concluye que $\forall x[P(x) \wedge Q(x)]$ **y** $[\forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)]$ son lógicamente equivalentes, es decir, el cuantificador universal **sí es** distributivo con respecto al operador de conjunción.

El ejemplo anterior sólo tiene el propósito de ilustrar cómo la definición de fórmula válida y la existencia de infinitas interpretaciones hacen laborioso el proceso de probar validez o equivalencia lógica en el cálculo de predicados, a diferencia de lo que sucede en lógica proposicional. No se pretende que el lector construya argumentos tan formales como el expuesto, pero sí que aporte contraejemplos para justificar la afirmación de que una fórmula no es válida o de que dos fórmulas no son lógicamente equivalentes.

4.6 REPRESENTACIÓN SIMBÓLICA EN EL CÁLCULO DE PREDICADOS

Para utilizar el cálculo de predicados en la determinación de la validez o invalidez de razonamientos, se deben representar simbólicamente las premisas y la conclusión. Los ejemplos y ejercicios siguientes tienen el propósito de ayudar al lector a adquirir práctica en la simbolización. En los ejemplos se adopta la convención de que el dominio $\mathcal{D}$ es el universo, salvo que se diga explícitamente otra cosa. Esto hace que cada predicado presente en el argumento deba aparecer explícito en la representación simbólica.

Ejemplo 4.25 La expresión "Todo es perfecto" asegura que cada cosa, ente o elemento que existe, tiene la propiedad de ser perfecto. Entonces, si $P(x)$ significa "x es perfecto", la expresión dada se representa como $\forall xP(x)$.

Ejemplo 4.26 Para representar simbólicamente la afirmación "Las águilas vuelan", sean $A(x)$: x es un águila, y $V(x)$: x vuela. Entonces, la representación será $\forall x(A(x) \Rightarrow V(x))$. Sin embargo, si el dominio en es $\mathcal{D}$ = el conjunto de las águilas, no tiene sentido incluir en la representación el predicado "es águila". En este caso la representación será $\forall xV(x)$.

Ejemplo 4.27 Consideremos el enunciado "Todo brilla y es oro". La afirmación no se hace respecto de elementos de un conjunto determinado, sino respecto a todo lo que es, a todo lo que existe. Por tanto, el enunciado puede simbolizarse como $\forall x(B(x) \wedge O(x))$, donde B y O tienen los significados obvios. Alternativamente, la expresión "todo lo que brilla es oro", que es equivalente al enunciado "Para todo x, es verdad que si x brilla entonces x es oro", se representa con la fórmula $\forall x(B(x) \Rightarrow O(x))$.

Ejemplo 4.28 Representar los enunciados a–e utilizando la letra subrayada, en mayúscula, para simbolizar el predicado correspondiente:

a. Todos los <u>a</u>dolescentes se sienten <u>i</u>ncomprendidos.
   A(x): x es adolescente
   I(x): x se siente incomprendido
   $\forall x(A(x) \Rightarrow I(x))$

b. Algunos <u>p</u>olíticos son <u>h</u>onestos: $\exists x(P(x) \wedge H(x))$

c). Las <u>o</u>vejas les <u>t</u>emen a los <u>l</u>obos.
   En este caso no se hace mención explícita de los cuantificadores. Sin embargo, el enunciado es la forma de expresar la idea de que **todas** las ovejas, les temen a **todos** los lobos. Esto significa que si x representa una oveja cualquiera entonces, cualquiera sea el lobo representado por y, tal oveja le teme a tal lobo. Una forma de representar el enunciado es entonces:
   $\forall x[O(x) \Rightarrow \{\forall y(L(y) \Rightarrow T(x,y))\}]$

d. Si todo <u>m</u>icrocomputador tiene puerto <u>s</u>erial y algunos tienen puerto <u>p</u>aralelo, entonces algunos microcomputadores tienen tanto puerto serial como puerto paralelo.
   $[\forall x\{M(x) \Rightarrow S(x)\} \wedge \exists x\{M(x) \wedge P(x)\}] \Rightarrow \exists x\{M(x) \wedge S(x) \wedge P(x)\}$. ¿Podría utilizarse la siguiente expresión como alternativa de representación? Discuta su respuesta.
   $[\forall x\{M(x) \Rightarrow S(x)\} \wedge \exists x\{M(x) \wedge P(x)\}] \Rightarrow \exists y\{M(y) \wedge S(y) \wedge P(y)\}$

e. Hay <u>p</u>ersonas que no son <u>b</u>ondadosas: $\exists x[P(x) \wedge \neg B(x)]$

Ejemplo 4.29 Expresar, en la simbología del cálculo de predicados, la definición del predicado "es <u>a</u>buelo de", sobre la base del predicado "es el <u>p</u>adre de".

Solución: $\forall x\forall y[A(x, y) \Leftrightarrow \exists z\{P(x, z) \wedge P(z, y)\}]$

Ejemplo 4.30 Representar el siguiente razonamiento, en la simbología del cálculo de predicados:

La <u>h</u>ermana de la <u>m</u>adre de cada <u>n</u>iño es <u>t</u>ía de este. Juan es un niño y Marta es hermana de Elena. Todos los tíos de Juan le mandan regalo de cumpleaños. Por lo tanto, si Elena es la madre de Juan, Marta le manda regalo de cumpleaños a Juan.

Sean $H(x, y)$ = x es hermana de y

$M(x, y)$ = x es la madre de y

$N(x)$ = x es un niño

$T(x, y)$ = x es tía de y

$R(x, Juan)$ = x le manda regalo de cumpleaños a Juan

Con esta simbología para los predicados involucrados en el razonamiento, sus premisas y conclusión se representan como sigue:

P_1 $\forall x \forall y \forall z[(N(x) \wedge M(y, x) \wedge H(z, y)) \Rightarrow T(z, x)]$

P_2 $N(Juan) \wedge H(Marta, Elena)$

P_3 $\forall x[T(x, Juan) \Rightarrow R(x, Juan)]$

C. $M(Elena, Juan) \Rightarrow R(Marta, Juan)$

Observación 4.31 Una nota final con respecto a los cuantificadores $\forall$ y $\exists$: Cuando se utilizan en la representación simbólica de enunciados compuestos, y que describen propiedades de un subconjunto del dominio, el conectivo principal en el alcance del cuantificador $\forall$ **es** $\Rightarrow$ y el conectivo principal en el alcance del cuantificador $\exists$ **es** $\wedge$. Podemos apreciarlo en ejemplos ya considerados como:

Todas las <u>á</u>guilas <u>v</u>uelan:	$\forall x(A(x) \Rightarrow V(x))$
Todo lo que <u>b</u>rilla es de <u>o</u>ro:	$\forall x(B(x) \Rightarrow O(x))$
Todo ser <u>h</u>umano tiene un <u>p</u>adre:	$\forall x(H(x) \Rightarrow (\exists y)(P(y,x)))$
Hay <u>p</u>ersonas que no son <u>b</u>ondadosas:	$\exists x(P(x) \wedge \neg B(x))$

Tenga presentes los contextos en los cuales es válida la observación anterior; ella no significa que las combinaciones $\forall \ldots \Rightarrow$ y $\exists \ldots \wedge$ sean indisolubles. Por ejemplo, Todo brilla o es oro tiene la forma simbólica $\forall x(B(x) \vee O(x))$; el sol brilla para todos, tiene la forma $\forall x(p)$, donde p representa la proposición atómica: el sol brilla.

4.7 NEGACIÓN DE CUANTIFICADORES

Entre las equivalencias lógicas más importantes se encuentran las que indican cómo negar las fórmulas $\forall xA$ y $\exists xA$. En lugar de una justificación formal, discutiremos aquí cómo tales equivalencias reflejan, y es natural que lo hagan, la forma correcta de negar los cuantificadores en el lenguaje usual.

Supongamos que debemos negar el enunciado "Todo es perfecto". Proponer como respuesta "nada es perfecto" sería negar una proposición falsa con otra que también es falsa, lo cual es absurdo. Tampoco es aceptable la forma "**No** todo es perfecto" pues no es una equivalencia sino denotar la negación anteponiendo **No** a la expresión dada: **No**(todo es perfecto). Es como si negáramos la disyunción $(p \vee q)$ como $\neg(p \vee q)$, en lugar de usar la forma equivalente $(\neg p \wedge \neg q)$, o que "negáramos" el condicional $(p \Rightarrow q)$ como $\neg(p \Rightarrow q)$ y no con la equivalencia $p \wedge \neg q$. ¿Cuál es, entonces, la forma equivalente de la negación de "Todo es perfecto"? Basta responder ¿cómo sabemos que **no todo es perfecto**? Respuesta: porque sabemos que **existe algo que no es perfecto**. Y esta es precisamente la respuesta buscada: **No**(todo es perfecto) ≡ existe algo que no es perfecto. Trasladado a la forma simbólica:

$$\neg\forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x) \qquad (4.1)$$

La equivalencia anterior se generaliza para obtener la negación de $\forall xA$:

$$\neg\forall x A \equiv \exists x \neg A \qquad (4.1')$$

Esta equivalencia establece que: "Para negar una fórmula cuantificada universalmente, se remplaza el cuantificador universal por el cuantificador existencial y se niega el alcance", lo cual refleja el procedimiento correcto en las situaciones cotidianas: afirmar que no todo elemento de un dominio satisface la situación A **equivale** a afirmar que existe algún elemento del dominio que no la satisface.

Ejemplo 4.32 En el ejemplo 4.28a representamos el enunciado "Todos los adolescentes se sienten incomprendidos": $\forall x(A(x) \Rightarrow I(x))$. Para negar esta expresión utilizamos la equivalencia (4.1´):

$\neg\forall x(A(x) \Rightarrow I(x)) \equiv \exists x \neg(A(x) \Rightarrow I(x))$
(se cambia $\forall$ por $\exists$ y se antepone $\neg$ al alcance de $\forall x$)

$\equiv \exists x(A(x) \wedge \neg I(x))$
(se niega el condicional con la equivalencia conocida)

Esta última fórmula establece que la forma correcta de negar el enunciado propuesto es "Existe por lo menos un adolescente que no se siente incomprendido".

En este punto es conveniente llamar la atención sobre la forma incorrecta pero frecuente de expresar en el lenguaje cotidiano la negación del cuantificador universal, esbozada al comienzo de esta sección. Consiste en utilizar, más por descuido que por desconocimiento, la expresión "todos no" con el significado de "no todos". Evidentemente, es un error: no expresamos la misma idea cuando decimos "todos los pobres no son ancianos", que cuando decimos "no todos los pobres son ancianos". En el primer caso estamos afirmando que entre los pobres no hay ancianos; en el segundo, que entre los pobres algunos no son ancianos. Análogamente, no es lo mismo "Todas las personas no tienen acceso a servicios de salud" que "No todas las personas tienen acceso a servicios de salud".

Ejemplo 4.33 Construir gradualmente la negación no trivial (sin limitarse a anteponer el operador **No**) del enunciado del ejemplo 3.17c, "Las ovejas les temen a los lobos". Una vez obtenida la forma simbólica, expresarla en lenguaje natural.

Solución: Debemos construir la negación no trivial de la expresión:

$$\forall x[O(x) \Rightarrow \{\forall y(L(y) \Rightarrow T(x,y))\}]$$

$\neg\forall x[O(x)\Rightarrow\{\forall y(L(y)\Rightarrow T(x,y))\}] \;\equiv\; \exists x\neg[O(x) \Rightarrow \{\forall y(L(y) \Rightarrow T(x,y))\}]$

($\forall$ por $\exists$ y negar el alcance)

$\equiv\; \exists x[O(x) \wedge \neg \{\forall y(L(y)\Rightarrow T(x,y))\}]$ $\quad(\neg(A\Rightarrow B)) \equiv A \wedge \neg B)$

$\equiv\; \exists x[O(x) \wedge \exists y\neg(L(y)\Rightarrow T(x,y))]$

($\forall$ por $\exists$ y negar el alcance)

$\equiv\; \exists x(O(x) \wedge \;\exists y(L(y) \wedge \neg T(x,y))$ $\quad(\neg(A\Rightarrow B)) \equiv A \wedge \neg B)$

Esta última expresión indica que "Existen por lo menos una oveja y un lobo tales que la oveja no le teme al lobo". Esta es la forma correcta de negar el enunciado original.

Una discusión similar a la que nos condujo a la forma correcta de negar el cuantificador universal puede adelantarse para establecer la forma de negar el cuantificador existencial. Supongamos que debemos negar la afirmación "Alguien es obstinado". La práctica corriente es negarla como "Nadie es obstinado". Pero "nadie" es un cuantificador que en el cálculo de predicados debe sustituirse por su equivalente "todos no", con lo cual obtenemos la forma "Todos no son obstinados". Trasladando estas observaciones a la forma simbólica, supongamos que "Alguien es obstinado" se representa como $\exists xO(x)$. Su negación, "Nadie es obstinado", se representa como $\forall x(\neg O(x))$. Generalizando este resultado tenemos la equivalencia siguiente:

$$\neg\exists xA \equiv \forall x\neg A \qquad (4.2)$$

Esta equivalencia establece que "Para negar una fórmula cuantificada existencialmente, se remplaza el cuantificador existencial por el cuantificador universal y se niega el alcance", lo cual refleja un procedimiento usual en el mundo cotidiano: afirmar que en un dominio dado no existe un elemento que satisfaga la situación A equivale a afirmar que cada uno de los elementos del dominio no la satisface.

Ejemplo 4.34 Representar el enunciado "Existe un criminal decente". ($\mathcal{D}$ = el universo). Construir su negación no trivial y expresarla en lenguaje natural.

Representación simbólica: $\exists x(C(x) \wedge D(x))$

$\neg\exists x(C(x) \wedge D(x))$	$\equiv \forall x\neg((C(x) \wedge D(x))$	($\exists$ por $\forall$ y negar el alcance de $\exists$)
	$\equiv \forall x(\neg C(x) \vee \neg D(x))$	(ley de De Morgan)
	$\equiv \forall x(C(x) \Rightarrow \neg D(x))$	(equivalencia $(\neg p \vee \neg q) \equiv (p \Rightarrow q)$

Esta última fórmula representa la afirmación “Todos los criminales son indecentes”, que es la forma correcta de negar la afirmación inicial.

Esperamos que la sección anterior le prevenga de caer en **los errores siguientes**:

1. Negar “Todo x es P” con “Ningún x es P” o “Todo x no es P”. Forma correcta: Algún x no es P.
2. Negar “Algún x es P” con “Algún x no es P”. Forma correcta: ningún x es P.

4.8 CONDICIONES SUFICIENTES Y CONDICIONES NECESARIAS

4.8.1 El cuantificador universal y la condición suficiente

El uso de cuantificadores permite expresar fácilmente las relaciones de suficiencia o necesidad entre dos propiedades (o predicados) P y Q. Por ejemplo, en el lenguaje cotidiano la afirmación “Todo científico es estudioso” indica que “ser científico” garantiza, o es condición suficiente para, “ser estudioso”. Esto justifica el uso de la siguiente representación:

Es suficiente ser científico para ser estudioso: $\forall x(C(x) \Rightarrow E(x))$.

En términos generales, si P y Q son propiedades de elementos de un dominio $\mathcal{D}$ relacionadas en tal forma que cada vez que P(x) es verdadera entonces Q(x) también lo es, entonces P es suficiente para Q. Esto se representa adecuadamente en el cálculo de predicados en la forma $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))$.

P es suficiente para Q : $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))$ (4.3)

Recíprocamente, si P y Q denotan propiedades de los elementos de un dominio $\mathcal{D}$ y la fórmula $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))$ es verdadera, entonces P es condición suficiente para Q.

$\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))$: P es suficiente para Q (4.4)

Resumiendo en una sola afirmación los resultados (4.3) y (4.4):

(P es suficiente para Q) si y sólo si $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))$ (4.5)

Si se niegan ambos términos de la relación anterior se obtiene un resultado igualmente importante:

(P no es suficiente para Q) si y sólo si $\exists x(P(x) \wedge \neg Q(x))$ (4.6)

El significado de esta última expresión es claro: afirmar que la propiedad P no es suficiente para la propiedad Q es equivalente a afirmar que hay por lo menos un elemento x en el dominio, que tiene la propiedad P, pero no la propiedad Q.

Ejemplo 4.35 Utilice una expresión del cálculo de predicados para denotar el hecho de que "ser médico" es condición suficiente para "saber de primeros auxilios" pero "saber de primeros auxilios" no es condición suficiente para "ser médico".

Sean $\mathcal{D}$ = conjunto de seres humanos, M(x): x es médico, S(x): x sabe de primeros auxilios.

Por lo dicho anteriormente, tenemos: $\forall x[M(x) \Rightarrow S(x)] \wedge \neg\forall x[S(x) \Rightarrow M(x)]$. Pero el segundo miembro es una negación trivial y por lo tanto inaceptable. El resultado final es:

$\forall x[M(x) \Rightarrow S(x)] \wedge \exists x[S(x) \wedge \neg M(x)]$, es decir, todos los médicos saben primeros auxilios pero alguien que sabe primeros auxilios no es médico.

4.8.2 El cuantificador universal y la condición necesaria

La afirmación verdadera "Todo neurocirujano es médico" conlleva la afirmación igualmente verdadera "quien **no** es médico **no** puede ser neurocirujano". Dicho de otro modo, la afirmación verdadera: "ser neurocirujano" es condición suficiente o implica el "ser médico" conlleva la afirmación igualmente verdadera "ser médico" es condición necesaria para "ser neurocirujano". La consideración anterior queda reflejada en la equivalencia $\forall x(N(x) \Rightarrow M(x)) \equiv \forall x(\neg M(x) \Rightarrow \neg N(x))$, donde los símbolos N y M tienen los significados N(x): x es neurocirujano y M(x): x es médico.

En general, si P y Q denotan propiedades de elementos en un dominio $\mathcal{D}$, la fórmula $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))$ tiene un doble significado:

P, la condición expresada en **el antecedente** del condicional, es **suficiente** para Q y

Q, la condición expresada en **el consecuente** del condicional, es **necesaria** para P. Este doble significado se expresa con exactitud en la equivalencia

$$\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \equiv \forall x(\neg Q(x) \Rightarrow \neg P(x)) \qquad (4.7)$$

Ejemplo 4.36 Afirmar que "Todo abogado conoce la Constitución" es afirmar simultáneamente que "quien no conoce la Constitución no es abogado"; afirmar que "toda tautología es una fórmula satisfacible" es afirmar simultáneamente que "si una fórmula no es satisfacible entonces no puede ser tautología".

En ocasiones **deben** cumplirse simultáneamente varias condiciones $Q_1, Q_2, \ldots Q_r$ para que un elemento del dominio satisfaga otra condición P, es decir, la conjunción de las condiciones $Q_1, Q_2, \ldots Q_r$ es condición necesaria para P. (Recuerde, por ejemplo, que las condiciones S2 a S6 son necesarias para la validez de un silogismo categórico). Esto se expresa con la fórmula

$$\forall x[P(x) \Rightarrow \{Q_1(x) \wedge Q_2(x) \wedge \ldots \wedge Q_r(x)\}].$$

Si utilizamos las equivalencias

$$\begin{aligned}\forall x[P(x) \Rightarrow \{Q_1(x) \wedge Q_2(x) \wedge \ldots \wedge Q_r(x)\}] &\equiv \forall x[\neg\{Q_1(x) \wedge Q_2(x) \wedge \ldots \wedge Q_r(x)\} \Rightarrow \neg P(x)] \\ &\equiv \forall x[\{\neg Q_1(x) \vee \neg Q_2(x) \vee \ldots \vee \neg Q_r(x)\} \Rightarrow \neg P(x))]\end{aligned}$$

Obtenemos un resultado que seguramente usted ya intuyó: si son varias las condiciones necesarias para un evento P, es suficiente que alguna de ellas que no se satisfaga para que P tampoco se cause.

Ejemplo 4.37 Represente simbólicamente la afirmación: Ser <u>n</u>eurocirujano es condición suficiente pero no necesaria para ser <u>m</u>édico.

Solución: $\forall x(N(x) \Rightarrow M(x)) \wedge \exists x(M(x) \wedge \neg N(x))$. El condicional de la izquierda denota sólo la suficiencia (de ser neurocirujano) y la conjunción de la derecha denota la no necesidad (de ser neurocirujano). Ambas subfórmulas son requeridas para comunicar el sentido del ejemplo 4.37.

Ejemplo 4.38 Represente simbólicamente la afirmación: Presentar el Examen de Estado es condición necesaria pero no suficiente para ser estudiante universitario.

Solución: Sean $\mathcal{D}$ = conjunto de estudiantes colombianos, P(x): x presentó el Examen de Estado

U(x): x es estudiante universitario.

La expresión pedida es: $\forall x(U(x) \Rightarrow P(x)) \wedge \exists x(P(x) \wedge \neg U(x))$

4.8.3 El cuantificador universal y la condición suficiente y necesaria

Con frecuencia P y Q son propiedades relacionadas de tal manera que P es suficiente para Q y Q es suficiente para P. En este caso, para cada valor dado de x en el dominio común, las fórmulas $(P(x) \Rightarrow Q(x))$ y $(Q(x) \Rightarrow P(x))$ son verdaderas ambas o son falsas ambas, es decir, las fórmulas $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))$ y $\forall x(Q(x) \Rightarrow P(x))$ tienen los mismos valores de verdad. Pero la primera indica que **P es suficiente** para Q y la segunda, que P es necesaria para Q. Se dice entonces que **P es condición suficiente y necesaria para Q**. De igual manera, la segunda establece que Q es suficiente para P, y la primera que Q es necesaria para P. Entonces, Q es también condición suficiente y necesaria para P. Uno resume esta relación mutua entre P y Q diciendo que son condiciones equivalentes. En este caso, la fórmula $\forall x(P(x)\Leftrightarrow Q(x))$ es verdadera para cada valor de x en el dominio.

Ejemplo 4.39 Sea $\mathcal{D}$ el conjunto de los números enteros. Es un hecho que todo entero divisible por 2 termina en cifra par. Recíprocamente, todo entero que termina en cifra par es divisible por 2. Esto permite afirmar que "un entero es divisible por 2 si y sólo si termina en cifra par". La verdad de la afirmación anterior indica, entonces, que "terminar en cifra par" y "ser divisible por 2" son propiedades equivalentes: dado un entero cualquiera x, el entero satisface las dos propiedades, o no satisface ninguna.

Observación 4.40 Es posible que en sus lecturas o estudios posteriores usted encuentre resultados o teoremas que empiezan así: "Las siguientes afirmaciones son equivalentes:" Y a continuación se presenta una lista $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ de afirmaciones. Es una forma sintética de expresar que cada afirmación de la lista es equivalente con cualquiera otra:

$A_1 \equiv A_2, A_1 \equiv A_3, \ldots A_{n-1} \equiv An, A_2 \equiv A_3, \ldots$etc. Probar la verdad de la afirmación implicaría demostrar n(n–1)/2 equivalencias, si no existiera un procedimiento alternativo, que afortunadamente existe: Probar que A_1 es suficiente para A_2, A_2 es suficiente para $A_3, \ldots A_{n-1}$ suficiente para A_n y, finalmente, que A_n es suficiente para A_1. Esto configura la siguiente cadena de implicaciones:

$A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow \ldots \rightarrow A_{n-1} \rightarrow A_n \rightarrow A_1,$

con la cual queda demostrada la múltiple equivalencia indicada en el teorema. (El instructor puede proporcionarles un ejemplo de lo anterior a los estudiantes interesados).

Finalmente, suponga que se busca probar que un enunciado de la forma $\forall xA$, que afirma que todos los elementos del dominio tienen determinada propiedad, es falso. Por ejemplo, probar que la afirmación "todas las palabras agudas llevan tilde", es falsa. La equivalencia (1'), $\neg\forall xA \equiv \exists x\neg A$, indica que es suficiente exhibir algún elemento del dominio, que no tiene la propiedad mencionada. Para este ejemplo, la palabra "propiedad" es palabra aguda y, sin embargo, no lleva tilde. A este elemento que sirvió para probar la falsedad de la afirmación universal, se le llama un contraejemplo. En este sentido, 9 es un contraejemplo para la afirmación "Todo número impar es primo". Igualmente, la afirmación "Todo número primo es impar" es falsa; 2 es un contraejemplo.

Usted encontrará frecuentemente situaciones en las cuales debe decidir si un resultado propuesto es verdadero o es falso, y proporcionar un argumento que justifique su decisión. Si el resultado es de la forma "Todo x tiene la propiedad P(x)", y usted puede exhibir un contraejemplo, habrá mostrado que el resultado es falso.

4.9 VALIDEZ DE RAZONAMIENTOS EN EL CÁLCULO DE PREDICADOS

Antes de abordar este, el último tema sobre razonamientos deductivos, es conveniente reiterar uno de los objetivos centrales de este libro: presentar una visión de conjunto y de carácter introductorio del tema "Validez de razonamientos deductivos".

En esta sección estudiaremos validez de razonamientos expresados en el lenguaje del cálculo de predicados. Necesitaremos, junto a todos los elementos estudiados en capítulos anteriores, cuatro nuevas reglas de inferencia: Particularización universal (PU), Particularización existencial (PE), Generalización universal (GU) y Generalización existencial (GE). Estas reglas se complementan con un resultado conocido como Teorema de la Deducción.

Frecuentemente, el proceso para decidir sobre validez de razonamientos empieza con la aplicación de alguna regla de particularización. Estas reglas permiten eliminar cuantificadores, dando lugar a proposiciones, lo cual nos sitúa en terreno conocido —el de la lógica proposicional— y nos permite aplicar reglas de inferencia conocidas. En cuanto a las reglas de generalización, ellas permiten insertar cuantificadores en el momento apropiado, con lo cual muchas veces se obtiene la conclusión deseada.

4.9.1 La regla de particularización universal, (PU)

Supongamos que P(x) tiene el significado "x es perfecto". Entonces, la expresión $\forall x P(x)$ afirma que **todo** es perfecto y, por lo tanto, para cualquier elemento t del dominio —el universo en este caso— P(t) es una proposición verdadera, es decir, "t es perfecto": P(Juan) = Juan es perfecto, P(el mundo) = el mundo es perfecto, P(28) = 28 es un número perfecto (de hecho, lo es), P(usted) = usted es perfecto, son todas proposiciones verdaderas. No es más que la inferencia de que si todo es perfecto, cada elemento del dominio lo es.

La Regla de particularización universal (PU) generaliza la consideración del párrafo anterior: Si A es una fórmula que contiene la variable x, y $\forall xA$ es una premisa en un razonamiento, cada aparición de la variable x en A se puede sustituir por cualquier término t del dominio, para deducir válidamente la expresión que denotaremos por $A\,[x \leftarrow t]$.

$$\frac{\forall xA}{A\,[x \leftarrow t]}$$

Para ilustrar esta regla de inferencia, consideremos un argumento sencillo: Todo perro ladra. Por lo tanto, si Pluto es un perro, entonces Pluto ladra.

P_1 $(\forall x)(P(x) \Rightarrow L(x))$

// $P(\text{Pluto}) \Rightarrow L\,(\text{Pluto})$ (PU en P1, $x \leftarrow$ Pluto)

La expresión en el paréntesis de la derecha en el renglón anterior se interpreta así: (se infiere por aplicación de la regla de particularización universal en la premisa 1, cuando x toma el valor Pluto).

Incidentalmente, observe que no se asegura que Pluto ladra, pues no se ha incluido la premisa "Pluto es un perro", que haría posible aplicar *Modus ponens* para obtener tal conclusión. Veamos cómo establecer la validez del silogismo siguiente (aii–1) con esta nueva herramienta:

Ejemplo 4.41 Establecer la validez del razonamiento,

Todos los hombres son mortales.
Sócrates es hombre.
Entonces, Sócrates es mortal.

Solución: Utilicemos los predicados H(x): x es hombre, M(x): x es mortal.

El paso siguiente es simbolizar el razonamiento:

1.	$\forall x(H(x) \Rightarrow M(x))$	Premisa	Todo ser humano es mortal
2.	H(Sócrates)	Premisa	Sócrates es un ser humano
	// M(Sócrates)		Conclusión: Sócrates es mortal.

Veamos el proceso de inferencias:

1.	$\forall x(H(x) \Rightarrow M(x))$	Premisa
2.	H(Sócrates)	Premisa
3’	H(Sócrates) $\Rightarrow$ M(Sócrates)	(PU, P1, [$x \leftarrow$ Sócrates])
4’	**M(Sócrates)**	(MP entre 2 y 3)

Observe que la aplicación de la regla de particularización universal en la premisa 1, tiene como resultado eliminar el cuantificador universal. Las líneas 2, 3 y 4 constituyen un argumento simple en el terreno de la lógica proposicional: "Sócrates es hombre. Si Sócrates es hombre, entonces Sócrates es mortal. Por lo tanto Sócrates es mortal". Su validez se establece por simple aplicación de *Modus ponens*. Entonces, el razonamiento es válido pues la conclusión se deriva en forma necesaria de las dos premisas.

Ejemplo 4.42 Establecer formalmente la validez del argumento del ejercicio 4.12

P_1 P(Juan, José).

P_2 H(Pedro, Juan).

P_3 $\forall x \forall y \forall z[\{P(x, y) \wedge H(z, x)\} \Rightarrow T(z, y)]$

// T(Pedro, José).

Solución:

P_1	P(Juan, José).	Premisa
P_2	H(Pedro, Juan).	Premisa
P_3	$\forall x \forall y \forall z[\{P(x, y) \wedge H(z, x)\} \Rightarrow T(z,y)]$	Premisa
4'	P(Juan, José) $\wedge$ H(Pedro, Juan)	Conj. 1, 2
5'	[(P(Juan, José) $\wedge$ H(Pedro, Juan) $\Rightarrow$ T(Pedro, José)	PU múltiple, 3: [x$\leftarrow$Juan, y$\leftarrow$José, z$\leftarrow$Pedro]
6'	**T(Pedro, José)**	MP; 4 y 5

En el ejemplo anterior, y en los restantes de esta sección, podrá observar que la aplicación de reglas de particularización produce proposiciones. Esto hace que finalmente la prueba de validez se traslade al campo ya conocido de la lógica proposicional.

4.9.2 La regla de particularización existencial (PE)

Esta regla establece que si un enunciado de existencia de la forma $\exists xP(x)$ es o se supone verdadero, entonces se puede inferir la verdad de la proposición P(a), para algún elemento a del dominio; precisamente, uno de los elementos que permite afirmar que $\exists xP(x)$ es verdad. Cuando se afirma que el enunciado "Existe por lo menos un x tal que x periodista" es verdadero, estamos afirmando que alguien, digamos Juan, es periodista. En general, podemos inferir que hay algún valor a de la variable x, tal que la afirmación "a es periodista", es verdadera. La regla de particularización existencial se describe así:

$$\frac{\exists xA}{A\,[x \leftarrow a]}$$

Cuando en un razonamiento intervienen premisas de la forma $\forall xA$ es frecuente que intervengan también premisas del tipo $\exists xB$. La razón es que casi siempre el alcance del cuantificador universal en $\forall xA$ es un condicional. Por ejemplo, todos los alemanes son disciplinados, todos los filósofos son cultos, todos los científicos son modestos, etc., son expresiones de la forma $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))$. Sin embargo, la presencia de estos enunciados en un razonamiento no garantiza la existencia de personas disciplinadas o cultas o modestas, mientras el argumento no establezca la existencia de alemanes, filósofos o científicos. Pero si se garantiza tal existencia, la aplicación combinada de particularización existencial y particularización universal sí permite inferir la existencia de tales personas (disciplinadas, cultas o modestas). Consideremos el ejemplo siguiente:

Ejemplo 4.43 Establecer la validez de este razonamiento: Si todos los filósofos son personas cultas y existen filósofos, entonces existen personas cultas.

P_1	$\forall x(F(x) \Rightarrow C(x))$	Premisa. Todos los filósofos son personas cultas.
P_2	$\exists x(F(x))$	Premisa. Existen filósofos.
3’	$F(a)$	PE, 2; $[x\leftarrow a]$. Sea a uno de los filósofos cuya existencia ha sido garantizada por la premisa P_2.
4’	$F(a)\Rightarrow C(a)$	PU, 1; $[x\leftarrow a]$. La P1 es verdadera, en particular para el valor a, de x.
5’	$C(a)$	MP entre 3 y 4.
6’	$\exists x\mathbf{C(x)}$	El paso de 5 a 6 se justifica con la regla que veremos en seguida, llamada Generalización Existencial: De saber que a es una persona culta se infiere que existen personas cultas.

4.9.3 La regla de generalización existencial (GE)

Como puede advertir en la línea 6 del ejemplo anterior, esta regla procede a inferir que $\exists xA$ es verdadera, cuando se ha concluido previamente que para algún elemento a del dominio A(a) es verdadera. La regla se denota en la forma:

$$\frac{A\ [x\leftarrow a]}{\exists xA}$$

Ejemplo 4.44 Muestre la validez del razonamiento siguiente:

P_1 $\forall x(C(x) \Rightarrow V(x))$

P_2 $\exists x(H(x) \wedge C(x))$

// $\exists x(H(x) \wedge V(x))$

Solución:

1.	$\forall x(C(x) \Rightarrow V(x))$	Premisa
2.	$\exists x(H(x) \wedge C(x))$	Premisa
3’	$H(a) \wedge C(a)$	PE, 2; [$x \leftarrow a$] (La existencia de a está garantizada en P2)
4’	$C(a) \Rightarrow V(a)$	PU, 1; [$x \leftarrow a$] (Ya contamos con un elemento para particularizar P1)
5’	$C(a)$	Simp. 3
6’	$V(a)$	MP entre 4 y 5
7’	$H(a)$	Simp. 3
8’	$H(a) \wedge V(a)$	Conj. 6 y 7
9’	$\exists \mathbf{x}(\mathbf{H}(\mathbf{x}) \wedge \mathbf{V}(\mathbf{x}))$	GE, 8

¿Corresponde a alguna forma de silogismo válido el razonamiento anterior?

Ejemplo 4.45 Haremos uso de las tres reglas de inferencia estudiadas hasta el momento: particularización universal, particularización existencial y generalización existencial, para establecer la validez del razonamiento siguiente:

Algún columnista de la prensa escrita no está vinculado a grupos de opinión. Es un hecho que todos los militantes políticos están vinculados a grupos de opinión. Más aun: toda persona es militante político o está interesada en temas generales. En consecuencia, algún columnista de la prensa escrita está interesado en temas generales.

P_1 $\exists x(C(x) \wedge \neg V(x))$

P_2 $\forall x(M(x) \Rightarrow V(x))$

P_3 $\forall x[P(x) \Rightarrow (M(x) \vee G(x))]$

C. $// \exists x(C(x) \wedge G(x))$

Solución: Empezaremos llamando Juan al columnista cuya existencia está asegurada por P1

P_1	$\exists x(C(x) \wedge \neg V(x))$	
P_2	$\forall x(M(x) \Rightarrow V(x))$	
P_3	$\forall x[P(x) \Rightarrow (M(x) \vee G(x))]$	
4’	$C(Juan) \wedge \neg V(Juan)$	PE 1, [$x \leftarrow$ Juan] (Llamando Juan al columnista vinculado a grupos de opinión; su existencia está garantizada por P_1)
5’	$M(Juan) \Rightarrow V(Juan)$	PU 2, [$x \leftarrow$ Juan]

6’	$P(Juan) \Rightarrow (M(Juan) \vee G(Juan))$	PU 3, [x← Juan]
7’	$P(Juan)$	Premisa implícita: Juan es una persona
8’	$M(Juan) \vee G(Juan)$	MP 6, 7
9’	$C(Juan)$	Simp. 4
10’	$\neg V(Juan)$	Simp. 4
11’	$\neg M(Juan)$	MT 5,10
12’	$G(Juan)$	SD 8, 11
13’	$C(Juan) \wedge G(Juan)$	Conj. 9, 12
14’	$\exists \mathbf{x}(\mathbf{C(x)} \wedge \mathbf{G(x)})$	GE, 13

4.9.4 La regla de generalización universal (GU)

La expresión formal de la regla de generalización universal incluye una variable del tipo llamado “variable libre”, concepto que excede los propósitos de esta presentación. La regla GU se expresa en la forma siguiente:

$$\frac{\mathcal{A} \models B(y)}{\forall x B(x)}$$

Esta regla establece que si a partir de un conjunto $\mathcal{A}$ de premisas es posible concluir que un elemento y, arbitrariamente seleccionado y no fijo de un dominio $\mathcal{D}$, tiene una propiedad B, entonces se puede inferir que todo elemento del dominio tiene dicha propiedad. Es decir, las inferencias sobre y (variable libre), se pueden extender sin restricciones al dominio completo. De aquí el nombre de generalización universal.

Ejemplo 4.46 Consideremos el siguiente silogismo de la forma eae–1, para establecer su validez en el cálculo de predicados: Ningún <u>e</u>scalador es <u>t</u>emeroso. Todos los <u>a</u>lpinistas son escaladores. Por lo tanto, ningún alpinista es temeroso.

P_1 $\forall x (E(x) \Rightarrow \neg T(x))$

P_2 $\forall x (A(x) \Rightarrow E(x))$

// $\forall x(A(x) \Rightarrow \neg T(x))$

3’	$E(z) \Rightarrow \neg T(z)$	PU, 1
4’	$A(z) \Rightarrow E(z)$	PU, 2
5’	$A(z) \Rightarrow \neg T(z)$	S.H. 4, 3
6’	$\forall \mathbf{x}(\mathbf{A(x)} \Rightarrow \neg \mathbf{T(x)})$	GU, 5

En la línea 3, **z** es un elemento arbitrariamente seleccionado como representante de los elementos que satisfacen las premisas 1 y 2, pero no se hace sobre **z** ningún supuesto adicional. Cuando se infiere que **z** tiene la propiedad indicada en la línea 5, concluimos que **todo** elemento del dominio debe tenerla. Esta inferencia se expresa en la línea 6.

Por su carácter, la generalización universal es una regla de aplicación básica y generalizada en las demostraciones de teoremas. Aquí nos limitaremos a presentar un ejemplo muy sencillo de su aplicación.

Ejemplo 4.47 Probar que el cuadrado de todo número par es también un número par.

Solución: Tal como lo establece la regla de Generalización Universal, sea **z** un número par arbitrario. Esto significa que no estamos seleccionando el 4, ni el 196, ni ningún par en particular y, por lo tanto, todo lo que concluyamos sobre **z** es lícito concluirlo de cualquier número par. Probemos que también $\mathbf{z}^2$ es par.

El argumento es el siguiente: como **z** es par, **z** puede escribirse como **z** = 2t, para algún valor entero de t. (Por ejemplo, 8 = 2.4, 22 = 2.11, –40 = 2. –20, etc.)

El cuadrado de **z** será entonces $\mathbf{z}^2 = (2t)^2 = 4t^2$. Pero como esta última expresión es igual a $2(2t^2)$, concluimos que $\mathbf{z}^2 = 2(2t^2)$, que tiene la forma 2h y es, por lo tanto, un número par.

Ahora aplicamos la regla GU así: **z** fue seleccionado como un número par arbitrario y se concluyó que su cuadrado es par. Entonces, generalizando el resultado a todos los números pares concluimos que "el cuadrado de todo número par es también un número par".

La expresión simbólica del resultado anterior es de la forma:

$\forall x P(x)$	Se toma como dominio $\mathcal{D}$ = el conjunto de los números pares.
$\forall x(P(x) \Rightarrow P(x^2)$	Se demuestra que si x es un par cualquiera, entonces su cuadrado es también par.
$\forall x(P(x^2))$	Se concluye que el cuadrado de cada elemento del dominio (par) es par.

Una versión no aritmética del ejemplo anterior: Si el dominio es el conjunto de los estudiantes de Diseño Industrial y es un hecho que "Todos los estudiantes de Diseño Industrial aprecian las artes plásticas", entonces por GU se concluye que todos los estudiantes del dominio aprecian las artes plásticas. En símbolos: $\{\forall x[(D(x) \Rightarrow A(x)] \wedge \forall x D(x)\} \Rightarrow \forall x A(x)$.

Para terminar esta sección presentamos un ejemplo adicional de validez de un razonamiento.

Ejemplo 4.48 Pruebe que el argumento siguiente es válido:

> Cada miembro de la junta directiva proviene del sector industrial o del sector público. Cada integrante del sector público que tiene un grado en Leyes está a favor de la enmienda. Juan no proviene del sector industrial, pero tiene un grado en Leyes. En consecuencia, si Juan es miembro de la junta directiva, entonces está a favor de la enmienda. (M(x), I(x), P(x), L(x), F(x)).
>
> [Gersting, J. L. 1987, p.38]

Solución:

Consideremos los predicados:

M(x): x es miembro de la junta directiva.

I(x): x proviene del sector industrial.

P(x): x proviene del sector público.

L(x): x tiene un grado en leyes.

F(x): x está a favor de la enmienda.

1.	$\forall x(M(x) \Rightarrow (I(x) \vee P(x)))$	
2.	$\forall x((P(x) \wedge L(x)) \Rightarrow F(x))$	
3.	$\neg I(Juan) \wedge L(Juan)$	
	$M(Juan) \Rightarrow F(Juan)$	
4'	$M(Juan)$	Regla de la deducción
5'	$M(Juan) \Rightarrow (I(Juan) \vee P(Juan))$	PU; 1, [x← Juan]
6'	$((P(Juan) \wedge L(Juan)) \Rightarrow F(Juan)$	PU; 2, [x← Juan]
7'	$I(Juan) \vee P(Juan)$	MP; 4 y 5
8'	$\neg I(Juan)$	SIM; 3
9'	$P(Juan)$	S.D.; 7 y 8
10'	$L(Juan)$	SIM.; 3
11'	$P(Juan) \wedge L(Juan)$	Conj. 9 y 10
12'	$F(Juan)$	MP; 6 y 11
13'	$\mathbf{M(Juan) \Rightarrow F(Juan)}$	Regla de la deducción

Observación 4.49 En el ejemplo 4.45 se utilizan tanto la particularización universal como la particularización existencial. En estos casos siempre se debe **usar primero la particularización existencial,** que proporcionará así un elemento con el cual instanciar las

fórmulas cuantificadas universalmente. Por otra parte, **es un error** muy frecuente instanciar, en un mismo argumento, dos expresiones cuantificadas existencialmente, con un mismo valor para la variable. Supongamos que un argumento contiene estas premisas:

P_1 Algunos adolescentes participan en reuniones familiares. $\exists x(A(x) \wedge R(x))$

P_2 Por lo menos uno de los funcionarios tiene más de 40 años. $\exists x(F(x) \wedge M(x))$

Si cometemos el error de aplicar PE $[x \leftarrow c]$ instanciando en ambas premisas a x con el valor c, obtenemos:

$A(c) \wedge R(c)$

$F(c) \wedge M(c)$

De lo anterior se deduce, aplicando simplificación y conjunción:

$A(c) \wedge M(c)$, es decir, ¡c es un adolescente que tiene más de 40 años!

Lo correcto es instanciar con un valor diferente, para cada cuantificación existencial.

EJERCICIOS

1. Para cada razonamiento siguiente indique si el cálculo proposicional es suficiente para decidir sobre su validez o si se requiere ampliar el dominio al sistema del cálculo de predicados:
   a. La tierra no es plana. Porque desde las costas, los barcos se divisan progresivamente, empezando por su parte más alta. Y esto no sería así, si la tierra fuese plana.
   b. Ningún ser humano es perfecto. Los artistas son seres humanos. Por lo tanto, los artistas no son perfectos.
   c. Sólo las personas caritativas ayudan a los pobres. Juan es indigente y todos los indigentes son pobres. Pedro suele ayudar a Juan. Por lo tanto, Pedro es persona caritativa.

2. Determine el valor de la proposición representada por cada expresión 2.1 a 2.9, con base en las definiciones de los predicados G y T.

   G(x) = x es palabra grave, T(x) = x lleva tilde.

   2.1 G(árbol) 2.2 G(borrador) 2.3 G (grave) 2.4 G(ecuación) 2.5 T(árbol)

   2.6 T(grave) 2.7 $\forall x(G(x) \Rightarrow T(x))$ 2.8 $\exists x(G(x) \wedge T(x))$ 2.9 $\exists x(G(x) \wedge \neg T(x))$.

   Solución a 2.1 G(árbol) = árbol es palabra grave. (Verdadero)

   Solución a 2.8 Alguna palabra grave lleva tilde. (Verdadero)

3. En cada caso siguiente, el dominio es el conjunto de los números enteros no negativos,

D(x, y) = x es divisor de y, y G(x, y) = x es igual a y. Sustituya cada □ por constantes o variables apropiadas, de tal manera que la proposición resultante sea verdadera:

3.1 D(5, □) 3.2 D(□, 7) 3.3 D(a, □) 3.4 D(□, □)

3.5 ∀xD(□, 0) 3.6 ∀xD(□,□) 3.7 ∀x(¬ G(x, 0) ⇒ ¬D(□, x)).

Solución a 3.1 D(5, □) El trazo debe ser remplazado por un entero a tal que 5 es divisor de a. Entonces □ puede ser cualquier múltiplo no negativo de 5. □ ∈ {0, 5, 10, 15, …}

Solución a 3.5 ∀xD(□, 0). "Cualquiera sea (el entero no negativo) x, el entero □ es divisor de 0" Como todo entero es divisor de 0, □ puede ser el mismo x: ∀xD(x, 0).

4. En este ejercicio los símbolos de predicado tienen los significados que se indican. Se pide expresar en lenguaje usual los enunciados expresados simbólicamente y establecer el valor de verdad de la afirmación resultante. El dominio es el conjunto de los enteros excepto 0.

M(x, y) = x es menor que y

N (x, y) = x es mayor que y

I(x, y) = x es igual a y

D (x, y) = x es divisor de y

P(x) = x es número primo

a. ∀x∃yM(x, y)

b. ∃x∀yD(y, x)

c. ∀x∃yD(y, x)

d. ∀x[P(x) ⇒ ∀y(D(y, x) ⇒ {I(y,1)∨ I(y, x)})]

e. ∀x∀y(M(x, y) ⇔ N(y, x))

5. Sean $\mathcal{D}$ = el conjunto de los seres humanos y los predicados D, P siguientes:

D(x, y) = x es descendiente de y

P(x, y) = x es el padre de y

Determine el valor de las expresiones siguientes, para tal interpretación:

a. ∀x∃yD(x, y)

b. ∀x∀y[D(x, y) ⇒ (P(x, y) ∨ P(y, x)]

c. ∀x∀y(P(x, y) ⇒ D(x, y))

d. ∀x∀y∀z(D(x, y) ∧ D(y, z) ⇒ D(x, z))

6. Establezca el valor de verdad de la expresión A, para la interpretación considerada:

$\mathcal{D}$ = el conjunto de los números enteros; N(x, y) = x es mayor que y, M(x, y) = x es menor que y

A: $\exists x[N(x, 0) \wedge \forall y\{N(x, y) \Rightarrow M(y, 0)\}]$

7. Establezca el valor de verdad de las expresiones 1 a 5, para la interpretación

$\mathcal{D} = \{2, 4, 6, 10, 20\}$ D(x, y) = x es divisor de y

1 $\forall x\exists y(D(x, y))$

2 $\exists y\forall x(D(x, y))$

3 $\forall x\forall y\forall z[(D(x, y) \wedge D(y, z)) \Rightarrow (x, z)]$

4 $\forall x\forall y(D(x, y) \Rightarrow \neg D(y, x)$

5 $\exists x\exists y(D(x, y) \wedge \neg D(y, x))$

8. Sea $\mathcal{D}$ un dominio que consta de tres personas: Juan, María y Juana. Los tres son alumnos y ninguno de ellos es rico; Juan es hombre, María y Juana son mujeres. Además, A, H, M, R denotan los predicados alumno, hombre, mujer y rico, respectivamente.

Indicar en una tabla, que tiene en sus filas los nombres y en sus columnas los predicados, los valores de los predicados A, H, M, R.

Calcular, sobre la base de la tabla construida, los valores de: $\forall xA(x)$, $(\forall xM(x)) \vee (\forall xH(x))$. $\forall x(M(x) \vee H(x))$, $\exists xR(x)$, $\exists x(M(x) \Rightarrow R(x))$.

9. Sean $\mathcal{D} = \{a, b, c\}$ y P el predicado definido en la tabla adjunta.

Calcular el valor de verdad de las expresiones siguientes: $\forall x\exists yP(x, y)$, $\forall yP(y, b)$, $\forall xP(x, c)$, $\exists x\forall yP(y, x)$

P(x, y)	a	b	c
a	V	F	V
b	F	V	V
c	F	V	V

10. Represente simbólicamente en el cálculo de predicados los enunciados siguientes; indique el dominio.

a. Todo es confuso.
b. Todos los gatos tienen cola.
c. Dios existe.
d. Todos los empleados tienen un supervisor.
e. Un número que sea divisible por 3 y sea distinto de 3 no puede ser primo.
f. No existen números naturales no negativos.
g. Los leones son predadores.
h. Algunos leones viven en zoológicos.
i. Sólo rugen los leones.
j. Los leones sólo rugen.
k. Algunas personas comen sólo vegetales.

11. Suponga que el dominio es el conjunto de los números naturales y que S(x, y) representa la afirmación "x es el sucesor de y". Por ejemplo: S(3,2) representa la afirmación verdadera, "3 es el sucesor de 2". Represente entonces los enunciados siguientes. Defina los predicados que considere necesarios:

a. Cada número natural tiene un sucesor. Respuesta: $\forall x \exists y(S(y, x))$

a. Cero no es el sucesor de ningún número natural.

b. Números naturales distintos tienen sucesores distintos.

12. Suponga que el símbolo $*$ denota una operación que se efectúa entre pares de elementos de un conjunto G. Por ejemplo, $*$ puede denotar la suma entre números enteros, o puede denotar la disyunción entre dos fórmulas del cálculo proposicional, etc. Se pide que usted interprete los enunciados siguientes, siguiendo el ejemplo. El conjunto G es el dominio general.

a. $(\forall x)(\forall y)(x\in G \wedge y\in G \Rightarrow x*y\in G)$: El resultado de operar dos elementos cualesquiera de G es un elemento de G.

b. $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x*(y*z)=(x*y)*z)$

c. $(\exists e)(\forall x)(x*e=x \wedge e*x=x)$

d. $(\forall x)(\exists x')(x*x'=e \wedge x'*x=e)$

e. Muestre que si G es el conjunto de los enteros y $*$ denota la suma de enteros, entonces se satisfacen las cuatro propiedades indicadas en el problema 11. ¿Qué es e en este caso? Si x es 5, 17, 0, –3, alternativamente, ¿qué es, en cada caso, x'?

13. Represente simbólicamente estos razonamientos:

a. El papá de cada ser humano es uno de sus familiares. Patricia no es amiga de nadie que no sea más joven que ella o que no tenga ojos claros. Patricia es un ser humano, y el papá de todo ser humano no es más joven que este. Nadie que tenga ojos claros es familiar de Patricia. Por tanto, si Roberto es el papá de Patricia, entonces Patricia no es amiga de Roberto.

b. Todo aquel que aprecie a Jorge escogerá a Pedro para su partido. Pedro no es amigo de nadie que sea amigo de Juan. Luis no escogerá a nadie que no sea amigo de Carlos para su partido. Por tanto, si Carlos es amigo de Juan, entonces Luis no aprecia a Jorge.

c. El opuesto de cada número racional es a su vez racional. Además, la suma de racionales es racional. Se sabe que z es racional y que w no lo es. Por lo tanto, la suma de z con w no es racional.

14. En cada punto siguiente escriba la negación de la expresión dada, tanto en el lenguaje usual, como en forma simbólica:

a. A algunas personas les gustan las matemáticas.

b. Todos quieren helado de caramelo.

c. Algunos libros están mutilados o inservibles.

d. Cada viajero que llega del exterior es entrevistado por algún agente de inmigración.

e. Nada es bueno, si se puede hacer mejor.

15. Los ejercicios siguientes se orientan al manejo adecuado de los conceptos de condición suficiente, necesaria o suficiente y necesaria. Si la expresión se da en forma simbólica, usted debe traducirla al lenguaje usual, en términos de condición suficiente, necesaria o suficiente y necesaria, según el caso; si se da en lenguaje usual, usted debe expresarla en forma simbólica.

a. Es necesario, pero no suficiente, tener buena salud para ser feliz.

b. Todo cuadrado es un rectángulo, pero no todo rectángulo es un cuadrado.

c. Todo cuadrado es un rombo, pero no todo rombo es un cuadrado.

d. Es necesario, pero no suficiente, tener hermanos para tener sobrinos.

e. Sólo los médicos titulados pueden efectuar un tratamiento.

f. Los ciudadanos colombianos pueden votar sólo en las elecciones de Colombia.

16. Decida sobre la validez de cada uno de los razonamientos del punto 13.

17. Proporcione interpretaciones para probar que cada una de las expresiones siguientes es no válida:

a. $[(\exists xA(x) \wedge \exists xB(x)) \Rightarrow (\exists x\{A(x) \wedge B(x)\})]$

b. $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\exists xP(x) \Rightarrow \forall xQ(x))$

18. Represente simbólicamente el razonamiento dado utilizando los predicados de la lista y demuestre su validez. Indique en cada caso la regla de inferencia utilizada:

Existen <u>D</u>iplomáticos expertos en <u>A</u>rte y graduados en <u>L</u>eyes. Solamente los ar<u>T</u>istas o los <u>C</u>ríticos de arte son expertos en arte. Los diplomáticos nunca son críticos de arte. Además, ningún artista que sea graduado en leyes se desempeña <u>I</u>rresponsablemente. En consecuencia, hay diplomáticos que no se desempeñan irresponsablemente.

(D(x), A(x), L(x), T(x), C(x), I(x)).

Como ejemplo, damos la representación simbólica de la primera premisa:

P_1 $\exists x(D(x) \wedge A(x) \wedge L(x))$

EJERCICIOS DE OPCIÓN MÚLTIPLE

1. Considere las siguientes fórmulas:

1. $\forall x\ (\ P(x) \Rightarrow B(x)\ )$ 2. $p \Rightarrow q$

Todas las siguientes afirmaciones sobre ellas son correctas, **excepto**:

(A) Estas fórmulas se distinguen por sus interpretaciones: mientras la segunda tiene 4 interpretaciones, no es posible determinar el número de interpretaciones de la primera.

(B) Una interpretación de la segunda fórmula no exige definir un dominio; en cambio, una interpretación de la primera fórmula requiere una definición del dominio.

(C) En ambos casos, vemos una relación entre condiciones suficientes y necesarias: "P(x)" es el predicado que funciona como condición suficiente en la primera fórmula, y "p" es el predicado que opera como condición suficiente en la segunda.

(D) La primera de las fórmulas puede ser una simbolización, para todas las personas, de la afirmación "Todos los peruanos son buenos chefs;" la segunda fórmula puede ser una simbolización de esa misma frase, donde p = una persona es peruana y q = una persona es un buen chef.

(E) El lenguaje lógico en el cual están expresadas estas fórmulas es distinto: la primera utiliza cálculo de predicados, mientras la segunda se vale de la lógica proposicional.

2. Considere las siguientes fórmulas:

1. $\forall x\ [(S(x) \wedge P(x)) \Rightarrow T(x)]$ 2. $(\ p \vee q\ ) \Rightarrow (\ q \Rightarrow r\ )$

La siguiente afirmación sobre ellas es correcta:

(A) El contraejemplo requerido para demostrar que la segunda fórmula *no* es una tautología es v(p) = V, v(q) = V, y v(r) = V.

(B) La primera fórmula es válida.

(C) La primera fórmula es insatisfacible.

(D) Un modelo para la primera fórmula es: Dominio = seres vivos; S(x) = x es ser humano; P(x) = x tiene (o tuvo) un primo; T(x) = x tiene (o tuvo) un tío.

(E) Un modelo para la segunda fórmula, que demuestra que ella es una contradicción, es: Dominio = seres humanos; p = x es un estudiante; q = x es un trabajador; r = x es un desempleado.

3. Considere la siguiente afirmación: "Los cazadores son entretenidos". ¿Cuál de las siguientes es una representación simbólica adecuada del texto citado, en el lenguaje del cálculo de predicados?

(A) $p \Rightarrow q$

(B) $\exists x\ (\ C(x) \Rightarrow E(x)\ )$

(C) $\exists x\,(C(x) \wedge E(x))$

(D) $\forall x\,(C(x) \wedge E(x))$

(E) $\forall x\,(C(x) \Rightarrow E(x))$

(F) $\forall x\,[C(x) \Rightarrow \exists y\, E(y)]$

4. Considere la siguiente fórmula:

$$\forall x\,(P(x) \Rightarrow R(x))$$

Con dominio “seres humanos,” la fórmula anterior representa este texto:

(A) “Algunos periodistas son respetables”.

(B) “Toda persona respetable es periodista”.

(C) “Todos los seres humanos, si son periodistas, son respetables”.

(D) “Si alguien es periodista, entonces no es respetable”.

(E) “Alguien es periodista si y sólo si es respetable”.

5. Considere el siguiente texto: “Todos los seres antipáticos son molestos”.

¿Cuál de las fórmulas, expresada en el lenguaje del cálculo de predicados, es una representación adecuada de aquel texto?

(A) $A(x) \Rightarrow M(x)$

(B) $\exists x\,[A(x) \Rightarrow M(x)]$

(C) $\forall x\,[A(x) \Rightarrow M(x)]$

(D) $A(x) \wedge M(x)$

(E) $\forall x\,[A(x) \wedge M(x)]$

6. Considere la siguiente fórmula:

$$\forall x\,\{[B(x) \wedge P(x)] \Rightarrow [A(x) \vee L(x)]\}$$

¿Cuál de los textos siguientes puede representarse con tal fórmula?

(A) Todos los boxeadores pesados son ansiosos o laxos.

(B) Todos los boxeadores o pesados son ansiosos o laxos.

(C) Todos los boxeadores y pesados son ansiosos y laxos.

(D) Todos los boxeadores son ansiosos o laxos.

(E) Sólo los ansiosos y laxos son boxeadores pesados.

7. Considere esta fórmula:

$$\forall x\,[\,(E(x) \wedge P(x) \wedge L(x)\,]$$

(A) Con dominio “estudiantes,” la fórmula representa este texto: “Todos los estudiantes proactivos son listos”.

(B) Con dominio “seres humanos,” la fórmula representa el texto: “Todos los estudiantes proactivos son listos”.

(C) Con dominio “seres vivos,” la fórmula representa el texto: “Todos los estudiantes son emprendedores, positivos y listos”.

(D) Con dominio "estudiantes," la fórmula representa el texto: "Todos los estudiantes son emprendedores, positivos y listos".

(E) Con el universo como dominio, la fórmula representa el texto: "Los estudiantes son proactivos y listos".

8. Considere la fórmula:

$$\forall x \{ M(x) \Rightarrow \exists y \, [\, C(y) \wedge P(y, x) \,] \, \}$$

Con dominio "universo," y entendiendo P(x, y) como "x prefiere y," la fórmula representa este texto:

(A) "Toda madre prefiere algún carro".

(B) "Toda madre es preferida por todo celador".

(C) "Algún concejal es preferido por todo maestro".

(D) "Cada maestro es preferido por algún candidato"

(E) "Existe un mariscal a quien todos los coroneles prefieren".

9. Considere la afirmación: "Basta con saber que alguien odia la comida china, para que tenga serios problemas con Ana". Con dominio "universo," C(x) = x es comida china, O(x, y) = x odia y, T(x, y) = x tiene serios problemas con y, ¿cuál de las siguientes es una representación simbólica adecuada del texto citado, en el lenguaje del cálculo de predicados?

(A) $\forall x \{ [\, O(x) \wedge C(x) \,] \Rightarrow T(x, a) \}$

(B) $\forall x \{ [\, O(x) \wedge C(x) \,] \Rightarrow T(a, x) \}$

(C) $\forall x \forall y \{ [\, C(x) \wedge O(y, x) \,] \Rightarrow T(y, a) \,] \, \}$

(D) $\forall x \forall y \{ [\, C(x) \wedge O(y, x) \,] \Rightarrow T(x, a) \,] \, \}$

(E) $\forall x \forall y \{ [\, C(x) \wedge O(x, y) \,] \Rightarrow T(y, a) \,] \, \}$

10. Cada fila de la siguiente tabla muestra un texto, junto a una representación simbólica adecuada de ese texto en el lenguaje del cálculo de predicados. Hay una excepción, en la cual la fila contiene una fórmula que no representa adecuadamente el texto que la acompaña. Esa fila es:

	Texto	Fórmula
(A)	"Hay un animal que causa todos los problemas".	$\exists x \{ A(x) \wedge \forall y \, [\, P(y) \Rightarrow C(x, y) \,] \, \}$
(B)	"Cualquier libertario se opone a alguna medida restrictiva de la libertad personal".	$\forall x \{ L(x) \Rightarrow \exists y \, [\, M(y) \wedge O(y, x) \,] \, \}$
(C)	"Los seguidores de los políticos intransigentes se oponen a cualquier reforma".	$\forall x \forall y \{ [P(x) \wedge S(y, x)] \Rightarrow \forall z [R(z) \Rightarrow O(y, z)] \}$
(D)	"Existe un proyecto que cada político liberal rechaza".	$\exists x \{ P(x) \wedge \forall y \, [\, (P(y) \wedge L(y) \,) \Rightarrow R(y, x) \,] \, \}$
(E)	"Los amantes de los animales no son carnívoros".	$\forall x \forall y \{ [\, N(x) \wedge A(y, x) \,] \Rightarrow \neg C(y) \}$

11. Considere la afirmación: "Algún violinista es fanático de todos los cantantes de metal". (El único predicado binario es F(x,y): x es fanático de y.) La siguiente es una expresión correcta de esa afirmación, en el cálculo de predicados:

(A) $\exists x \{ V(x) \wedge \forall y [C(y) \Rightarrow F(x,y)] \}$

(B) $\exists x \{ V(x) \Rightarrow \forall y [C(y) \Rightarrow F(x,y)] \}$

(C) $\exists x \{ V(x) \wedge \forall y [C(y) \Rightarrow F(y,x)] \}$

(D) $\exists x \{ V(x) \wedge \forall y [C(y) \wedge F(x,y)] \}$

(E) $\forall x \{ V(x) \wedge \exists y [C(y) \Rightarrow F(x,y)] \}$

12. La negación de la expresión del punto anterior (sin signos de cuantificación antes de los cuantificadores, y tampoco antes del alcance de un cuantificador) está dada por:

(A) $\forall x \{ V(x) \Rightarrow \exists y [C(y) \wedge \neg F(x, y)] \}$

(B) $\forall x \{ V(x) \Rightarrow \exists y [C(y) \wedge \neg F(y, x)] \}$

(C) $\forall x \{ \neg V(x) \Rightarrow \exists y [\neg C(y) \wedge F(x, y)] \}$

(D) $\forall x \{ \neg V(x) \Rightarrow \exists y [\neg C(y) \wedge F(y, x)] \}$

(E) $\exists x \{ V(x) \wedge \forall y [C(y) \Rightarrow \neg F(x, y)] \}$

13. La negación de la expresión del punto 11, en lenguaje ordinario, es:

(A) Todo violinista tiene algún cantante de metal de quien no es fanático.

(B) Ningún violinista es fanático de todos los cantantes de metal.

(C) Todo violinista no es fanático de ningún cantante de metal.

(D) Existe algún violinista que no es fanático de ningún cantante de metal.

(E) Ningún violinista es fanático de algún cantante de metal.

14. Consideren el siguiente texto: "Todos los australianos son músicos".

¿Cuál de las fórmulas, expresada en el lenguaje del cálculo de predicados, es una representación adecuada de aquel texto?

(A) $A(x) \wedge M(x)$

(B) $\forall x [A(x) \wedge M(x)]$

(C) $\exists x [A(x) \wedge M(x)]$

(D) $A(x) \Rightarrow M(x)$

(E) $\forall x [A(x) \Rightarrow M(x)]$

15. Considere esta fórmula:

$\forall x \{(B(x) \wedge P(x)) \Rightarrow A(x)\}$

¿Cuál de los textos siguientes representa una lectura correcta de la fórmula?

(A) Solo los buzos profundos son atletas.

(B) Todos los buzos profundos son atletas.

(C) Todos los atletas son buzos profundos.

(D) Todos los buzos son profundos y atletas.

(E) Solo los buzos son profundos y atletas.

16. Considere el siguiente texto: “Todos los músicos son artistas”.

¿Cuál de las fórmulas, expresada en el lenguaje del cálculo de predicados, es una representación adecuada de aquel texto?

(A) $M(x) \wedge A(x)$

(B) $M(x) \Rightarrow A(x)$

(C) $\forall x\ [M(x) \wedge A(x)]$

(D) $\forall x\ [M(x) \Rightarrow A(x)]$

(E) $\exists x\ [M(x) \wedge A(x)]$

17. Considere la siguiente fórmula:

$\forall x\ \{[B(x) \wedge P(x)] \Rightarrow [A(x) \vee L(x)]\}$

¿Cuál de los textos que ven a continuación representa una lectura correcta de aquella fórmula?

(A) Todos los barítonos o pensativos son alegres o lívidos.

(B) Todos los barítonos y pensativos son alegres y lívidos.

(C) Todos los barítonos pensativos son alegres o lívidos.

(D) Todos los barítonos son alegres o lívidos.

(E) Sólo los alegres y lívidos son barítonos pensativos.

18. ¿Cuántas interpretaciones posibles tiene la expresión simbólica mediante la cual se representa, en el lenguaje del cálculo de predicados, la expresión “Cada pecador adora secretamente algún vicio”?

(A) 1

(B) 2

(C) 4

(D) 8

(E) Infinitas.

19. Con respecto a la fórmula a la que se refiere la pregunta anterior, ¿qué podríamos decir?

(A) Es una tautología.

(B) Es universalmente válida.

(C) Posee exactamente una interpretación que la hace verdadera.

(D) Tiene por lo menos un modelo para la fórmula (aunque el pecador del problema no lo sea).

(E) Es insatisfacible.

20. Tomemos una nueva interpretación de la fórmula a la que se refieren las dos preguntas anteriores.

El dominio es: Los animales.

P(x): x es pulpo.

A(x, y): x es anterior a (es decir, más viejo que) y.

V(x): x es vaca.

En ese caso:

(A) La fórmula es válida para esa interpretación.

(B) La fórmula es falsa para esa interpretación.

(C) La fórmula es universalmente válida.

(D) La fórmula tiene por lo menos un modelo.

(E) La fórmula es verdadera para cada interpretación.

21. Con base en las definiciones de dominio y predicados de la pregunta anterior, considere la siguiente fórmula:

$\forall x \{ P(x) \Rightarrow \forall y [A(x, y) \Rightarrow (V(y) \vee P(y))] \}$

En ese caso:

(A) La fórmula es válida para esa interpretación.

(B) La fórmula es verdadera para esa interpretación.

(C) La fórmula es falsa para esa interpretación.

(D) La fórmula es universalmente válida.

(E) La fórmula es verdadera para cada interpretación.

22. ¿Cuál de las siguientes es una simbolización adecuada de la frase "Ser buen <u>e</u>squiador es condición necesaria pero no suficiente para ser <u>i</u>nstructor de esquí"?

(A) $\forall x [E(x) \Rightarrow I(x)] \wedge \neg \forall x [I(x) \Rightarrow E(x)]$

(B) $\forall x [E(x) \Rightarrow I(x)] \vee \neg \forall x [I(x) \Rightarrow E(x)]$

(C) $\forall x [I(x) \Rightarrow E(x)] \wedge \neg \exists x [E(x) \wedge I(x)]$

(D) $\forall x [I(x) \Rightarrow E(x)] \wedge \exists x [E(x) \wedge I(x)]$

(E) $\forall x [I(x) \Rightarrow E(x)] \wedge \exists x [E(x) \wedge \neg I(x)]$

23. Considere esta frase: "Todo es <u>n</u>uevo y <u>b</u>onito". ¿Cuál de las siguientes es una representación simbólica adecuada, en el lenguaje del cálculo de predicados, de esa afirmación?

(A) $N(x) \wedge B(x)$

(B) $\forall x [n(x) \wedge b(x)]$

(C) $\forall [N(x) \wedge B(x)]$

(D) $\forall x (N(x) \wedge B(x))$

(E) $\forall x (N(x) \Rightarrow B(x))$

24. Considere esta frase: "Todo <u>n</u>iño tiene un <u>c</u>olor <u>f</u>avorito". ¿Cuál de las siguientes es una representación simbólica adecuada, en el lenguaje del cálculo de predicados, de esa afirmación?

(A) $\forall x\ [\ N(x) \wedge C(x) \wedge F(x)\ ]$

(B) $\forall x\ \{\ N(x) \Rightarrow \exists x\ [\ C(x) \wedge F(x)\ ]\ \}$

(C) $\forall x\ \{\ N(x) \Rightarrow \exists y\ [\ C(y) \wedge F(y, x)\ ]\ \}$

(D) $\forall x\ \{\ N(x) \wedge \exists y\ [\ C(y) \Rightarrow F(y, x)\ ]\ \}$

(E) $\forall x\ \{\ N(x) \Rightarrow \exists y\ [\ C(x) \wedge F(y, x)\ ]\ \}$

25. Considere la fórmula:

$\exists x\ \{\ A(x) \wedge \forall y\ (\ I(y) \Rightarrow D(y, x)\ )\}$

¿Cuál de las siguientes es una lectura adecuada de la fórmula anterior, en lenguaje natural?

(A) Hay un animal al que todos los insectos detestan.

(B) Existe un animal que detesta a todos los insectos.

(C) Existe un insecto detestado por todos los animales.

(D) Algún insecto detesta a algún animal.

(E) Todo insecto detesta a algún animal.

26 a 30. A continuación se dan cinco expresiones en lenguaje natural. En la tabla encontrará una lista de fórmulas expresadas en el lenguaje del cálculo de predicados y frente a cada una de esas fórmulas, una letra. Indique qué letra corresponde a la representación simbólica adecuada de cada una de las expresiones dadas en lenguaje natural. En todos los casos el dominio es el conjunto de los seres humanos.

26. Cualquier canadiense es bohemio y animado.

27. Algún lugarteniente es benévolo.

28. Andrés y Beatriz tienen el mismo padre.

29. Hay un párroco que es amigo de todas las beatas

30. Todos los maestros tienen alguien a quien buscan.

A	$\forall x(C(x) \wedge B(x) \wedge A(x))$
B	$\forall x\ \{\ C(x) \Rightarrow [\ B(x) \wedge A(x)\ ]\ \}$
C	$\forall x \forall y\ [\ P(x, y) \wedge H(x)\ ]$
D	$\forall x \forall y\ \{\ H(x, y) \wedge \exists z\ [\ P(z, x) \wedge P(z, y)\ ]\ \}$
E	$\exists x\ [\ L(x) \wedge B(x)\ ]$
F	$\exists x\ \{\ P(x) \Rightarrow \forall y\ [\ B(y) \Rightarrow A(x, y)\ ]\ \}$
G	$\forall x\ \{\ M(x) \Rightarrow \exists y\ [\ B(x, y)\ ]\ \}$
H	$\exists x\ [\ P(x, a)\ ] \wedge \exists x\ [\ P(x, b)\ ]$
I	$\exists x\ [\ P(x, a) \wedge P(x, b)\ ]$
J	$\exists x\ \{\ P(x) \wedge \forall y\ [\ B(y) \Rightarrow A(x, y)\ ]\ \}$

31 a 35. A continuación se dan cinco expresiones en lenguaje natural. En la tabla encontrará una lista de fórmulas expresadas en el lenguaje del cálculo de predicados y frente a cada una de esas fórmulas, una letra. Indique qué letra corresponde a la representación simbólica adecuada de cada una de las expresiones dadas en lenguaje natural. En todos los casos el dominio es el conjunto de los seres humanos.

31. Todas las personas son amigos entre sí, y son hermanos entre sí.

32. Algún lazarillo es buzo.

33. Anita tiene un papá, y Beto tiene un papá.

34. Hay un pensador de quien todos los beodos son sus admiradores.

35. Todos los músicos tienen alguien a quien imitan.

A	$\forall x C(x)$
B	$\forall x \{ C(x) \Rightarrow [B(x) \wedge A(x)] \}$
C	$\forall x \forall y [A(x, y) \wedge H(x, y)]$
D	$\forall x \forall y \{ H(x, y) \wedge \exists z [P(z, x) \wedge P(z, y)] \}$
E	$\exists x [L(x) \wedge B(x)]$
F	$\exists x \{ P(x) \Rightarrow \forall y [B(y) \Rightarrow A(y, x)] \}$
G	$\forall x \{ M(x) \Rightarrow \exists y [I(x, y)] \}$
H	$\exists x [P(x, a)] \wedge \exists x [P(x, b)]$
I	$\exists x [P(x, a) \wedge P(x, b)]$
J	$\exists x \{ P(x) \wedge \forall y [B(y) \Rightarrow A(y, x)] \}$

Respuestas a los ejercicios de opción múltiple

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
C	D	E	C	C	A	D	D	C	B	A	A	A	E	B	D	C	E	D	D

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
C	E	D	C	A	B	E	I	J	G	C	E	H	J	G

CAPÍTULO 5

Demostración formal y álgebras de Boole

5.1 TEOREMAS Y TÉCNICAS DE DEMOSTRACIÓN

Definición 5.1 Un **teorema** es un resultado deducible en un sistema formal y que puede ser enunciado en la forma "Si H entonces T", donde H representa un conjunto de afirmaciones conocidas como "hipótesis" o "supuesto", y T una afirmación conocida como "tesis" o "conclusión".

Que sea "un resultado deducible" significa que existe un razonamiento deductivo válido, llamado **demostración del teorema,** mediante el cual se muestra que T es consecuencia lógica de un conjunto de premisas, entre las cuales figura H. Las premisas pueden ser definiciones, resultados iniciales aceptados sin demostración (axiomas del sistema) o teoremas previamente demostrados. El Teorema de Pitágoras que se demostró en el capítulo 1, "El área del cuadrado construido sobre la hipotenusa de cualquier triángulo rectángulo es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos del mismo" puede reescribirse en la forma "Si H entonces T" así, por ejemplo: "**Si** ABC es un triángulo rectángulo con catetos de longitudes a y b e hipotenusa de longitud c, **entonces** $c^2 = a^2 + b^2$". Según la hipótesis del teorema, las inferencias se hacen con base en "un triángulo rectángulo ABC cuyos catetos miden a y b unidades"; a su vez, la conclusión asegura que, dadas estas circunstancias, se verifica la igualdad $c^2 = a^2 + b^2$. Otro teorema tal vez menos conocido pero también muy importante establece este resultado: "Si el producto de dos números reales es 0, entonces por lo menos uno de ellos es 0".

Ejemplo 5.2 A continuación se enuncian algunos teoremas y una conjetura (d), con el propósito de practicar la reescritura de los enunciados en la forma "Si…, entonces…". (Usamos $\rightarrow$ en lugar de $\Rightarrow$, porque generalmente H y T no son fórmulas de la lógica simbólica, sino enunciados en lenguaje natural).

a. La suma de dos enteros pares es par.
   $H \rightarrow T$: Si m y n son enteros pares entonces m + n es entero par.

b. El producto de tres enteros consecutivos cualesquiera es divisible por 6.
   $H \rightarrow T$: Si n es un entero cualquiera entonces n(n+1) (n+2) es divisible por 6.

c. Los lados opuestos de todo paralelogramo son iguales.
   $H \rightarrow T$: Si ABCD es un paralelogramo entonces $|AB| = |CD|$ y $|AD| = |BC|$.

d. Todo número par mayor que 2 se puede escribir como suma de dos números primos.
   $H \rightarrow T$: Si m es par y m>2 entonces existen números primos s y t tales que m= s + t.

Una recomendación para quien enfrenta por primera vez el tema general de la demostración:

a. Familiarícese con el resultado. Una forma eficaz de hacerlo es enunciarlo en sus palabras, preferiblemente en una forma coloquial; como hablando con usted mismo. Y no tema hacerlo: en esta época de celulares y "manos libres" no es raro dar la impresión de estar hablando solo.

b. Verifique el resultado para casos particulares.

c. Identifique cuáles son los conceptos involucrados en el resultado propuesto, y esté seguro de conocerlos.

d. Escriba el resultado en la forma "Si H entonces T".

e. Establezca la conclusión a la cual debe llegar, y determine en qué momento se podrá considerar que el resultado propuesto ha sido demostrado.

Ejemplo 5.3 Veamos cómo tener presente la recomendación anterior, en un ejemplo particular:

Nos piden demostrar este resultado: El cuadrado de todo número impar es impar.

a. "Veamos. ¿Qué dice este teorema? Que si me dan un número impar cualquiera, al elevarlo al cuadrado el resultado debe ser también <u>un</u> impar". (Tal vez no es buena idea pensar que el resultado debe ser "otro" número impar, porque si el número es 1...).

b. (Verificando para algunos casos particulares): 7 es impar, $7^2 = 49$ es impar; 3 es impar, $3^2 = 9$ es impar; –5 al cuadrado es 25, que es impar. (Bueno, parece que el resultado es cierto).

c. ¿Cuáles son los conceptos y operadores involucrados en el teorema? El concepto de número impar y la función "elevar al cuadrado". ¿Cómo se expresa simbólicamente el hecho de que un número es impar? Respuesta: afirmando que tiene la forma 2m + 1, para algún valor entero de m. Por ejemplo, 7 = 2.3 + 1, 3 = 2.1+1, –5=2.–3+1.

d. Escribamos el resultado en la forma "Si H entonces T", de acuerdo con la caracterización anterior: "Si n es impar entonces n^2 es impar". En forma simbólica:

   Si n es de la forma 2h + 1 entonces n^2 es de la forma 2m + 1.

e. Debo llegar a la conclusión de que al elevar 2h + 1al cuadrado el resultado también tiene forma de número impar.

Para ilustrar la necesidad de estas recomendaciones se pide al lector que reflexione con cuidado en las "demostraciones" siguientes, tomadas de algunos trabajos escritos presentados por estudiantes en proceso de aprendizaje de estos temas. Las propuestas presentan un error muy frecuente entre quienes estudian estos temas por primera vez: demostrar el recíproco del teorema propuesto, por confusión entre la hipótesis y la conclusión.

Caso 1 Se pidió demostrar que "Si la unión de dos conjuntos es vacía, entonces ambos conjuntos son vacíos".

La solución propuesta: Algunas respuestas coincidieron en justificar el resultado anterior argumentando que "Si la unión de los dos conjuntos es vacía entonces los dos conjuntos tienen que ser vacíos porque al unir dos conjuntos sin elementos resulta un conjunto sin elementos".

El error: En el enunciado por demostrar se identifican claramente la hipótesis: "la unión de dos conjuntos es vacía" y la conclusión: "los dos conjuntos son vacíos". Observe entonces que la solución propuesta por los estudiantes del caso se reduce a: "Si H, entonces T. Porque si T, entonces H". Esto significa argumentar que H es suficiente para T, **porque** T es suficiente para H. Independientemente de que en un caso particular esta última afirmación sea verdadera, es una falacia pretender explicar con ella la afirmación inicial. Elaboremos un poco más en este caso particular: Observe que el resultado por probar puede expresarse simbólicamente así:

Si $A \cup B = \varnothing$ entonces $A = \varnothing$ y $B = \varnothing$

¿Qué se sabe? Que la unión es vacía. ¿Qué debemos probar? Que A y B deben ser conjuntos vacíos. ¿Qué error se cometió? Al decir que "Si la unión de los dos conjuntos es vacía, entonces los dos conjuntos tienen que ser vacíos porque al unir dos conjuntos sin elementos resulta un conjunto sin elementos", se aseguró que:

Si $A \cup B = \varnothing$ entonces $A = \varnothing$ y $B = \varnothing$, **porque** si $A = \varnothing$ y $B = \varnothing$ entonces $A \cup B = \varnothing$. Es claro que esta última afirmación es verdadera, pero debe ser claro también que ella no es la justificación para el resultado inicial.

Caso 2 Se pidió demostrar que "El cuadrado de un entero es impar sólo si el entero es impar".

La solución propuesta: Un entero impar es de la forma 2h+1, donde h es algún entero. Por lo tanto, su cuadrado es $(2h + 1)^2 = 4h^2 + 4h + 1 = 2(2h^2 + 2h)+1$, que es un número impar.

El error: Se había pedido demostrar que, si x^2 es impar entonces x es impar. En la propuesta de solución se probó que, si x es impar entonces x^2 es impar.

El caso siguiente ilustra una actitud frecuente: no pensar realmente en los términos de la pregunta o del problema sino inscribirlos en un contexto rígido que nos impide darnos cuenta de que estamos empecinados en responder con una idea preconcebida, sin poner el cerebro al servicio de la respuesta:

Caso 3 En el transcurso de una clase el autor hizo esta afirmación, con el propósito de que los estudiantes la calificaran como verdadera o como falsa: "Es necesario que un entero sea divisible por 5 si termina en 0".

La respuesta más frecuente: La afirmación es falsa, porque también los números que terminan en 5 son divisibles por 5.

El error: Es cierto que los números que terminan en 0 y también los que terminan en 5 son divisibles por 5. Pero esto no hace que la afirmación del profesor sea falsa. En efecto, con ella se asegura simplemente que: Para cada x, si x termina en 0, entonces x es divisible por 5. Puesta en esta forma, todos estuvieron de acuerdo. Sólo que por alguna fijación extraña de un resultado muy conocido, los estudiantes se empeñaban en "oír" la afirmación de que "sólo los enteros terminados en 5 son divisibles por 5".

5.1.2 Técnicas de demostración

En la práctica usted encontrará que los textos básicos de matemáticas presentan resultados ya consolidados en el desarrollo de una teoría. Cuando le piden, por ejemplo, "Demostrar el teorema siguiente", el resultado propuesto es ya un hecho conocido. Sin embargo, además de la satisfacción que produce desarrollar una prueba propia para un resultado, hay otros beneficios asociados a ello: desarrollo de la capacidad de asociación de conocimientos pertinentes a un mismo resultado; desarrollo de habilidades para expresar información en simbología apropiada —lo cual constituye una parte esencial en la demostración—, identificación de dificultades para adelantar en el proceso de demostración, que deben ser superadas mediante investigación y consulta, entre otros.

Los teoremas que se demuestran como ejemplos en esta sección, o los que se proponen como ejercicios, son de naturaleza muy sencilla, como es natural por el carácter introductorio, general e informativo del tema y por la posible diversidad de lectores del libro. Tanto los ejemplos, como los ejercicios, tienen el propósito de familiarizar al estudiante con las técnicas de demostración de teoremas y de advertirle de algunos errores frecuentes en la aplicación de dichas técnicas. Es importante que se familiarice con las técnicas de prueba y adquiera habilidades básicas para la organización y presentación de los argumentos con los cuales usted busca justificar una clase especial de resultados. Son habilidades requeridas en muchos cursos de contenido cuantitativo, no sólo de matemáticas (estadística, econometría, investigación de operaciones, optimización, finanzas avanzadas, son sólo algunos ejemplos). Son áreas del conocimiento en los cuales prima el razonamiento deductivo y en las cuales es necesario entender o proponer desarrollos formales de resultados fundamentales para la comprensión de los temas.

Nada puede garantizar que se tenga éxito en la demostración de un teorema. Pero sí hay condiciones necesarias para ello: entender el enunciado del teorema, de tal manera que se tiene absolutamente claro cuál es la hipótesis y cuál la conclusión y conocer perfectamente las definiciones de todos los términos y relaciones contenidos en el enunciado del teorema. Encontrará también que la experiencia es útil no sólo porque la práctica contribuye a mejorar la aproximación a las demostraciones, sino porque eventualmente una prueba puede sugerir los elementos por utilizar en la demostración de otro teorema similar. Su experiencia personal será que a medida que aumentan sus conocimientos en un tema específico aumentará igualmente su destreza para la demostración de resultados. Y es posible que termine por compartir esta opinión de James R. Newman: “Hay pocas satisfacciones comparables a la que se obtiene al conseguir una demostración. Es como si quien la logra realizase una creación; como si el descubrimiento nunca se hubiera producido; se inculcan en la mente hábitos sublimes” [Newman, 1985, Vol.1].

En lo que sigue de este capítulo se presentan las técnicas de demostración más usadas. Como es de esperarse, cada una corresponde a un esquema de razonamiento válido, respaldado por una tautología. Como se dijo en el párrafo anterior, la elección de una técnica específica depende mucho de la experiencia de quien intenta construir la demostración. El mejor consejo del autor es: leer muchas demostraciones, acrecentar la experiencia y… llenarse de paciencia.

5.1.2.1 Demostración directa

Se trata, probablemente, de la técnica más utilizada en la demostración de teoremas. Una demostración directa del teorema "Si H entonces T" consiste en establecer un razonamiento de la forma:

$$
\begin{array}{lll}
P_o & : & H \\
P_1 & : & H \Rightarrow q_1 \\
P_2 & : & q_1 \Rightarrow q_2 \\
 & \ldots & \\
P_n & : & q_{n-1} \Rightarrow q_n \\
P_{n+1} & : & q_n \Rightarrow T \\
\hline
C. & : & T
\end{array}
$$

donde la hipótesis H se ha tomado como premisa y $P_1, P_2, \ldots, P_{n+1}$ expresan consecuencias lógicas secundarias, axiomas, o teoremas ya demostrados. Si el razonamiento es válido, la fórmula:

$$(H \wedge (H \Rightarrow q_1) \wedge (q_1 \Rightarrow q_2) \wedge \ldots (q_{n-1} \Rightarrow q_n) \wedge (q_n \Rightarrow T)) \Rightarrow T$$

es una tautología, y con esto queda demostrado el teorema. En efecto: demostrarlo consiste en establecer que la implicación $H \Rightarrow T$ es verdadera. Para hacerlo, tomamos a H como premisa (Recuerde el Teorema de la deducción). Como los condicionales $(H \Rightarrow q_1)$, $(q_1 \Rightarrow q_2)$, … , $(q_n \Rightarrow T)$ son proposiciones verdaderas, el antecedente de la tautología tiene el valor V. Por lo tanto, T es verdadera y en consecuencia también es verdadera la fórmula $H \Rightarrow T$, que representa el teorema que nos propusimos demostrar.

Ejemplo 5.4 Demostrar que la suma de dos enteros pares es par.

Inicialmente escribimos el resultado en la forma de condicional: Si m y n son enteros pares entonces m+n es un entero par.

Esto se hace para aplicar la regla de generalización universal y para operar algebraicamente.

El concepto básico requerido en la prueba es el de número par: un entero m es par si y sólo si existe algún entero s tal que m = 2.s

Demostración:

P_o	m es par y n es par	$p \wedge q$
P_1	Si m es par entonces m = 2t y si n es par entonces n = 2u para enteros únicos t y u	$(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow s)$
P_2	m = 2t y n = 2u ⇒ m + n = 2t + 2u	$(r \wedge s \Rightarrow v)$
P_3	m + n = 2t + 2u ⇒ m + n = 2(t + u)	$(v \Rightarrow w)$
P_4	m + n = 2(t + u) ⇒ m + n es par	$(w \Rightarrow z)$
C.	m + n es par	z

Por lo tanto, si m es par y n es par entonces m + n es par.

En la columna de la derecha se muestra la representación simbólica de los pasos utilizados en el proceso; el lector puede concluir fácilmente que el razonamiento es válido. Esto no significa, sin embargo, que en la práctica se utilicen esquemas tan formales para disponer los pasos seguidos en una demostración. Una presentación menos formal de esta demostración, pero igualmente rigurosa y con los mismos elementos de la prueba anterior, puede plantearse así:

Sean m y n pares. Entonces, si m = 2t y n = 2u, donde t y u son enteros, entonces m+n = 2t + 2u = 2(t+u), lo cual muestra que m + n es par, pues t+u es un entero.

Una observación final sobre la demostración directa: el argumento no necesariamente debe empezar con la utilización de la hipótesis. Esta se utiliza en el momento oportuno, de acuerdo con las necesidades del razonamiento.

5.1.2.2 Demostraciones indirectas

Sucede con frecuencia que los intentos para lograr una demostración directa de un teorema H⇒T son infructuosos. En tales ocasiones puede ser conveniente intentar una **demostración indirecta.** El nombre se debe al hecho de que lo que se logra con ella es demostrar la validez de un resultado lógicamente equivalente con H⇒T. La justificación de la validez de esta técnica es inmediata: si un resultado R es verdadero y R es equivalente a H⇒T, entonces H⇒T es verdadero, y el teorema queda demostrado.

Antes de entrar en los detalles de estas técnicas, ilustraremos la noción de demostración indirecta, considerando nuevamente el caso 1, descrito en la página 225: AUB = ∅

$\Rightarrow A=\varnothing \wedge B=\varnothing$. Para probar que $A=\varnothing \wedge B=\varnothing$ es condición necesaria para $AUB = \varnothing$, veamos que resulta si esta condición no se satisface, es decir, si alguno de los dos conjuntos no es vacío. Obviamente, la unión AUB no sería vacía, pues tendría por lo menos los elementos de ese conjunto. Esto demuestra, correctamente, que la unión es vacía sólo si los conjuntos lo son. Observe que se demostró $\neg T \Rightarrow \neg H$, para establecer la validez de $H \Rightarrow T$. Este es entonces un tipo de demostración indirecta, dado que $(\neg T \Rightarrow \neg H) \equiv (H \Rightarrow T)$.

Las equivalencias lógicas $(\neg T \Rightarrow \neg H) \equiv (H \Rightarrow T)$ y $(H \wedge \neg T \Rightarrow R \wedge \neg R) \equiv (H \Rightarrow T)$ constituyen el fundamento de las técnicas de prueba conocidas como demostraciones indirectas. Usualmente se utiliza una técnica indirecta como alternativa de demostración, o porque no logramos producir una demostración directa, o porque se presume que la prueba presentará menos dificultades, o porque en este caso las hipótesis que para el efecto se adoptan proporcionan más información que en el caso de una prueba directa.

5.1.2.3 Demostración por contraposición

La técnica de demostrar $H \Rightarrow T$ mediante una prueba directa de $\neg T \Rightarrow \neg H$ es conocida como prueba por contraposición o por contrarrecíproca ($\neg q \Rightarrow \neg p$ es la contrapositiva o contrarrecíproca de $p \Rightarrow q$).

Ejemplo 5.5 Demostrar que el producto de dos enteros es par sólo si por lo menos uno de ellos es par.

La forma $H \Rightarrow T$ de este resultado es: si mn es par entonces m es par o n es par.

Una demostración directa de este resultado empezaría por suponer que mn es par y por lo tanto $mn=2p$, donde p es entero. Pero, ¿cómo utilizar la igualdad $mn=2p$ para obtener conclusiones sobre m? ¿O sobre n? La imposibilidad de progreso en la prueba hace razonable considerar la alternativa de una prueba indirecta. La contrarrecíproca $\neg T \Rightarrow \neg H$ de la afirmación por probar es: si m no es par y n no es par, entonces mn no es par, es decir, si m es impar y n es impar, entonces mn es impar.

Una demostración directa de la contrarrecíproca puede presentarse así: Si m es impar, sea $m = 2t + 1$, para algún entero t. Si n es impar, sea $n = 2s+1$, para algún entero s. Entonces, $mn = (2t+1)(2s+1) =2(2ts+ t + s)+1$, lo cual muestra que mn es impar. Como este resultado es equivalente con el teorema propuesto, esto finaliza la prueba.

5.1.2.4 Demostración por contradicción (o por reducción al absurdo).

Es un segundo tipo de demostración indirecta, que se fundamenta en las dos equivalencias lógicas siguientes:

1: $\neg (H \Rightarrow T) \equiv H \wedge \neg T$

2: $((H \wedge \neg T) \Rightarrow (R \wedge \neg R) \equiv (H \Rightarrow T)$

El método consiste en suponer que el resultado $H \Rightarrow T$ expresado por el enunciado del teorema es falso. Según la fórmula 1, esto significa suponer la posibilidad de que, siendo H verdadera, T sea falsa. Si a partir de este supuesto se deduce una contradicción (representada por $R \wedge \neg R$), es decir, si $\{H \wedge \neg T\} \vdash R \wedge \neg R$ entonces la fórmula $(H \wedge \neg T) \Rightarrow (R \wedge \neg R)$ es una tautología. Esto significa, según 2., que $H \Rightarrow T$ es verdadera, con lo cual finaliza la demostración.

Observe que en la demostración directa de $H \Rightarrow T$, se cuenta con la teoría sobre el tema y con los datos aportados por H, para deducir T; en la demostración indirecta de $H \Rightarrow T$ a través de $\neg T \Rightarrow \neg H$, se cuenta con la teoría y con los datos aportados por $\neg T$, para deducir $\neg H$. Sorprendentemente, la información de partida en la demostración por contradicción, $H \wedge \neg T$, es el agregado de los elementos de información en los dos métodos anteriores, lo cual convierte a esta técnica en un recurso valioso en el campo de las matemáticas en general. Una segunda observación se refiere al significado de la contradicción $R \wedge \neg R$. Con este simbolismo se quiere significar que en el proceso de demostración se obtiene una conclusión, denota aquí por R, que es la contraria de un resultado ya conocido, $\neg R$. Es en este momento cuando uno dice algo como “y esta contradicción prueba que el resultado no puede ser falso, así que es verdadero”. Digamos, finalmente, que al partir de $H \wedge \neg T$ es imposible saber cuál será la contradicción específica que uno encontrará en el proceso. En muchas ocasiones se llega a $\neg H$, con lo cual se configura la contradicción $H \wedge \neg H$; la conclusión es la misma: el teorema ha sido demostrado.

Ejemplo 5.6 Suponemos que el lector conoce la definición de número racional: todo número que puede escribirse como una fracción p/q, donde p y q son enteros y $q \neq 0$. Estos números se suman en la forma $p/q + r/s = (ps + qr) / qs$ y se multiplican en la forma $(p/q).(r/s)= pr/qs$, lo cual muestra que la suma y el producto de números racionales es un racional. Además, el opuesto del racional p/q es el racional $-(p/q) = -p/q$, caracterizado por la propiedad $p/q+ (-(p/q)) = 0$.Los números racionales tienen la característica de que al escribirlos en forma decimal resulta un número periódico (un decimal como 0.5 es periódico: 0.5=0.5000…, o 0.5=0.49999…). Esto permite definir a los números irracionales como los números cuya expansión decimal no es periódica.

Nos proponemos demostrar que “la suma de un número racional con un número irracional es un irracional”.

Este resultado se expresa con precisión en la simbología del cálculo de predicados, en la forma $\forall x \forall y(R(x) \wedge \neg R(y) \Rightarrow \neg R(s(x,y))$, donde R(z) significa que z es un número racional y s es un símbolo de función tal que s(x, y) devuelve la suma x + y.

Para demostrar este resultado por contradicción suponemos, de acuerdo con la técnica discutida, que el resultado es falso, es decir, $\neg(\forall x \forall y(R(x) \wedge \neg R(y) \Rightarrow \neg R(s(x, y)))$.

De acuerdo con lo anterior, $\exists x \exists y(R(x) \wedge \neg R(y) \wedge R(s(x, y)))$, es decir, existen algún racional x y algún irracional y tales que su suma, x+y, es un racional. Llamemos z a la suma de estos números: x + y = z. Entonces, sumando el opuesto de x a ambos miembros de la igualdad, se obtiene y=-x+z. Como -x es racional y estamos suponiendo que z también lo es y la suma de racionales es racional, entonces y sería racional. La contradicción $R(y) \wedge \neg R(y)$, según la cual y es racional e irracional a la vez, y el método discutido, nos permiten dar por demostrado el resultado propuesto: la suma de racional con irracional da un irracional.

Ejemplo 5.7 Suponemos que el estudiante sabe cómo construir un segmento de longitud X tal, que $X^2 = 2$. La conocida prueba de que esta longitud ($\sqrt{2}$) no es un número racional, es una excelente ilustración del método de demostración por contradicción.

Teorema Si $X^2 = 2$, entonces el número X no es racional.

Suponiendo $H \wedge \neg T$, es decir, que $X^2 = 2$ y X es racional, se llega a la contradicción $(R \wedge \neg R)$, donde R establece que dos enteros que surgen en la prueba son primos relativos, pero el proceso conduce al hecho de que 2 también es divisor común de tales enteros, por lo cual no son primos relativos: $\neg$ R. Este hecho completa la demostración, que describimos en seguida:

Demostración: Si X es racional, existen enteros p, q cuyo máximo divisor común es 1 y tales que X = p/q. Entonces $X^2 = p^2/q^2$ y por lo tanto $p^2 = X^2 \, . \, q^2$, es decir, $p^2 = 2q^2$. (1). Esto significa que p^2 es un entero par, lo cual sólo es posible si p mismo es par. Por lo tanto, p= 2s (2), para algún entero s. La sustitución en (1) conduce a $q^2 = 2s^2$, así que q también es par, esto es, q = 2t (3), para algún entero t.

De (2) y (3) se concluye que 2 es divisor común de p y q, lo cual indica que no son primos relativos. La contradicción deducida es: p y q son primos relativos, pero a la vez no son primos relativos. Esto completa la demostración.

5.1.2.5 Demostración por contraejemplo

Tan importante como demostrar que una afirmación de la forma "Todo elemento x que satisfaga la propiedad P satisface también la propiedad Q" es verdadera, puede serlo establecer que una afirmación de tal tipo es falsa. Todo lo que se requiere para esto es exhibir un contraejemplo, que es, como ya se ha dicho, un elemento x_o que satisface la propiedad P, y no satisface la propiedad Q. Si este elemento x_o existe, se le denomina un contraejemplo; con él se demuestra que la afirmación dada es falsa.

Ejemplo 5.8 La afirmación "Si A, B, C son conjuntos y AUB = AUC entonces B = C" es falsa. Los conjuntos A = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, B= {2, 5, 6} y C = {1, 3, 4, 5} constituyen un contraejemplo.

Pero no siempre se nos pide "Dar un contraejemplo para la siguiente afirmación" o "Probar, mediante un contraejemplo, que la siguiente afirmación es falsa". Para dar contexto a la aparición de conjeturas, piense por ejemplo que usted ha encontrado que en todos los casos particulares considerados, cada vez que P es verdadera, también lo es Q. Por ejemplo, suponga que alguien está examinando la suma de los primeros impares, variando sucesivamente el número de términos de la suma:

Con un término: 1=1,

Con dos términos: 1+ 3 = 4,

Con tres términos: 1+ 3+ 5 = 9,

Con cuatro términos: 1+ 3 + 5 + 7 = 16.

En este momento advierte que los resultados 1, 4, 9, 16, presentan una regularidad: cada uno es el cuadrado del número de términos que hay en la suma, y se pregunta si esto será así en todos los casos. Entonces, le pide a alguien decirle un número entre 5 y 10 y recibe como respuesta."ocho". Ensaya con 8 términos: 1+ 3+ 5+ 7+ 9+ 11+ 13+ 15 = 64, que es igual a 8^2. Con base en esta experiencia la persona de nuestra historia razona inductivamente y conjetura este resultado: "La suma de los primeros n impares positivos es igual a n^2 ". Pero, no importa qué tan razonable aparezca la conjetura, el resultado sólo puede ser validado mediante una demostración formal, es decir mediante un razonamiento deductivo válido; examinar otros casos en los cuales el resultado se sigue dando, sólo sirve para incrementar la confianza en lo razonable de la conjetura. Ahora bien, si se encontrara algún caso (lo cual aquí no va a suceder) en el cual la suma de m primeros impares positivos no fuese igual a m^2, ese caso sería un contraejemplo y la conjetura quedaría refutada.

En este punto es conveniente que recuerde una de las conjeturas más famosas en el campo de las matemáticas, la conjetura de Goldbach, que mencionamos en el capítulo 1: Todo número par mayor que 2 puede representarse como suma de dos números primos. Mencionemos también un resultado conocido como “El último teorema de Fermat”, cuya demostración desafió a los mejores especialistas en Teoría de números durante más de 300 años. El teorema dice que si n es cualquier entero mayor que 2, no es posible hallar enteros positivos x, y, z, tales que $x^n + y^n = z^n$. Esto es, no existen enteros positivos tales que $x^3 + y^3 = z^3$, o tales que $x^4 + y^4 = z^4$, etcétera. En el año de 1993 el doctor Andrew Wiles, matemático inglés, investigador de la Universidad de Princeton, presentó una demostración del teorema, expuesta en más de 200 páginas. Después de ajustar algunos detalles en su propuesta inicial, la demostración del doctor Wiles ha sido declarada oficialmente correcta. Una de las anécdotas en relación con este famoso teorema dice que en el documento en el cual mencionó esta propiedad, Fermat anotó que tenía una demostración del resultado, pero que ella no cabía en los angostos márgenes de su libro. Si existió tal demostración, ella nunca fue conocida.

En la lista de ejercicios se le pide estudiar la conjetura siguiente: Para todo entero $n \geq 0$, $n^2 + n + 41$ es primo.

5.1.2.6 Demostraciones por el principio de inducción matemática

Consideremos nuevamente la conjetura según la cual la suma de los primeros n impares positivos es n^2, es decir, $1 + 3 + 5 + \ldots(2n-1) = n^2$ ¿Cómo probar que este resultado es cierto para todo entero positivo n?

La clave está en una propiedad característica de los enteros positivos: el primero de ellos es 1 y, a partir de este, cada entero positivo puede alcanzarse mediante suma de 1’s. Esta propiedad conduce a un resultado conocido como Principio de Inducción Matemática (PIM). Antes de enunciarlo, proponemos al lector pensar en las situaciones hipotéticas siguientes:

Caso 1 Imagine una hilera infinita de fichas de dominó, paradas una detrás de otra. Suponga que la distancia entre una ficha y la que le sigue es tal que si cae una ficha, ella hace caer a la que le sigue. Suponga, además, que se hace caer la primera ficha, hacia donde están las demás.

Caso 2 Imagine una escalera con un número infinito de escalones y tal que si se alcanza un escalón, el que sea, se activa un dispositivo automático que permite alcanzar el inmediato siguiente. Suponga además que se puede alcanzar el primer escalón.

Seguramente el lector ha concluido que en el caso 1 caen todas las fichas y que en el caso 2 se alcanzan todos los peldaños. Elaborando un poco más: Cae la primera ficha. Y, si cae la k-ésima ficha cae también la (k+1)–ésima ficha. Entonces caen todas. Análogamente: Se alcanza el primer escalón. Y, si se alcanza el k–ésimo escalón, entonces se activa el mecanismo que permite alcanzar el (k + 1)–ésimo. Por lo tanto, se alcanzan todos.

Estos casos ilustran el siguiente resultado, conocido como Principio de inducción matemática y que se utiliza para demostrar algunas propiedades de algunos conjuntos infinitos.

Principio de inducción matemática (PIM)

Sea P(n) una proposición que asegura que el entero positivo n, tiene cierta propiedad P. Supongamos que se puede probar:

1. Paso básico: Que la propiedad P es satisfecha por el primer entero positivo, es decir, P(1) es verdadera.
2. Paso inductivo: Que si k representa un entero cualquiera, cada vez que la propiedad P es satisfecha por k entonces es satisfecha también por el entero siguiente k+1, es decir: si P(k) es verdadera, entonces P(k+1) también lo es.

Entonces, la propiedad P es satisfecha por todos los enteros positivos.

Ejemplo 5.9 Demostrar que la igualdad $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$ es válida para entero $n \geq 1$.

Solución: Aquí es aplicable el Principio de inducción, pues se asegura que una propiedad es válida para todos los enteros positivos.

1. Paso básico: Cuando n = 1, hay un sólo término en la suma: 2.1– 1. Este valor coincide con 1^2. Por lo tanto, la expresión se satisface para n = 1.
2. Hipótesis Inductiva: Supongamos que la propiedad es satisfecha por algún $k \geq 1$, es decir:

   $$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k-1) = k^2, \text{ para algún } k \geq 1.$$

   Paso inductivo: Demostrar, con base la igualdad anterior, que la propiedad es también satisfecha por k+1.

Veamos: Si se tienen k+1 términos en la suma, esta es $1 + 3 + 5 + \ldots + (2k-1)+(2k+1)$, pues basta con aumentar el impar que sigue a 2k-1. Asociemos los primeros k términos de esta suma, para aprovechar el resultado que conocemos por la hipótesis inductiva:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k-1) + (2k+1) = (1 + 3 + 5 + \ldots + (2k-1))+(2k+1) = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$$

Esta igualdad muestra que si en la suma hay k+1 términos, la propiedad también se cumple. De acuerdo con el PIM esto significa que la propiedad se cumple, cualquiera sea el número de términos en la suma.

En ocasiones se estipula que la propiedad es verdadera para los enteros no negativos ({0, 1, 2,…}). En este caso el paso básico consiste en demostrar la propiedad para n=0. También puede ser que se estipule que la propiedad es verdadera sólo a partir de un entero positivo dado x_0 >1. En este caso el paso básico consiste en demostrar la propiedad para dicho x_0. Sin embargo, en todos los casos el paso inductivo es siempre el mismo: probar que la propiedad se cumple para k+1, bajo el supuesto de que se cumple para k (≥1, ≥0, $\geq x_0$, según el caso).

Hay una variación del Principio de Inducción, conocida como Principio de inducción fuerte, que no es del caso estudiar aquí pero que el lector puede consultar en textos básicos de matemáticas.

5.2 CONJUNTOS

El manejo adecuado de algunos elementos básicos de la teoría de conjuntos facilita la comprensión de conceptos de frecuente aplicación, como son las relaciones binarias y las funciones, entre otros. En la presentación y en los argumentos que justifican muchos de los resultados de la teoría se hace uso intensivo de los conceptos y técnicas que fueron objeto de estudio en los capítulos anteriores. En esta sección se presentan elementos básicos de la teoría de conjuntos como fundamentación para tales conceptos y para las álgebras de Boole y sus aplicaciones.

5.2.1 Nociones básicas de conjuntos

5.2.1.1 La noción de conjunto

Si intentáramos definir el concepto "conjunto" según la idea común del término, seguramente tendríamos que utilizar palabras como "agrupación", "colección", o "reunión". Pero, siendo rigurosos, tendríamos entonces que definir estas nuevas palabras y, al hacerlo, en algún momento terminaríamos utilizando alguno de los términos que intentamos definir. Caeríamos así en lo que se conoce como una "definición circular": una definición que supone una comprensión anterior del término definido, o en la que el término definido aparece como parte de la definición. Por ejemplo, si se define la palabra **punto** como "la intersección de dos **rectas** que se cortan" y recta como "un conjunto de **puntos** que siguen una misma dirección", estamos ante una definición circular de "punto".

La finitud del lenguaje natural hace imposible evitar definiciones circulares, como lo evidencian frecuentemente los diccionarios. Por ejemplo, según el DRAE, "**maliciar**" es

recelar, sospechar; **recelar** es temer, **sospechar**, desconfiar; y **sospechar** es desconfiar, dudar, **recelar**. Sin embargo, en los lenguajes para presentaciones más formales es posible eludir las definiciones circulares de términos básicos declarándolos como "términos no definidos", o "conceptos primitivos". Así lo haremos con el término "conjunto" en esta presentación: considerarlo como un término indefinido de la teoría, suponiendo que todos compartimos la misma idea de "conjunto" y que esa idea común nos permite entender el significado de expresiones como "el conjunto de los seres humanos", "el conjunto de las vocales del idioma español" , "el conjunto de las palabras agudas que no llevan tilde", etcétera.

5.2.1.2 Notación. Relación de pertenencia

Por convención casi universal los conjuntos se denotan con letras mayúsculas: A, B, C,…$\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$,..., y sus elementos con letras minúsculas, excepto cuando ellos mismos son conjuntos. Escribimos $a \in A$, que se lee "a pertenece a A", para indicar que "a es un elemento del conjunto A" y $a \notin A$, que se lee "a no pertenece a A", para indicar que "a no es un elemento del conjunto A". En términos generales, el símbolo $\in$, que representa el predicado binario de pertenencia, se utiliza entre el elemento y el conjunto al cual este pertenece. Con esta convención, en la expresión $a \in A$, el símbolo a la izquierda de $\in$ representa un elemento del conjunto representado por el símbolo situado a su derecha. De igual manera, la expresión $A \in \mathcal{A}$ indica que el conjunto A es un elemento del conjunto $\mathcal{A}$. Observe que la relación "es un elemento de" es una relación no definida.

Ejemplo 5.10 Si A = {1, 3, 5, 9} entonces $3 \in A$ y $7 \notin A$.

Ejemplo 5.11 Si A = {{a, e, o}, {i, u}}, entonces A es un conjunto con dos elementos: el conjunto {a, e, o} y el conjunto {i, u}; por esto es cierto que {a, e, o} $\in$ A}, {i, u} $\in$ A y {a, i}$\notin$ A.

5.2.1.3 Igualdad entre conjuntos

Dados dos conjuntos A y B, se define la igualdad entre ellos, denotada por A = B, así:

$$A = B \text{ si y sólo si } (\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in B) \qquad (5.1)$$

Como vemos, el criterio de igualdad es relativamente obvio: dos conjuntos son iguales si y sólo si tienen los mismos elementos. En este sentido, los conjuntos A = {a, b} y B = {b, a} son iguales, pues tienen los mismos elementos: a y b. Se infiere entonces que el orden de aparición de los elementos en la notación de un conjunto es irrelevante (salvo que se diga, explícitamente, que el conjunto es ordenado). Adicionalmente, la noción de igualdad establecida en (5.1) nos permite afirmar que si C = {a, b, b} y D = {a, b, a}, entonces C=D. Por lo tanto, los conjuntos aquí mencionados son iguales: A = B = C =D.

Si en (5.1) sustituimos ($x\in A \Leftrightarrow x\in B$) por su equivalente ($x\in A \Rightarrow x\in B) \wedge (x\in B \Rightarrow x\in A$) obtenemos una expresión alternativa de la igualdad de conjuntos, que será de mucha utilidad posteriormente:

$$A = B \text{ si y sólo si } ((\forall x)\ (x\in A \Rightarrow x\in B) \wedge (\forall x)(x\in B \Rightarrow x\in A)) \qquad (5.2)$$

De la expresión anterior se deduce que, para probar que dos conjuntos dados A y B son iguales, es suficiente y necesario probar dos hechos: El primero, que todo elemento de A es también un elemento de B; el segundo, que todo elemento de B es también elemento de A. Haremos uso muy frecuente de esta observación cuando demostremos algunas propiedades del álgebra de conjuntos.

A partir de (5.2) podemos también responder la pregunta: ¿Cómo se establece que dos conjuntos A y B no son iguales? Respuesta: Negando la expresión de la derecha en 5.2.

Al hacerlo obtenemos:

$$A \neq B \text{ si y sólo si } ((\exists x)(x\in A \wedge x\notin B) \vee (\exists x)(x\in B \wedge x\notin A)) \qquad (5.3)$$

De acuerdo con (5.3), para mostrar que dos conjuntos no son iguales es suficiente mostrar que hay por lo menos un elemento en uno de ellos, que no es elemento del otro. Por ejemplo, el conjunto A de los enteros no negativos es distinto del conjunto B de los enteros positivos porque $0\in A$ pero $0\notin B$. (Es incorrecto afirmar que los enteros no negativos son los enteros positivos: el primero de estos conjuntos incluye el 0; el segundo, no).

5.2.1.4 Subconjuntos. Relación de inclusión

Si A y B son los conjuntos A={1, 3, 5} y B={0, 1, 2, 3, 5} entonces todo elemento de A es también elemento de B. En este caso se dice que A es subconjunto de B, o que A está incluido o contenido en B. Esta relación se simboliza como $A \subset B$. La definición se expresa en forma simbólica así:

$$A \subset B \text{ si y sólo si } (\forall x)(x\in A \Rightarrow x\in B) \qquad (5.4)$$

De acuerdo con la definición anterior, para mostrar que $A \subset B$ es necesario probar que cada elemento de A es también elemento de B. Cuando los conjuntos están definidos por extensión, es decir, mediante la lista de sus elementos, el proceso se reduce a una simple verificación. Por ejemplo, si A = {x, y, z} y B = {w, x, y, z} entonces es inmediato concluir que $A \subset B$ (y que $B \not\subset A$). Pero este es el caso menos frecuente. Generalmente se da como hipótesis una relación entre algunos conjuntos y se pide establecer, a partir de ella, la validez de una relación de inclusión. Por ejemplo, <<Pruebe que si A, B y C son conjuntos tales que $A \subset B$ y $B \subset C$, entonces $A \subset C$>>. Puesto que se debe establecer la validez de la relación $A \subset C$, empezamos considerando un elemento arbitrario $x \in A$. Enseguida utilizamos la información contenida en la hipótesis: $A \subset B$ y $B \subset C$. Como $A \subset B$, entonces $x \in B$. Pero, además, $B \subset C$. Por lo tanto, $x \in C$. Habiendo así demostrado, para **un** elemento arbitrario x, que $(x \in A \Rightarrow x \in C)$, se concluye, por Generalización Universal, (GU), que $(\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in C)$ y, por lo tanto, que $A \subset C$. Si se ha optado por una prueba indirecta, debe suponerse que la afirmación es falsa, es decir, que $(\exists x)\ (x \in A \wedge x \notin C)$, y obtener, como consecuencia lógica, una contradicción.

Consideremos nuevamente la definición de igualdad establecida en 5.2.

$$A = B \text{ si y sólo si } ((\forall x)\ (x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (\forall x)(x \in B \Rightarrow x \in A)) \qquad (5.2)$$

Si en la expresión anterior se sustituyen los condicionales por la expresión que definen según 5.4, obtenemos el siguiente criterio de igualdad de conjuntos, que es el más utilizado cuando se trata de establecer la igualdad de dos conjuntos dados:

$$A = B \text{ si y sólo si } (A \subset B) \wedge (B \subset A) \qquad (5.5)$$

El teorema siguiente establece propiedades básicas de la relación de inclusión:

Teorema 1 La relación de inclusión entre conjuntos satisface estas propiedades:

i. Para todo conjunto A, $A \subset A$, esto es, todo conjunto es subconjunto de sí mismo (Propiedad reflexiva)
ii. Si A y B son conjuntos tales que $A \subset B$ y $B \subset A$, entonces $A = B$ (Propiedad antisimétrica)
iii. Si A, B y C son conjuntos tales que $A \subset B$ y $B \subset C$, entonces $A \subset C$ (Propiedad transitiva)

Demostración:

i. $x \in A \Rightarrow x \in A$, es una tautología. Entonces, $(\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in A)$ es una fórmula válida, y de ella se concluye que $A \subset A$.
ii. Es precisamente lo establecido en (5.5).
iii. Se demostró a continuación de 5.4 como ilustración de la noción de subconjunto.

Observación: Por satisfacer las tres propiedades del teorema anterior, reflexiva, antisimétrica y transitiva, la inclusión entre conjuntos es una **relación de orden**.

La siguiente forma alternativa de expresar conjuntos, se conoce a veces como especificación por comprensión:

$$A = \{x \mid x \in B \wedge P(x)\} \qquad (5.6)$$

Consiste en especificar un conjunto, A, con los elementos x de un conjunto B que hagan verdadera a P(x), es decir, que satisfagan la propiedad P. Si ningún elemento de B la satisface, es decir, si P(x) es falsa para todos los elementos de B, se dice que A es un conjunto vacío, que se denota por $\varnothing$ o $\{\ \}$..

Ejemplo 5.12 Sea $A = \{x \mid x$ es un número natural y x es par$\}$. Se lee "A es el conjunto de los elementos x tales que x es un número natural y x es par", o más sencillamente: "A es el conjunto de los naturales pares". Con referencia a (5.6), B es el conjunto de los números naturales y P(x) es la propiedad, x es par.

Ejemplo 5.13 Sea $C= \{x \mid x$ es un número primo y x es divisible por 6$\}$. Como ningún número primo es divisible por 6, el predicado o condición P(x): x es divisible por 6, es falso para cada número primo. Entonces, este conjunto C es vacío: $C = \varnothing$.

Con frecuencia, y si no hay lugar a confusión, se omite el conjunto B en (5.6) y se define el conjunto simplemente mediante la condición que deben satisfacer sus elementos. Por ejemplo, podemos escribir $A = \{x \mid x$ es número primo$\}$. En este caso se sobreentiende que el dominio del predicado P(x), x es primo, es el conjunto de los enteros positivos. De igual manera, al escribir $A = \{x \mid$ x es vocal del alfabeto español$\}$ se enuncian en una sola proposición el conjunto B y la condición P. En efecto, el enunciado equivale a $A = \{x \mid x$ es un símbolo del alfabeto español y x es vocal$\}$.

5.2.2 Operaciones con conjuntos

Dados dos conjuntos, tiene sentido preguntarse: por sus elementos comunes, por los que están en uno de ellos pero no en el otro, por los que están por lo menos en uno de ellos y por los que están solamente en uno de ellos. Tales elementos conforman, en este orden, otros conjuntos que se conocen como: la intersección, la diferencia, la unión y la diferencia simétrica de los conjuntos dados. Estos conjuntos, con sus respectivas notaciones, se definen formalmente así:

5.2.2.1 La intersección de A y B

La intersección de dos conjuntos A y B, que se denota como $A \cap B$, es el conjunto formado por los elementos comunes a estos dos conjuntos. En símbolos:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\} \qquad (5.7)$$

Ejemplo 5.14 Si $A = \{x \mid x \text{ es un número primo}\}$ y $B = \{x \mid x \text{ es par}\}$, entonces $A \cap B = \{2\}$, puesto que 2 es el único entero que es primo y par a la vez.

Ejemplo 5.15 Si $A = \{x \mid x \text{ es colombiano y menor de 18 años}\}$ y $B = \{x \mid x \text{ es colombiano y puede votar en las elecciones presidenciales}\}$, entonces $A \cap B = \varnothing$.

Ejemplo 5.16 Si C = conjunto de los enteros no negativos y D = conjunto de los enteros no positivos, entonces $C \cap D = \{0\}$.

De la definición (5.7), se deduce que:

$$x \in A \cap B \text{ si y sólo si } x \in A \wedge x \in B \tag{5.8}$$

y que

$$x \notin A \cap B \text{ si y sólo si } x \notin A \vee x \notin B \tag{5.9}$$

El teorema siguiente establece una interesante propiedad de los conjuntos, que relaciona la inclusión con la intersección. Consiste en que la intersección de dos conjuntos es igual a uno de ellos, si y solamente si ése está contenido en el otro.

Teorema 2 Sean A y B conjuntos. Entonces, $A \cap B = A$ si y sólo si $A \subset B$

Demostración: El teorema enuncia una condición necesaria y suficiente para que $A \cap B = A$. Por lo tanto la demostración consta de dos partes:

En primer lugar, supondremos que $A \cap B = A$, y demostraremos que $A \subset B$.

Sea $x \in A$. Como $A \cap B = A$ entonces $x \in A \cap B$ y en consecuencia $x \in B$. Esto muestra que $A \subset B$.

En segundo lugar, supondremos que $A \subset B$, y demostraremos que $A \cap B = A$.

Para esto, y según (5.2) debemos mostrar que $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$ y también que $x \in A \Rightarrow x \in A \cap B$. Lo primero es inmediato, pues si $x \in A \cap B$ entonces $x \in A$, por la definición misma de intersección. (Es una aplicación directa de la simplificación $p \wedge q \Rightarrow p$). Para probar la validez de la segunda implicación, supongamos que $x \in A$. Como $A \subset B$ (hipótesis), entonces $x \in B$. Por lo tanto, $x \in A$ y también $x \in B$, lo cual muestra que $x \in A \cap B$. Esto completa la prueba del teorema.

5.2.2.2 La diferencia entre A y B

Dados dos conjuntos A y B, se define la diferencia entre A y B, simbolizada por $A - B$, como el conjunto formado por los elementos de A que no son elementos de B, es decir:

$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\} \tag{5.10}$$

Ejemplo 5.17 Sean A = {a, e, o, b} y B = {3, 5, o, b, d}. Entonces, A – B = {a, e} y B – A = {3, 5, d}. De paso, este ejemplo muestra que la diferencia de conjuntos no es conmutativa.

Ejercicio 5.18 Justifique esta afirmación: Si $A = \{x \mid x$ es primo$\}$ y $B = \{x \mid x$ es impar$\}$, entonces $A \cap B = A - \{2\}$.

De la expresión (5.10) se deduce que:

	$x \in (A - B)$ si y sólo si $x \in A \wedge x \notin B$	(5.11)
Por lo tanto,	$x \notin (A - B)$ si y sólo si $x \notin A \vee x \in B$	(5.12)

Es fácil mostrar, como aplicación de la equivalencia $(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$, que la intersección de conjuntos es una operación binaria conmutativa, es decir, $A \cap B = B \cap A$, para todo par de conjuntos A y B.

5.2.2.3 La unión de A y B

La unión de dos conjuntos A y B, denotada como AUB, es el conjunto formado por los elementos que pertenecen por lo menos a uno de ellos. En símbolos:

	$AUB = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$	(5.13)
Esto significa que	$x \in AUB$ si y sólo si $x \in A \vee x \in B$	(5.14)
y que	$x \notin AUB$ si y sólo si $x \notin A \wedge x \notin B$	(5.15)

Ejemplo 5.19 Si A = {a, e, o, b} y B = {3, 5, o, b, d}, entonces AUB = {a, e, o, b, 3, 5, d}.

Ejemplo 5.20 Si A es el conjunto de los números racionales y B el conjunto de los números irracionales, entonces AUB es el conjunto de los números reales.

Ejemplo 5.21 Sean $A = \{x \mid x$ es cardiólogo $\}$ y $B = \{x \mid x$ es médico$\}$.

Entonces AUB = B. Esta es una propiedad similar a la establecida en el teorema 2, y que proponemos como ejercicio al lector.

Ejercicio 5.22 Sean A y B conjuntos. Entonces, AUB = B si y sólo si $A \subset B$.

5.2.2.4 La diferencia simétrica de A y B

Dados dos conjuntos A y B, la diferencia simétrica de A y B es el conjunto formado por los elementos que pertenecen exclusivamente a cada uno de los dos conjuntos. Se denota por $A \oplus B$. Entonces:

$$A \oplus B = \{x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\} \qquad (5.16)$$

Una consecuencia inmediata de 5.11 y de la definición anterior es que $A \oplus B = (A-B) \cup (B-A)$

Ejemplo 5.23 Si A = {a, e, o, b} y B = {3, 5, o, b, d}, entonces $A \oplus B$ = {a, e, 3, 5, d}.

En el ejemplo anterior vemos que $A \oplus B$ = {a, e, 3, 5, d} = {a, e, o, b, 3, 5, d} – {o, b} = $(A \cup B) - (A \cap B)$.

Este resultado es general, es decir, $A \oplus B$ se puede expresar también como $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$.

Ejercicio 5.24 Demostrar que $(A-B) \cup (B-A) = (A \cup B) - (A \cap B)$.

Solución: Demostraremos que todo elemento del conjunto $(A-B) \cup (B-A)$ es también elemento del conjunto $(A \cup B) - (A \cap B)$ y dejamos como ejercicio al lector la demostración de la inclusión recíproca.

Si $x \in (A-B) \cup (B-A)$ entonces $x \in A-B$ o $x \in B-A$. Mostraremos que tanto si $x \in A-B$ como si $x \in B-A$ se concluye que $x \in (A \cup B)-(A \cap B)$: Si $x \in A-B$ entonces $x \in A$ y $x \notin B$. Como $x \in A$, entonces $x \in$ (A$\cup$cualquier conjunto) y como $x \notin B$, entonces $x \notin$ (cualquier conjunto$\cap$B). Por lo tanto, $x \in (A \cup B)$ y $x \notin (A \cap B)$. De esto se deduce que $x \in (A \cup B) - (A \cap B)$, que es el resultado propuesto. La prueba para el otro caso posible, $x \in B-A$, es idéntica. Como resultado de este ejercicio se tienen ahora dos definiciones equivalentes de $A \oplus B$:

$$A \oplus B = (A-B) \cup (B-A) = (A \cup B) - (A \cap B) \qquad (5.17)$$

5.2.3 El conjunto vacío

5.2.3.1 Si A y B no tienen elementos comunes, el conjunto $A \cap B$ carece de elementos. Se dice entonces que "$A \cap B$ es (un conjunto) vacío".

En general, si en la forma de especificar un conjunto, $A = \{x \mid x \in B \wedge P(x)\}$, la condición P(x) no es satisfecha por ningún elemento de B entonces el conjunto A carece de elementos; es **un** conjunto vacío. Naturalmente, diferentes propiedades pueden originar conjuntos vacíos. Por ejemplo, si A = {x | x es una palabra esdrújula y x no lleva tilde} y B = {x | x es un número real cuyo cuadrado es negativo}, tanto A como B son conjuntos vacíos. Es posible formalizar la conclusión evidente de que A = B. En efecto, si estos conjuntos no fueran iguales existiría según (5.3) algún elemento x tal que $x \in A \wedge x \notin B$, o algún elemento x tal que $x \in B \wedge x \notin A$. Como ambos términos de esta disyunción son falsos porque A y B son conjuntos vacíos, la disyunción es falsa y queda probada la imposibilidad de que $A \neq B$. Se ha mostrado así que la condición que da lugar a un conjunto vacío es irrelevante, y que el conjunto vacío es único.

Teorema 3 El conjunto vacío es subconjunto de cualquier conjunto, es decir, $\varnothing \subset A$, para todo conjunto A.

La demostración es indirecta: Si $\neg(\varnothing \subset A)$, existiría algún elemento x tal que $x \in \varnothing \wedge x \notin A$. Pero esto es evidentemente falso porque $\varnothing$ carece de elementos. Por lo tanto, no es posible que $\varnothing \subset A$ sea falso.

5.2.3.2 Dos conjuntos que no tienen elementos comunes se llaman **conjuntos disjuntos**, esto es:

A y B son conjuntos disjuntos si y solamente si $A \cap B = \varnothing$ (5.18)

5.2.4 El conjunto universal o universo. El complemento de un conjunto

5.2.4.1 Los conjuntos $\mathcal{U}$ y $\mathcal{U}$–A

En la determinación de algunas propiedades del álgebra de conjuntos, y en algunas de sus aplicaciones, es conveniente suponer que cada conjunto presente en la discusión particular es subconjunto de un conjunto fijo $\mathcal{U}$. A este conjunto se le conoce como conjunto universal o universo. Por ejemplo, en el estudio de Probabilidades el universo o espacio muestral de un experimento aleatorio, es el conjunto de **todos** los posibles resultados del experimento. Por ejemplo, si el experimento consiste en lanzar al aire dos monedas normales y observar el resultado, el espacio muestral será $\mathcal{U}$ = {(C, C), (C, S), (S, C), (S, S)}, donde el elemento (C, S) indica que la primera moneda cayó por "cara" y la segunda por "sello", y en forma similar se interpretan los otros elementos del conjunto. Cada subconjunto del espacio muestral $\mathcal{U}$ es un **evento**; por ejemplo, E = {(C,C), (C,S), (S,C)} $\subset \mathcal{U}$ es el evento que podríamos describir como "por lo menos una de las dos monedas cae por cara". El evento $\overline{E}$ = {(S,S)} = $\mathcal{U}$–E se llama el complemento de E. Es el evento en el que "ninguna de las monedas cae por cara". Esta noción de complemento es general: Si en una discusión particular $\mathcal{U}$ es el universo y $A \subset \mathcal{U}$, llamaremos "**complemento de A**", denotado por $\overline{A}$, a la diferencia $\mathcal{U} - A$.

$$\overline{A} = \mathcal{U} - A. \qquad (5.19)$$

Observación: Cuando es claro cuál es el conjunto universo de una discusión particular, es común omitirlo en la expresión anterior y escribir simplemente $\overline{A} = \{x \mid x \notin A\}$.

Ejemplo 5.25 Si $A = \{x \mid x$ es un dígito impar$\} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ y el universo es el conjunto de los dígitos $D = \{0,1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ entonces $\overline{A} = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, el conjunto de los dígitos pares.

Ejemplo 5.26 En una discusión sobre reglas para el marcado de tildes a las palabras del idioma español el universo es precisamente el conjunto de todas las palabras del español.

El considerar $\overline{A}$ como $\overline{A} = \{x \mid x \notin A\}$ facilita algunas demostraciones. Veamos algunos casos:

Ejercicio 5.27 Probar que $A - B = A \cap \overline{B}$

Demostración: $A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\} = \{x \mid x \in A \wedge x \in \overline{B}\} = A \cap \overline{B}$

Los resultados siguientes, las Leyes de De Morgan para conjuntos, son los resultados análogos a las Leyes de De Morgan para la lógica proposicional. Es usual enunciarlos como "El complemento de la intersección es la unión de los complementos" y "El complemento de la unión es la intersección de los complementos".

Ejercicio 5.28 Probar que $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ y que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Demostración: Probaremos el primero de estos resultados. El otro se demuestra en forma análoga.

$\overline{A \cap B} = \{x \mid x \notin (A \cap B)\} = \{x \mid x \notin A \vee x \notin B\} = \{x \mid x \in \overline{A} \vee x \in \overline{B}\} = \{x \mid x \in (\overline{A} \cup \overline{B})\} = \overline{A} \cup \overline{B}$

5.2.4.2 El conjunto potencia de X o conjunto de partes de X

Al conjunto de todos los subconjuntos de un conjunto dado X, denotado por $\mathcal{P}(X)$, se le llama el conjunto potencia de X o el conjunto de partes de X.

Ejemplo 5.29 Si $A = \{a, b, c\}$, los elementos de $\mathcal{P}(A)$ son

$$\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$$

(Recuerde que $\varnothing$ es subconjunto de cualquier conjunto y que cada conjunto es subconjunto de sí mismo). Dado un conjunto A cualquiera, todos los subconjuntos de A, excepto A mismo, se llaman subconjuntos propios de A. Sólo $\{a, b, c\}$ no es subconjunto propio de $\{a, b, c\}$.

Denotemos con $|A|$ el número de elementos de un conjunto finito A. Observe que en el ejemplo anterior $|A|=|\{a, b, c\}|=3$ y que el número de elementos de $\mathcal{P}(A)$, $|\mathcal{P}(A)|=2^3=8$. Este es un caso particular del siguiente resultado general:

Teorema 4 Si $|A|=n$, entonces $|\mathcal{P}(A)|=2^n$, es decir, si un conjunto tiene n elementos, su conjunto potencia tiene 2^n elementos.

Antes de desarrollar la demostración, y como preparación para ella, consideremos nuevamente el ejemplo anterior. En él, $A=\{a, b, c\}$ y los $2^3=8$ elementos de $\mathcal{P}(A)$ son

$$\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$$

Si añadimos el elemento d al conjunto anterior y ahora $A=\{a, b, c, d\}$, los $2^4=16$ subconjuntos de A son los 8 anteriores y 8 más que resultan de añadir el elemento d a cada uno de ellos, así:

$\mathcal{P}(A)=\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\} \cup \{\{d\}, \{a, d\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}$ o

$\mathcal{P}(A)=\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}$.

En esta idea se basa la demostración general, que se hace por inducción matemática sobre $|A|=n$.

1. Paso básico: Sea n=1. Si $|A|=1$, sea $A=\{a\}$. Entonces $\mathcal{P}(A)=\{\varnothing,\{a\}\}$ y $|\mathcal{P}(A)|=2=2^1$. Entonces el resultado es cierto para n=1.
2. Paso inductivo: Para n=k, supongamos que se cumple la propiedad $|A|=k \rightarrow |\mathcal{P}(A)|=2^k$.

Si ahora n=k+1 y $|A|=k+1$, el número de subconjuntos de A se duplica con relación al número de subconjuntos que tenía cuando $|A|=k$. En efecto, para obtener todos los subconjuntos de A basta tomar, junto a los que tenía anteriormente, los que resultan de añadir a cada uno de tales subconjuntos el elemento (k+1). Esto duplica el número de subconjuntos. Así que ahora

$|\mathcal{P}(A)|=2.2^k=2^{k+1}$. Esto completa la demostración por el PIM.

Para finalizar esta sección presentamos en la tabla 5.1 la correspondencia entre los operadores lógicos $\neg$, $\wedge$, $\vee$ y $\oplus$ y los operadores conjuntistas -, $\cap$, $\cup$ y $\oplus$, respectivamente. Esta correspondencia se hace muy importante al momento de establecer propiedades del álgebra de conjuntos, como veremos oportunamente.

Tabla 5.1 Relación entre operadores lógicos y operadores conjuntistas		
Operador lógico	**Operador conjuntista**	**Expresión relacionada**
$\neg$ (negación): $\neg p$	$\bar{}$ (complemento): $\overline{A}$	$x \in \overline{A}$ si y sólo si $x \notin A$ $(\neg(x \in A))$
$\wedge$ (conjunción): $p \wedge q$	$\cap$ (intersección): $A \cap B$	$x \in A \cap B$ si y sólo si $x \in A \wedge x \in B$
$\vee$ (disyunción): $p \vee q$	U (unión): AUB	$x \in$ AUB si y sólo si $x \in A \vee x \in B$
$\oplus$ (disyunción exclusiva): $p \oplus q$	$\oplus$ (diferencia. simétrica): $(p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)$	$x \in A \oplus B$ si y sólo si $(x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)$

5.2.5 El álgebra de conjuntos

Las operaciones con conjuntos satisfacen ciertas propiedades a partir de las cuales se puede desarrollar un álgebra de conjuntos. Aquí mostraremos algunas de estas propiedades; otras se proponen como ejercicio para el lector. En todos los casos se supone que los conjuntos involucrados son subconjuntos de un conjunto $X = \mathcal{U}$.

Teorema 5 La intersección de conjuntos satisface las siguientes propiedades

i. $A \cap B \subset A$ y $A \cap B \subset B$

ii. $A \cap \varnothing = \varnothing$

iii. $A \cap B = B \cap A$

iv. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

v. $A \cap A = A$

vi. $A \subset B$ si, y sólo si, $A \cap B = A$

Demostración:

i. Sea $x \in A \cap B$. Entonces:

$x \in A \cap B \rightarrow (x \in A \wedge x \in B)$, por definición de $A \cap B$.

$(x \in A \wedge x \in B) \rightarrow (x \in A)$, por simplificación: $(p \wedge q) \models p$. Entonces, $\forall x(x \in A \cap B \Rightarrow x \in A)$, por (GU), y por lo tanto $A \cap B \subset A$. La prueba de que $A \cap B \subset B$ es idéntica.

ii. $A \cap \varnothing = \varnothing$. Por reducción al absurdo, si $A \cap \varnothing \neq \varnothing$, existe algún elemento $x \in A \cap \varnothing$. Esto significa que $x \in \varnothing$. Pero $x \notin \varnothing$, y esta contradicción muestra la imposibilidad de que $A \cap \varnothing \neq \varnothing$.

iii. Esta propiedad se sigue inmediatamente de la definición del operador $\cap$ y de la equivalencia $p \wedge q \equiv q \wedge p$.

iv. Ejercicio

v. De la ley de idempotencia $p \wedge p \equiv p$ se sigue que $x \in A \cap A \equiv x \in A$. En consecuencia, $A \cap A = A$.

vi. Esta propiedad ya fue demostrada como Teorema 2.

En correspondencia con cada una de las propiedades de la intersección de conjuntos establecida por el teorema anterior, hay una propiedad de la unión de conjuntos. Así lo establece el teorema siguiente, cuya demostración dejamos al lector.

Teorema 6 La unión de conjuntos satisface las siguientes propiedades

i. $A \subset A \cup B$ y $B \subset A \cup B$

ii. $A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$

iii. $A \cup B = B \cup A$

iv. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

v. $A \cup A = A$

vi. $A \subset B$ si, y sólo si, $A \cup B = B$

El teorema siguiente describe dos propiedades conocidas como *leyes de absorción* que son las formas correspondientes, en álgebra de conjuntos, a las leyes de absorción estudiadas en el capítulo 3.

Teorema 7 Leyes de absorción

i. $A \cup (A \cap B) = A$

ii. $A \cap (A \cup B) = A$

Las demostraciones son aplicaciones directas de las definiciones de los operadores U e $\cap$ en términos de los operadores $\vee$ e $\wedge$ y de las leyes de absorción demostradas en el capítulo 3: $p \vee (p \wedge q) \equiv p$ y $p \wedge (p \vee q) \equiv p$.

Las operaciones conjuntistas de unión e intersección están ligadas por las propiedades distributivas.

Teorema 8

i. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ Propiedad distributiva (por la izquierda) de la intersección con respecto a la unión.

ii. $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ Propiedad distributiva (por la izquierda) de la unión con respecto a la intersección.

La mención "por la izquierda" en las propiedades anteriores se puede omitir pues, en virtud de la conmutatividad de los operadores unión e intersección (propiedades iii) en los teoremas 5 y 6, estas propiedades son igualmente válidas "por la derecha".

Para ilustrar nuevamente el paralelismo entre las propiedades del álgebra proposicional y el álgebra de conjuntos demostraremos la parte i) de este teorema. La parte ii) se demuestra en forma similar.

$$\begin{aligned}
x\in A\cap(B\cup C) &\Leftrightarrow x\in A \wedge x\in (B\cup C)\\
&\Leftrightarrow x\in A\wedge(x\in B\vee x\in C)\\
&\Leftrightarrow (x\in A\wedge x\in B)\vee(x\in A\wedge x\in C)\\
&\Leftrightarrow (x\in A\cap B)\vee(x\in A\cap C)\\
&\Leftrightarrow x\in ((A\cap B)\cup(A\cap C))
\end{aligned}$$

Aplicando ahora la definición (5.2) se concluye que $A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$.

El último teorema de esta sección, cuya demostración se propone como ejercicio, establece algunas propiedades características de los conjuntos $\varnothing$ y $\mathcal{U}$

Teorema 9

$A\cup\varnothing=A$ y $A\cap\mathcal{U}=A$ (Relaciones de identidad)

$A\cup\mathcal{U}=\mathcal{U}$ y $A\cap\varnothing=\varnothing$ (Relaciones de dominancia)

$\overline{\mathcal{U}}=\varnothing$ y $\overline{\varnothing}=\mathcal{U}$

$A\cup\overline{A}=\mathcal{U}$ y $A\cap\overline{A}=\varnothing$

El ejemplo siguiente ilustra dos enfoques para establecer relaciones de igualdad entre conjuntos. El primero utiliza esencialmente definiciones y propiedades de los operadores lógicos estudiadas en el capítulo 3, en tanto que el segundo utiliza las propiedades de las operaciones entre conjuntos establecidas por los teoremas de esta sección.

Ejemplo 5.30 Demostrar que si A, B, C son conjuntos tales que $A\subset B$ y $C=B-A$ entonces $A=B-C$.

Primera demostración (Utilizando definiciones):

Para demostrar que $A=B-C$ mostraremos en primer lugar que, para todo x, si $x \in A$ entonces $x \in (B-C)$ y en segundo lugar que, para todo x, si $x \in (B-C)$ entonces $x \in A$.

Supongamos, en primer lugar, que $x \in A$. Como $A \subset B$, entonces $x \in B$, es decir, $x \in B$ y $x \in A$. Esto significa que $x \notin C$, puesto que $C=B-A$. Entonces: $x \in A \Rightarrow (x \in B \wedge x \notin C) \equiv x \in (B-C)$.

Ahora, sea $x \in (B-C)$. Entonces $x \in B \wedge x \notin C$ y, dado que $C=B-A$, lo anterior sólo es posible si $x \in A$. En conclusión, $x \in (B-C) \Rightarrow x \in A$. La inclusión en ambos sentidos muestra, así, que $A=B-C$.

Segunda demostración (Método algebraico):

$A \subset B \rightarrow A \cup B=B$; $C=B-A \rightarrow C=B \cap \overline{A}$. Entonces:

$B-C=B \cap \overline{C}=(A \cup B) \cap \overline{B \cap C}=(A \cup B) \cap (\overline{B} \cup A)=(B \cup A) \cap (\overline{B} \cup A)=(B \cap \overline{B}) \cup A=\varnothing \cup A=A$.

Por transitividad de la igualdad de conjuntos, se concluye que $B-C=A$ y, por lo tanto, que $A=B-C$.

EJERCICIOS

Conjuntos

En cada ejercicio propuesto se supone que los conjuntos involucrados son subconjuntos de un conjunto dado $X = \overline{\mathcal{U}}$

1. Pruebe que si $A \subset B$ entonces $\overline{B} \subset \overline{A}$
2. Pruebe que si $A \subset B$ y $C \subset D$ entonces $(A \cup C) \subset (B \cup D)$ y $(A \cap C) \subset (B \cap D)$
3. Pruebe que $\overline{\overline{A}} = A$.
4. Demuestre lo siguiente:
   i. Si $A \cap C = \varnothing$ entonces $A \cap (B \cup C)=A \cap B$
   ii. Si $A \cap B = \varnothing$ entonces $A-B=A$
   iii. Si $A \cap B = \varnothing$ y $A \cup B=C$ entonces $A=C-B$
   iv. Si $A \cap B = \varnothing$ entonces $A \subset \overline{B}$
5. Utilice álgebra de conjuntos para demostrar que:
   i. $(A \cup B)-C = (A-C) \cup (B-C)$
   ii. $[(A \cup B) \cap (A \cup C)]-(\overline{A} \cap B)=A$
   iii. Si $A \cap \overline{B}=\varnothing$ entonces $A \cap B=A$

6. Demuestre que una condición suficiente y necesaria para la igualdad $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$ es $A \subset C$

7. Pruebe que $A \cup B = A \cap B$ si y sólo si $A = B$.

8. Suponga que A y B son conjuntos finitos y justifique la relación siguiente. Recuerde que $|A|$ denota el número de elementos (o cardinalidad) de A: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

9. Sea $\overline{\mathcal{U}}=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Determine dos subconjuntos A y B de $\overline{\mathcal{U}}$ tales que $A \neq B$ y muestre que $\overline{A \cup B} \neq \overline{A \cap B}$.

10. Suponga que A es el conjunto de múltiplos enteros de 6, es decir, $A=\{x \mid x=6t;\ t \text{ entero}\}$ y que B es el conjunto de múltiplos enteros de 8, es decir, $B=\{x \mid x=8t;\ t \text{ entero}\}$. Determine el conjunto $A \cap B$.

11 En una encuesta a 200 estudiantes universitarios se encontró que 68 habían tomado cursos de Comunicación, 138 habían tomado cursos de Inglés y 160, cursos de Historia; 120, cursos de Inglés y de Historia; 20, cursos de Comunicación pero no de Inglés; 13, cursos de Comunicación pero no de Historia; 15, cursos de Comunicación y de Historia pero no de Inglés. ¿Cuántos de los entrevistados no tomaron cursos de Comunicación ni de Historia ni de Inglés?

5.3 ÁLGEBRAS DE BOOLE

5.3.1 Introducción

Para finalizar este capítulo presentaremos una estructura algebraica de la cual el álgebra proposicional y el álgebra de conjuntos son casos particulares. Tal estructura, que resultó de aplicación fundamental en el desarrollo del computador moderno, es conocida hoy con el nombre de Álgebra de Boole, o álgebra booleana. Fue presentada originalmente como una formulación matemática de la lógica por George Boole en su libro *The Laws of Thought* en 1854 y utilizada muchos años después por Claude Shanon en su tesis de maestría en el MIT en 1936 [Davis, M. 2000, p.178], para el diseño de circuitos complejos de interruptores [Bustamante, A., 1988, p. 91].

5.3.2 Nociones fundamentales

5.3.2.1 Definición y ejemplos

Un álgebra booleana es una estructura algebraica formada por un conjunto $\mathcal{B}$ en el cual se han definido dos operaciones cerradas en $\mathcal{B}$, llamadas "suma" y "multiplicación", que representaremos con los símbolos + y **.** y que satisfacen las propiedades 1–5 que se describen a continuación. Que sean operaciones cerradas en $\mathcal{B}$ significa que los resultados de sumar y de multiplicar cada dos elementos de $\mathcal{B}$ son también elementos de $\mathcal{B}$.

1. Las dos operaciones son conmutativas, es decir, cualesquiera sean $a, b \in \mathcal{B}$,
   i) $a+b = b+a$ y
   ii) $a.b = b.a$

2. Las dos operaciones son asociativas, es decir, cualesquiera sean $a, b, c \in \mathcal{B}$,
   i) $a+(b+c) = (a+b)+c$ y
   ii) $a.(b.c) = (a.b).c$

3. Existe, para cada una de las operaciones, un elemento neutro. Denotando con 0_A el elemento neutro de la suma y con 1_A el elemento neutro de la multiplicación, se tiene entonces que, para cada $a \in \mathcal{B}$,
   i) $a+0_A = 0_A+a = a$
   ii) $a.1_A = 1_A.a = a$

   Hemos utilizado los símbolos 0_A y 1_A para denotar "el cero del álgebra" y "el uno del álgebra" respectivamente. Esto, porque no son los conocidos 0 y 1 del conjunto de los números reales, sino elementos de $\mathcal{B}$ que se comportan como ellos en sus respectivas operaciones; de ahí sus nombres. No sobra anotar que los elementos neutros son distintos, $0_A \neq 1_A$.

4. Para cada elemento $a \in \mathcal{B}$ existe un elemento único, $\overline{a}$, llamado el complemento de a, caracterizado por estas propiedades:
   i) $a+\overline{a} = 1_A$
   ii) $a.\overline{a} = 0_A$

   Sobre la base de lo anterior, para que un elemento de $\mathcal{B}$ sea el complemento de a debe satisfacer dos condiciones: la primera es que al sumar a con el posible complemento, $\overline{a}$, el resultado debe ser el "uno del álgebra", 1_A. La segunda, es que el producto de a con el posible $\overline{a}$ debe ser igual al "cero del álgebra", 0_A.

5. Cada una de las operaciones + y **.** es distributiva con respecto a la otra, es decir, para elementos arbitrarios a, b y c en $\mathcal{B}$,
   i. $a.(b+c) = (a.b) + (a.c)$
   ii. $a+(b.c) = (a+b) . (a+c)$

Aunque las propiedades asociativas pueden deducirse de las restantes de la lista anterior, es frecuente incluirlas entre las propiedades básicas de la definición. [Gersting, J.L., 1986, p. 211], [Johnsonbaugh, R., 2005, p. 482]. No obstante, en la lista de ejercicios se indicará cómo puede demostrarse que, en efecto, las propiedades 1, 3, 4 y 5 permiten deducir las propiedades asociativas 2.

El lector conoce leyes distributivas en diferentes sistemas: la distributividad del operador $\vee$ con respecto al operador $\wedge$, y recíprocamente; la distributividad de la multiplicación con respecto a la suma en el álgebra de los números reales; la distributividad de la unión de conjuntos, $\cup$, con respecto a la intersección $\cap$, y recíprocamente. Pero sabe también que la suma usual no distribuye sobre la multiplicación. Por ejemplo, $5+(3x4) \neq (5+3)x(5+4)$. Por esto debe ser cuidadoso con la aplicación de la regla 5ii. Incidentalmente, esta no distributividad muestra que el álgebra ordinaria de los números reales no es un álgebra de Boole.

Consideremos algunos ejemplos de álgebras booleanas:

Ejemplo 5.31 Nuestro primer ejemplo de álgebra de Boole es la estructura formada por $\mathcal{B} = \mathcal{P}(X)$, la familia de los subconjuntos de un conjunto no vacío X, con las operaciones + y **.** definidas como $\cup$ e $\cap$, respectivamente. En efecto $(\mathcal{P}(X), \cup, \cap)$ es un álgebra de Boole porque:

1. Las dos operaciones son conmutativas, es decir, si A y B son subconjuntos de X,

   i) $A\cup B = B\cup A$ y

   ii) $A\cap B = B\cap A$

2. Las dos operaciones son asociativas, es decir, cualesquiera sean A, B, C en $\mathcal{P}(X)$,

   i) $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$ y

   ii) $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

3. Los conjuntos $\varnothing$ y X tienen la propiedad de que, para todo $A\in \mathcal{P}(X)$,

   i) $A\cup\varnothing=A$ y

   ii) $A\cap X=A$

   Entonces, $0_A=\varnothing$ y $1_A=X$

4. Para cada conjunto $A\in \mathcal{P}(X)$, el complemento de A, $\overline{A} = X-A$, es tal que

   i) $A\cup \overline{A} = X = 1_A$ y

   ii) $A\cap \overline{A} =\varnothing= 0_A$

Finalmente, cada una de las operaciones $\cup$ e $\cap$ es distributiva con respecto a la otra, es decir, dados conjuntos cualesquiera A, B, C en $\mathcal{P}(X)$:

5. i) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ y

   ii) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

Ejemplo 5.32 La siguiente es un álgebra booleana con aplicación a los circuitos lógicos. Para referencia futura la llamaremos "el álgebra binaria de Boole". En este caso $\mathcal{B}$ = {0,1} y las operaciones + y . se definen conforme a las tablas siguientes:

Tabla 5.2 $(\mathcal{B}, +)$

+	0	1
0	0	1
1	1	1

Tabla 5.3 $(\mathcal{B}, +)$

.	0	1
0	0	0
1	0	1

Para mostrar que las operaciones anteriores definen un álgebra booleana mostraremos que se satisfacen las propiedades 1 hasta 5:

1. La conmutatividad es evidente en las tablas anteriores: i) 0+1=1 y 1+ 0 = 1; ii) 0.1=0 y 1. 0=0

2. Para establecer las dos propiedades asociativas se procede exhaustivamente, mostrando que a+(b+c) = (a+b)+c y que a. (b.c)=(a.b) .c, para las ocho ternas posibles sobre $\mathcal{B}$ = {0,1}. Aquí se hará para el caso de la suma; en el caso de la multiplicación se procede en forma análoga.

Tabla 5.4 Asociatividad de + en $\mathcal{B}$ = {0,1}

0+ (0+ 0) = 0+ 0 = 0	(0+0)+ 0=0+ 0 = 0
0+ (0+ 1) = 0+ 1 = 1	(0+0)+ 1= 0+ 1 = 1
0+ (1+ 0) = 0+ 1 = 1	(0+1)+ 0= 1+ 0 = 1
0+ (1+ 1) = 0+ 1 = 1	(0+1)+ 1= 1+ 1 = 1
1+ (0+ 0) = 1+ 0 = 1	(1+ 0)+ 0= 1+ 0 = 1
1+ (0+ 1) = 1+ 1 = 1	(1+ 0)+ 1= 1+ 1 = 1
1+ (1+ 0) = 1+ 1 = 1	(1+1)+ 0= 1+ 0 = 1
1+ (1+ 1) = 1+ 1 = 1	(1+1)+ 1= 1+ 1 = 1

3. Es fácil ver en las tablas 5.2 y 5.3 que $0_A = 0$ y que $1_A = 1$

4. También de las tablas 5.2 y 5.3 se deduce que $\overline{0} = 1$ y que $\overline{1} = 0$. En efecto:

   i. $0+1=1=1_A$ y $0.1=0=0_A$. Por lo tanto $\overline{0} = 1$

   ii. $1+0=1=1_A$ y $1.0=0=0_A$. Entonces, $\overline{1} = 0$

5. Finalmente, las propiedades distributivas se prueban, como las propiedades asociativas, mostrando que se cumplen para cada una de las ocho ternas posibles. Lo hacemos así para el caso de a+(b.c) = (a+b) . (a+c) y dejamos como ejercicio la comprobación de que a. (b+c) = (a.b)+ (a.c).

Tabla 5.5 Distribuitividad de + con respecto a . en $\mathcal{B} = \{0,1\}$

0+ (0. 0) = 0+ 0 = 0	(0+ 0) . (0 + 0) = 0.0 = 0
0+ (0. 1) = 0+ 0 = 0	(0+ 0) . (0 + 1) = 0.1 = 0
0+ (1. 0) = 0+ 0 = 0	(0+ 1) . (0 + 0) = 1.0 = 0
0+ (1. 1) = 0+ 1 = 1	(0+ 1) . (0 + 1) = 1.1 = 1
1+ (0. 0) = 1+ 0 = 1	(1+ 0) . (1 + 0) = 1.1 = 1
1+ (0. 1) = 1+ 0 = 1	(1+ 0) . (1 + 1) = 1.1 = 1
1+ (1. 0) = 1+ 0 = 1	(1+ 1) . (1 + 0) = 1.1 = 1
1+ (1. 1) = 1+ 1 = 1	(1+ 1) . (1 + 1) = 1.1 = 1

Ejercicio 5.33 Sea $\mathcal{F}$ el conjunto de las fórmulas bien formadas de la lógica proposicional. El lector puede mostrar que la estructura ($\mathcal{F}$, $\vee$, $\wedge$), en la que $\vee$ e $\wedge$ denotan la disyunción y la conjunción en $\mathcal{F}$, es un álgebra booleana en la que 0_A = F, 1_A = V, y $\overline{A} = \neg A$, para cada fbf A.

5.3.2.2 Algunos teoremas en las álgebras de Boole

A partir de las propiedades 1–5 se deducen algunos teoremas que establecen resultados importantes, válidos en toda álgebra booleana. Demostraremos algunos de ellos; otros se proponen como ejercicio para el lector. En lo que sigue se omite a veces el símbolo de multiplicación en a.b y se escribe simplemente ab; igualmente, se denotan con 0 y con 1 los elementos neutros de la suma y de la multiplicación, en lugar de 0_A y 1_A. Finalmente, se observa la precedencia de la multiplicación sobre la suma, esto es, se escribe ab+c, con el significado (a.b)+c.

Teorema 10 Cada elemento en un álgebra boolena ($\mathcal{B}$,+, .) es idempotente, es decir:

Para todo elemento a$\in \mathcal{B}$:

i) a + a = a y

ii) aa = a

Demostración de i.

$a + a = (a + a)\,.1$ – Propiedad del elemento neutro en la multiplicación.

$\quad = (\underline{a} + a)\,.\,(\underline{a} + \bar{a})$ – Una propiedad característica del complemento de a.

$\quad = \underline{a} + (a.\bar{a})$ – Propiedad distributiva; $\underline{a\ +}$ es el “sumando” común.

$\quad = a + 0$ – La otra propiedad característica del complemento de a.

$\quad = a$ – Propiedad del elemento neutro en la suma.

Demostración de ii.

$a.a \quad = (a.a) + 0$ – Propiedad del elemento neutro en la suma.

$\quad = (\underline{a}.\ a) + (\underline{a}.\bar{a})$ – Una propiedad característica del complemento de a.

$\quad = \underline{a}.\ (a+\bar{a})$ – Propiedad distributiva, $\underline{a.}$ es el “factor” común.

$\quad = \underline{a}.\ 1$ – La otra propiedad característica del complemento de a.

$\quad = a.$ – Propiedad del elemento neutro en la multiplicación.

El teorema anterior establece una de las propiedades más importantes y características de las álgebras de Boole: la idempotencia. Son pertinentes dos observaciones sobre este teorema:

Las dos leyes de idempotencia de las álgebras de Boole constituyen la razón para que en tales estructuras no existan “exponentes” ni “coeficientes”. Esto, porque si un elemento x se opera consigo mismo un número cualquiera de veces, como en x.x.x.x, el resultado será siempre x (observe que la asociatividad hace innecesario insertar paréntesis en x.x.x.x). De tal manera que x^n es siempre x. Igualmente, x+x+x+x+x =x y por lo tanto la expresión 5x carece de significado.

5.3.2.3 El principio de la dualidad en las álgebras de Boole

Le invitamos a comparar paso a paso la demostración de a.a =a con la de a + a =a, presentadas en el teorema 10. Note, inicialmente, que la expresión a.a =a se obtiene cambiando el operador + por el operador **.** en a + a =a. Usted podrá notar, además, que la demostración de a.a =a se puede obtener de la demostración de a + a =a simplemente sustituyendo cada aparición de 1, por 0; cada aparición de 0, por 1; cada aparición de **.** por +, y cada aparición de + por **.** . Este hecho se conoce como Principio de la dualidad de las álgebras de Boole.

El dual de una expresión E de un álgebra booleana ($\mathcal{B}$,+, **.**) es la expresión d(E) obtenida a partir de E intercambiando los operadores + y **.** e intercambiando 0 y 1.

Ejemplo 5.34 El dual de E: $x + y(\overline{x} + 1)$ es d(E): $x \,.\, (y + \overline{x} \,.\, 0)$

El dual de E: $x + x\overline{z} = x$, es d(E): $x(x + \overline{z}) = x$

El lector puede comprobar que la lista A1–A5 incluye, en cada caso, una propiedad y su dual. Este hecho origina la siguiente propiedad de las álgebras de Boole:

Si un teorema T es deducible en un álgebra booleana ($\mathcal{B}$,+, **.**) entonces el dual de T también es deducible y para deducirlo basta con sustituir cada expresión surgida en la demostración de T, por su dual.

Teorema 11 En cada álgebra boolena ($\mathcal{B}$,+, **.**) se satisfacen las siguientes leyes de dominancia:

Para cada elemento $a \in \mathcal{B}$:

i. $a + 1 = 1$ y

ii. $a \,.\, 0 = 0$

Demostración de i: El lector puede aportar la justificación de cada paso:

$a + 1 = (a + 1) \,.\, 1 = (\underline{a} + 1) \,.\, (\underline{a} + \overline{a}) = a + (1 \,.\, \overline{a}) = a + \overline{a} = 1$

La demostración de ii se propone como ejercicio.

En el capítulo 3 se demostraron y utilizaron las leyes de absorción $p \wedge (p \vee q) \equiv p$ y su dual $p \vee (p \wedge q) \equiv p$. Como veremos en el teorema siguiente, estas leyes y sus contrapartes en el álgebra de conjuntos, $A \cap (A \cup B) = A$ y $A \cup (A \cap B) = A$, no son más que casos particulares del teorema siguiente:

Teorema 12 Leyes de absorción

Para elementos cualesquiera a y b de un álgebra boolena ($\mathcal{B}$,+, **.**)

i. $a + ab = a$

ii. $a.\,(a+b) = a$

Demostración de i:

$a + ab = a.1 + ab = a(1 + b) = a.1 = a$

La demostración de ii se propone como ejercicio.

El teorema siguiente establece la unicidad de $\overline{a}$ para cada $a \in \mathcal{B}$. Este resultado se requiere en la demostración de las leyes de De Morgan.

Teorema 13 El complemento $\bar{a}$ de cada elemento a en un álgebra de Boole es único.

Demostración: Supondremos que dos elementos, b y c, satisfacen las condiciones que caracterizan al complemento de a y demostraremos que b = c.

Si b y c son supuestos complementos de a, deben satisfacerse estas cuatro igualdades:

1. $a + b = 1$
2. $ab = 0$
3. $a + c = 1$
4. $ac = 0$

Entonces, las propiedades básicas y las igualdades anteriores justifican esta serie de igualdades:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
\mathbf{b} & = & b+0 & = & b+ac & = & (b+a)(b+c) & = & (a+b)(b+c) & = & 1(b+c) & = & (a+c)(b+c) & = & ab+c & = & 0+c & = & \mathbf{c} \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
 & A3 & & 4 & & A5 & & A2 & & 1 & & 3 & & A5 & & 2 & & A3 &
\end{array}$$

Recuerde que $\bar{a}$ debe cumplir simultáneamente las condiciones $a + \bar{a} = 1$ y $a.\bar{a} = 0$. No cometa el error de concluir, sólo a partir de a+b =1, que $b = \bar{a}$; aun le quedará por establecer que ab=0. (Es un error frecuente concluir que si la unión de dos conjuntos es el conjunto universo, cada uno de los conjuntos es el complemento del otro, es decir, que si $A \cup B = \mathcal{U}$ entonces $B=\bar{A}$. En efecto, lo único que puede concluirse es que $\bar{A} \subset B$). Igualmente, es un error concluir, de ab=0, que $b= \bar{a}$.

Teorema 14 Leyes de De Morgan

i) $\overline{a + b} = \bar{a} \,.\, \bar{b}$

ii) $\overline{a.b} = \bar{a} + \bar{b}$

Demostración de i:

$(a+b)+ \bar{a}.\bar{b} = (a+b+ \bar{a}).\ (a+b+ \bar{b}\,) = (a + \bar{a} + b).\ (a+b+ \bar{b}) = (1+b).(a+1) = 1+1 = 1.$

$(a+b)(\bar{a}.\bar{b}) = a(\bar{a}.\bar{b})+ b(\bar{a}.\bar{b}) = (a.\bar{a})\ \bar{b}+(b.\bar{b}).\bar{a} = 0.\ \bar{b}+ 0.\ \bar{a}= 0+0 =0.$

Se cumplen así las condiciones que determinan la propiedad $\overline{a + b} = \bar{a} \,.\, \bar{b}$

La demostración de ii se propone como ejercicio.

Teorema 15 En cada álgebra de Boole:

$\overline{0} = 1$, $\overline{1} = 0$ $\overline{\overline{a}} = a$

Demostración: Se deja como ejercicio.

A continuación mostraremos algunos ejemplos de simplificación de expresiones, mediante el uso de las propiedades básicas y de los resultados establecidos en los teoremas. En cada caso se supone que los símbolos utilizados representan elementos de un álgebra booleana ($\mathcal{B}$,+, .).

Ejemplo 5.35 Muestre que $(a+b)(a+c)\overline{\overline{a}b} = a$

$(a+b)(a+c)\overline{\overline{a}b} = (a+b)(a+c)(\overline{\overline{a}}+\overline{b}) = (a+b)(a+c)(a+\overline{b}) = a + bc\overline{b} = a + 0 = a$

Ejemplo 5.36 Mostrar que si $a + b = c$ y $ab = 0$ entonces $a = c\overline{b}$

$c\overline{b} = (a + b)\,\overline{b} = a\overline{b} + b\overline{b} = a\overline{b} + 0 = a\overline{b} + ab = a(\overline{b}+b) = a.1 = a$

El lector puede apreciar la importancia de establecer resultados generales en una estructura algebraica si piensa que, al trasladar a cualquier álgebra booleana particular el resultado del ejemplo anterior no sólo obtendrá un resultado verdadero, sino que la demostración se haría adaptando al álgebra particular los pasos utilizados en la demostración anterior. Por ejemplo, supongamos que se nos pide probar que si A, B, C son subconjuntos de un conjunto universal X entonces

Si $A \cup B = C$ y $A \cap B = \varnothing$ entonces $A = C \cap \overline{B}$ (observe la correspondencia con si $a + b = c$ y $ab = 0$ entonces $a = c\overline{b}$).

Como se dijo anteriormente, la demostración general es aplicable a cada instancia de álgebra de Boole. En este caso tenemos:

$c\overline{b} = (a + b)\,\overline{b} = a\overline{b} + b\overline{b} = a\overline{b} + 0 = a\overline{b} + ab = a(\overline{b}+b) = a.1 = a$

$C \cap \overline{B} = (A \cup B) \cap \overline{B} = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{B}) = (A \cap \overline{B}) \cup \varnothing = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B) = A \cap (\overline{B} \cup B) = A \cap X = A$

Ejemplo 5.37 Simplificar tanto como sea posible la expresión $\overline{x}y + (\overline{x} + xy)z + x(y + \overline{y}z + z)$

$\overline{x}y + (\overline{x}+ xy)z + x(y + \overline{y}z + z) = \overline{x}y + (\overline{x}+ x)(\overline{x}+ y)z + x((y + \overline{y})(y + z) + z) =$

$\overline{x}y + 1.(\overline{x}+ y)z + x((1.(y + z) + z) = \overline{x}y + (\overline{x}+ y)z + x((y + z) + z) = \overline{x}y + (\overline{x}+ y)z + x(y + z) =$

$\overline{x}y + \overline{x}z + yz + xy + xz = (\overline{x}y + xy) + (\overline{x}z + xz) + yz =$

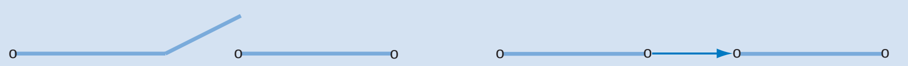
$(\overline{x}+x)y + (\overline{x}+x)z + yz = y + z + yz = (y.1+ yz) + z = y(1 + z) + z = y.1 + z = y + z$

5.3.3 Álgebras booleanas y circuitos combinatorios

Las álgebras booleanas tienen una aplicación importante en el diseño y simplificación de los llamados circuitos lógicos o circuitos combinatorios, que se presenta con la debida profundidad en los textos de lógica digital. En esta sección nos limitaremos a presentar los fundamentos generales y a ilustrar su vinculación con los elementos de la sección anterior.

Con relación a un circuito, consideraremos sólo los controles incorporados a él para impedir o permitir el paso de la corriente por sus diferentes caminos. Estos controles son los interruptores o *switches,* de funcionamiento tipo *on–off.* En la figura 5.1 se presenta el caso de un único interruptor. Cuando está en posición *on* (cerrado) permite el paso de corriente; cuando está en posición *off* (abierto) no hay paso de corriente.

Figura 5.1



Interruptor abierto

Interruptor cerrado

5.3.3.1 Conexiones en serie y en paralelo

Estas dos formas básicas de interconectar interruptores se ilustran en las figuras 5.2 y 5.3 respectivamente. El circuito de la figura 5.2 se conoce como circuito AND. Se caracteriza porque hay paso de corriente si y sólo si los dos interruptores están cerrados. El circuito de la figura 5.3 es el circuito OR, caracterizado porque hay corriente si y sólo si por lo menos uno de los dos interruptores está cerrado.

Figura 5.2

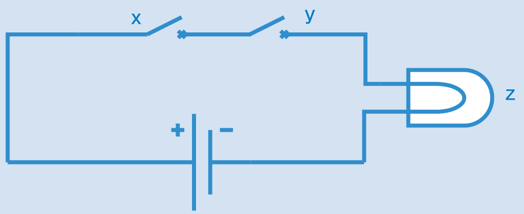
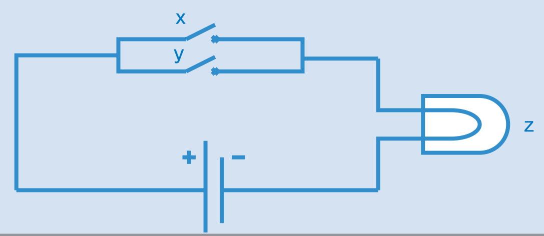
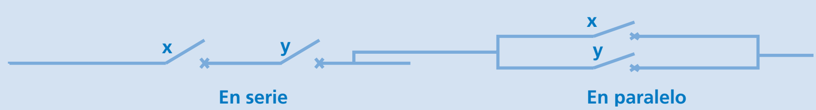


Figura 5.3



Dado que estamos interesados solamente en la posición de los interruptores, usaremos la siguiente representación simplificada de los circuitos anteriores.

Figura 5.4



Como veremos, la expresión "álgebra de circuitos lógicos" se explica fácilmente si se conviene en denotar los estados cerrado y abierto de un interruptor por 1 y 0 respectivamente, y denotar también con 1 o 0 el paso o no de corriente, respectivamente. En este caso todas las posibles combinaciones de los dos interruptores x, y, junto con sus efectos f(x, y) y g(x, y) pueden disponerse como en las tablas siguientes:

Tabla 5.6 Conexión en paralelo

x	y	f(x, y) =x+y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Tabla 5.7 Conexión en serie

x	y	g(x, y) =xy
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Observe que los valores de f(x,y) coinciden con los de la suma en el álgebra binaria del ejemplo 5.32 y los valores de g(x,y) con los de la multiplicación en el mismo ejemplo. Esto permite escribir f(x, y)=x+y para la conexión en paralelo, y g(x, y)=xy, para la conexión en serie, con lo cual se genera un modelo algebraico para representar una interconexión de interruptores dada. En los cálculos para el tratamiento algebraico del modelo se usa la convención de que los interruptores designados con la misma variable coinciden en su estado (1 o 0), es decir, todos estarán simultáneamente abiertos, o simultáneamente cerrados, en tanto que $\bar{x}$ representa un interruptor que tiene el estado opuesto del que se denota por x, es decir, si x está abierto, $\bar{x}$ está cerrado y si x está cerrado, $\bar{x}$ está abierto. De acuerdo con esto, es claro que:

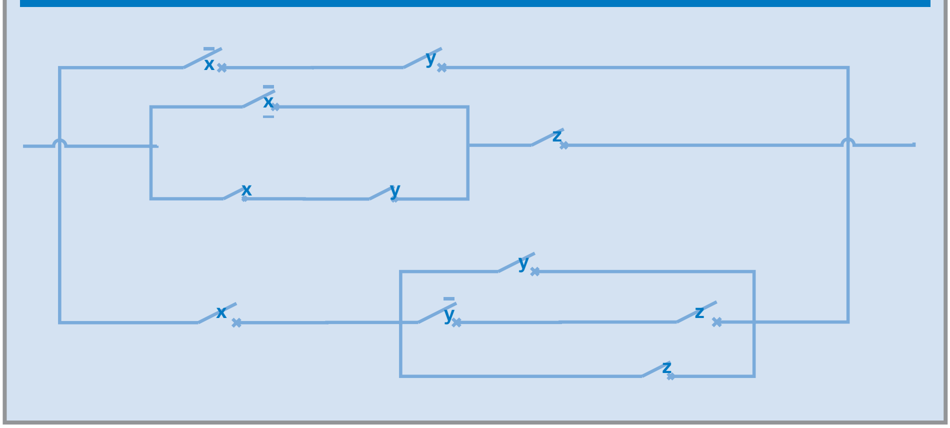
$$x + \bar{x} = 1 \text{ y que } x\,\bar{x} = 0$$

Como era de esperarse.

Las propiedades asociativas de las operaciones que definen un álgebra booleana y la convención anterior para designar conexiones en paralelo y en serie, permiten representar circuitos complejos como el de la figura adjunta mediante una función que llamaremos función interruptora del circuito.

Ejemplo 5.38 Escriba una función interruptora para el circuito de la figura adjunta.

Figura 5.5



La conexión en el primer nivel, en sentido descendente, corresponde a $\bar{x}y$. En el circuito interior del segundo nivel $\bar{x}$ está conectado en paralelo con xy, y el resultado, $\bar{x}$ +xy, está conectado en serie con z. Esto da origen a la expresión $(\bar{x} + xy)z$. El resultado parcial hasta el segundo nivel es entonces:

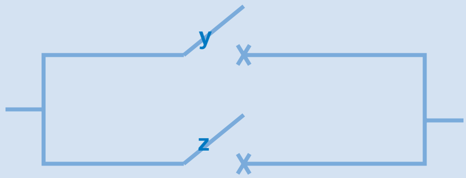
$$\bar{x}y + (\bar{x}+xy)z$$

Procediendo de igual forma se obtiene la siguiente función booleana de tres variables, como función descriptora del circuito:

$$f(x, y, z)= \bar{x}y + (\bar{x}+xy)z + x(y +\bar{y}z + z)$$

En el ejemplo **5.37** se mostró cómo simplificar la expresión $\bar{x}y + (\bar{x}+xy)z + x(y +\bar{y}z + z)$ y obtener como resultado la expresión equivalente y+z. Esto significa que el circuito anterior y el de la siguiente figura realizan las mismas funciones.

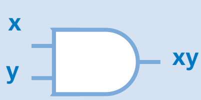
Figura 5.6



5.3.3.2 Compuertas lógicas

En los sistemas digitales se utilizan, empaquetados en circuitos integrados, ciertos circuitos electrónicos llamados compuertas lógicas. En este caso no hay interruptores sino entradas al circuito, en forma de alto voltaje (1) y de bajo voltaje (0), y se obtiene una salida que depende de la combinación de las entradas. Las compuertas lógicas básicas son: las compuertas binarias AND y OR y la compuerta unaria NOT (o INVERSOR). Los símbolos lógicos de cada compuerta y sus correspondientes tablas de valores de entrada y salida se presentan en las figuras siguientes:

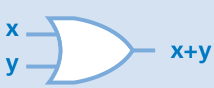
Figura 5.7



Compuerta AND

Entrada		Salida
x	y	xy
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

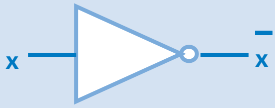
Figura 5.8



Compuerta OR

Entrada		Salida
x	y	x+y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Figura 5.9

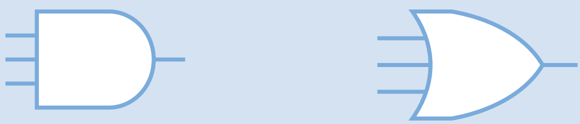


Compuerta NOT o Inversor

Entrada	Salida
x	$\bar{x}$
0	1
1	0

El hecho de que la suma y la multiplicación sean asociativas permite utilizar compuertas AND y OR de más de dos entradas, sin ambigüedades en la interpretación: si x, y, z son las entradas a una compuerta AND de tres entradas, la salida, xyz, será 1 en sólo una de las 8 combinaciones posibles de valores de entrada: x = y = z = 1. En el caso de la compuerta OR de tres entradas, la salida, x+y+z será 0 sólo cuando x = y = z = 0 y será 1 para cualquiera de las 7 combinaciones restantes.

Figura 5.10

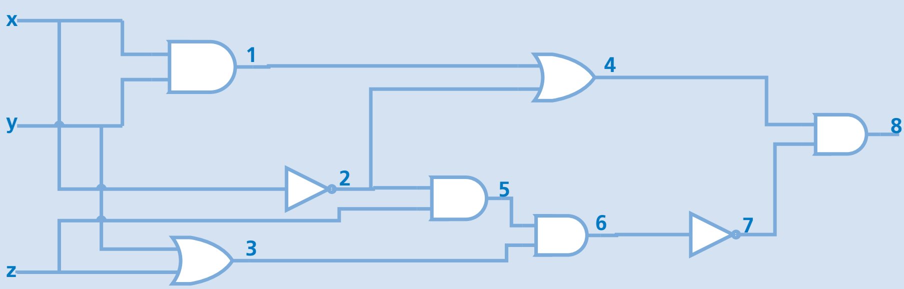


Compuerta AND de tres entradas

Compuerta OR de tres entradas

Ejemplo 5.39 Determine la función booleana de tres variables, f(x, y, z) que describe la salida en el siguiente circuito:

Figura 5.11



Las salidas de cada compuerta utilizada en el circuito están numeradas para orientar al lector en el proceso de establecer la salida final. Son las siguientes:

1: xy 2: $\bar{x}$ 3: $y + z$ 4: $xy + \bar{x}$ 5: $\bar{x}z$ 6: $\bar{x}z(y+z)$

7: $\overline{\bar{x}z(y+z)}$ 8: $\overline{\bar{x}z(y+z)}\,(xy + \bar{x})$

Ejercicio 5.40 Diseñe un circuito lógico de tres entradas cuya salida es $f(x, y, z) = 1$ si exactamente dos de las entradas tienen valor 1 y $f(x, y, z) = 0$ en cualquiera otro caso.

Solución: Inicialmente se prepara una tabla de valores, tres entradas y una salida, que recoge las condiciones establecidas para la función. Es la siguiente:

Entradas			Salida
x	y	z	f(x, y, z)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	**1**
1	0	0	0
1	0	1	**1**
1	1	0	**1**
1	1	1	0

Enseguida, y a partir de la tabla anterior, se determina la expresión booleana que define la función. Una forma de hacerlo es la siguiente:

Se identifican en la tabla los casos en los que la salida es 1. Son tres: El primero, en sentido descendente en la tabla, corresponde a $x = 0$, $y = 1$ y $z = 1$. En este caso el producto $\bar{x}yz$ describe la salida, porque $\bar{x}yz = 1$. El segundo corresponde a $x = 1$, $y = 0$ y $z = 1$ y está descrito entonces por el producto $x\bar{y}z$ y el tercer caso queda descrito por producto $xy\bar{z}$. Finalmente, dado que los tres productos mencionados describen la función cuando la salida es 1, y dado que en todos los casos restantes la salida es 0, la función definida por la tabla anterior queda también descrita por la expresión:

$$f(x, y, z) = \bar{x}yz + x\bar{y}z + xy\bar{z}$$

La parte final del ejercicio es el diseño del circuito, lo cual se deja como ejercicio al lector.

Ejercicio 5.41 Diseñar el circuito de tres entradas y una salida, correspondiente a la función:

$$f(x, y, z) = \bar{x}yz + x\bar{y}z + xy\bar{z} \qquad \text{(Ver ejercicio 5.40)}$$

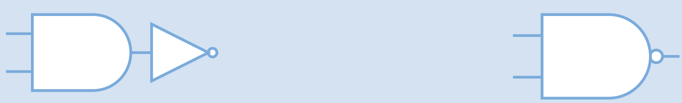
Observe que la función $f(x, y, z) = \bar{x}yz + x\bar{y}z + xy\bar{z}$ es una suma de productos, y que en cada uno de estos aparece cada variable (o su complemento). Esta es una de las formas normalmente utilizadas para expresar las funciones booleanas definidas sobre el álgebra binaria ({0, 1}, +, .). Aquí la llamaremos *forma normal sumativa completa*, FNSC, por analogía con la expresión *forma normal disyuntiva completa*, utilizada para expresar las funciones booleanas en el álgebra proposicional como disyunción de conjunciones, como en el caso de $f(p, q, r)= (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)$.

5.3.3.3 Otras compuertas lógicas

Las compuertas que veremos en esta sección pueden obtenerse a partir de las compuertas AND, OR y NOT estudiadas en la sección anterior. Sin embargo, por su importancia en el diseño de circuitos se estudian como casos especiales, y se les asigna también un símbolo particular. Son las siguientes:

Compuerta NAND: Se forma conectando la salida de una compuerta AND a un inversor. El símbolo de la derecha es un diseño simplificado de sus componentes NOT(AND); se conoce como compuerta NAND.

Figura 5.12

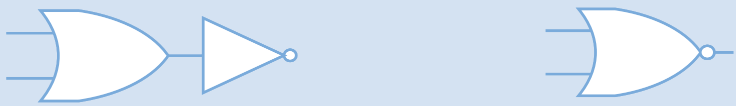


A la salida de la compuerta AND se conecta un inversor

El círculo del inversor recuerda el significado. Compuerta NAND

Compuerta NOR: Se forma conectando la salida de una compuerta AND a un inversor. El símbolo de la derecha es un diseño simplificado de sus componentes NOT(OR); se conoce como compuerta NOR.

Figura 5.13



A la salida de la compuerta OR se conecta un inversor

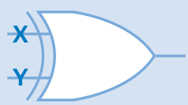
Símbolo lógico estándar para la compuerta NOR

Compuerta X–OR (OR Exclusiva)

Es una compuerta binaria cuya valor de salida es 1 si y sólo si exactamente una de las entradas tiene el valor 1. Este comportamiento es análogo al “o exclusivo” de la lógica proposicional: $p \oplus q$ es V si y sólo si exactamente uno de los átomos tiene el valor V.

La función booleana que proporciona el valor de salida en la compuerta X–OR para las entradas x, y, es $f(x, y) = x\bar{y} + \bar{x}y = x \oplus y$. El símbolo lógico asignado a la compuerta aparece a continuación:

Figura 5.14



$X \oplus Y$

Símbolo lógico estándar para la compuerta X– OR

Compuerta X–NOR (NOR Exclusiva) o compuerta de equivalencia

Las propiedades de las álgebras de Boole establecen que:

$$\overline{x \oplus y} = \overline{x\bar{y} + \bar{x}y} = (\overline{x\bar{y}})(\overline{\bar{x}y}) = (\bar{x} + \bar{\bar{y}})(\bar{\bar{x}} + \bar{y}) = (\bar{x} + y)(x + \bar{y}) = xy + \bar{x}\bar{y}$$

El circuito que ejecuta esta función se denomina compuerta X–NOR y se denota como $\overline{x \oplus y}$. El símbolo utilizado para esta compuerta sigue el mismo patrón de las compuertas NAND y NOR.

Figura 5.15

A la salida de una compuerta X–OR se conecta un inversor

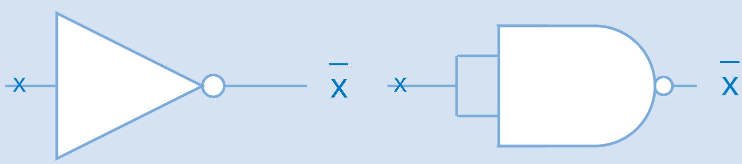
El círculo inversor para denotar la compuerta X–NOR

Una característica importante de las compuertas NAND y NOR es que el circuito lógico determinado por cualquier función booleana puede diseñarse utilizando exclusivamente compuertas NAND o compuertas NOR. Esto es posible, porque las salidas de las compuertas NOT, AND y OR se pueden obtener mediante tales compuertas. Veamos cómo hacerlo, para las compuertas NAND.

Recordemos que en el caso de una compuerta NAND de dos entradas x, y, la salida es $\overline{xy}$, el complemento del producto. ¿Cómo expresar las salidas de las compuertas NOT, AND y OR como complementos de productos?

1. $\bar{x} = \overline{x.x}$. Esto significa que el inversor se puede sustituir por una compuerta NAND con las dos entradas iguales.

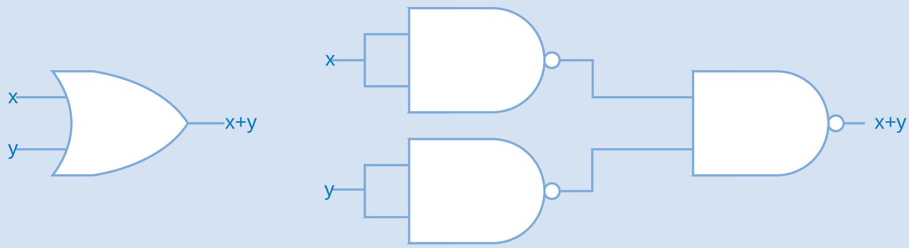
Figura 5.16



El inversor construido con compuertas NAND

2. $x + y = \overline{\overline{x+y}} = \overline{\bar{x}\,\bar{y}} = \overline{\overline{xx}\;\overline{yy}}$. Esto significa que la compuerta OR se puede sustituir con tres compuertas NAND: $\overline{x.x}$, $\overline{y.y}$ y una tercera cuyas entradas son las salidas de las dos anteriores.

Figura 5.17

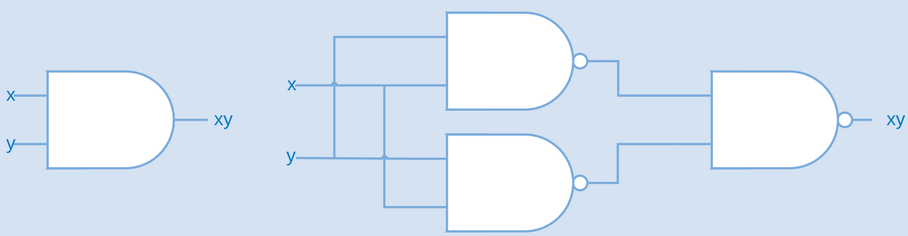


La compuerta OR diseñada con compuertas NAND

3. $xy = \overline{\overline{xy}} = \overline{\overline{xy}\;\overline{xy}}$. Entonces, la compuerta AND se puede sustituir por tres compuertas NAND.

   Los resultados anteriores se observan en las gráficas siguientes:

Figura 5.18



La compuerta AND diseñada con compuertas NAND

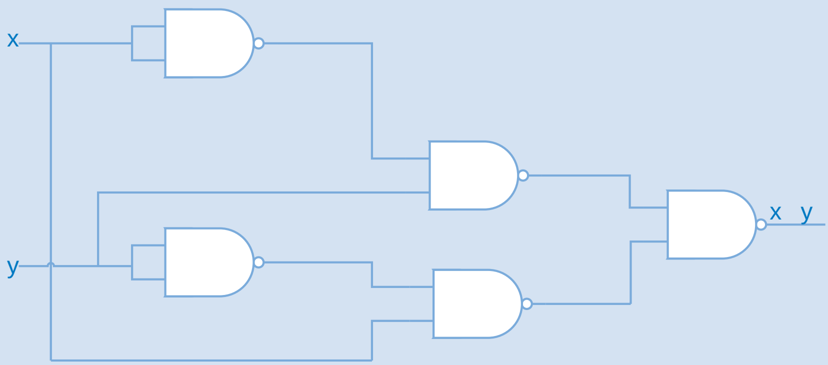
Ejercicio 5.42 Exprese las compuertas NOT, OR y AND por medio de compuertas NOR

Ejemplo 5.43 Diseñar un circuito X–OR con entradas x, y, que utilice solamente compuertas NAND:

$$x \oplus y = x\bar{y} + \bar{x}y = \overline{\overline{x\bar{y} + \bar{x}y}} = \overline{(\bar{x} + y)(x + \bar{y})} = \overline{\overline{x\bar{y}} + \overline{\bar{x}y}}$$

Esta última expresión indica que se requieren cinco compuertas NAND de dos entradas, tal como aparece en la figura siguiente:

Figura 5.19



La compuerta X–OR diseñada con compuertas NAND

En el ejemplo 5.37 se pudo apreciar la conveniencia de simplificar, tanto como sea posible, un circuito lógico. El resultado se obtuvo con un proceso enteramente algebraico, aplicando propiedades del álgebra booleana ({0, 1}, +, .). Sin embargo, con frecuencia no es fácil determinar si existe o no la posibilidad de aplicar una vez más alguna de tales propiedades para obtener una expresión más simple que la anterior. Por esto se han desarrollado técnicas adicionales de simplificación conocidas como mapas de Karnaugh y método de Quine-McCluskey, que se estudian en cursos de electrónica y de lógica digital.

EJERCICIOS

Álgebras Booleanas

1. Las expresiones a–e son expresiones sobre el álgebra binaria ({0, 1}, +, .). Escriba la expresión correspondiente a cada una, en la lógica proposicional y en el álgebra de conjuntos.

a. $(x+1)(y+0)(\overline{y+\overline{x}})$

b. $(x+\overline{y})(x+0)(\overline{x+y+z})$

c. $(x+y))(\overline{\overline{z}(z+\overline{x})})$

d. Si $x + y = 0$ entonces $x = y = 0$

e. $x+x(y+1)=x$

2. Demuestre que las propiedades asociativas de las álgebras booleanas se pueden demostrar utilizando las propiedades A1, A3, A4 y A5, así:

Para probar que a + (b+c) = (a+b) + c:

a. Haga x = a + (b+c) y haga y = (a+b) + c

b. Pruebe ahora que ax = ay y que $\bar{a}x = \bar{a}y$

c. Sume miembro a miembro en 2, para obtener que x = y, y concluir así la demostración.

3. Muestre que si usted trata de construir un álgebra booleana de 4 elementos, ($\mathcal{B}$ = {0, 1, a, b}, +, .), encontrará que, para que se cumplan las propiedades que definen el álgebra, las tablas de suma y multiplicación se pueden construir de sólo una forma. (Recuerde que ahora no tendrá que verificar la asociatividad). Esto significa que existe sólo un álgebra booleana de 4 elementos en el sentido de que la única diferencia entre ellas será el nombre de los elementos y de las operaciones. Los matemáticos les dicen "isomorfas" a las estructuras con tales propiedades.

4. Pruebe que no puede existir un álgebra booleana ($\mathcal{B}$, +, .) en la que el número de elementos de $\mathcal{B}$ sea impar. (Ayuda: pruebe que ningún elemento del álgebra puede ser igual a su complemento, es decir, el complemento de un elemento no puede ser él mismo. Recuerde que $1 \neq 0$)

5. Considere un entero positivo n que es el producto de números primos distintos. Por ejemplo, 15 =3x5, 42=2x3x7, pero no es el caso de 24 = 2^3x3. Se puede probar que, si se toma como $\mathcal{B}$ el conjunto de los divisores positivos de un entero n con tal propiedad, es posible definir un álgebra booleana finita sobre $\mathcal{B}$ si se definen las operaciones de suma y multiplicación así:

a+b =mínimo común múltiplo de a y b =mcm(a, b), ab= máximo común divisor de a y b = mcd(a, b)

Para este caso tomaremos n = 2x3x7. Entonces, $\mathcal{B}$ = D_{42}, el conjunto de los divisores positivos de 42 es D_{42} = {1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42} un conjunto con 2^3=8 elementos (Las álgebras booleanas finitas tienen siempre 2^m elementos). El lector puede aportar los elementos que faltan en las tablas siguientes de suma y multiplicación:

Tabla 5.8 La suma en D_{42}

+	1	2	3	6	7	14	21	42
1	**1**	**2**	**3**	**6**	**7**	**14**	**21**	**42**
2	**2**	2						
3	**3**							
6	**6**	6	6	6	42	42	42	42
7	**7**							
14	**14**			42		14		
21	**21**	42	21					
42	**42**							

Tabla 5.9 La multiplicación en D_{42}

.	1	2	3	6	7	14	21	42
1	1							1
2					1	2		2
3			3					3
6	1	2	3	6	1	2	3	6
7		1			7			7
14				2				14
21								21
42	1	2	3	6	7	14	21	42

Una vez haya completado las tablas anteriores el lector podrá observar que:

i. Los resultados de operar elementos en $\mathcal{B} = D_{42}$ son, a su vez, elementos en $\mathcal{B} = D_{42}$.

ii. Las dos operaciones son conmutativas; las entradas en la tabla son simétricas con respecto a las diagonales principales que descienden de izquierda a derecha. En general, mcm(a, b) = mcm(b, a) y mcd(a, b)=mcd(b, a).

iii. Cada operación tiene un elemento neutro, como se deduce de las columnas y filas resaltadas en las tablas: mcm(a, 1) =a y mcd(a, 42) = a, para cada elemento $a \in D_{42}$. Entonces, $0_A = 1$ y $1_A = 42$

iv. Una vez establecidos los elementos 0 y 1, se encuentra que para cada elemento a existe un complemento $\overline{a}$. Como ejemplo, determinemos $\overline{6}$:

La primera condición, $6+\overline{6}= 1_A = 42$ muestra que $\overline{6} \in \{7, 14, 21, 42\}$ como se aprecia en las cuatro últimas entradas de la fila encabezada por 6 en la tabla de la suma.

La segunda condición, $6.\overline{6}= 0_A = 1$ muestra que $\overline{6} \in \{1, 7\}$ como se desprende de los resultados en la tabla de la multiplicación. Entonces, 7 es el complemento de 6, por ser el único elemento que satisface las dos condiciones; $\overline{6}= 7$.

v. Determine los complementos de cada elemento del álgebra.

vi. Muestre, con algunos casos particulares, que se cumplen las dos propiedades distributivas.

6. Demuestre las afirmaciones siguientes, válidas en toda álgebra booleana ($\mathcal{B}$, +, .):

i. $x \oplus y = 0$ si y sólo si $x = y$

ii. $x(y \oplus z) = xy + xz$

iii. $(x \oplus y) \oplus x = x$

7. Escriba el dual de cada expresión siguiente:

i. $(x + y)(x + 1) = x + y + xy$

ii. $x\bar{y}=0$ si y sólo si $xy = x$

8. Sea f la función booleana de tres variables $f(x, y, z) = 1$ si y sólo si el número de 1s en (x, y, z) es impar. Diseñe el circuito lógico correspondiente a f.

9. Dada la forma explícita de una función booleana, se puede determinar su FNSC sin necesidad de calcular los valores de la función para cada combinación de valores de sus variables, utilizando la identidad $a + \bar{a} = 1$, para completar los términos que falten en los productos presentes en la función. Por ejemplo, la función $f(x, y, z) = xz + x\bar{y}\bar{z} + y$ no está en FNSC porque falta la variable y en el primer término y faltan las variables x, z en el tercero. Escribimos entonces

$f(x, y, z) = x(y+\bar{y})z + x\bar{y}\bar{z}+ y(x+\bar{x})(z+\bar{z}) = xyz + x\bar{y}z+ x\bar{y}\bar{z}+ xyz + xy\bar{z}+ \bar{x}yz+\bar{x}y\bar{z}=$

$= xyz+ x\bar{y}z+ x\bar{y}\bar{z}+ xy\bar{z}+ \bar{x}yz+\bar{x}y\bar{z}$. (Tenga presente que la FNSC es una forma normal, y no la expresión más simple de la función).

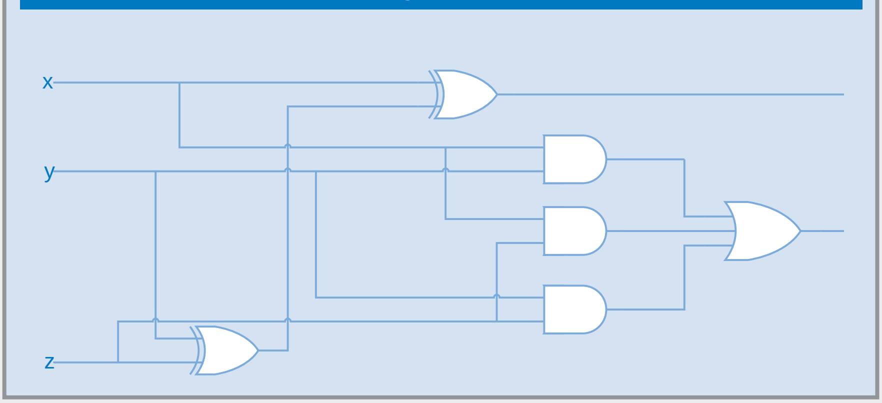
10. Dibuje el circuito lógico que corresponde a cada una de las funciones booleanas siguientes:

i. $xy + x\bar{y}z + y(\bar{x}+z) + \overline{yz}$

ii. $\bar{y}(x+x\bar{w}) + \overline{xz}$

11. Determine, en FNSC, la función de salida en el circuito de la figura 5.20.

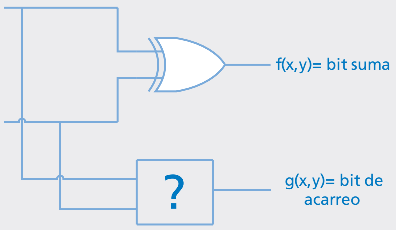
Figura 5.20



12. La aritmética binaria se realiza por medio de circuitos lógicos. En el sistema binario las sumas 0 + 0 = 0, 0 + 1 = 1, 1+ 0 = 1 y 1+ 1=10 muestran que sólo en este último caso la suma tiene dos bits: el bit 0 de la derecha, llamado bit suma, y el bit 1 de la izquierda, llamado bit de acarreo (En los tres primeros casos se considera que el bit de acarreo es 0).

Bits de entrada x	y	Bit suma f(x, y)	Bit de acarreo g(x, y)
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

Observe que la salida de la función f(x, y) es 1 si y sólo si exactamente una de las entradas es 1, es decir, $f(x, y) = x \oplus y$. Se le pide que identifique la función que describe el bit de acarreo, para que complete el circuito siguiente de dos entradas y dos salidas, conocido como semisumador.



13. Considere la siguiente suma binaria:

$$\begin{array}{r} 10101 \\ +\quad 101 \\ \hline 11010 \end{array}$$

Este es el proceso cuando se inicia la suma, con los dos bits de la columna del extremo derecho: "1 más 1 es 10; escribo 0 y llevo 1 a la columna siguiente". Aquí se configura esta situación: se tienen dos bits de entrada:1 y 1. La suma es 10. El 0 que se escribe es el bit suma; el 1 que se lleva a la columna siguiente se llama bit de acarreo. Pero al sumarse con los dos bits 0 de la segunda columna, ese bit se convierte en un "bit de acarreo previo". Entonces, de la segunda columna se tiene: bit de acarreo previo, 1; bits de entrada, 0 y 0; la suma, 1 + 0 + 0 = 1 será el bit suma, el bit de acarreo será 0. Por lo tanto, en la tercera columna se tiene la suma 1 + 1+ 1. Hasta terminar. Observe entonces que se requiere una tabla de tres entradas: bit de acarreo previo, y dos bits sumandos, y dos salidas: bit suma y bit de acarreo. Aquí se muestran los resultados para dos combinaciones de valores. Se le pide construir la tabla completa, determinar la expresión booleanas para el bit suma f(x, y, z) y para el bit de acarreo g(x, y, z) donde x, y son los bits de entrada o sumandos y z el bit de acarreo previo.

(Respuesta parcial: f(x, y, z) =(_ ⊕ y) △ z donde _ es una de las entradas y △ un operador, y g(x, y, z) = xy + __ △ __ donde __ son productos y △ un operador). Una vez obtenida la respuesta, diseñe el circuito de tres entradas y dos salidas. Se llama circuito sumador completo.

Referencias bibliográficas

Atienza, M. (1997). *Derecho y Argumentación*. Bogotá: Universidad Externado de Colombia.

Bassham, G.; Irwin, W., Nardone, H., & Wallace, J. (2002). *Critical Thinking, A Student´s Introduction*, New York: McGraw-Hill.

Bustamante, A. (1988). *Elementos de Álgebra en Ciencias de la Computación.* Cali: Serie textos universitarios. Universidad Icesi.

Copi, I.M., & Cohen, C. (1998). *Introduction to Logic.* 10ª ed. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice-Hall Inc.

Cuenca, J. (1985). *Lógica Informática*. Madrid: Alianza Editorial.

Cunningham, D.; Duffy T., & and Knuth, R. (1993). "The Textbook of the Future". En *Hypertext, a psychological perspective.* London: Ellis Horwook series in interactive information systems.

Galán, J. (2008). *Al pie de la letra.* Colección Un libro por centavos, N° 35. Bogotá: Universidad Externado de Colombia.

Gersting, J.L. (1987). *Mathematical Structures for Computer Science*. New York: W. H. Freeman and Company.

Grassman, W.A., y Tremblay, J.P. (1997). *Matemática discreta y Lógica.* Madrid: Prentice Hall.

Ibarra, C. (1995). *Elementos fundamentales de lógica*. México: Alhambra Mexicana.

Johnsonbaugh, R. (2005). *Matemáticas Discretas*. 6ª ed. México: Pearson Educación.

McDonnell, E. (editor) (2007). *LSAT Comprehensive Program*. Chicago: Kaplan Publishing.

Moore, R. (1986). *Los mejores problemas lógicos 2.* Barcelona: Ediciones Martínez Roca.

Newman, J.R. (1985). *SIGMA. El mundo de las matemáticas*. (6 vols.) 10ª ed. Barcelona: Grijalbo.

Ospina, W. (2007). *Ursúa*. Bogotá: Alfaguara.

Paulos, J. (2000). *El hombre anumérico: El analfabetismo matemático y sus consecuencias*. 5ª ed. Barcelona: Tusquets.

Perelman, Ch. (1997). *El imperio retórico*. Bogotá: Norma.

Weston, A. (1999). *Las claves de la argumentación*. Barcelona: Editorial Ariel.

Wirth, U. (1998). *What is abduction inference?* Frankfurt: Frankfurt University.

Zuleta, E. (1996). *Lecciones de Filosofía: Lógica y Crítica*. *Lección uno*. Conferencia del 7 de febrero de 1976. Santiago de Cali: Universidad del Valle.