



THOMAS
CÁLCULO

VARIAS VARIABLES

Decimosegunda edición

PEARSON

FÓRMULAS BÁSICAS DE ÁLGEBRA

Operaciones aritméticas

$$a(b + c) = ab + ac, \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}, \quad \frac{a/b}{c/d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

Leyes de los signos

$$-(-a) = a, \quad \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b} = \frac{a}{-b}$$

Cero La división entre cero no está definida.

$$\text{Si } a \neq 0: \frac{0}{a} = 0, \quad a^0 = 1, \quad 0^a = 0$$

$$\text{Para cualquier número } a: a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$$

Leyes de los exponentes

$$a^m a^n = a^{m+n}, \quad (ab)^m = a^m b^m, \quad (a^m)^n = a^{mn}, \quad a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

Si $a \neq 0$,

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad a^0 = 1, \quad a^{-m} = \frac{1}{a^m}.$$

El teorema del binomio Para cualquier entero positivo n ,

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3}b^3 + \dots + nab^{n-1} + b^n.$$

Por ejemplo,

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \quad (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Factorización de una diferencia de potencias iguales de enteros, $n > 1$

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

Por ejemplo,

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b),$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2),$$

$$a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3).$$

Cómo completar un cuadrado Si $a \neq 0$,

$$ax^2 + bx + c = au^2 + C \quad \left(u = x + (b/2a), C = c - \frac{b^2}{4a} \right)$$

La fórmula cuadrática Si $a \neq 0$ y $ax^2 + bx + c = 0$, entonces

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

REGLAS DE INTEGRACIÓN

Fórmulas generales

Cero:
$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

Orden de la integración:
$$\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$$

Múltiplos constantes:
$$\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx \quad (\text{cualquier número } k)$$

$$\int_a^b -f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx \quad (k = -1)$$

Sumas y diferencias:
$$\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

Aditividad:
$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$

Desigualdad máx-mín: Si máx f y mín f son los valores máximo y mínimo de f en $[a, b]$, entonces

$$\text{mín } f \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \text{máx } f \cdot (b - a).$$

Dominancia: $f(x) \geq g(x)$ en $[a, b]$ implica $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$

$$f(x) \geq 0 \text{ en } [a, b] \text{ implica } \int_a^b f(x) dx \geq 0$$

Teorema fundamental del cálculo

Parte 1 Si f es continua en $[a, b]$, entonces $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) y su derivada es $f(x)$;

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x).$$

Parte 2 Si f es continua en cada punto de $[a, b]$ y F es cualquier antiderivada de f en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Sustitución en integrales definidas

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du$$

Integración por partes

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx$$

THOMAS CÁLCULO

VARIAS VARIABLES Decimosegunda edición

George B. Thomas, Jr.
Massachusetts Institute of Technology

Revisada por

Maurice D. Weir
Naval Postgraduate School

Joel Hass
University of California, Davis

Traducción

Antonio P. Enríquez Brito
Traductor especialista
en matemáticas

Revisión técnica

Carlos Bosch Giral
César Luis García García
Claudia Gómez Wulschner
Departamento de Matemáticas
Instituto Tecnológico Autónomo de México

Manuel Robles Bernal
Instituto Politécnico Nacional

Addison-Wesley

México • Argentina • Brasil • Colombia • Costa Rica • Chile • Ecuador
España • Guatemala • Panamá • Perú • Puerto Rico • Uruguay • Venezuela

THOMAS, GEORGE B.

Cálculo, varias variables
Decimosegunda edición

PEARSON EDUCACIÓN, México, 2010

ISBN: 978-607-32-0209-1
Área: Matemáticas

Formato: 21.5 × 27.5 cm

Páginas: 472

Authorized translation from the English language editions, entitled *THOMAS' CALCULUS, MULTIVARIABLE, 12th Edition* by *GEORGE THOMAS; MAURICE WEIR; JOEL HASS*, published by Pearson Education, Inc., publishing as Addison-Wesley, Copyright © 2010. All rights reserved. ISBN 9780321643698

Traducción autorizada de la edición en idioma inglés, *THOMAS' CALCULUS, MULTIVARIABLE, 12^a ed.* Por *GEORGE THOMAS; MAURICE WEIR; JOEL HASS*, publicada por Pearson Education, Inc., publicada como Addison-Wesley, Copyright © 2010. Todos los derechos reservados.

Esta edición en español es la única autorizada.

Edición en inglés

Editor-in-Chief: Deirdre Lynch
Senior Acquisitions Editor: William Hoffman
Senior Project Editor: Rachel S. Reeve
Associate Editor: Caroline Celano
Associate Project Editor: Leah Goldberg
Senior Managing Editor: Karen Wernholm
Senior Production Supervisor: Sheila Spinney
Senior Design Supervisor: Andrea Nix
Digital Assets Manager: Marianne Groth
Media Producer: Lin Mahoney

Software Development: Mary Durnwald and Bob Carroll
Executive Marketing Manager: Jeff Weidenaar
Marketing Assistant: Kendra Bassi
Senior Author Support/Technology Specialist: Joe Vetere
Senior Prepress Supervisor: Caroline Fell
Manufacturing Manager: Evelyn Beaton
Production Coordinator: Kathy Diamond
Composition: Nesbitt Graphics, Inc.
Illustrations: Karen Heyt, IllustraTech
Cover Design: Rokusek Design

Edición en español

Editor: Rubén Fuerte Rivera
e-mail: ruben.fuerte@pearsoned.com
Editor de desarrollo: Felipe Hernández Carrasco
Supervisor de producción: José D. Hernández Garduño

DECIMOSEGUNDA EDICIÓN, 2010

D.R. © 2010 por Pearson Educación de México, S.A. de C.V.
Atlacomulco 500-5o. piso
Col. Industrial Atoto
53519, Naucalpan de Juárez, Estado de México

Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana. Reg. núm. 1031.

Addison-Wesley es una marca registrada de Pearson Educación de México, S.A. de C.V.

Reservados todos los derechos. Ni la totalidad ni parte de esta publicación pueden reproducirse, registrarse o transmitirse, por un sistema de recuperación de información, en ninguna forma ni por ningún medio, sea electrónico, mecánico, fotoquímico, magnético o electroóptico, por fotocopia, grabación o cualquier otro, sin permiso previo por escrito del editor.

El préstamo, alquiler o cualquier otra forma de cesión de uso de este ejemplar requerirá también la autorización del editor o de sus representantes.

ISBN VERSIÓN IMPRESA: 978-607-32-0209-1
ISBN E-BOOK: 978-607-32-0210-7
ISBN E-CHAPTER: 978-607-32-0211-4

Addison-Wesley
es una marca de

Impreso en México. *Printed in Mexico.*

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - 13 12 11 10



REVISIÓN TÉCNICA

Adelia Copas
Enrique Santillán
ESIME, Zacatenco-Instituto Politécnico Nacional

Gabriel Martínez Chávez
Gabriel Núñez Román
Julio César Ansaldo Leyva
Instituto Tecnológico de Sonora

María Guadalupe Lomelí Plascencia
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey-Campus Guadalajara

Enrique Garibay Ruiz
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey-Campus León

Mario Mesino
Universidad Autónoma de Guadalajara

Francisco Javier González Piña
Universidad de Guadalajara

AGRADECIMIENTOS

Pearson Educación agradece a los centros de estudio y profesores usuarios de esta obra por su apoyo y retroalimentación, elemento fundamental para esta nueva edición de *Cálculo, una variable*.

Argentina

Emilio Suárez

Instituto Tecnológico de Buenos Aires

Haydee Castelletti

Silvia Adriana Mamone

Universidad de Belgrano

Viviana Niselman

Universidad de Buenos Aires

Gladis Beatriz Astargo

Horacio Day

Universidad Nacional de Cuyo

Isabel Weinberg

Universidad Nacional de la Matanza

Ángela Maldonado

Augusto Melgarejo

Delicia Tisera

Diego Vallejo

José Suárez

Laura Langoni

María Inés Otegui

María Teresa Guardarucci

Mariel Lavaña

Mercedes Trípoli

Miguel Sanservino

Néstor Bucari

Universidad Nacional de la Plata

Angélica Arnulfo

Beatriz Introcaso

Emilio Sastre

José Botto

María Susana Montelar

Mónica Caserío

Universidad Nacional de Rosario

Elena Arlauskas

Gabriela Righetti

Universidad Tecnológica Nacional Regional Avellaneda

Colombia

Bernardo Aldana Gómez

Néstor Raúl Pachón

Escuela Colombiana de Ingeniería-Bogotá

Elías Cardona

ICESI

Antonio Merchán

Fernando Novoa

Gerardo Tole

Héctor Linares

Irina Reyes

Ismael García

Jaime Gómez

Juan Carlos Quintero

Liliana Barreto

Moisés Aranda

Nazly Esmeralda Salas

Rafael Castro

Pontificia Universidad Javeriana

Laureano Valencia

Oswaldo Rodríguez Díaz

Universidad Autónoma de Occidente-Cali

Mario Bravo

Universidad de San Buenaventura-Cali

José Villada

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Chile

Juan Duarte

Universidad de Antofagasta

Clarita Balbontín
Universidad de los Andes

Julio Hugo Ramírez
Universidad de Viña del Mar

Ecuador

Eduardo Alba
Universidad San Francisco de Quito

España

Patricia Barral Rodiño
Universidad de Santiago de Compostela

México

Fernando Arenas García
Julio Ernesto Hoyos Ochoa
Salvador Hoyos Ochoa
Instituto Tecnológico de Boca del Río

Alicia Ordóñez Segura
Celerino Federico Navarrete Cruz
Fernando Arenas García
Isidro Rodríguez Montoro
Jesús Solano Roano
Jorge Almanza Pérez
José Luis Almanza Pérez
Julio Ernesto Hoyos Ochoa
Salvador Hoyos Ochoa
Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Xalapa

Miguel Hernández de la Torre
Omar Olmos López
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey - Campus Toluca

Mauricio Cirilo Méndez Canseca
Raúl Chávez
Universidad Anáhuac - México Sur

Angélica Tovar Gómez
Bertha Alicia Arellano Silva
Elvia Loera Hernández
Javier Cantú Rodríguez
Karla Guajardo Cosío
Universidad Autónoma de Nuevo León

Ramiro Garza Molina
Universidad Autónoma de Tamaulipas

David Elizarraraz Martínez
Jaime Grabinsky Steider
José Ventura Becerril Espinosa
Judith Omaña Pulido
Marina Salazar Antunez
Universidad Autónoma Metropolitana - Unidad Azcapotzalco

Mauro Ernesto Espinoza García
Universidad Cristóbal Colón - Veracruz

Ana María González Piña
Javier Barrón
Karla Violeta Martínez Facundo
Maribel Fuentes Dávila
Patricia González
Universidad de Monterrey

Alma Rosa Griselda Zetina Vélez
Martín Cruz Cuevas
Miriam Lemus
Roberto Bautista Atenógenes
Sandra Chimal Garma
Universidad La Salle

Dolores Vera Dector
Felipe Hernández Hernández
Ricardo Victoria Carrera
Universidad Veracruzana

Perú

Luis Díaz Bazurco
Wilber Ramos Lovón
Universidad Católica de Santa María-Arequipa

José Cuevas González
Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas

Venezuela

Elvira Sabal
Milagros Bosquetti
Universidad Católica Andrés Bello

Jesús Hernández
José Luis Quinteros
María de Armas
María Luisa Vonna
Marienma Sánchez
Universidad Central de Venezuela

CONTENIDO

Prefacio

xiii

VOLUMEN I

1

Funciones

1

- 1.1 Las funciones y sus gráficas 1
- 1.2 Combinación de funciones; traslación y cambio de tamaño de funciones 14
- 1.3 Funciones trigonométricas 22
- 1.4 Graficación por medio de calculadoras y computadora 30
- PREGUNTAS DE REPASO 34
- EJERCICIOS DE PRÁCTICA 35
- EJERCICIOS ADICIONALES Y AVANZADOS 37

2

Límites y continuidad

39

- 2.1 Tasas de cambio y tangentes a curvas 39
- 2.2 Límite de una función y leyes de los límites 46
- 2.3 La definición formal de límite 57
- 2.4 Límites laterales 66
- 2.5 Continuidad 73
- 2.6 Límites que incluyen al infinito; asíntotas de gráficas 84
- PREGUNTAS DE REPASO 96
- EJERCICIOS DE PRÁCTICA 97
- EJERCICIOS ADICIONALES Y AVANZADOS 98

3

Derivadas

102

- 3.1 Tangentes y la derivada en un punto 102
- 3.2 La derivada como una función 106
- 3.3 Reglas de derivación 115
- 3.4 La derivada como una tasa de cambio 124
- 3.5 Derivadas de funciones trigonométricas 135
- 3.6 La regla de la cadena 142

| | | |
|-----|------------------------------------|-----|
| 3.7 | Derivación implícita | 149 |
| 3.8 | Tasas relacionadas | 155 |
| 3.9 | Linealización y diferenciales | 164 |
| | PREGUNTAS DE REPASO | 175 |
| | EJERCICIOS DE PRÁCTICA | 176 |
| | EJERCICIOS ADICIONALES Y AVANZADOS | 180 |

4

Aplicaciones de las derivadas

184

| | | |
|-----|--|-----|
| 4.1 | Valores extremos de funciones | 184 |
| 4.2 | El teorema del valor medio | 192 |
| 4.3 | Funciones monótonas y el criterio de la primera derivada | 198 |
| 4.4 | Concavidad y trazado de curvas | 203 |
| 4.5 | Optimización aplicada | 214 |
| 4.6 | Método de Newton | 225 |
| 4.7 | Antiderivadas | 230 |
| | PREGUNTAS DE REPASO | 239 |
| | EJERCICIOS DE PRÁCTICA | 240 |
| | EJERCICIOS ADICIONALES Y AVANZADOS | 243 |

5

Integración

246

| | | |
|-----|---|-----|
| 5.1 | Área y su estimación mediante sumas finitas | 246 |
| 5.2 | Notación sigma y límites de sumas finitas | 256 |
| 5.3 | La integral definida | 262 |
| 5.4 | El teorema fundamental del cálculo | 274 |
| 5.5 | Integrales indefinidas y el método de sustitución | 284 |
| 5.6 | Sustitución y área entre curvas | 291 |
| | PREGUNTAS DE REPASO | 300 |
| | EJERCICIOS DE PRÁCTICA | 301 |
| | EJERCICIOS ADICIONALES Y AVANZADOS | 304 |

6

Aplicaciones de las integrales definidas

308

| | | |
|-----|---|-----|
| 6.1 | Cálculo de volúmenes por medio de secciones transversales | 308 |
| 6.2 | Cálculo de volúmenes por medio de cascarones cilíndricos | 319 |
| 6.3 | Longitud de arco | 326 |
| 6.4 | Áreas de superficies de revolución | 332 |
| 6.5 | Trabajo y fuerza de fluidos | 337 |
| 6.6 | Momentos y centros de masa | 346 |
| | PREGUNTAS DE REPASO | 357 |
| | EJERCICIOS DE PRÁCTICA | 357 |
| | EJERCICIOS ADICIONALES Y AVANZADOS | 359 |

7**Funciones trascendentes****361**

- 7.1 Funciones inversas y sus derivadas 361
- 7.2 Logaritmos naturales 369
- 7.3 Funciones exponenciales 377
- 7.4 Cambio exponencial y ecuaciones diferenciales con variables separables 387
- 7.5 Formas indeterminadas y la regla de L'Hôpital 396
- 7.6 Funciones trigonométricas inversas 404
- 7.7 Funciones hiperbólicas 416
- 7.8 Razones relativas de crecimiento 424
- PREGUNTAS DE REPASO 429
- EJERCICIOS DE PRÁCTICA 430
- EJERCICIOS ADICIONALES Y AVANZADOS 433

8**Técnicas de integración****435**

- 8.1 Integración por partes 436
- 8.2 Integrales trigonométricas 444
- 8.3 Sustituciones trigonométricas 449
- 8.4 Integración de funciones racionales por medio de fracciones parciales 453
- 8.5 Tablas de integrales y sistemas de álgebra por computadora (SAC) 463
- 8.6 Integración numérica 468
- 8.7 Integrales impropias 478
- PREGUNTAS DE REPASO 489
- EJERCICIOS DE PRÁCTICA 489
- EJERCICIOS ADICIONALES Y AVANZADOS 491

9**Ecuaciones diferenciales de primer orden****496**

- 9.1 Soluciones, campos direccionales y el método de Euler 496
- 9.2 Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden 504
- 9.3 Aplicaciones 510
- 9.4 Soluciones gráficas de ecuaciones diferenciales autónomas 516
- 9.5 Sistemas de ecuaciones y planos fase 523
- PREGUNTAS DE REPASO 529
- EJERCICIOS DE PRÁCTICA 529
- EJERCICIOS ADICIONALES Y AVANZADOS 530

10**Sucesiones y series infinitas****532**

- 10.1 Sucesiones 532
- 10.2 Series infinitas 544
- 10.3 Criterio de la integral 553
- 10.4 Criterios de comparación 558
- 10.5 Criterios de la raíz y de la razón 563

| | | |
|-------|--|-----|
| 10.6 | Series alternantes, convergencia absoluta y convergencia condicional | 568 |
| 10.7 | Series de potencias | 575 |
| 10.8 | Series de Taylor y de Maclaurin | 584 |
| 10.9 | Convergencia de series de Taylor | 589 |
| 10.10 | La serie binomial y aplicaciones de las series de Taylor | 596 |
| | PREGUNTAS DE REPASO | 605 |
| | EJERCICIOS DE PRÁCTICA | 605 |
| | EJERCICIOS ADICIONALES Y AVANZADOS | 607 |

11

Ecuaciones paramétricas y coordenadas polares

610

| | | |
|------|---|-----|
| 11.1 | Parametrización de curvas planas | 610 |
| 11.2 | Cálculo con curvas paramétricas | 618 |
| 11.3 | Coordenadas polares | 627 |
| 11.4 | Gráficas en coordenadas polares | 631 |
| 11.5 | Áreas y longitudes en coordenadas polares | 635 |
| 11.6 | Secciones cónicas | 639 |
| 11.7 | Secciones cónicas en coordenadas polares | 648 |
| | PREGUNTAS DE REPASO | 654 |
| | EJERCICIOS DE PRÁCTICA | 655 |
| | EJERCICIOS ADICIONALES Y AVANZADOS | 657 |

VOLUMEN II

12

Los vectores y la geometría del espacio

660

| | | |
|------|--|-----|
| 12.1 | Sistemas de coordenadas tridimensionales | 660 |
| 12.2 | Vectores | 665 |
| 12.3 | El producto punto | 674 |
| 12.4 | El producto cruz | 682 |
| 12.5 | Rectas y planos en el espacio | 688 |
| 12.6 | Cilindros y superficies cuádricas | 696 |
| | PREGUNTAS DE REPASO | 701 |
| | EJERCICIOS DE PRÁCTICA | 702 |
| | EJERCICIOS ADICIONALES Y AVANZADOS | 704 |

13

Funciones con valores vectoriales y movimiento en el espacio

707

| | | |
|------|--|-----|
| 13.1 | Curvas en el espacio y sus tangentes | 707 |
| 13.2 | Integrales de funciones vectoriales; movimiento de proyectiles | 715 |
| 13.3 | Longitud de arco en el espacio | 724 |
| 13.4 | Curvatura y vectores normales de una curva | 728 |
| 13.5 | Componentes tangencial y normal de la aceleración | 734 |
| 13.6 | Velocidad y aceleración en coordenadas polares | 739 |
| | PREGUNTAS DE REPASO | 742 |
| | EJERCICIOS DE PRÁCTICA | 743 |
| | EJERCICIOS ADICIONALES Y AVANZADOS | 745 |

14

Derivadas parciales

747

- 14.1 Funciones de varias variables 747
- 14.2 Límites y continuidad en dimensiones superiores 755
- 14.3 Derivadas parciales 764
- 14.4 Regla de la cadena 775
- 14.5 Derivadas direccionales y vectores gradiente 784
- 14.6 Planos tangentes y diferenciales 791
- 14.7 Valores extremos y puntos de silla 802
- 14.8 Multiplicadores de Lagrange 811
- 14.9 Fórmula de Taylor para dos variables 820
- 14.10 Derivadas parciales con variables restringidas 824
 - PREGUNTAS DE REPASO 829
 - EJERCICIOS DE PRÁCTICA 829
 - EJERCICIOS ADICIONALES Y AVANZADOS 833

15

Integrales múltiples

836

- 15.1 Integrales dobles e iteradas sobre rectángulos 836
- 15.2 Integrales dobles sobre regiones generales 841
- 15.3 Áreas por doble integración 850
- 15.4 Integrales dobles en forma polar 853
- 15.5 Integrales triples en coordenadas rectangulares 859
- 15.6 Momentos y centros de masa 868
- 15.7 Integrales triples en coordenadas cilíndricas y esféricas 875
- 15.8 Sustitución en integrales múltiples 887
 - PREGUNTAS DE REPASO 896
 - EJERCICIOS DE PRÁCTICA 896
 - EJERCICIOS ADICIONALES Y AVANZADOS 898

16

Integración en campos vectoriales

901

- 16.1 Integrales de línea 901
- 16.2 Campos vectoriales e integrales de línea: Trabajo, circulación y flujo 907
- 16.3 Independencia de la trayectoria, campos conservativos y funciones potenciales 920
- 16.4 Teorema de Green en el plano 931
- 16.5 Superficies y áreas 943
- 16.6 Integrales de superficie 953
- 16.7 Teorema de Stokes 962
- 16.8 El teorema de la divergencia y una teoría unificada 972
 - PREGUNTAS DE REPASO 983
 - EJERCICIOS DE PRÁCTICA 983
 - EJERCICIOS ADICIONALES Y AVANZADOS 986

17**Ecuaciones diferenciales de segundo orden****989**

- 17.1 Ecuaciones lineales de segundo orden 989
- 17.2 Ecuaciones lineales no homogéneas 996
- 17.3 Aplicaciones 1005
- 17.4 Ecuaciones de Euler 1011
- 17.5 Soluciones en series de potencias 1014

Apéndices**AP-1**

- A.1 Los números reales y las rectas reales AP-1
- A.2 Inducción matemática AP-6
- A.3 Rectas, circunferencias y parábolas AP-10
- A.4 Demostraciones de los teoremas de límites AP-18
- A.5 Límites que aparecen con frecuencia AP-21
- A.6 Teoría de los números reales AP-23
- A.7 Números complejos AP-25
- A.8 La ley distributiva para el producto vectorial cruz AP-35
- A.9 El teorema de la derivada mixta y el teorema del incremento AP-36

Respuestas a los ejercicios con número impar**A-1****Índice****I-1****Créditos****C-1****Breve tabla de integrales****T-1**



PREFACIO

Revisamos exhaustivamente esta edición de *Cálculo de Thomas* con la finalidad de cubrir las necesidades de los profesores y los estudiantes actuales. El resultado es un libro con más ejemplos, más ejercicios de nivel medio, mayor cantidad de figuras y mejor flujo conceptual, además de mayores claridad y precisión. Al igual que las ediciones anteriores, esta nueva edición ofrece una introducción moderna al cálculo que apoya la comprensión conceptual, pero conserva los elementos esenciales de un curso tradicional. Tales mejoras se relacionan estrechamente con una versión ampliada del texto de MyMathLab® (al que nos referiremos más adelante), el cual brinda apoyo adicional a los estudiantes y flexibilidad a los profesores.

Muchos de nuestros alumnos estuvieron expuestos a la terminología y los aspectos computacionales del cálculo durante el bachillerato. A pesar de la familiaridad con el álgebra y la trigonometría, sus habilidades en estas materias con frecuencia son insuficientes para alcanzar el éxito en el cálculo universitario. Con este texto buscamos equilibrar la escasa experiencia de los estudiantes con el cálculo y el desarrollo de habilidades algebraicas que podrían necesitar, todo sin socavar o minar su confianza. Además, hemos tenido cuidado de presentar suficiente material, soluciones detalladas paso a paso y ejercicios que apoyen una comprensión completa para alumnos de todos los niveles.

Animamos a los estudiantes a ir más allá de la memorización de las fórmulas para generalizar conceptos conforme éstos se presenten. Nuestro deseo es que después de cursar cálculo, ellos tengan confianza en sus habilidades para razonar y resolver problemas. El dominio de un tema maravilloso con aplicaciones prácticas al mundo será su recompensa, pero el verdadero regalo será la habilidad para pensar y generalizar. Creemos que este libro brindará respaldo y apoyo para ambas cosas.

Cambios en la decimosegunda edición

CONTENIDO En la preparación de esta edición hemos conservado la estructura básica de la tabla de contenido de la edición anterior. Hemos puesto atención a las peticiones de los usuarios y los revisores de posponer la introducción de ecuaciones paramétricas hasta después de explicar las coordenadas polares, y de presentar el tema de la regla de L'Hôpital después de las funciones trascendentes. Realizamos numerosas revisiones a la mayoría de los capítulos, como se detalla a continuación.

- **Funciones** Condensamos este capítulo aún más para centrarnos en la revisión de los conceptos sobre funciones. El material de requisito que cubre números reales, intervalos, incrementos, líneas rectas, distancias, circunferencias y parábolas se presenta en los apéndices 1 a 3.
- **Límites** Para mejorar la continuidad en este capítulo, combinamos las ideas de límites que incluyen infinito y su relación con las asíntotas en las gráficas de las funciones, colocándolas juntas al final de la última sección del capítulo.
- **Derivadas** Aunque utilizamos tasas de cambio y tangentes a curvas como motivación para el estudio del concepto de límite, ahora presentamos el concepto de derivada en un solo capítulo. Reorganizamos e incrementamos el número de ejemplos de tasas relacionadas y agregamos nuevos ejemplos y ejercicios sobre graficación de funciones racionales.

- **Antiderivadas e integración** Conservamos la organización de la decimoprimer edición al colocar las antiderivadas como el último tema referente a las aplicaciones de las derivadas. Nuestro objetivo es exponer “la forma de recuperar una función a partir de su derivada”, como la solución del tipo más sencillo de una ecuación diferencial de primer orden. Las integrales, como “límites de sumas de Riemann”, estudiadas sobre todo a la luz del problema de determinar áreas de regiones generales con fronteras curvas, son un nuevo tema que forma la parte sustancial del capítulo 5. Después de un cuidadoso desarrollo del *concepto* de integral, pusimos nuestra atención en su evaluación y su relación con las antiderivadas, relación que se plasma en el teorema fundamental del cálculo. Las aplicaciones correspondientes *definen* diversas ideas geométricas de área, volumen, longitudes de trayectorias y centroides, todas como límites de sumas de Riemann que dan lugar a integrales definidas que pueden evaluarse determinando una antiderivada del integrando. Posteriormente, regresamos al tema de resolver ecuaciones diferenciales de primer orden más complicadas; después de ello, definimos y establecemos las funciones trascendentes y sus propiedades.
- **Ecuaciones diferenciales** Algunas universidades prefieren que este tema se incluya en un curso aparte de cálculo. Aunque nosotros tratamos las soluciones de ecuaciones diferenciales con variables separables, cuando tratamos las aplicaciones de crecimiento y decaimiento exponenciales en el capítulo de funciones trascendentes, organizamos todo nuestro material en dos capítulos (que pueden omitirse para seguir la secuencia de cálculo). En el capítulo 9 damos un tratamiento introductorio a las ecuaciones diferenciales de primer orden. El capítulo incluye una nueva sección sobre sistemas y planos fase, con aplicaciones a modelos que incluyen presas y depredadores. En el capítulo 17 presentamos una introducción a ecuaciones diferenciales de segundo orden, que se incluye en MyMathLab, así como en el sitio Web del texto, www.pearsoneducacion.net/thomas.
- **Series** Conservamos la estructura organizacional de la decimoprimer edición para los temas de sucesiones y series. Agregamos nuevas figuras y nuevos ejercicios a diversas secciones, pero además revisamos algunas de las demostraciones relacionadas con la convergencia de series de potencia para mejorar la accesibilidad del material a los estudiantes. Uno de los usuarios del texto nos dijo que cualquier modificación que hiciéramos “para que este material resultara más sencillo para los estudiantes” sería bienvenida en su facultad; ese comentario nos guió para hacer las revisiones de este capítulo.
- **Ecuaciones paramétricas** Varios usuarios pidieron incluir este tema en el capítulo 11, donde también se tratan coordenadas polares y secciones cónicas. Lo hicimos luego de comprender que muchos departamentos eligen cubrir tales temas al inicio de Cálculo III, como preparación para tratar el cálculo con vectores y de varias variables.
- **Funciones de variables vectoriales** Redujimos los temas de este capítulo para dar mayor énfasis a los conceptos que fundamentan el material sobre derivadas parciales, el vector gradiente y las integrales de línea. Compactamos el análisis del marco de Frenet y las tres leyes de Kepler acerca del movimiento de los planetas.
- **Cálculo de varias variables** En estos tres capítulos resaltamos el diseño, además de añadir muchas figuras, ejemplos y ejercicios nuevos. Reorganizamos el material inicial sobre integrales dobles. Combinamos en una sola sección las aplicaciones de integrales dobles y triples a masas y momentos; se presentan casos tanto de dos como de tres dimensiones. Dicha reorganización permite una mejor exposición de los conceptos clave, junto con sus propiedades y sus aspectos computacionales. Al igual que en la edición anterior, en ésta continuamos haciendo las conexiones de las ideas de varias variables con sus análogos de una variable que se estudian antes en el texto.
- **Campos vectoriales** Dedicamos un considerable esfuerzo para mejorar la claridad y precisión matemática de nuestro estudio de cálculo integral vectorial, incluyendo ejemplos, figuras y ejercicios adicionales. Los teoremas y los resultados importantes se enuncian con mayor claridad y en forma completa; se incluyen explicaciones amplias de sus hipótesis y consecuencias matemáticas. El área de una superficie ahora se organiza en una sola sección, mientras las superficies definidas, explícita o implícitamente, se tratan como casos especiales de la representación paramétrica más general. Las integrales de superficie y sus aplicaciones se estudian en una sección separada. El teorema de Stokes y el teorema de la divergencia se siguen presentando como generalizaciones del teorema de Green a tres dimensiones.

EJERCICIOS Y EJEMPLOS Sabemos que los ejercicios y los ejemplos son componentes fundamentales en el aprendizaje del cálculo. En virtud de tal importancia, actualizamos, mejoramos y ampliamos el número de ejercicios en casi todas las secciones del libro. En la presente edición incluimos más de 700 nuevos ejercicios. Continuamos nuestra organización y la agrupación de ejercicios por tema, como en las ediciones anteriores, pasando de problemas computacionales a problemas aplicados y teóricos. Los ejercicios que requieren del uso de sistemas de cómputo (como *Maple*[®] o *Mathematica*[®]) se colocaron al final de cada sección de ejercicios con el título **Exploraciones con computadora**. La mayoría de los ejercicios aplicados tienen un subtítulo para indicar la clase de aplicación adecuada del problema.

Muchas secciones incluyen ejemplos nuevos para clarificar y profundizar en el significado del tema que se estudia, así como para ayudar a los estudiantes a comprender las consecuencias matemáticas o las aplicaciones a la ciencia y la ingeniería. Al mismo tiempo, eliminamos ejemplos que repetían material presentado con anterioridad.

DISEÑO Por su importancia en el aprendizaje del cálculo, continuamos con la mejora de figuras existentes en este texto e incluimos un número significativo de nuevas figuras. Continuamos con el uso del color de manera consistente y pedagógica para resaltar la idea conceptual que se ilustra. También revisamos todas las leyendas de las figuras, poniendo mucha atención a la claridad y precisión en los enunciados cortos.

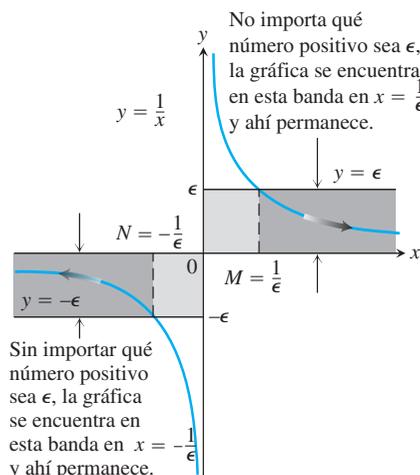


FIGURA 2.50 La geometría dentro del argumento del ejemplo 1.

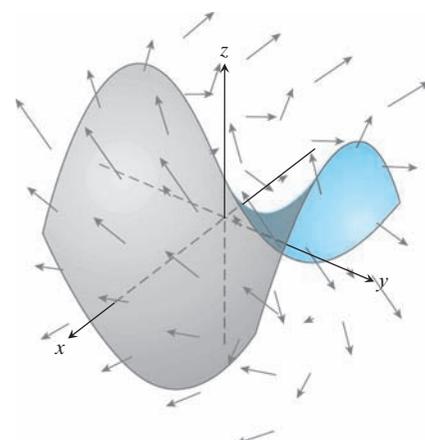


FIGURA 16.9 Una superficie, como una red o un paracaídas, en un campo vectorial que representa los vectores velocidad del flujo de agua o aire. Las flechas muestran la dirección y sus longitudes indican la rapidez.

MYMATHLAB Y MATHXL El aumento en el uso y la demanda de sistemas de tareas en línea ha llevado a cambios en MyMathLab y MathXL[®] para el texto. El curso **MyMathLab** ahora incluye muchos más ejercicios de todo tipo. Los nuevos applets Java[™] se agregan a la ya significativa colección, para ayudar a los estudiantes a visualizar los conceptos y generalizar el material.

Otras características destacadas

RIGOR El nivel de formalidad es consistente con el de las ediciones anteriores. Seguimos distinguiendo entre análisis formal e informal, y señalamos sus diferencias. Consideramos que iniciar con una idea más intuitiva y menos formal ayuda a los estudiantes a comprender un concepto nuevo y difícil, de manera que luego ellos puedan apreciar cabalmente su precisión matemática y los resultados. Ponemos atención en definir las ideas de una manera detallada

y en probar los teoremas adecuados para estudiantes de cálculo, aunque mencionamos temas más profundos o sutiles que ellos estudiarán en un curso más avanzado. Nuestra organización y las distinciones entre tratamiento informal y formal dan al profesor un considerable grado de flexibilidad en la cantidad y la profundidad de cobertura de los diferentes temas. Por ejemplo, no demostramos el teorema del valor intermedio ni el teorema del valor extremo para funciones continuas en $a \leq x \leq b$, pero enunciamos dichos teoremas de manera muy precisa, ilustramos su significado en numerosos ejemplos y los utilizamos para demostrar otros resultados importantes. Además, para aquellos profesores que deseen una mayor profundidad, en el apéndice 6 estudiamos la validez de tales teoremas con base en la completez de los números reales.

EJERCICIOS DE ESCRITURA Los ejercicios de escritura colocados en todo el texto piden a los estudiantes explicar una variedad de conceptos y variaciones del cálculo. Además, al final de cada capítulo se incluye una lista de preguntas para que revisen y sintetizen lo que aprendieron. Muchos de estos ejercicios son buenas tareas de redacción.

REPASO Y PROYECTOS DE FINAL DE CAPÍTULO Además de los problemas que aparecen en cada sección, cada capítulo termina con preguntas de repaso, ejercicios de práctica que cubren todo el capítulo, y una serie de ejercicios adicionales y avanzados que sirven para incluir problemas más desafiantes o que sintetizan el conocimiento. La mayoría de los capítulos también incluyen descripciones de varios **Proyectos de aplicación tecnológica**, que pueden desarrollarse de manera individual o por grupos en un periodo más prolongado. Dichos proyectos requieren el uso de una computadora con *Mathematica* o *Maple*, y de material adicional, el cual está disponible en Internet en www.pearsoneducacion.net/thomas y en MyMathLab.

ESCRITURA Y APLICACIONES Como siempre, este texto continúa siendo fácil de leer, pues tiene un estilo conversacional al tiempo que es rico matemáticamente. Cada nuevo tema se plantea mediante ejemplos claros y fáciles de comprender; además, el tema se refuerza mediante aplicaciones a problemas del mundo real y de interés inmediato para los estudiantes. Un sello distintivo del libro han sido sus aplicaciones del cálculo a la ciencia y la ingeniería. Estos problemas aplicados se han actualizado, mejorado y ampliado de manera continua durante las últimas ediciones.

TECNOLOGÍA En un curso que utilice el texto, la tecnología puede incorporarse de acuerdo con el criterio de cada profesor. Cada sección contiene ejercicios que requieren el uso de tecnología; si es pertinente el uso de una calculadora o una computadora, se incluye un símbolo **T** en los ejercicios, o bien, éstos se agrupan bajo el título **Exploraciones con computadora** si se requiere del uso de un sistema algebraico computacional (SAC, como *Maple* o *Mathematica*).

Complementos multimedia y apoyo en línea

MANUALES DE RECURSOS TECNOLÓGICOS

Maple Manual de James Stapleton, North Carolina State University

Mathematica Manual de Marie Vanisko, Carroll College

TI-Graphing Calculator Manual de Elaine McDonald-Newman, Sonoma State University

Estos manuales cubren *Maple 13*, *Mathematica 7* y las TI-83 Plus/TI-84 Plus y TI-89, respectivamente. Cada manual ofrece una guía detallada para integrar un paquete específico o una calculadora graficadora a lo largo de todo el curso, incluyendo sintaxis y comandos. Los manuales están disponibles para profesores calificados a través del Centro de Recursos para el Profesor de Pearson, www.pearsonhighered/irc y MyMathLab.

SITIO WEB www.pearsoneducacion.net/thomas

El sitio Web de *Cálculo de Thomas* contiene el capítulo sobre ecuaciones de segundo orden, incluyendo las respuestas a problemas de número impar; además, presenta las biografías históricas ampliadas y los ensayos a que hace referencia el texto. También está disponible una colección de módulos en *Maple* y *Mathematica*, así como los **Proyectos de aplicación tecnológica**, que pueden usarse como proyectos para los alumnos, ya sea que trabajen de manera individual o por grupos.

Curso en línea con MyMathLab (se requiere un código de acceso)

MyMathLab es un curso en línea específico del texto y fácil de personalizar que integra instrucciones interactivas de multimedios con contenido del texto. MyMathLab da al profesor las herramientas que necesita para poner todo su curso o una parte de éste en línea, si sus alumnos están en un laboratorio o bien trabajan en su casa.

- **Ejercicios interactivos**, correlacionados con el libro de texto en el nivel de objetivos, se generan de manera algorítmica para práctica y dominio ilimitados. La mayoría de los ejercicios son de respuesta abierta y presentan soluciones guiadas, problemas de ejemplo y apoyo al aprendizaje para ayuda adicional.
- **Capítulo “Cómo prepararse”**: incluye cientos de ejercicios referentes a las habilidades necesarias de álgebra y trigonometría. Cada estudiante puede recibir apoyo para aquellas habilidades en las que necesite ayuda.
- **Plan de estudio personalizado**, generado cuando los estudiantes completan un examen o un cuestionario; indica los temas que tienen que dominarse, y contiene vínculos a ejercicios tutoriales para mejorar su comprensión y desempeño.
- **Apoyo de aprendizaje multimedia**, como videoclases, applets de Java y animaciones; ayuda a los estudiantes a mejorar, independientemente de su nivel de comprensión y desempeño.
- **Administrador de evaluaciones**: permite crear trabajos, cuestionarios y exámenes en línea, que se califican de manera automática. Basta seleccionar una mezcla adecuada de las preguntas en el banco de ejercicios de MyMathLab y de los ejercicios creados por el profesor.
- **Libro de calificaciones**: diseñado específicamente para matemáticas y estadística, de manera automática hace un seguimiento del estudiante y brinda al profesor control para calcular las calificaciones finales. También es posible agregar calificaciones extras a este libro de calificaciones.
- **Diseñador de ejercicios MathXL**: permite crear ejercicios fijos y algorítmicos para las tareas en línea. El profesor puede utilizar la biblioteca de ejercicios como un punto sencillo de inicio.

MyMathLab es activado por CourseCompass™, entornos de enseñanza y aprendizaje de Pearson Educación, y por MathXL, nuestro sistema en línea de tareas, tutoriales y trabajos. MyMathLab está disponible para maestros calificados que adopten el texto. Para mayor información, comuníquese con su representante de ventas local de Pearson.

Video clases con captura opcional

Las presentaciones de las clases incluyen ejemplos y ejercicios del texto, además de que apoyan un enfoque que enfatiza la visualización y la resolución de problemas. Está disponible por medio de MyMathLab y MathXL.

Cursos en línea con MathXL (se requiere código de acceso)

MathXL es un sistema en línea para tareas, tutoría y asignación de trabajos que acompaña a libros de texto en matemáticas y estadística de Pearson.

- **Ejercicios interactivos**, correlacionados con el libro de texto en el nivel de objetivos; se generan de manera algorítmica para práctica y dominio ilimitados. La mayoría de los ejercicios son de respuesta abierta y ofrecen soluciones guiadas, problemas de ejemplo y apoyo al aprendizaje para ayuda adicional.
- **Capítulo “Cómo prepararse”**: incluye cientos de ejercicios referentes a las habilidades necesarias de álgebra y trigonometría. Cada estudiante puede recibir apoyo para aquellas habilidades en las que necesite ayuda.
- **Plan de estudio personalizado**: se genera cuando los estudiantes completan un examen o un cuestionario; además, indica los temas que tienen que dominarse, y contiene vínculos a ejercicios tutoriales para mejorar su comprensión y desempeño.
- **Apoyo de aprendizaje multimedia**, como videoclases, applets de Java y animaciones; ayuda a los estudiantes a mejorar, independientemente de su nivel de comprensión y desempeño.

- **Libro de calificaciones:** diseñado específicamente para matemáticas y estadística, de manera automática hace un seguimiento del estudiante y brinda al profesor control para calcular las calificaciones finales. También es posible agregar calificaciones extras a este libro de calificaciones.
- **Diseñador de ejercicios MathXL:** permite crear ejercicios fijos y algorítmicos para las tareas en línea. El profesor puede utilizar la biblioteca de ejercicios como un punto sencillo de inicio.
- **Administrador de evaluaciones:** permite crear trabajos, cuestionarios y exámenes en línea que se califican de manera automática. Basta seleccionar una mezcla adecuada de las preguntas en el banco de ejercicios de MyMathLab y de los ejercicios creados por el profesor.

MathXL está disponible para profesores calificados que adopten el libro. Para mayor información, comuníquese con su representante de ventas local de Pearson.

TestGen®

TestGen permite a los maestros construir, editar, imprimir y administrar exámenes utilizando un banco de preguntas computarizado, el cual fue desarrollado para cubrir todos los objetivos del texto. TestGen tiene como base un algoritmo que permite a los profesores crear múltiples versiones, aunque equivalentes, de la misma pregunta o examen con tan sólo hacer clic en un botón. Los profesores también pueden modificar las preguntas del banco respectivo o agregar nuevas preguntas. Es posible imprimir los exámenes o administrarlos en línea.

Diapositivas de clases en PowerPoint®

Estas diapositivas de presentaciones de clases fueron diseñadas específicamente para la secuencia y filosofía de la serie de *Cálculo de Thomas*. Se incluyen gráficas clave del libro para ayudar a hacer vívidos los conceptos en el salón de clases.

Manual de soluciones para el profesor

El *Manual de soluciones para el profesor*, de William Ardis, Collin County Community College, contiene soluciones completamente desarrolladas de todos los ejercicios del texto.

Agradecimientos

Queremos expresar nuestro agradecimiento a las personas que hicieron muchas e invaluables contribuciones a esta edición conforme se desarrollaba en sus diferentes etapas:

Revisores

Blaise DeSesa
Paul Lorczak
Kathleen Pellissier
Lauri Semarne
Sarah Streett
Holly Zullo

Revisores de la decimosegunda edición

Meighan Dillon, *Southern Polytechnic State University*
Anne Dougherty, *University of Colorado*
Said Fariabi, *San Antonio College*
Klaus Fischer, *George Mason University*
Tim Flood, *Pittsburg State University*
Rick Ford, *California State University, Chico*
Robert Gardner, *East Tennessee State University*
Christopher Heil, *Georgia Institute of Technology*
Joshua Brandon Holden, *Rose-Hulman Institute of Technology*
Alexander Hulpke, *Colorado State University*
Jacqueline Jensen, *Sam Houston State University*

Jennifer M. Johnson, *Princeton University*
Hideaki Kaneko, *Old Dominion University*
Przemo Kranz, *University of Mississippi*
Xin Li, *University of Central Florida*
Maura Mast, *University of Massachusetts, Boston*
Val Mohanakumar, *Hillsborough Community College, Dale Mabry Campus*
Aaron Montgomery, *Central Washington University*
Cynthia Piez, *University of Idaho*
Brooke Quinlan, *Hillsborough Community College, Dale Mabry Campus*
Rebecca A. Segal, *Virginia Commonwealth University*
Andrew V. Sills, *Georgia Southern University*
Alex Smith, *University of Wisconsin, Eau Claire*
Mark A. Smith, *Miami University*
Donald Solomon, *University of Wisconsin, Milwaukee*
Blake Thornton, *Washington University in St. Louis*
David Walnut, *George Mason University*
Adrian Wilson, *University of Montevallo*
Bobby Winters, *Pittsburg State University*
Dennis Wortman, *University of Massachusetts, Boston*



12

LOS VECTORES Y LA GEOMETRÍA DEL ESPACIO

INTRODUCCIÓN Para aplicar el cálculo a muchas situaciones reales y en matemáticas avanzadas, necesitamos una descripción matemática del espacio tridimensional. En este capítulo presentaremos los sistemas de coordenadas y los vectores tridimensionales. Con base en nuestros conocimientos acerca de las coordenadas en el plano xy , estableceremos coordenadas en el espacio agregando un tercer eje que mide la distancia hacia arriba y hacia abajo del plano xy . Los vectores se usan para estudiar la geometría analítica del espacio, donde ofrecen maneras simples de describir líneas, planos, superficies y curvas en el espacio. Usaremos estas ideas geométricas más adelante para estudiar el movimiento en el espacio y el cálculo de funciones de varias variables, con diversas aplicaciones importantes en ciencias, ingeniería, economía y matemáticas avanzadas.

12.1 | Sistemas de coordenadas tridimensionales

Para localizar un punto en el espacio, utilizamos tres ejes coordenados mutuamente perpendiculares, dispuestos como en la figura 12.1. Los ejes allí mostrados forman un sistema coordenado diestro o de *mano derecha*. Cuando se sostiene la mano derecha de tal manera que los dedos meñique e índice se curven del eje x positivo hacia al eje y positivo, el dedo pulgar apunta en la dirección del eje z positivo. Así, cuando se mira hacia abajo al plano xy desde la dirección positiva del eje z , los ángulos positivos en el plano se miden en el sentido contrario al de las manecillas del reloj, a partir del eje x positivo y alrededor del eje z positivo. (En un sistema de coordenadas de *mano izquierda*, el eje z positivo apuntaría hacia abajo en la figura 12.1 y los ángulos en el plano son positivos cuando se miden en el sentido de las manecillas del reloj a partir del eje x positivo. Los sistemas de coordenadas de mano derecha y mano izquierda no son equivalentes).

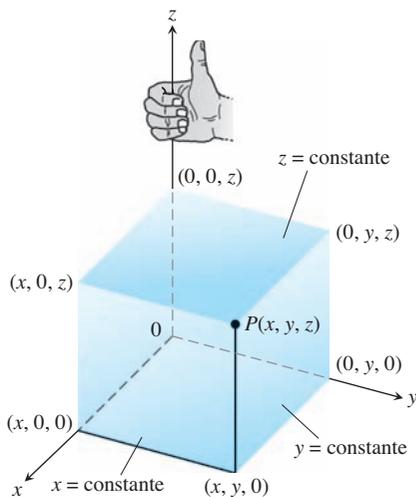


FIGURA 12.1 El sistema coordenado cartesiano sigue la convención de la mano derecha.

Las coordenadas cartesianas (x, y, z) de un punto P en el espacio son los valores en los cuales los planos que pasan por P , perpendiculares a los ejes, cortan los ejes. Las coordenadas cartesianas del espacio también se llaman **coordenadas rectangulares**, porque los ejes que las definen se cortan en ángulos rectos. Los puntos sobre el eje x tienen las coordenadas y y z igual a cero. Es decir, tienen coordenadas de la forma $(x, 0, 0)$. De manera análoga, los puntos sobre el eje y tienen coordenadas de la forma $(0, y, 0)$, y los puntos sobre el eje z tienen coordenadas de la forma $(0, 0, z)$.

Los planos determinados por los ejes coordenados son el **plano xy** , cuya ecuación estándar es $z = 0$; el **plano yz** , cuya ecuación estándar es $x = 0$; y el **plano xz** , cuya ecuación habitual es $y = 0$. Estos planos se cortan en el origen $(0, 0, 0)$ (figura 12.2). El origen también se identifica simplemente como 0 o algunas veces por la letra O .

Los tres **planos coordenados** $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$ dividen al espacio en ocho celdas llamadas **octantes**. El octante en el cual todas las coordenadas de un punto son positivas se llama **primer octante**; no hay una numeración convencional para la de los otros siete octantes.

Los puntos en un plano perpendicular al eje x tienen todos la misma coordenada x , que es el número correspondiente al punto donde el plano corta al eje x . Las coordenadas y y z pueden ser números cualesquiera. De manera análoga, los puntos en un plano perpendicular al eje y tienen la misma coordenada y , y los puntos en un plano perpendicular al eje z tienen una coordenada z común. Para escribir las ecuaciones de estos planos, utilizamos el valor de la coordenada común. El plano $x = 2$ es el plano perpendicular al eje x en $x = 2$. El plano

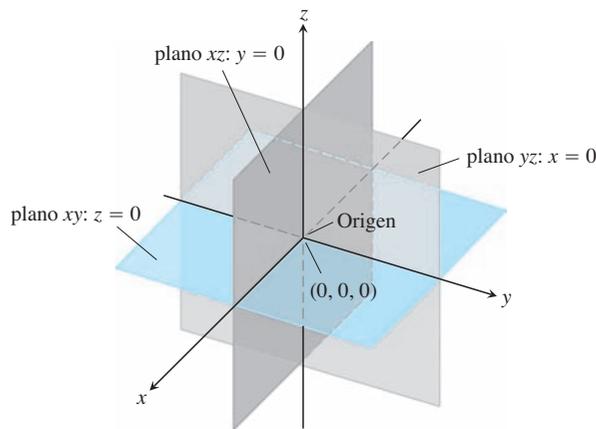


FIGURA 12.2 Los planos $x = 0, y = 0$ y $z = 0$ dividen al espacio en ocho octantes.

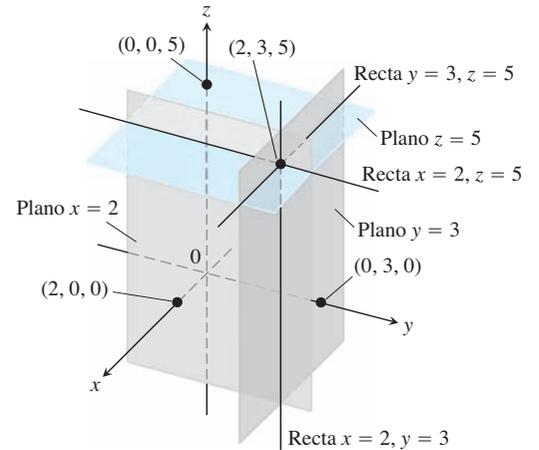


FIGURA 12.3 Los planos $x = 2, y = 3$ y $z = 5$ determinan tres rectas que pasan por el punto $(2, 3, 5)$.

$y = 3$ es el plano perpendicular al eje y en $y = 3$. El plano $z = 5$ es el plano perpendicular al eje z en $z = 5$. La figura 12.3 muestra los planos $x = 2, y = 3, y z = 5$, junto con su punto de intersección $(2, 3, 5)$.

Los planos $x = 2$ y $y = 3$ de la figura 12.3 se intersectan en una recta paralela al eje z . Esta recta queda descrita por el par de ecuaciones $x = 2, y = 3$. Un punto (x, y, z) está en la recta si y sólo si $x = 2$ y $y = 3$. De igual manera, la línea de intersección de los planos $y = 3, y z = 5$ queda descrita por el par de ecuaciones $y = 3, z = 5$. Esta recta corre paralela al eje x . La recta de intersección de los planos $x = 2$ y $z = 5$, paralela al eje y , queda descrita por el par de ecuaciones $x = 2, z = 5$.

En los siguientes ejemplos relacionamos ecuaciones y desigualdades de coordenadas con los conjuntos de puntos que definen en el espacio.

EJEMPLO 1 Interpretación geométrica de ecuaciones y desigualdades.

- (a) $z \geq 0$ El semiespacio que consta de los puntos que están en y arriba del plano xy .
- (b) $x = -3$ El plano perpendicular al eje x en $x = -3$. Este plano es paralelo al plano yz y está tres unidades atrás de él.
- (c) $z = 0, x \leq 0, y \geq 0$ El segundo cuadrante del plano xy .
- (d) $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ El primer octante.
- (e) $-1 \leq y \leq 1$ El bloque entre los planos $y = -1$ y $y = 1$ (con estos planos incluidos).
- (f) $y = -2, z = 2$ La recta donde se intersectan los planos $y = -2$ y $z = 2$. O bien, la recta paralela al eje x que pasa por el punto $(0, -2, 2)$. ■

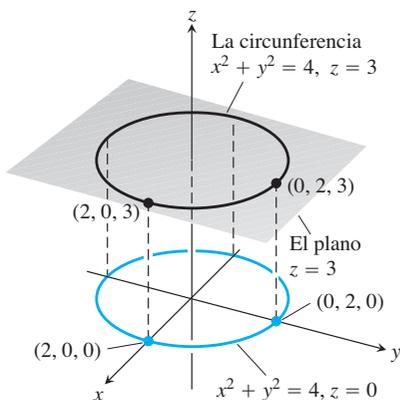


FIGURA 12.4 La circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ en el plano $z = 3$ (ejemplo 2).

EJEMPLO 2 ¿Qué puntos $P(x, y, z)$ satisfacen la ecuación

$$x^2 + y^2 = 4 \quad y \quad z = 3?$$

Solución Los puntos están en el plano horizontal $z = 3$ y, en este plano, forman la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$. A este conjunto de puntos lo llamamos “la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ en el plano $z = 3$ ” o, más simplemente, “la circunferencia $x^2 + y^2 = 4, z = 3$ ” (figura 12.4). ■

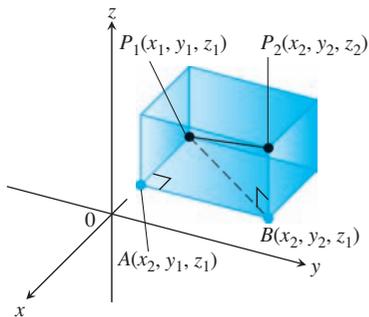


FIGURA 12.5 Calculamos la distancia entre P_1 y P_2 aplicando el teorema de Pitágoras a los triángulos rectángulos P_1AB y P_1BP_2 .

Distancia y esferas en el espacio

La fórmula para la distancia entre dos puntos en el plano xy se extiende a puntos en el espacio.

La distancia entre $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ es

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Demostración Construimos una caja rectangular con caras paralelas a los planos coordenados y los puntos P_1 y P_2 en esquinas opuestas de la caja (figura 12.5). Si $A(x_2, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_1)$ son los vértices de la caja, como se indica en la figura, entonces las tres aristas de la caja P_1A , AB , BP_2 tienen longitudes

$$|P_1A| = |x_2 - x_1|, \quad |AB| = |y_2 - y_1|, \quad |BP_2| = |z_2 - z_1|.$$

Como los triángulos P_1BP_2 y P_1AB son triángulos rectángulos, dos aplicaciones del teorema de Pitágoras implican que

$$|P_1P_2|^2 = |P_1B|^2 + |BP_2|^2 \quad \text{y} \quad |P_1B|^2 = |P_1A|^2 + |AB|^2$$

(véase figura 12.5).

De manera que

$$\begin{aligned} |P_1P_2|^2 &= |P_1B|^2 + |BP_2|^2 \\ &= |P_1A|^2 + |AB|^2 + |BP_2|^2 && \text{Se sustituye} \\ &= |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 + |z_2 - z_1|^2 && |P_1B|^2 = |P_1A|^2 + |AB|^2. \\ &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 3 La distancia entre $P_1(2, 1, 5)$ y $P_2(-2, 3, 0)$ es

$$\begin{aligned} |P_1P_2| &= \sqrt{(-2 - 2)^2 + (3 - 1)^2 + (0 - 5)^2} \\ &= \sqrt{16 + 4 + 25} \\ &= \sqrt{45} \approx 6.708. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Podemos usar la fórmula de la distancia para escribir ecuaciones de esferas en el espacio (figura 12.6). Un punto $P(x, y, z)$ está en la esfera de radio a con centro en $P_0(x_0, y_0, z_0)$ exactamente cuando $|P_0P| = a$, es decir,

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = a^2.$$

Ecuación en forma estándar de la esfera de radio a y centro en (x_0, y_0, z_0)

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = a^2$$

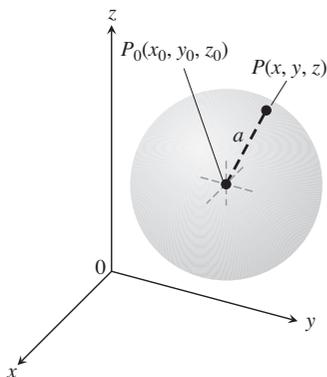


FIGURA 12.6 La esfera de radio a con centro en el punto (x_0, y_0, z_0) .

EJEMPLO 4 Encuentre el centro y el radio de la esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3x - 4z + 1 = 0.$$

Solución Obtenemos el centro y el radio de una esfera del mismo modo en que encontramos el centro y radio de una circunferencia: si es necesario se completan los cuadrados de los términos en x , y y z y se escribe cada expresión cuadrática como el cuadrado de una expresión li-

neal. Luego, a partir de la forma estándar de la ecuación, localizamos el centro y el radio. Para esta esfera tenemos

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + z^2 + 3x - 4z + 1 &= 0 \\(x^2 + 3x) + y^2 + (z^2 - 4z) &= -1 \\ \left(x^2 + 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2\right) + y^2 + \left(z^2 - 4z + \left(\frac{-4}{2}\right)^2\right) &= -1 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{-4}{2}\right)^2 \\ \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 + (z - 2)^2 &= -1 + \frac{9}{4} + 4 = \frac{21}{4}.\end{aligned}$$

A partir de la forma estándar de la ecuación, vemos que $x_0 = -3/2$, $y_0 = 0$, $z_0 = 2$ y $a = \sqrt{21}/2$. El centro es $(-3/2, 0, 2)$. El radio es $\sqrt{21}/2$. ■

EJEMPLO 5 He aquí algunas interpretaciones geométricas de desigualdades y ecuaciones que implican esferas.

(a) $x^2 + y^2 + z^2 < 4$

El interior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

(b) $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$

La bola sólida acotada por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. O bien, la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ junto con su interior.

(c) $x^2 + y^2 + z^2 > 4$

El exterior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

(d) $x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \leq 0$

El hemisferio inferior obtenido al cortar la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ con el plano xy (el plano $z = 0$). ■

Así como las coordenadas polares nos ofrecen otra manera de localizar puntos en el plano xy (sección 11.3), existen otros sistemas coordenados para espacios tridimensionales, diferentes de los sistemas cartesianos aquí desarrollados. Estudiaremos dos de estos sistemas coordenados en la sección 15.7.

Ejercicios 12.1

Interpretación geométrica de ecuaciones

En los ejercicios 1 a 16, proporcione descripciones geométricas del conjunto de puntos en el espacio cuyas coordenadas satisfacen los pares de ecuaciones que se indican.

- $x = 2, y = 3$
- $x = -1, z = 0$
- $y = 0, z = 0$
- $x = 1, y = 0$
- $x^2 + y^2 = 4, z = 0$
- $x^2 + y^2 = 4, z = -2$
- $x^2 + z^2 = 4, y = 0$
- $y^2 + z^2 = 1, x = 0$
- $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x = 0$
- $x^2 + y^2 + z^2 = 25, y = -4$
- $x^2 + y^2 + (z + 3)^2 = 25, z = 0$
- $x^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 4, y = 0$
- $x^2 + y^2 = 4, z = y$
- $x^2 + y^2 + z^2 = 4, y = x$
- $y = x^2, z = 0$
- $z = y^2, x = 1$

Interpretación geométrica de ecuaciones y desigualdades

En los ejercicios 17 a 24, describa el conjunto de puntos en el espacio cuyas coordenadas satisfacen las desigualdades o combinaciones de ecuaciones y desigualdades que se indican.

- a.** $x \geq 0, y \geq 0, z = 0$ **b.** $x \geq 0, y \leq 0, z = 0$
- a.** $0 \leq x \leq 1$ **b.** $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$
- c.** $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$
- a.** $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ **b.** $x^2 + y^2 + z^2 > 1$
- a.** $x^2 + y^2 \leq 1, z = 0$ **b.** $x^2 + y^2 \leq 1, z = 3$
- c.** $x^2 + y^2 \leq 1$, sin restricción para z
- a.** $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$
- b.** $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0$
- a.** $x = y, z = 0$ **b.** $x = y$, sin restricción para z
- a.** $y \geq x^2, z \geq 0$ **b.** $x \leq y^2, 0 \leq z \leq 2$
- a.** $z = 1 - y$, sin restricción para x
- b.** $z = y^3, x = 2$

En los ejercicios 25 a 34 describa el conjunto dado con una ecuación o con un par de ecuaciones.

25. El plano perpendicular a
 - a. el eje x en $(3, 0, 0)$
 - b. el eje y en $(0, -1, 0)$
 - c. el eje z en $(0, 0, -2)$
26. El plano que pasa por el punto $(3, -1, 2)$ perpendicular a
 - a. el eje x
 - b. el eje y
 - c. el eje z
27. El plano que pasa por el punto $(3, -1, 1)$ paralelo a
 - a. el plano xy
 - b. el plano yz
 - c. el plano xz
28. La circunferencia de radio 2 con centro en $(0, 0, 0)$ y que está en
 - a. el plano xy
 - b. el plano yz
 - c. el plano xz
29. La circunferencia de radio 2 con centro en $(0, 2, 0)$ y que está en
 - a. el plano xy
 - b. el plano yz
 - c. el plano $y = 2$
30. La circunferencia de radio 1 con centro en $(-3, 4, 1)$ y que está en un plano paralelo a
 - a. el plano xy
 - b. el plano yz
 - c. el plano xz
31. La recta que pasa por el punto $(1, 3, -1)$ paralela a
 - a. el eje x
 - b. el eje y
 - c. el eje z
32. El conjunto de puntos en el espacio equidistantes del origen y del punto $(0, 2, 0)$
33. La circunferencia donde el plano perpendicular al eje z y que pasa por el punto $(1, 1, 3)$ corta a la esfera de radio 5 con centro en el origen
34. El conjunto de puntos en el espacio que están a 2 unidades del punto $(0, 0, 1)$ y, al mismo tiempo, a 2 unidades del punto $(0, 0, -1)$

Desigualdades para describir conjuntos de puntos

Escriba las desigualdades que determinan a los conjuntos de puntos dados en los ejercicios 35 a 40.

35. El bloque limitado por los planos $z = 0$ y $z = 1$ (incluidos los planos)
36. El cubo sólido en el primer octante, limitado por los planos coordenados y los planos $x = 2, y = 2$ y $z = 2$
37. El semiespacio que consiste en los puntos que se encuentran en y debajo del plano xy
38. El hemisferio superior de la esfera de radio 1 con centro en el origen
39. (a) El interior y (b) el exterior de una esfera de radio 1 con centro en el punto $(1, 1, 1)$
40. La región cerrada acotada por las esferas de radio 1 y 2 con centro en el origen. (*Cerrada* significa que las esferas están incluidas. Si quisiéramos no incluir a las esferas, habríamos pedido la región *abierta* acotada por las esferas. Esto es similar a la manera en que usamos *cerrado* y *abierto* para describir intervalos: *cerrado* significa que se incluyen los extremos y *abierto* indica que no se incluyen los extremos. Los conjuntos cerrados incluyen a sus fronteras y los abiertos las excluyen).

Distancia

En los ejercicios 41 a 46, calcule la distancia entre los puntos P_1 y P_2 .

41. $P_1(1, 1, 1), P_2(3, 3, 0)$
42. $P_1(-1, 1, 5), P_2(2, 5, 0)$
43. $P_1(1, 4, 5), P_2(4, -2, 7)$

44. $P_1(3, 4, 5), P_2(2, 3, 4)$
45. $P_1(0, 0, 0), P_2(2, -2, -2)$
46. $P_1(5, 3, -2), P_2(0, 0, 0)$

Esferas

Determine los centros y los radios de las esferas en los ejercicios 47 a 50.

47. $(x + 2)^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 8$
48. $(x - 1)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + (z + 3)^2 = 25$
49. $(x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 + (z + \sqrt{2})^2 = 2$
50. $x^2 + \left(y + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$

Obtenga las ecuaciones de las esferas cuyos centros y radios se indican en los ejercicios 51 a 54.

| Centro | Radio |
|--|---------------|
| 51. $(1, 2, 3)$ | $\sqrt{14}$ |
| 52. $(0, -1, 5)$ | 2 |
| 53. $\left(-1, \frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\right)$ | $\frac{4}{9}$ |
| 54. $(0, -7, 0)$ | 7 |

Determine los centros y los radios de las esferas en los ejercicios 55 a 58.

55. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 4z = 0$
56. $x^2 + y^2 + z^2 - 6y + 8z = 0$
57. $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + x + y + z = 9$
58. $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2y - 2z = 9$

Teoría y ejemplos

59. Determine una fórmula para la distancia del punto $P(x, y, z)$ al
 - a. eje x
 - b. eje y
 - c. eje z
60. Determine una fórmula para la distancia del punto $P(x, y, z)$ al
 - a. plano xy
 - b. plano yz
 - c. plano xz
61. Obtenga el perímetro del triángulo con vértices $A(-1, 2, 1), B(1, -1, 3)$, y $C(3, 4, 5)$.
62. Demuestre que el punto $P(3, 1, 2)$ es equidistante de los puntos $A(2, -1, 3)$ y $B(4, 3, 1)$.
63. Obtenga una ecuación para el conjunto de todos los puntos equidistantes de los planos $y = 3$ y $y = -1$.
64. Determine una ecuación para el conjunto de todos los puntos equidistantes del punto $(0, 0, 2)$ y del plano xy .
65. Encuentre el punto en la esfera $x^2 + (y - 3)^2 + (z + 5)^2 = 4$ más cercano
 - a. al plano xy
 - b. al punto $(0, 7, -5)$.
66. Encuentre un punto equidistante de los puntos $(0, 0, 0), (0, 4, 0), (3, 0, 0)$, y $(2, 2, -3)$.

12.2 Vectores

Algunos de los factores que medimos están determinados simplemente por sus magnitudes. Por ejemplo, para registrar la masa, la longitud o el tiempo sólo necesitamos escribir un número y el nombre de la unidad de medida apropiada. Para describir una fuerza, un desplazamiento o una velocidad necesitamos más información. En el caso de una fuerza, necesitamos registrar la dirección en la cual actúa, así como su magnitud. Para describir el desplazamiento de un cuerpo, tenemos que decir en qué dirección se movió y qué tan lejos. Para describir la velocidad de un cuerpo debemos saber hacia dónde se dirige el cuerpo, así como la rapidez con que está viajando. En esta sección mostraremos cómo representar, en el plano o en el espacio, elementos que tienen tanto magnitud como dirección.

Componentes

Una cantidad como una fuerza, un desplazamiento o una velocidad se llama **vector** y se representa por medio de un **segmento de recta dirigido** (figura 12.7). La flecha apunta en la dirección de la acción, y su longitud representa la magnitud de la acción en términos de una unidad apropiada. Por ejemplo, el vector de fuerza apunta en la dirección en la cual actúa la fuerza, y su longitud es una medida de la intensidad de la fuerza; un vector de velocidad apunta en la dirección del movimiento y su longitud es la rapidez del objeto móvil. La figura 12.8 muestra el vector de velocidad \mathbf{v} en una posición específica para una partícula que se desplaza a lo largo de una trayectoria en el plano o en el espacio. (Esta aplicación de los vectores se estudia en el capítulo 13).

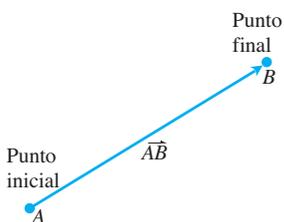


FIGURA 12.7 El segmento de recta dirigido se llama vector.

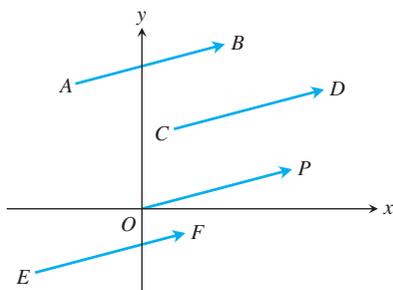


FIGURA 12.9 Las cuatro flechas en el plano (segmentos de recta dirigidos) mostradas aquí tienen la misma longitud y dirección. Por lo tanto, representan al mismo vector, por lo que escribimos $\vec{AB} = \vec{CD} = \vec{OP} = \vec{EF}$.

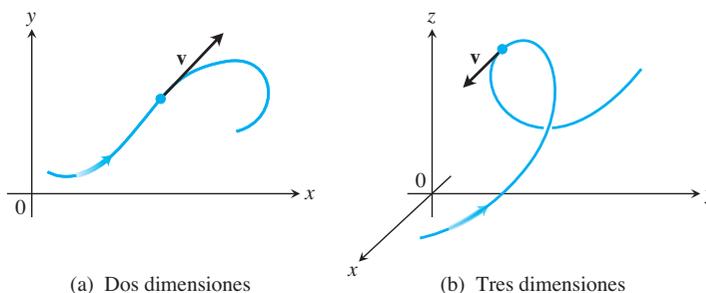


FIGURA 12.8 El vector de velocidad de una partícula que se desplaza a lo largo de una trayectoria (a) en el plano (b) en el espacio. La punta de la flecha sobre la trayectoria indica la dirección del movimiento de la partícula.

DEFINICIONES Un vector es un segmento de recta dirigido. El segmento de recta dirigido \vec{AB} tiene un **punto inicial** A y un **punto final** B , y su **longitud** o magnitud se representa por $|\vec{AB}|$. Dos vectores son **iguales** cuando tienen la misma longitud y dirección.

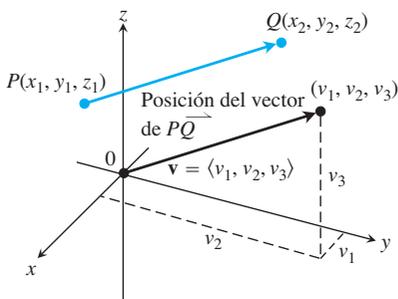


FIGURA 12.10 Un vector \vec{PQ} en posición estándar tiene su punto inicial en el origen. Los segmentos de recta dirigidos \vec{PQ} y \mathbf{v} son paralelos y tienen la misma longitud.

Las flechas que usamos para trazar vectores representan al mismo vector si tienen la misma longitud, son paralelas y apuntan en la misma dirección (figura 12.9) sin importar su punto inicial.

En los libros de texto, los vectores se denotan normalmente con letras minúsculas en negritas, por ejemplo, \mathbf{u} , \mathbf{v} y \mathbf{w} . Algunas veces usamos letras mayúsculas en negritas, como \mathbf{F} , para representar un vector de fuerza. Cuando se usan cursivas, se acostumbra escribir pequeñas flechas encima de las letras, por ejemplo \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} , y \vec{F} .

Necesitamos una manera para representar algebraicamente los vectores, de manera que podamos precisar su dirección. Sea $\mathbf{v} = \vec{PQ}$. Existe un segmento de recta dirigido igual a \vec{PQ} cuyo punto inicial es el origen (figura 12.10). Ésta es la representación de \mathbf{v} en **posición estándar** y es el vector que normalmente usamos para representar a \mathbf{v} . Podemos especificar a \mathbf{v} escribiendo

biendo las coordenadas de su punto final (v_1, v_2, v_3) cuando \mathbf{v} está en posición estándar. Si \mathbf{v} es un vector en el plano, su punto final (v_1, v_2) tiene dos coordenadas.

DEFINICIÓN

Si \mathbf{v} es un **vector bidimensional** en el plano igual al vector con punto inicial en el origen y punto final (v_1, v_2) , entonces la **expresión de \mathbf{v} en componentes** es

$$\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle.$$

Si \mathbf{v} es un **vector tridimensional** igual al vector con punto inicial en el origen y punto final (v_1, v_2, v_3) , entonces la **expresión de \mathbf{v} en componentes** es

$$\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle.$$

Por lo tanto, un vector bidimensional es un par ordenado $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$ de números reales, y un vector tridimensional es una terna ordenada $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ de números reales. Los números v_1, v_2 y v_3 son los **componentes** de \mathbf{v} .

Si $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$, se representa por el segmento de recta dirigido \overrightarrow{PQ} , donde el punto inicial es $P(x_1, y_1, z_1)$ y el punto final es $Q = (x_2, y_2, z_2)$, entonces $x_1 + v_1 = x_2, y_1 + v_2 = y_2, y z_1 + v_3 = z_2$, (véase la figura 12.10). Por lo tanto, $v_1 = x_2 - x_1, v_2 = y_2 - y_1$ y $v_3 = z_2 - z_1$ son los componentes de \overrightarrow{PQ} .

En resumen, dados los puntos $P(x_1, y_1, z_1)$ y $Q = (x_2, y_2, z_2)$, el vector en posición estándar $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ igual a \overrightarrow{PQ} es

$$\mathbf{v} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle.$$

Si \mathbf{v} es el vector bidimensional con $P(x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$ como puntos en el plano, entonces $\mathbf{v} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$. No hay un tercer componente para vectores en el plano. Con esto en mente desarrollaremos el álgebra de los vectores tridimensionales y simplemente eliminaremos el tercer componente cuando se trate de vectores bidimensionales (un vector en el plano).

Dos vectores son iguales si y sólo si sus vectores en posición estándar son idénticos. De manera que $\langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ y $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ son **iguales** si y sólo si $u_1 = v_1, u_2 = v_2$ y $u_3 = v_3$.

La **magnitud** o **longitud** del vector \overrightarrow{PQ} es la longitud de cualquiera de sus representaciones como segmento de recta dirigido. En particular, si $\mathbf{v} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle$ es el vector en posición estándar para \overrightarrow{PQ} , entonces la fórmula para la distancia proporciona la magnitud o longitud de \mathbf{v} , representada por el símbolo $|\mathbf{v}|$ o $\|\mathbf{v}\|$.

La **magnitud** o **longitud** del vector $\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ}$ es el número no negativo

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

(véase la figura 12.10).

El único vector con longitud 0 es el **vector cero** $\mathbf{0} = \langle 0, 0 \rangle$ o $\mathbf{0} = \langle 0, 0, 0 \rangle$. Este vector también es el único sin dirección específica.

EJEMPLO 1 Determine (a) los componentes y (b) la longitud del vector con punto inicial en $P(-3, 4, 1)$ y punto terminal $Q(-5, 2, 2)$.

Solución

(a) El vector en posición canónica \mathbf{v} que representa a \overrightarrow{PQ} tiene componentes

$$v_1 = x_2 - x_1 = -5 - (-3) = -2, \quad v_2 = y_2 - y_1 = 2 - 4 = -2,$$

y

$$v_3 = z_2 - z_1 = 2 - 1 = 1.$$

La expresión \vec{PQ} en componentes es

$$\mathbf{v} = \langle -2, -2, 1 \rangle.$$

(b) La longitud o magnitud de $\mathbf{v} = \vec{PQ}$ es

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (1)^2} = \sqrt{9} = 3. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 2 Se tira de un carrito a lo largo de un suelo liso horizontal con una fuerza \mathbf{F} de 20 libras que forma un ángulo de 45° con el suelo (figura 12.11). ¿Cuál es la fuerza efectiva que mueve el carrito hacia adelante?

Solución La fuerza efectiva es el componente horizontal de $\mathbf{F} = \langle a, b \rangle$, dado por

$$a = |\mathbf{F}| \cos 45^\circ = (20) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \approx 14.14 \text{ lb.}$$

Note que \mathbf{F} es un vector bidimensional. \(\blacksquare\)

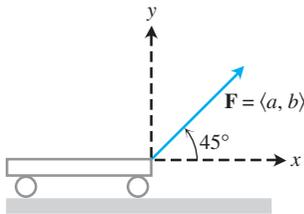


FIGURA 12.11 La fuerza que tira del carrito hacia adelante se representa por el vector \mathbf{F} cuyo componente horizontal es la fuerza efectiva (ejemplo 2).

Operaciones algebraicas con vectores

Dos operaciones fundamentales que pueden realizarse con vectores son la *suma de vectores* y la *multiplicación por un escalar*. Un **escalar** es simplemente un número real y se llama así cuando queremos resaltar su diferencia en relación con los vectores. Los escalares pueden ser positivos, negativos o cero y se usan para “escalar” un vector multiplicándolo.

DEFINICIONES Sean $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ vectores y k un escalar.

Suma: $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \langle u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3 \rangle$

Multiplicación escalar: $k\mathbf{u} = \langle ku_1, ku_2, ku_3 \rangle$

La suma de vectores se realiza sumando los componentes correspondientes de los vectores. Multiplicamos un vector por un escalar haciendo el producto de cada componente por el escalar. Las definiciones se aplican de manera similar a los vectores en el plano, sólo que éstos tienen únicamente dos componentes $\langle u_1, u_2 \rangle$ y $\langle v_1, v_2 \rangle$.

La definición de la suma de vectores en el plano se ilustra geométricamente en la figura 12.12a, donde el punto inicial de un vector se coloca en el punto final del otro. Otra interpretación se muestra en la figura 12.12b (llamada la **ley del paralelogramo** de la suma), donde

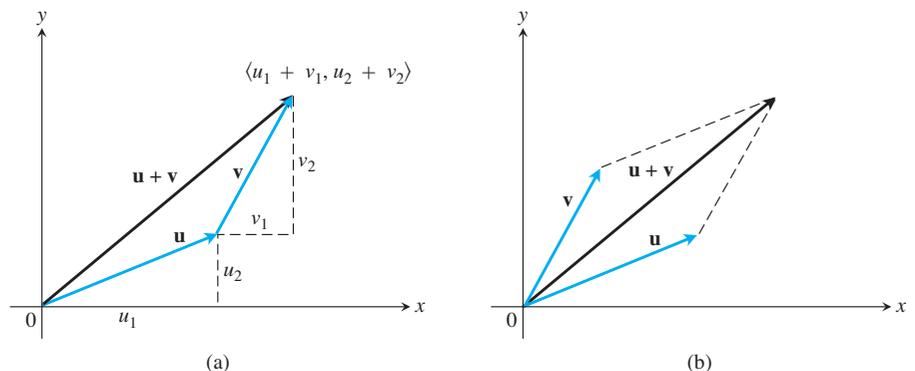


FIGURA 12.12 (a) Interpretación geométrica de la suma de vectores. (b) La ley del paralelogramo para la suma de vectores.

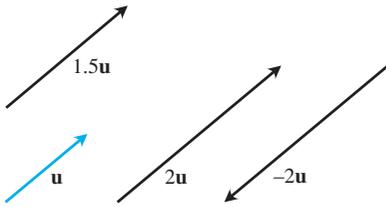
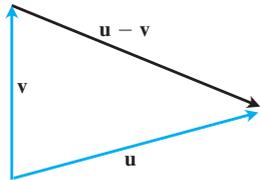
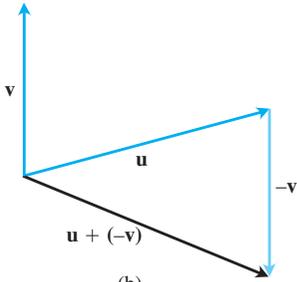


FIGURA 12.13 Múltiplos escalares de \mathbf{u} .



(a)



(b)

FIGURA 12.14 (a) El vector $\mathbf{u} - \mathbf{v}$, sumando a \mathbf{v} , da \mathbf{u} . (b) $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v})$.

la suma, llamada el **vector resultante**, es la diagonal del paralelogramo. En física, las fuerzas se suman vectorialmente, al igual que las velocidades, las aceleraciones, etcétera. Así, la fuerza que actúa sobre una partícula sujeta a fuerzas eléctricas y gravitacionales se obtiene sumando los dos vectores de fuerza.

En la figura 12.13 se muestra la interpretación geométrica del producto $k\mathbf{u}$ del escalar k por el vector \mathbf{u} . Si $k > 0$, entonces $k\mathbf{u}$ tiene la misma dirección que \mathbf{u} ; si $k < 0$, entonces la dirección de $k\mathbf{u}$ es opuesta a la dirección de \mathbf{u} . Comparando las longitudes de \mathbf{u} y $k\mathbf{u}$, vemos que

$$\begin{aligned} |k\mathbf{u}| &= \sqrt{(ku_1)^2 + (ku_2)^2 + (ku_3)^2} = \sqrt{k^2(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)} \\ &= \sqrt{k^2} \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} = |k| |\mathbf{u}|. \end{aligned}$$

La longitud de $k\mathbf{u}$ es igual al producto del valor absoluto del escalar k por la longitud de \mathbf{u} . El vector $(-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u}$ tiene la misma longitud de \mathbf{u} , pero apunta en la dirección opuesta.

La **diferencia** $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ de dos vectores está definida por

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v}).$$

Si $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$, entonces

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \langle u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3 \rangle.$$

Observe que $(\mathbf{u} - \mathbf{v}) + \mathbf{v} = \mathbf{u}$, de manera que sumando el vector $(\mathbf{u} - \mathbf{v})$ a \mathbf{v} se obtiene \mathbf{u} (figura 12.14a). La figura 12.14b muestra la diferencia $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ como la suma $\mathbf{u} + (-\mathbf{v})$.

EJEMPLO 3 Sean $\mathbf{u} = \langle -1, 3, 1 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle 4, 7, 0 \rangle$. Obtenga los componentes de

- (a) $2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}$ (b) $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ (c) $\left| \frac{1}{2}\mathbf{u} \right|$.

Solución

(a) $2\mathbf{u} + 3\mathbf{v} = 2\langle -1, 3, 1 \rangle + 3\langle 4, 7, 0 \rangle = \langle -2, 6, 2 \rangle + \langle 12, 21, 0 \rangle = \langle 10, 27, 2 \rangle$

(b) $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \langle -1, 3, 1 \rangle - \langle 4, 7, 0 \rangle = \langle -1 - 4, 3 - 7, 1 - 0 \rangle = \langle -5, -4, 1 \rangle$

(c) $\left| \frac{1}{2}\mathbf{u} \right| = \left| \left\langle -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \right| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{11}$. ■

Las operaciones vectoriales tienen muchas de las propiedades de la aritmética ordinaria.

Propiedades de las operaciones con vectores

Sean \mathbf{u} , \mathbf{v} , y \mathbf{w} vectores, y a y b escalares.

- | | |
|--|--|
| 1. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ | 2. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ |
| 3. $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$ | 4. $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ |
| 5. $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$ | 6. $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$ |
| 7. $a(b\mathbf{u}) = (ab)\mathbf{u}$ | 8. $a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}$ |
| 9. $(a + b)\mathbf{u} = a\mathbf{u} + b\mathbf{u}$ | |

Estas propiedades se verifican fácilmente usando las definiciones de suma de vectores y multiplicación por un escalar. Por ejemplo, para establecer la propiedad 1, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{u} + \mathbf{v} &= \langle u_1, u_2, u_3 \rangle + \langle v_1, v_2, v_3 \rangle \\ &= \langle u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3 \rangle \\ &= \langle v_1 + u_1, v_2 + u_2, v_3 + u_3 \rangle \\ &= \langle v_1, v_2, v_3 \rangle + \langle u_1, u_2, u_3 \rangle \\ &= \mathbf{v} + \mathbf{u}. \end{aligned}$$

Cuando tres o más vectores en el espacio se encuentran en el mismo plano, decimos que son vectores **coplanares**. Por ejemplo, los vectores \mathbf{u} , \mathbf{v} y $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ siempre son coplanares.

Vectores unitarios

Un vector \mathbf{v} de longitud 1 se llama **vector unitario**. Los **vectores unitarios estándar** (o canónicos) son

$$\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle, \quad \mathbf{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle, \quad \text{y} \quad \mathbf{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle.$$

Cualquier vector $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ se puede escribir como una *combinación lineal* de los vectores unitarios estándar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \langle v_1, 0, 0 \rangle + \langle 0, v_2, 0 \rangle + \langle 0, 0, v_3 \rangle \\ &= v_1 \langle 1, 0, 0 \rangle + v_2 \langle 0, 1, 0 \rangle + v_3 \langle 0, 0, 1 \rangle \\ &= v_1 \mathbf{i} + v_2 \mathbf{j} + v_3 \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Llamamos al escalar (o número) v_1 el **componente en i** del vector \mathbf{v} , a v_2 el **componente en j**, y a v_3 el **componente en k**. La expresión en componentes del vector de $P_1(x_1, y_1, z_1)$ a $P_2(x_2, y_2, z_2)$ es

$$\vec{P_1P_2} = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}$$

(figura 12.15).

Siempre que $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, su longitud $|\mathbf{v}|$ no es cero y

$$\left| \frac{1}{|\mathbf{v}|} \mathbf{v} \right| = \frac{1}{|\mathbf{v}|} |\mathbf{v}| = 1.$$

Es decir, $\mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ es un vector unitario en la dirección de \mathbf{v} , llamado **la dirección** del vector no nulo \mathbf{v} .

EJEMPLO 4 Obtenga el vector unitario \mathbf{u} en la dirección del vector de $P_1(1, 0, 1)$ a $P_2(3, 2, 0)$.

Solución Dividimos $\vec{P_1P_2}$ entre su longitud:

$$\begin{aligned} \vec{P_1P_2} &= (3 - 1)\mathbf{i} + (2 - 0)\mathbf{j} + (0 - 1)\mathbf{k} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k} \\ |\vec{P_1P_2}| &= \sqrt{(2)^2 + (2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4 + 4 + 1} = \sqrt{9} = 3 \\ \mathbf{u} &= \frac{\vec{P_1P_2}}{|\vec{P_1P_2}|} = \frac{2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}}{3} = \frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} - \frac{1}{3}\mathbf{k}. \end{aligned}$$

El vector unitario \mathbf{u} es la dirección de $\vec{P_1P_2}$. ■

EJEMPLO 5 Si $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$ es un vector de velocidad, exprese \mathbf{v} como el producto de su rapidez por un vector unitario en la dirección del movimiento.

Solución La rapidez es la magnitud (longitud) de \mathbf{v} :

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5.$$

El vector unitario $\mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ tiene la misma dirección de \mathbf{v} :

$$\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}}{5} = \frac{3}{5}\mathbf{i} - \frac{4}{5}\mathbf{j}.$$

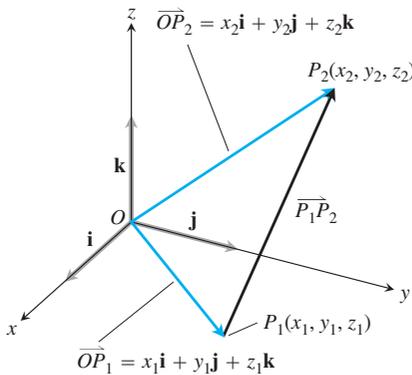


FIGURA 12.15 El vector de P_1 a P_2 es $\vec{P_1P_2} = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}$.

Entonces

$$\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} = 5 \left(\underbrace{\frac{3}{5}\mathbf{i} - \frac{4}{5}\mathbf{j}}_{\text{Dirección del movimiento}} \right)$$

Longitud (rapidez)

En resumen, podemos expresar cualquier vector no nulo \mathbf{v} en términos del producto de sus dos características fundamentales, longitud y dirección, escribiendo $\mathbf{v} = |\mathbf{v}| \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$.

Si $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, entonces

1. $\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ es un vector unitario en la dirección de \mathbf{v} ;
2. La ecuación $\mathbf{v} = |\mathbf{v}| \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ expresa a \mathbf{v} en términos de su longitud y dirección.

EJEMPLO 6 Se aplica una fuerza de 6 newtons en la dirección del vector $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$. Exprese la fuerza \mathbf{F} como el producto de su magnitud y dirección.

Solución El vector de fuerza tiene magnitud 6 y dirección $\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$, entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= 6 \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = 6 \frac{2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = 6 \frac{2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}}{3} \\ &= 6 \left(\frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} - \frac{1}{3}\mathbf{k} \right). \end{aligned}$$

Punto medio de un segmento de recta

Los vectores a menudo son útiles en geometría. Por ejemplo, las coordenadas del punto medio de un segmento de recta se determinan promediando.

El **punto medio** M del segmento de recta que une los puntos $P(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ es el punto

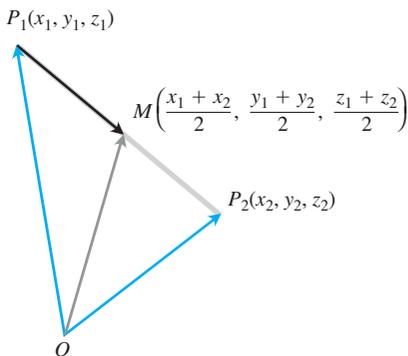
$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right).$$


FIGURA 12.16 Las coordenadas del punto medio son los promedios de las coordenadas de P_1 y P_2 .

Para comprender por qué, observe la figura 12.16, donde

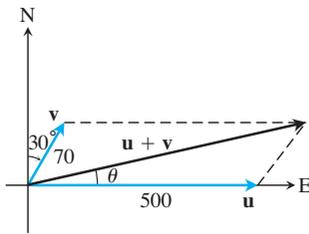
$$\begin{aligned} \vec{OM} &= \vec{OP}_1 + \frac{1}{2}(\vec{P}_1\vec{P}_2) = \vec{OP}_1 + \frac{1}{2}(\vec{OP}_2 - \vec{OP}_1) \\ &= \frac{1}{2}(\vec{OP}_1 + \vec{OP}_2) \\ &= \frac{x_1 + x_2}{2}\mathbf{i} + \frac{y_1 + y_2}{2}\mathbf{j} + \frac{z_1 + z_2}{2}\mathbf{k}. \end{aligned}$$

EJEMPLO 7 El punto medio del segmento que une $P_1(3, -2, 0)$ y $P_2(7, 4, 4)$ es

$$\left(\frac{3 + 7}{2}, \frac{-2 + 4}{2}, \frac{0 + 4}{2} \right) = (5, 1, 2).$$

Aplicaciones

Una aplicación importante de los vectores se da en la navegación.



NO ESTÁ A ESCALA

FIGURA 12.17 Los vectores que representan las velocidades del avión \mathbf{u} y el viento de cola \mathbf{v} del ejemplo 8.

EJEMPLO 8 Un avión comercial, que vuela hacia el este a 500 millas por hora con cielo despejado, encuentra un viento de cola de 70 millas por hora soplando en dirección 60° al noreste. El avión mantiene el rumbo hacia el este, pero, debido al viento, adquiere una nueva rapidez y dirección con respecto al suelo. ¿Cuáles son la rapidez y dirección?

Solución Si \mathbf{u} = la velocidad del avión solamente y \mathbf{v} = la velocidad del viento de cola, entonces $|\mathbf{u}| = 500$ y $|\mathbf{v}| = 70$ (figura 12.17). La velocidad del avión con respecto al suelo está dada por la magnitud y dirección del vector resultante $\mathbf{u} + \mathbf{v}$. Si el eje x positivo representa la dirección este y el eje y positivo representa la dirección norte, entonces los componentes de \mathbf{u} y \mathbf{v} son

$$\mathbf{u} = \langle 500, 0 \rangle \quad \text{y} \quad \mathbf{v} = \langle 70 \cos 60^\circ, 70 \sin 60^\circ \rangle = \langle 35, 35\sqrt{3} \rangle.$$

Por lo tanto,

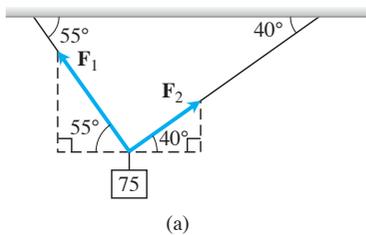
$$\begin{aligned} \mathbf{u} + \mathbf{v} &= \langle 535, 35\sqrt{3} \rangle = 535\mathbf{i} + 35\sqrt{3}\mathbf{j} \\ |\mathbf{u} + \mathbf{v}| &= \sqrt{535^2 + (35\sqrt{3})^2} \approx 538.4 \end{aligned}$$

y

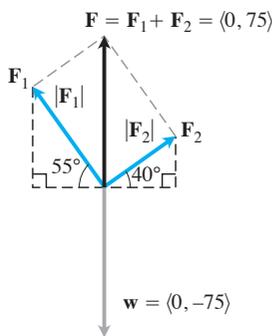
$$\theta = \tan^{-1} \frac{35\sqrt{3}}{535} \approx 6.5^\circ. \quad \text{Figura 12.17}$$

La nueva rapidez del avión con respecto al suelo es de alrededor de 538.4 millas por hora, y su nueva dirección es de aproximadamente 6.5° al noreste. ■

Otra aplicación importante se da en física e ingeniería, cuando varias fuerzas actúan sobre un objeto simple.



(a)



(b)

FIGURA 12.18 El peso suspendido del ejemplo 9.

EJEMPLO 9 Un peso de 75 newtons (N) está suspendido por dos alambres, como se muestra en la figura 12.18a. Obtenga las fuerzas \mathbf{F}_1 y \mathbf{F}_2 que actúan en ambos alambres.

Solución Los vectores de fuerza \mathbf{F}_1 y \mathbf{F}_2 tienen magnitudes $|\mathbf{F}_1|$ y $|\mathbf{F}_2|$ y componentes que se miden en newtons. La fuerza resultante es la suma $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ y debe ser igual en magnitud y actuar en dirección opuesta (hacia arriba) al vector de peso \mathbf{w} (figura 12.18b). A partir de la figura se deduce que

$$\mathbf{F}_1 = \langle -|\mathbf{F}_1| \cos 55^\circ, |\mathbf{F}_1| \sin 55^\circ \rangle \quad \text{y} \quad \mathbf{F}_2 = \langle |\mathbf{F}_2| \cos 40^\circ, |\mathbf{F}_2| \sin 40^\circ \rangle.$$

Puesto que $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \langle 0, 75 \rangle$, el vector resultante lleva al sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} -|\mathbf{F}_1| \cos 55^\circ + |\mathbf{F}_2| \cos 40^\circ &= 0 \\ |\mathbf{F}_1| \sin 55^\circ + |\mathbf{F}_2| \sin 40^\circ &= 75. \end{aligned}$$

Al despejar $|\mathbf{F}_2|$ en la primera ecuación y sustituir el resultado en la segunda, tenemos

$$|\mathbf{F}_2| = \frac{|\mathbf{F}_1| \cos 55^\circ}{\cos 40^\circ} \quad \text{y} \quad |\mathbf{F}_1| \sin 55^\circ + \frac{|\mathbf{F}_1| \cos 55^\circ}{\cos 40^\circ} \sin 40^\circ = 75.$$

Por lo tanto,

$$|\mathbf{F}_1| = \frac{75}{\sin 55^\circ + \cos 55^\circ \tan 40^\circ} \approx 57.67 \text{ N},$$

y

$$|\mathbf{F}_2| = \frac{75 \cos 55^\circ}{\sin 55^\circ \cos 40^\circ + \cos 55^\circ \sin 40^\circ}$$

$$= \frac{75 \cos 55^\circ}{\sin(55^\circ + 40^\circ)} \approx 43.18 \text{ N.}$$

Los vectores de fuerza son $\mathbf{F}_1 = \langle -33.08, 47.24 \rangle$ y $\mathbf{F}_2 = \langle 33.08, 27.76 \rangle$. ■

Ejercicios 12.2

Vectores en el plano

En los ejercicios 1 a 8, $\mathbf{u} = \langle 3, -2 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle -2, 5 \rangle$. Determine (a) los componentes y (b) la magnitud (longitud) del vector indicado.

- | | |
|--|--|
| 1. $3\mathbf{u}$ | 2. $-2\mathbf{v}$ |
| 3. $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ | 4. $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ |
| 5. $2\mathbf{u} - 3\mathbf{v}$ | 6. $-2\mathbf{u} + 5\mathbf{v}$ |
| 7. $\frac{3}{5}\mathbf{u} + \frac{4}{5}\mathbf{v}$ | 8. $-\frac{5}{13}\mathbf{u} + \frac{12}{13}\mathbf{v}$ |

En los ejercicios 9 a 16, obtenga los componentes del vector.

- El vector \overrightarrow{PQ} , donde $P = (1, 3)$ y $Q = (2, -1)$
- El vector \overrightarrow{OP} donde O es el origen y P es el punto medio del segmento RS , donde $R = (2, -1)$ y $S = (-4, 3)$
- El vector del punto $A = (2, 3)$ al origen
- La suma de \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{CD} , donde $A = (1, -1)$, $B = (2, 0)$, $C = (-1, 3)$, y $D = (-2, 2)$
- El vector unitario que forma un ángulo $\theta = 2\pi/3$ con el eje x positivo
- El vector unitario que forma un ángulo $\theta = -3\pi/4$ con el eje x positivo
- El vector unitario obtenido al girar el vector $\langle 0, 1 \rangle$ 120° en sentido contrario a las manecillas del reloj en torno al origen
- El vector unitario obtenido al girar el vector $\langle 1, 0 \rangle$ 135° en sentido contrario a las manecillas del reloj en torno al origen

Vectores en el espacio

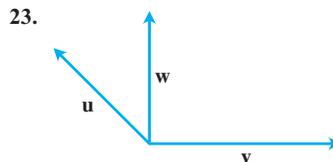
En los ejercicios 17 a 22, exprese cada vector en la forma

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}.$$

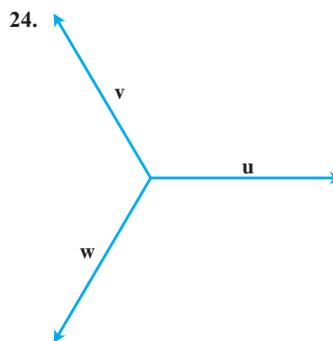
- $\overrightarrow{P_1P_2}$ si P_1 es el punto $(5, 7, -1)$ y P_2 es el punto $(2, 9, -2)$
- $\overrightarrow{P_1P_2}$ si P_1 es el punto $(1, 2, 0)$ y P_2 es el punto $(-3, 0, 5)$
- \overrightarrow{AB} si A es el punto $(-7, -8, 1)$ y B es el punto $(-10, 8, 1)$
- \overrightarrow{AB} si A es el punto $(1, 0, 3)$ y B es el punto $(-1, 4, 5)$
- $5\mathbf{u} - \mathbf{v}$ si $\mathbf{u} = \langle 1, 1, -1 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle 2, 0, 3 \rangle$
- $-2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}$ si $\mathbf{u} = \langle -1, 0, 2 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle 1, 1, 1 \rangle$

Representaciones geométricas

En los ejercicios 23 y 24, copie los vectores \mathbf{u} , \mathbf{v} y \mathbf{w} con punto inicial y final conforme se requiera para dibujar el vector indicado.



- | | |
|------------------------------|---|
| a. $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ | b. $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}$ |
| c. $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ | d. $\mathbf{u} - \mathbf{w}$ |



- | | |
|-------------------------------|---|
| a. $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ | b. $\mathbf{u} - \mathbf{v} + \mathbf{w}$ |
| c. $2\mathbf{u} - \mathbf{v}$ | d. $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}$ |

Longitud y dirección

En los ejercicios 25 a 30, exprese cada vector como producto de su longitud y dirección.

- | | |
|--|---|
| 25. $2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ | 26. $9\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ |
| 27. $5\mathbf{k}$ | 28. $\frac{3}{5}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{k}$ |
| 29. $\frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{k}$ | 30. $\frac{\mathbf{i}}{\sqrt{3}} + \frac{\mathbf{j}}{\sqrt{3}} + \frac{\mathbf{k}}{\sqrt{3}}$ |

31. Determine los vectores con las longitudes y direcciones dadas. Intente hacer los cálculos mentalmente.

| Longitud | Dirección |
|------------------|---|
| a. 2 | \mathbf{i} |
| b. $\sqrt{3}$ | $-\mathbf{k}$ |
| c. $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{5}\mathbf{j} + \frac{4}{5}\mathbf{k}$ |
| d. 7 | $\frac{6}{7}\mathbf{i} - \frac{2}{7}\mathbf{j} + \frac{3}{7}\mathbf{k}$ |

32. Obtenga los vectores con las longitudes y direcciones dadas. Intente hacer los cálculos mentalmente.

| Longitud | Dirección |
|--------------------|--|
| a. 7 | $-\mathbf{j}$ |
| b. $\sqrt{2}$ | $-\frac{3}{5}\mathbf{i} - \frac{4}{5}\mathbf{k}$ |
| c. $\frac{13}{12}$ | $\frac{3}{13}\mathbf{i} - \frac{4}{13}\mathbf{j} - \frac{12}{13}\mathbf{k}$ |
| d. $a > 0$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{k}$ |

33. Determine un vector de magnitud 7 en la dirección de $\mathbf{v} = 12\mathbf{i} - 5\mathbf{k}$.
 34. Obtenga un vector de magnitud 3 en dirección opuesta a la dirección de $\mathbf{v} = (1/2)\mathbf{i} - (1/2)\mathbf{j} - (1/2)\mathbf{k}$.

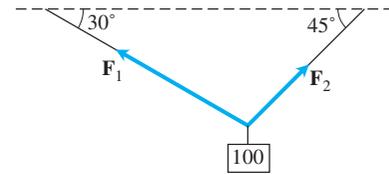
Dirección y puntos medios

En los ejercicios 35 a 38, determine

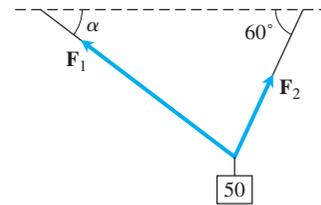
- La dirección de $\vec{P_1P_2}$ y
 - El punto medio del segmento de recta P_1P_2 .
35. $P_1(-1, 1, 5)$ $P_2(2, 5, 0)$
 36. $P_1(1, 4, 5)$ $P_2(4, -2, 7)$
 37. $P_1(3, 4, 5)$ $P_2(2, 3, 4)$
 38. $P_1(0, 0, 0)$ $P_2(2, -2, -2)$
39. Si $\vec{AB} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ y B es el punto $(5, 1, 3)$, obtenga A .
 40. Si $\vec{AB} = -7\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$ y A es el punto $(-2, -3, 6)$, obtenga B .

Teoría y aplicaciones

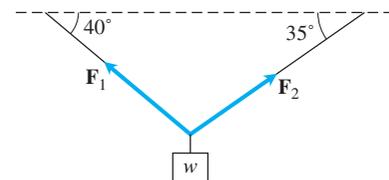
41. **Combinación lineal** Si $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, y $\mathbf{w} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$, obtenga los escalares a y b tales que $\mathbf{u} = a\mathbf{v} + b\mathbf{w}$.
42. **Combinación lineal** Si $\mathbf{u} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, y $\mathbf{w} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, escriba $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$, donde \mathbf{u}_1 sea paralelo a \mathbf{v} y \mathbf{u}_2 sea paralelo a \mathbf{w} . (Véase el ejercicio 41).
43. **Velocidad** Un avión vuela en dirección 25° al oeste del norte a 800 km/h. Determine la forma en componentes de la velocidad del avión, suponiendo que el eje x positivo representa el rumbo este y el eje y positivo representa el rumbo norte.
44. (Continuación del ejemplo 8) ¿Qué rapidez y dirección debe tener el avión del ejemplo 8 para que el vector resultante sea de 500 millas por hora hacia el este?
45. Considere un peso de 100 N suspendido de dos alambres como se muestra en la siguiente figura. Obtenga las magnitudes y los componentes de los vectores de fuerza \mathbf{F}_1 y \mathbf{F}_2 .



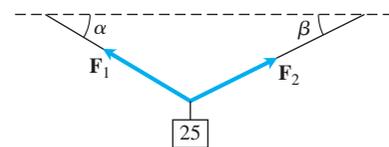
46. Considere un peso de 50 N suspendido de dos alambres, como se muestra en la figura. Si la magnitud del vector \mathbf{F}_1 es de 35 N, obtenga el ángulo α y la magnitud del vector \mathbf{F}_2 .



47. Considere un peso de w -N suspendido de dos alambres, como se muestra en la figura. Si la magnitud del vector \mathbf{F}_2 es 100 N, determine w y la magnitud del vector \mathbf{F}_1 .

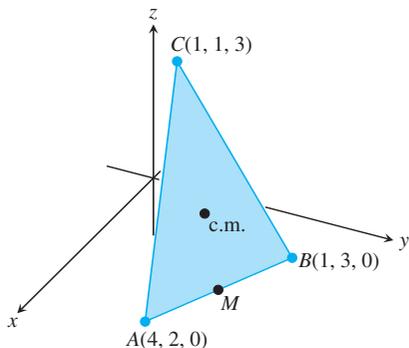


48. Considere un peso de 25 N suspendido de dos alambres, como se ilustra en la figura. Si las magnitudes de los vectores \mathbf{F}_1 y \mathbf{F}_2 son ambas de 75 N, entonces los ángulos α y β son iguales. Obtenga α .



49. **Ubicación** Un pájaro vuela desde su nido 5 km en dirección de 60° al noreste, donde se detiene a descansar en un árbol. Luego vuela 10 km en dirección hacia el suroeste y se detiene en un poste telefónico. Utilice un sistema de coordenadas xy de manera que el origen esté en el nido del pájaro, el eje x apunte hacia el este y el eje y apunte hacia el norte.
- ¿En qué punto se ubica el árbol?
 - ¿En qué punto se localiza el poste de teléfono?
50. Use triángulos semejantes para obtener las coordenadas del punto Q que divide al segmento de $P_1(x_1, y_1, z_1)$ a $P_2(x_2, y_2, z_2)$ en dos tramos, cuya razón es $p/q = r$.
51. **Medianas de un triángulo** Suponga que A , B y C son las esquinas de una delgada placa triangular de densidad constante como se muestra en la figura.
- Obtenga el vector que va desde C al punto medio de M del lado AB .
 - Determine el vector que va desde C al punto que está sobre la mediana CM , a dos tercios de la distancia de C a M .

- c. Obtenga las coordenadas del punto donde se cortan las medianas del $\triangle ABC$. De acuerdo con el ejercicio 17 de la sección 6.6, este punto es el centro de masa de la placa.



52. Determine el vector del origen al punto de intersección de las medianas del triángulo cuyos vértices son

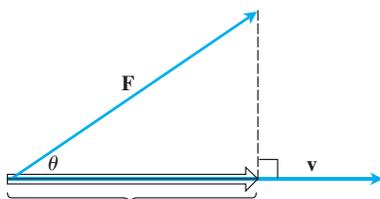
$$A(1, -1, 2), \quad B(2, 1, 3), \quad \text{y} \quad C(-1, 2, -1).$$

53. Sea $ABCD$ un cuadrilátero en el espacio (no necesariamente en el plano). Demuestre que los dos segmentos que unen los dos puntos medios de los lados opuestos de $ABCD$ se bisecan entre sí. (*Sugerencia:* Muestre que los segmentos tienen el mismo punto medio).
54. Desde el centro de un polígono regular de n lados en el plano se trazan vectores hasta los vértices del polígono. Demuestre que la suma de los vectores es igual a cero. (*Sugerencia:* ¿Qué pasa con la suma si usted hace girar el polígono en torno a su centro?)
55. Suponga que A, B y C son los vértices de un triángulo y que a, b y c son, respectivamente, los puntos medios de los lados opuestos. De muestre que $\vec{Aa} + \vec{Bb} + \vec{Cc} = 0$.
56. **Vectores unitarios en el plano** Demuestre que un vector unitario en el plano se puede expresar como $\mathbf{u} = (\cos \theta)\mathbf{i} + (\sin \theta)\mathbf{j}$, obtenido al hacer girar el vector \mathbf{i} un ángulo θ en dirección contraria a las manecillas del reloj. Explique por qué cualquier vector unitario en el plano puede expresarse en esta forma.

12.3 El producto punto

Si se aplica una fuerza \mathbf{F} a una partícula que se mueve a lo largo de una trayectoria, con frecuencia necesitamos conocer la magnitud de la fuerza en la dirección de movimiento. Si \mathbf{v} es paralelo a la recta tangente a la trayectoria en el punto donde se aplica \mathbf{F} , buscamos la magnitud de \mathbf{F} en la dirección de \mathbf{v} . La figura 12.19 indica que la cantidad escalar que buscamos es la longitud de $|\mathbf{F}| \cos \theta$, donde θ es el ángulo entre los dos vectores.

En esta sección mostraremos cómo calcular fácilmente el ángulo entre dos vectores a partir de sus componentes. Una parte clave del cálculo es una expresión llamada el *producto punto*. El producto punto también se conoce como producto *interno* o *escalar* porque el producto da como resultado un escalar, no un vector. Después de investigar al producto punto, lo aplicaremos para determinar la proyección de un vector sobre otro (como se ilustra en la figura 12.19) y para determinar el trabajo realizado por una fuerza constante que actúa a lo largo de un desplazamiento.



$$\text{Longitud} = |\mathbf{F}| \cos \theta$$

FIGURA 12.19 La magnitud de la fuerza \mathbf{F} en la dirección del vector \mathbf{v} es la longitud $|\mathbf{F}| \cos \theta$ de la proyección de \mathbf{F} sobre \mathbf{v} .

Ángulo entre vectores

Cuando dos vectores no nulos \mathbf{u} y \mathbf{v} se colocan de manera que sus puntos iniciales coincidan, forman un ángulo θ con medida $0 \leq \theta \leq \pi$ (figura 12.20). Si los vectores no están en la misma recta, el ángulo θ se mide en el plano que los contiene. Si los vectores están alineados, el ángulo entre ellos es igual a cero si apuntan a la misma dirección, y π si apuntan en direcciones opuestas. El ángulo θ es el **ángulo entre \mathbf{u} y \mathbf{v}** . El teorema 1 ofrece una fórmula para determinar este ángulo.

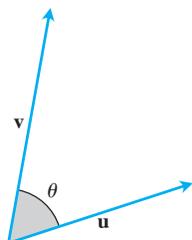


FIGURA 12.20 El ángulo entre \mathbf{u} y \mathbf{v} .

TEOREMA 1: Ángulo entre dos vectores El ángulo θ entre dos vectores no nulos $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ está dado por

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3}{|\mathbf{u}| |\mathbf{v}|} \right).$$

Antes de demostrar el teorema 1, enfocaremos nuestra atención en la expresión $u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$ en el cálculo de θ . Esta expresión es la suma de los productos de los componentes correspondientes a los vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} .

DEFINICIÓN El **producto punto** $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ (“**u** punto **v**”) de los vectores $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ es

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3.$$

EJEMPLO 1

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \langle 1, -2, -1 \rangle \cdot \langle -6, 2, -3 \rangle &= (1)(-6) + (-2)(2) + (-1)(-3) \\ &= -6 - 4 + 3 = -7 \end{aligned}$$

$$\text{(b)} \quad \left(\frac{1}{2} \mathbf{i} + 3 \mathbf{j} + \mathbf{k} \right) \cdot (4 \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2 \mathbf{k}) = \left(\frac{1}{2} \right)(4) + (3)(-1) + (1)(2) = 1 \quad \blacksquare$$

El producto punto de un par de vectores bidimensionales se define de un modo similar:

$$\langle u_1, u_2 \rangle \cdot \langle v_1, v_2 \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2.$$

A lo largo del resto del libro veremos que el producto punto es una herramienta clave, no sólo para la obtención del ángulo entre dos vectores, sino también para muchos cálculos físicos y geométricos importantes en el espacio (y en el plano).

Prueba del teorema 1 Al aplicar la ley de los cosenos [ecuación (8), sección 1.3] al triángulo de la figura 12.21, encontramos que

$$|\mathbf{w}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2|\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos \theta \quad \text{Ley de los cosenos}$$

$$2|\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos \theta = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - |\mathbf{w}|^2.$$

Como $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$, la forma componente de \mathbf{w} es $\langle u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3 \rangle$. De esta forma,

$$|\mathbf{u}|^2 = \left(\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \right)^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$$

$$|\mathbf{v}|^2 = \left(\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \right)^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$$

$$|\mathbf{w}|^2 = \left(\sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + (u_3 - v_3)^2} \right)^2$$

$$= (u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + (u_3 - v_3)^2$$

$$= u_1^2 - 2u_1 v_1 + v_1^2 + u_2^2 - 2u_2 v_2 + v_2^2 + u_3^2 - 2u_3 v_3 + v_3^2$$

y

$$|\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - |\mathbf{w}|^2 = 2(u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3).$$

Por lo tanto,

$$2|\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos \theta = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - |\mathbf{w}|^2 = 2(u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3)$$

$$|\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos \theta = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

$$\cos \theta = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}.$$

Como $0 \leq \theta < \pi$, tenemos

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} \right). \quad \blacksquare$$

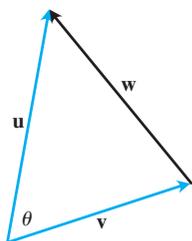


FIGURA 12.21 La ley del paralelogramo de la suma de vectores da $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$.

En la notación del producto punto, el ángulo entre dos vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} puede escribirse como

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} \right).$$

EJEMPLO 2 Obtenga el ángulo entre $\mathbf{u} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = 6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

Solución Utilizamos la fórmula anterior:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= (1)(6) + (-2)(3) + (-2)(2) = 6 - 6 - 4 = -4 \\ |\mathbf{u}| &= \sqrt{(1)^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3 \\ |\mathbf{v}| &= \sqrt{(6)^2 + (3)^2 + (2)^2} = \sqrt{49} = 7 \\ \theta &= \cos^{-1} \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{-4}{(3)(7)} \right) \approx 1.76 \text{ radianes.} \end{aligned}$$

La fórmula para el ángulo también se aplica a vectores bidimensionales.

EJEMPLO 3 Determine el ángulo θ del triángulo ABC determinado por los vértices $A = (0, 0)$, $B = (3, 5)$ y $C = (5, 2)$ (figura 12.22).

Solución El ángulo θ es el ángulo entre los vectores \vec{CA} y \vec{CB} . Las expresiones en componentes de estos dos vectores son

$$\vec{CA} = \langle -5, -2 \rangle \quad \text{y} \quad \vec{CB} = \langle -2, 3 \rangle.$$

Primero calculamos el producto punto y las magnitudes de estos dos vectores.

$$\begin{aligned} \vec{CA} \cdot \vec{CB} &= (-5)(-2) + (-2)(3) = 4 \\ |\vec{CA}| &= \sqrt{(-5)^2 + (-2)^2} = \sqrt{29} \\ |\vec{CB}| &= \sqrt{(-2)^2 + (3)^2} = \sqrt{13} \end{aligned}$$

Luego, aplicando la fórmula del ángulo, tenemos

$$\begin{aligned} \theta &= \cos^{-1} \left(\frac{\vec{CA} \cdot \vec{CB}}{|\vec{CA}||\vec{CB}|} \right) \\ &= \cos^{-1} \left(\frac{4}{(\sqrt{29})(\sqrt{13})} \right) \\ &\approx 78.1^\circ \quad \text{o} \quad 1.36 \text{ radianes.} \end{aligned}$$

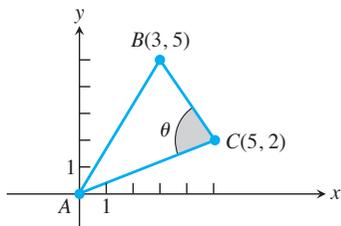


FIGURA 12.22 El triángulo del ejemplo 3.

Vectores perpendiculares (ortogonales)

Dos vectores no nulos \mathbf{u} y \mathbf{v} son perpendiculares u **ortogonales** si el ángulo entre ellos es $\pi/2$. Para tales vectores tenemos que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, ya que $\cos(\pi/2) = 0$. El recíproco también es cierto. Si \mathbf{u} y \mathbf{v} son vectores no nulos con $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos \theta = 0$, entonces $\cos \theta = 0$ y $\theta = \cos^{-1} 0 = \pi/2$.

DEFINICIÓN Los vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} son **ortogonales** (o **perpendiculares**) si y sólo si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

EJEMPLO 4 Para determinar si dos vectores son ortogonales, calcule su producto punto.

- (a) $\mathbf{u} = \langle 3, -2 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle 4, 6 \rangle$ son ortogonales porque $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (3)(4) + (-2)(6) = 0$.
- (b) $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ son ortogonales porque $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (3)(0) + (-2)(2) + (1)(4) = 0$.

(c) $\mathbf{0}$ es ortogonal a cualquier vector \mathbf{u} , puesto que

$$\begin{aligned}\mathbf{0} \cdot \mathbf{u} &= \langle 0, 0, 0 \rangle \cdot \langle u_1, u_2, u_3 \rangle \\ &= (0)(u_1) + (0)(u_2) + (0)(u_3) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Propiedades del producto punto y proyecciones de vectores

El producto punto cumple varias de las leyes válidas para productos ordinarios de números reales (escalares).

Propiedades del producto punto

Si \mathbf{u} , \mathbf{v} y \mathbf{w} son tres vectores cualesquiera y c es un escalar, entonces

1. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
2. $(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (c\mathbf{v}) = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$
3. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$
4. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2$
5. $\mathbf{0} \cdot \mathbf{u} = 0$.

BIOGRAFÍA HISTÓRICA

Carl Friedrich Gauss
(1777–1855)

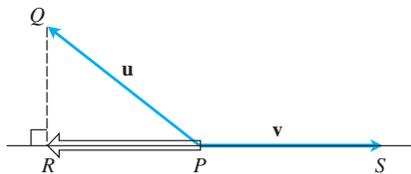
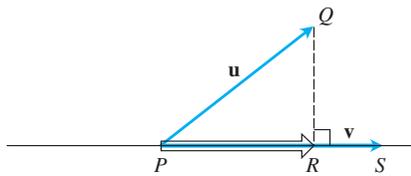


FIGURA 12.23 El vector proyección de \mathbf{u} sobre \mathbf{v} .

Demostración de las propiedades 1 y 3 Las propiedades son fáciles de demostrar usando la definición. Por ejemplo, aquí están las demostraciones de las propiedades 1 y 3.

1. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = v_1 u_1 + v_2 u_2 + v_3 u_3 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
3. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle \cdot \langle v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3 \rangle$
 $= u_1(v_1 + w_1) + u_2(v_2 + w_2) + u_3(v_3 + w_3)$
 $= u_1 v_1 + u_1 w_1 + u_2 v_2 + u_2 w_2 + u_3 v_3 + u_3 w_3$
 $= (u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3) + (u_1 w_1 + u_2 w_2 + u_3 w_3)$
 $= \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$

Regresemos ahora al problema planteado al principio de esta sección: la proyección de un vector sobre otro. El **vector proyección** de $\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ}$ sobre un vector no nulo $\mathbf{v} = \overrightarrow{PS}$ (figura 12.23) es el vector \overrightarrow{PR} determinado al trazar una perpendicular desde Q hasta la recta PS . La notación para este vector es

$\text{proy}_v \mathbf{u}$ (“el vector proyección de \mathbf{u} sobre \mathbf{v} ”).

Si \mathbf{u} representa una fuerza, entonces la $\text{proy}_v \mathbf{u}$ representa la fuerza efectiva en la dirección de \mathbf{v} (figura 12.24).

Si el ángulo θ entre \mathbf{u} y \mathbf{v} es agudo, $\text{proy}_v \mathbf{u}$ tiene la longitud $|\mathbf{u}| \cos \theta$ y dirección $\mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ (figura 12.25). Si θ es obtuso, $\cos \theta < 0$ y $\text{proy}_v \mathbf{u}$ tiene una longitud $-|\mathbf{u}| \cos \theta$ y dirección $-\mathbf{v}/|\mathbf{v}|$. En ambos casos

$$\begin{aligned}\text{proy}_v \mathbf{u} &= (|\mathbf{u}| \cos \theta) \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \\ &= \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \right) \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \quad |\mathbf{u}| \cos \theta = \frac{|\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \cos \theta}{|\mathbf{v}|} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \\ &= \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} \right) \mathbf{v}.\end{aligned}$$

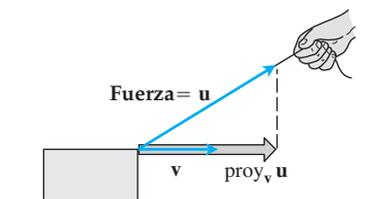


FIGURA 12.24 Si tiramos de la caja con una fuerza \mathbf{u} , la fuerza efectiva que mueve la caja en la dirección \mathbf{v} es la proyección de \mathbf{u} sobre \mathbf{v} .

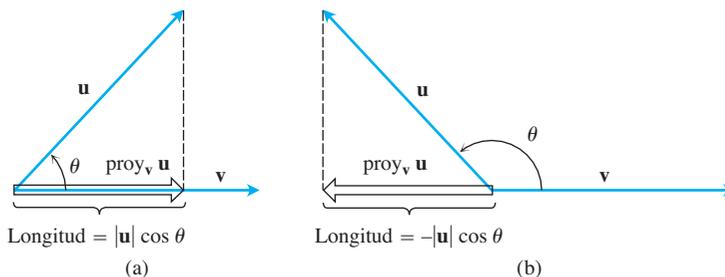


FIGURA 12.25 La longitud de $\text{proy}_v \mathbf{u}$ es (a) $|\mathbf{u}| \cos \theta$ si $\cos \theta \geq 0$ y (b) $-|\mathbf{u}| \cos \theta$ si $\cos \theta < 0$.

El número $|\mathbf{u}| \cos \theta$ se conoce como el **componente escalar de \mathbf{u} en la dirección de \mathbf{v}** (o de \mathbf{u} sobre \mathbf{v}). Resumiendo:

El vector proyección de \mathbf{u} sobre \mathbf{v} es el vector

$$\text{proy}_v \mathbf{u} = \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} \right) \mathbf{v}. \tag{1}$$

El componente escalar de \mathbf{u} en la dirección de \mathbf{v} es el escalar

$$|\mathbf{u}| \cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \mathbf{u} \cdot \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}. \tag{2}$$

Observe que tanto el vector proyección de \mathbf{u} sobre \mathbf{v} como el componente escalar de \mathbf{u} sobre \mathbf{v} sólo dependen de la dirección del vector \mathbf{v} y no de su longitud (pues hacemos el producto punto de \mathbf{u} con $\mathbf{v}/|\mathbf{v}|$, que es la dirección de \mathbf{v}).

EJEMPLO 5 Determine el vector proyección de $\mathbf{u} = 6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ sobre $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ y el componente escalar de \mathbf{u} en la dirección de \mathbf{v} .

Solución De la ecuación (1) obtenemos $\text{proy}_v \mathbf{u}$

$$\begin{aligned} \text{proy}_v \mathbf{u} &= \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v} = \frac{6 - 6 - 4}{1 + 4 + 4} (\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) \\ &= -\frac{4}{9} (\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) = -\frac{4}{9} \mathbf{i} + \frac{8}{9} \mathbf{j} + \frac{8}{9} \mathbf{k}. \end{aligned}$$

A partir de la ecuación (2), determinamos el componente escalar de \mathbf{u} en la dirección de \mathbf{v} :

$$\begin{aligned} |\mathbf{u}| \cos \theta &= \mathbf{u} \cdot \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = (6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) \cdot \left(\frac{1}{3} \mathbf{i} - \frac{2}{3} \mathbf{j} - \frac{2}{3} \mathbf{k} \right) \\ &= 2 - 2 - \frac{4}{3} = -\frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Las ecuaciones (1) y (2) también se aplican a los vectores bidimensionales. Esto lo demostramos en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 6 Obtenga el vector proyección de una fuerza $\mathbf{F} = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ sobre $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ y el componente escalar \mathbf{F} en la dirección de \mathbf{v} .

Solución El vector proyección es

$$\begin{aligned} \text{proy}_v \mathbf{F} &= \left(\frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} \right) \mathbf{v} \\ &= \frac{5 - 6}{1 + 9} (\mathbf{i} - 3\mathbf{j}) = -\frac{1}{10} (\mathbf{i} - 3\mathbf{j}) \\ &= -\frac{1}{10} \mathbf{i} + \frac{3}{10} \mathbf{j}. \end{aligned}$$

El componente escalar de \mathbf{F} en la dirección de \mathbf{v} es

$$|\mathbf{F}| \cos \theta = \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{5 - 6}{\sqrt{1 + 9}} = -\frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Un cálculo de rutina (véase el ejercicio 29) permite verificar que el vector $\mathbf{u} - \text{proy}_v \mathbf{u}$ es ortogonal al vector proyección $\text{proy}_v \mathbf{u}$ (el cual tiene la misma dirección que \mathbf{v}). De esta manera, la ecuación

$$\mathbf{u} = \text{proy}_v \mathbf{u} + (\mathbf{u} - \text{proy}_v \mathbf{u}) = \underbrace{\left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} \right) \mathbf{v}}_{\text{Paralela a } \mathbf{v}} + \underbrace{\left(\mathbf{u} - \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} \right) \mathbf{v} \right)}_{\text{Ortogonal a } \mathbf{v}}$$

expresa a \mathbf{u} como una suma de vectores ortogonales.

Trabajo

En el capítulo 6 vimos que el trabajo realizado por una fuerza constante de magnitud F al mover un objeto a lo largo de una distancia d está dado por $W = Fd$. Esa fórmula es válida sólo si la fuerza está dirigida a lo largo de la recta de movimiento. Si una fuerza \mathbf{F} que mueve un objeto a lo largo de un desplazamiento $\mathbf{D} = \overrightarrow{PQ}$ tiene otra dirección, el trabajo es realizado por el componente de \mathbf{F} en la dirección de \mathbf{D} . Si θ es el ángulo entre \mathbf{F} y \mathbf{D} (figura 12.26), entonces

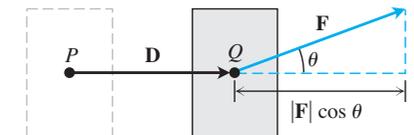


FIGURA 12.26 El trabajo realizado por una fuerza constante \mathbf{F} durante un desplazamiento \mathbf{D} es $(|\mathbf{F}| \cos \theta)|\mathbf{D}|$, que es el producto punto de $\mathbf{F} \cdot \mathbf{D}$.

$$\begin{aligned} \text{Trabajo} &= \left(\begin{array}{l} \text{Componente escalar de } \mathbf{F} \\ \text{en la dirección de } \mathbf{D} \end{array} \right) (\text{longitud de } \mathbf{D}) \\ &= (|\mathbf{F}| \cos \theta) |\mathbf{D}| \\ &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{D}. \end{aligned}$$

DEFINICIÓN El trabajo realizado por una fuerza constante \mathbf{F} que actúa a lo largo de un desplazamiento $\mathbf{D} = \overrightarrow{PQ}$ es

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{D}.$$

EJEMPLO 7 Si $|\mathbf{F}| = 40$ N, $|\mathbf{D}| = 3$ m, y $\theta = 60^\circ$, el trabajo realizado por \mathbf{F} al actuar de P a Q es

$$\begin{aligned} \text{Trabajo} &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{D} && \text{Definición} \\ &= |\mathbf{F}| |\mathbf{D}| \cos \theta \\ &= (40)(3) \cos 60^\circ && \text{Valores proporcionados} \\ &= (120)(1/2) = 60 \text{ J (joules)}. \end{aligned}$$

Encontraremos problemas más complicados en el capítulo 16, cuando aprendamos a calcular el trabajo realizado por una fuerza variable a lo largo de una *trayectoria* en el espacio.

Ejercicios 12.3

Producto punto y proyecciones

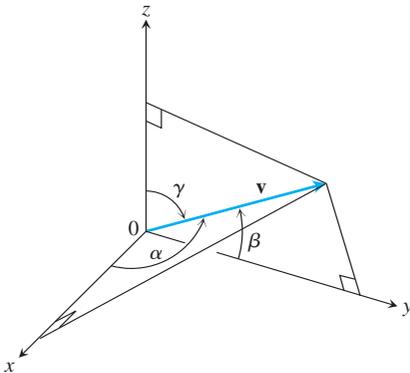
En los ejercicios 1 a 8, determine

- $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$, $|\mathbf{v}|$, $|\mathbf{u}|$
 - el coseno del ángulo entre \mathbf{v} y \mathbf{u}
 - el componente escalar de \mathbf{u} en la dirección de \mathbf{v}
 - el vector $\text{proy}_{\mathbf{v}} \mathbf{u}$.
- $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \sqrt{5}\mathbf{k}$, $\mathbf{u} = -2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \sqrt{5}\mathbf{k}$
 - $\mathbf{v} = (3/5)\mathbf{i} + (4/5)\mathbf{k}$, $\mathbf{u} = 5\mathbf{i} + 12\mathbf{j}$
 - $\mathbf{v} = 10\mathbf{i} + 11\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{u} = 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$
 - $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 10\mathbf{j} - 11\mathbf{k}$, $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$
 - $\mathbf{v} = 5\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$
 - $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{u} = \sqrt{2}\mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$
 - $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \sqrt{17}\mathbf{j}$
 - $\mathbf{v} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right\rangle$, $\mathbf{u} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right\rangle$

Ángulo entre vectores

T Calcule los ángulos entre los vectores en los ejercicios 9 a 12 con una aproximación de centésimas de radián.

- $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$
 - $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{k}$
 - $\mathbf{u} = \sqrt{3}\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = \sqrt{3}\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$
 - $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \sqrt{2}\mathbf{j} - \sqrt{2}\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$
- 13. Triángulo** Obtenga las medidas de los ángulos del triángulo cuyos vértices son $A = (-1, 0)$, $B = (2, 1)$ y $C = (1, -2)$.
- 14. Rectángulo** Calcule las medidas de los ángulos entre las diagonales del rectángulo cuyos vértices son $A = (1, 0)$, $B = (0, 3)$, $C = (3, 4)$ y $D = (4, 1)$.
- 15. Ángulos y cosenos directores** Los *ángulos directores* α , β y γ de un vector $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ se definen como sigue:
- α es el ángulo entre \mathbf{v} y el eje x positivo ($0 \leq \alpha \leq \pi$)
- β es el ángulo entre \mathbf{v} y el eje y positivo ($0 \leq \beta \leq \pi$)
- γ es el ángulo entre \mathbf{v} y el eje z positivo ($0 \leq \gamma \leq \pi$).



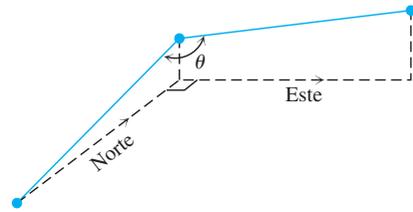
a. Demuestre que

$$\cos \alpha = \frac{a}{|\mathbf{v}|}, \quad \cos \beta = \frac{b}{|\mathbf{v}|}, \quad \cos \gamma = \frac{c}{|\mathbf{v}|},$$

y también que $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$. Estos cosenos se llaman los *cosenos directores* de \mathbf{v} .

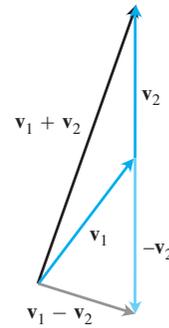
b. **Los vectores unitarios se construyen a partir de los cosenos directores** Demuestre que si $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ es un vector unitario, entonces a , b y c son los cosenos directores de \mathbf{v} .

- 16. Construcción de un canal** Se va a construir un canal de agua con una pendiente de 20% en la dirección norte y una pendiente de 10% en la dirección este. Determine el ángulo θ requerido en la tubería para el giro de norte a este.

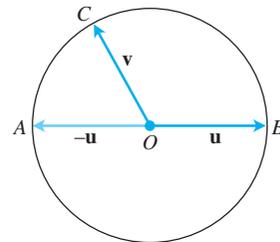


Teoría y ejemplos

- 17. Sumas y diferencias** En la siguiente figura parecería que $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ son ortogonales. ¿Es mera coincidencia o hay circunstancias en las cuales podríamos esperar que la suma de dos vectores fuera ortogonal a su diferencia? Dé argumentos para su respuesta.

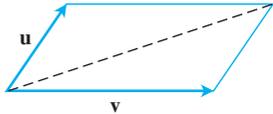


- 18. Ortogonalidad en una circunferencia** Suponga que AB es el diámetro de una circunferencia con centro O y que C es un punto en uno de los arcos que unen A y B . Demuestre que \vec{CA} y \vec{CB} son ortogonales.

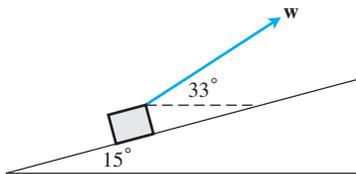


- 19. Diagonales de un rombo** Demuestre que las diagonales de un rombo (paralelogramo con lados de igual longitud) son perpendiculares.

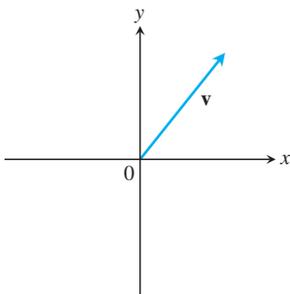
- 20. Diagonales perpendiculares** Demuestre que los cuadrados son los únicos rectángulos con diagonales perpendiculares.
- 21. Cuando los paralelogramos son rectángulos** Demuestre que un paralelogramo es un rectángulo si y sólo si sus diagonales tienen la misma longitud. (Los carpinteros aprovechan este hecho con frecuencia).
- 22. Diagonal de un paralelogramo** Demuestre que la diagonal indicada del paralelogramo determinado por los vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} biseca al ángulo entre \mathbf{u} y \mathbf{v} si $|\mathbf{u}| = |\mathbf{v}|$.



- 23. Movimiento de proyectiles** Una pistola con una rapidez de disparo de 1200 ft/seg se dispara a un ángulo de 8° por encima de la horizontal. Obtenga los componentes horizontal y vertical de la velocidad del proyectil.
- 24. Plano inclinado** Suponga que una caja es arrastrada hacia arriba sobre un plano inclinado como se muestra en la figura. Obtenga la fuerza \mathbf{w} necesaria para que el componente de la fuerza paralela al plano inclinado sea igual a 2.5 lb.



- 25. a. Desigualdad de Cauchy-Schwartz** Puesto que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos \theta$, demuestre que la desigualdad $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}||\mathbf{v}|$ es válida para vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} cualesquiera.
- b.** ¿En qué circunstancias, si existen, $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|$? Justifique su respuesta.
- 26.** Copie los ejes y el vector que se representan en la siguiente figura. Luego sombree los puntos (x, y) para los cuales $(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \cdot \mathbf{v} \leq 0$. Justifique su respuesta.



- 27. Vectores unitarios ortogonales** Si \mathbf{u}_1 y \mathbf{u}_2 son vectores unitarios ortogonales y $\mathbf{v} = a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2$, obtenga $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1$.
- 28. Cancelación en el producto punto** En la multiplicación de números reales, si $uv_1 = uv_2$ y $u \neq 0$, podemos cancelar la u y concluir que $v_1 = v_2$. ¿Funciona la misma regla para el producto punto? Es decir, si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_1 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_2$ y $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, ¿puede concluir que $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$? Justifique su respuesta.
- 29.** Usando la definición de la proyección de \mathbf{u} sobre \mathbf{v} , demuestre por un cálculo directo que $(\mathbf{u} - \text{proy}_v \mathbf{u}) \cdot \text{proy}_v \mathbf{u} = 0$.
- 30.** Una fuerza $\mathbf{F} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ es aplicada a una nave espacial cuya velocidad es el vector $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j}$. Expresé \mathbf{F} como una suma del vector paralelo a \mathbf{v} y un vector ortogonal a \mathbf{v} .

Ecuaciones de rectas en el plano

- 31. Recta perpendicular a un vector** Demuestre que el vector $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ es perpendicular a la recta $ax + by = c$ estableciendo que la pendiente de \mathbf{v} es el recíproco negativo de la pendiente de la recta dada.
- 32. Recta paralela a un vector** Demuestre que el vector $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ es paralelo a la recta $bx - ay = c$ estableciendo que la pendiente del segmento de recta que representa \mathbf{v} es igual a la pendiente de la recta dada.

En los ejercicios 33 a 36, utilice el resultado del ejercicio 31 para obtener una ecuación para la recta que pasa por P y es perpendicular a \mathbf{v} . Luego trace la recta. Incluya a \mathbf{v} en su dibujo como un vector que parte del origen.

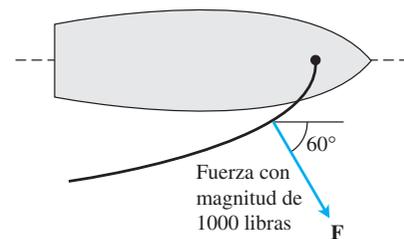
33. $P(2, 1)$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ 34. $P(-1, 2)$, $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} - \mathbf{j}$
 35. $P(-2, -7)$, $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ 36. $P(11, 10)$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$

En los ejercicios 37 a 40, use el resultado del ejercicio 32 para obtener una ecuación para la recta que pasa por P paralela a \mathbf{v} . Luego dibuje la recta. Incluya a \mathbf{v} en su bosquejo como un vector que parte del origen.

37. $P(-2, 1)$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$ 38. $P(0, -2)$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$
 39. $P(1, 2)$, $\mathbf{v} = -\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ 40. $P(1, 3)$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

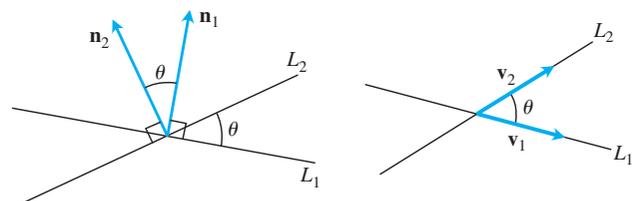
Trabajo

- 41. Trabajo a lo largo de una recta** Determine el trabajo realizado por una fuerza $\mathbf{F} = 5\mathbf{i}$ (de magnitud 5 N) al mover un objeto a lo largo de la recta que va del origen al punto $(1, 1)$ (distancia en metros).
- 42. Locomotora** La locomotora *Big Boy* de Union Pacific puede halar vagones de 6000 toneladas con un esfuerzo de tracción de 602,148 N (135,375 libras). Con este grado de esfuerzo, ¿cuánto trabajo realizó *Big Boy* durante una jornada de 605 km (aproximadamente en línea recta) de San Francisco a Los Ángeles?
- 43. Plano inclinado** ¿Cuánto trabajo se realiza para deslizar un contenedor una distancia de 20 metros a lo largo de un muelle de carga si se tira de él con una fuerza de 200 N y a un ángulo de 30° con la horizontal?
- 44. Valero** El viento que pasa sobre la vela de un bote ejerce una fuerza \mathbf{F} con una magnitud de 1000 libras, como se muestra en la figura. ¿Cuánto trabajo hace el viento al mover el bote 1 milla hacia adelante? Conteste en libras-ft.



Ángulos entre rectas en el plano

El **ángulo agudo entre rectas** que no se cortan en un ángulo recto es el mismo que el ángulo determinado por los vectores normales a las rectas o por vectores paralelos a las mismas.



Con base en este hecho y en los resultados del ejercicio 31 o 32, determine los ángulos agudos entre las líneas en los ejercicios 45 a 50.

- 45. $3x + y = 5, \quad 2x - y = 4$
- 46. $y = \sqrt{3}x - 1, \quad y = -\sqrt{3}x + 2$

- 47. $\sqrt{3}x - y = -2, \quad x - \sqrt{3}y = 1$
- 48. $x + \sqrt{3}y = 1, \quad (1 - \sqrt{3})x + (1 + \sqrt{3})y = 8$
- 49. $3x - 4y = 3, \quad x - y = 7$
- 50. $12x + 5y = 1, \quad 2x - 2y = 3$

12.4 | El producto cruz

Al estudiar las rectas en el plano, cuando necesitábamos describir cuánto se inclinaba una recta, utilizamos las nociones de pendiente y de ángulo de inclinación. En el espacio queremos describir la forma en que se inclina un *plano*. Esto se consigue multiplicando dos vectores que se encuentran en el plano para obtener un tercer vector perpendicular al plano. La dirección de este tercer vector nos indica la “inclinación del plano”. El producto que usamos para multiplicar los vectores es el *producto vectorial* o *producto cruz*, y es el segundo de los métodos de multiplicación vectorial que usamos en cálculo. En esta sección estudiaremos el producto cruz.

El producto cruz de dos vectores en el espacio

Iniciamos con dos vectores no nulos \mathbf{u} y \mathbf{v} en el espacio. Si \mathbf{u} y \mathbf{v} no son paralelos, entonces determinan un plano. Seleccionamos un vector unitario \mathbf{n} perpendicular al plano mediante la **regla de la mano derecha**. Esto significa que seleccionamos \mathbf{n} como el vector (normal) unitario que apunta en la forma que el dedo pulgar apuntaría si doblamos los dedos restantes con un ángulo θ de \mathbf{u} hacia \mathbf{v} (figura 12.27). Entonces el **producto cruz** $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ (“ \mathbf{u} cruz \mathbf{v} ”) es el *vector* que se define como sigue.

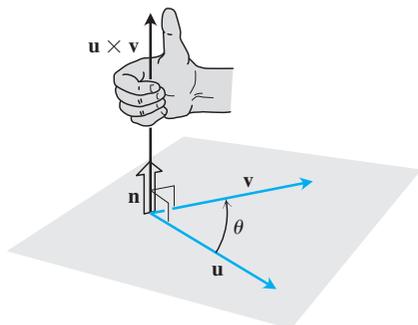


FIGURA 12.27 La construcción de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

DEFINICIÓN

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (|\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \text{sen } \theta) \mathbf{n}$$

A diferencia del producto punto, el producto cruz da como resultado un vector. Por esta razón también se llama **producto vectorial** de \mathbf{u} y \mathbf{v} , y se aplica *sólo* a vectores en el espacio. El vector $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es ortogonal tanto a \mathbf{u} como a \mathbf{v} porque es un múltiplo escalar de \mathbf{n} .

Existe un camino directo para calcular el producto cruz de dos vectores a partir de sus componentes. El método no requiere que conozcamos el ángulo entre ellos (como sugiere su definición), pero pospondremos el cálculo momentáneamente de forma que podamos enfocarnos primero en las propiedades del producto cruz.

Puesto que el seno de 0 y el seno de π dan cero, tiene sentido definir el producto cruz de dos vectores paralelos no nulos como $\mathbf{0}$. Si \mathbf{u} y \mathbf{v} o ambos son nulos, también definimos que $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ como $\mathbf{0}$. De este modo, el producto cruz de dos vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} es igual al vector cero si y sólo si \mathbf{u} y \mathbf{v} son paralelos, o uno o ambos son nulos (vector cero).

Vectores paralelos

Los vectores no nulos \mathbf{u} y \mathbf{v} son paralelos si y sólo si $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

El producto cruz cumple las siguientes propiedades.

Propiedades del producto cruz

Si \mathbf{u}, \mathbf{v} y \mathbf{w} son vectores cualesquiera, y r y s son escalares, entonces

- | | |
|--|---|
| 1. $(r\mathbf{u}) \times (s\mathbf{v}) = (rs)(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$ | 2. $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$ |
| 3. $\mathbf{v} \times \mathbf{u} = -(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$ | 4. $(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \times \mathbf{u} = \mathbf{v} \times \mathbf{u} + \mathbf{w} \times \mathbf{u}$ |
| 5. $\mathbf{0} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$ | 6. $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$ |

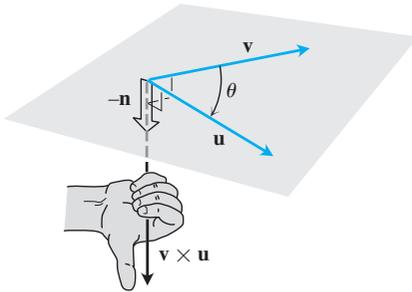


FIGURA 12.28 La construcción de $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$.

Por ejemplo, para visualizar la propiedad número 3, observe que cuando los dedos de su mano derecha se doblan un ángulo θ de \mathbf{v} a \mathbf{u} , el pulgar apunta en la dirección opuesta y el vector unitario que seleccionamos para formar $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$ es el negativo del que seleccionamos para formar $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ (figura 12.28).

La propiedad 1 se puede verificar aplicando la definición del producto cruz a ambos lados de la ecuación y comparando los resultados. La propiedad 2 se demuestra en el apéndice 8. La propiedad 4 se obtiene multiplicando ambos lados de la ecuación en la propiedad 2 por -1 e invirtiendo el orden de los productos, de acuerdo con la propiedad 3. La propiedad 5 es una definición. En general, la multiplicación en el producto cruz *no es asociativa*, de manera que $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$ en general no es igual a $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$. (Véase el ejercicio adicional 17).

Cuando aplicamos la definición para calcular los productos cruz por pares de \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} , vemos que (figura 12.29)

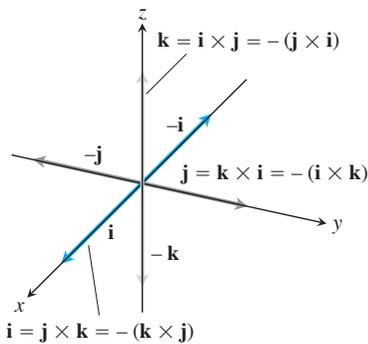


FIGURA 12.29 Los productos cruz por pares formados con \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} .

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = -(\mathbf{j} \times \mathbf{i}) = \mathbf{k}$$

$$\mathbf{j} \times \mathbf{k} = -(\mathbf{k} \times \mathbf{j}) = \mathbf{i}$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{i} = -(\mathbf{i} \times \mathbf{k}) = \mathbf{j}$$

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}.$$

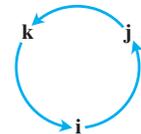


Diagrama para recordar estos productos

y

$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$ es el área de un paralelogramo

Como \mathbf{n} es un vector unitario, la magnitud de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es

$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| |\sin \theta| |\mathbf{n}| = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \sin \theta.$$

Ésta es el área del paralelogramo determinado por \mathbf{u} y \mathbf{v} (figura 12.30), siendo $|\mathbf{u}|$ la base y $|\mathbf{v}| \sin \theta$ la altura del paralelogramo.

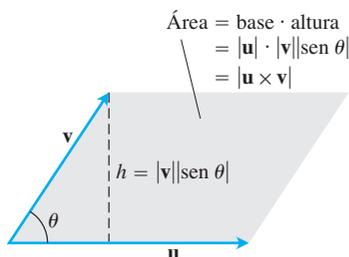


FIGURA 12.30 Paralelogramo determinado por \mathbf{u} y \mathbf{v} .

Fórmula del determinante para $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$

Nuestro siguiente objetivo es calcular $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ a partir de los componentes de \mathbf{u} y \mathbf{v} con respecto a un sistema de coordenadas cartesianas.

Suponga que

$$\mathbf{u} = u_1 \mathbf{i} + u_2 \mathbf{j} + u_3 \mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{v} = v_1 \mathbf{i} + v_2 \mathbf{j} + v_3 \mathbf{k}.$$

Entonces, las leyes distributivas y las reglas para la multiplicación de \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} nos dicen que

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= (u_1 \mathbf{i} + u_2 \mathbf{j} + u_3 \mathbf{k}) \times (v_1 \mathbf{i} + v_2 \mathbf{j} + v_3 \mathbf{k}) \\ &= u_1 v_1 \mathbf{i} \times \mathbf{i} + u_1 v_2 \mathbf{i} \times \mathbf{j} + u_1 v_3 \mathbf{i} \times \mathbf{k} \\ &\quad + u_2 v_1 \mathbf{j} \times \mathbf{i} + u_2 v_2 \mathbf{j} \times \mathbf{j} + u_2 v_3 \mathbf{j} \times \mathbf{k} \\ &\quad + u_3 v_1 \mathbf{k} \times \mathbf{i} + u_3 v_2 \mathbf{k} \times \mathbf{j} + u_3 v_3 \mathbf{k} \times \mathbf{k} \\ &= (u_2 v_3 - u_3 v_2) \mathbf{i} - (u_1 v_3 - u_3 v_1) \mathbf{j} + (u_1 v_2 - u_2 v_1) \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Los términos de la última línea son difíciles de recordar, pero son los mismos que los términos en el desarrollo del determinante simbólico

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.$$

Determinantes

Los determinantes 2×2 y 3×3 se calculan como sigue:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

EJEMPLO

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = (2)(3) - (1)(-4) = 6 + 4 = 10$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$- a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

EJEMPLO

$$\begin{vmatrix} -5 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (-5) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - (3) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} + (1) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = -5(1 - 3) - 3(2 + 4) + 1(6 + 4) = 10 - 18 + 10 = 2$$

(Para mayor información, visite el sitio Web en www.aw.com/thomas).

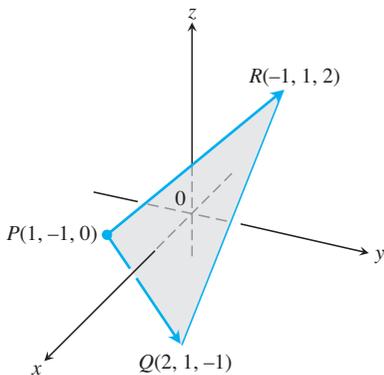


FIGURA 12.31 El vector $\vec{PQ} \times \vec{PR}$ es perpendicular al plano del triángulo PQR (ejemplo 2). El área del triángulo PQR es la mitad de $|\vec{PQ} \times \vec{PR}|$ (ejemplo 3).

Así, rescribimos el cálculo en esta forma más fácil de recordar.

Cálculo del producto cruz mediante determinante

Si $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$, entonces

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

EJEMPLO 1 Obtenga $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ y $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$ si $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = -4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$

Solución

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} \mathbf{k} \\ &= -2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 10\mathbf{k} \\ \mathbf{v} \times \mathbf{u} &= -(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 10\mathbf{k} \end{aligned}$$

EJEMPLO 2 Obtenga un vector perpendicular al plano por los puntos $P(1, -1, 0)$, $Q(2, 1, -1)$, y $R(-1, 1, 2)$ (figura 12.31).

Solución El vector $\vec{PQ} \times \vec{PR}$ es perpendicular al plano porque es perpendicular a ambos vectores. En términos de componentes tenemos que

$$\begin{aligned} \vec{PQ} &= (2 - 1)\mathbf{i} + (1 + 1)\mathbf{j} + (-1 - 0)\mathbf{k} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k} \\ \vec{PR} &= (-1 - 1)\mathbf{i} + (1 + 1)\mathbf{j} + (2 - 0)\mathbf{k} = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k} \\ \vec{PQ} \times \vec{PR} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \mathbf{k} \\ &= 6\mathbf{i} + 6\mathbf{k}. \end{aligned}$$

EJEMPLO 3 Obtenga el área del triángulo con vértices en $P(1, -1, 0)$, $Q(2, 1, -1)$ y $R(-1, 1, 2)$ (figura 12.31).

Solución El área del paralelogramo determinada por P , Q y R es

$$\begin{aligned} |\vec{PQ} \times \vec{PR}| &= |6\mathbf{i} + 6\mathbf{k}| \\ &= \sqrt{(6)^2 + (6)^2} = \sqrt{2 \cdot 36} = 6\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Valores del ejemplo 2

El área del triángulo es la mitad de esto, es decir, $3\sqrt{2}$.

EJEMPLO 4 Encuentre un vector unitario perpendicular al plano por los puntos $P(1, -1, 0)$, $Q(2, 1, -1)$ y $R(-1, 1, 2)$.

Solución Puesto que $\vec{PQ} \times \vec{PR}$ es perpendicular al plano, su dirección \mathbf{n} es un vector unitario perpendicular al plano. Tomando los valores de los ejemplos 2 y 3, tenemos

$$\mathbf{n} = \frac{\vec{PQ} \times \vec{PR}}{|\vec{PQ} \times \vec{PR}|} = \frac{6\mathbf{i} + 6\mathbf{k}}{6\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k}.$$

Para facilitar el cálculo del producto cruz usando determinantes, generalmente expresamos los vectores en la forma $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$, en vez de ternas ordenadas $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$.

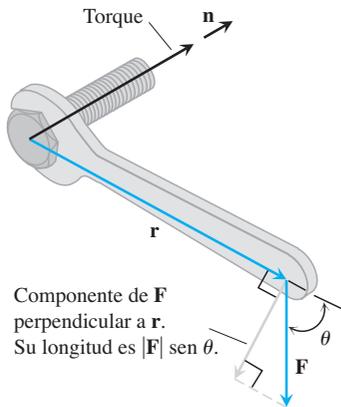


FIGURA 12.32 El vector de torque describe la tendencia de la fuerza \mathbf{F} para mover el tornillo hacia delante.

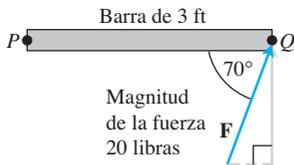


FIGURA 12.33 La magnitud del torque ejercido por \mathbf{F} en P es de alrededor de 56.4 libra-ft (ejemplo 5). La barra gira en sentido contrario a las manecillas del reloj alrededor de P .

Torque

Cuando giramos un tornillo aplicando una fuerza \mathbf{F} a una llave (figura 12.32), producimos un torque que provoca que el tornillo gire. El **vector de torque** apunta en la dirección del eje del tornillo de acuerdo con la regla de la mano derecha (de manera que la rotación es en sentido contrario de las manecillas del reloj cuando se observa desde la *punta* del vector). La magnitud del torque depende de qué tan lejos se aplique la fuerza sobre el brazo de la llave y de cuánto de la fuerza es perpendicular al brazo de la llave en el punto de aplicación. El número que usamos para medir la magnitud del torque es el producto de la longitud del brazo de la palanca \mathbf{r} y el componente escalar de \mathbf{F} perpendicular a \mathbf{r} . En la notación de la figura 12.32,

$$\text{Magnitud del vector de torque} = |\mathbf{r}||\mathbf{F}|\sin\theta,$$

o $|\mathbf{r} \times \mathbf{F}|$. Si \mathbf{n} es el vector unitario a lo largo del eje del tornillo en la dirección del torque, entonces la descripción completa del vector torque es $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$, o

$$\text{Vector torque} = (|\mathbf{r}||\mathbf{F}|\sin\theta)\mathbf{n}.$$

Recuerde que definimos que $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es igual a $\mathbf{0}$ cuando \mathbf{u} y \mathbf{v} son paralelos. Esto es congruente con la interpretación del vector de torque. Si la fuerza \mathbf{F} de la figura 12.32 es paralela a la llave, lo que significa que estamos tratando de girar el tornillo tirando de éste o empujándolo a lo largo de la línea del brazo de la llave, entonces el torque producido es cero.

EJEMPLO 5 La magnitud del torque generado por la fuerza \mathbf{F} en el punto pivote P en la figura 12.33 es

$$\begin{aligned} |\vec{PQ} \times \mathbf{F}| &= |\vec{PQ}||\mathbf{F}|\sin 70^\circ \\ &\approx (3)(20)(0.94) \\ &\approx 56.4 \text{ libras-ft.} \end{aligned}$$

En este ejemplo el vector de torque apunta hacia fuera de la página, hacia el lector. ■

Triple producto escalar o producto caja

El producto $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$ se llama **triple producto escalar** de \mathbf{u} , \mathbf{v} y \mathbf{w} (en ese orden). Como podrá ver en esta fórmula

$$|(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}| = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}||\mathbf{w}|\cos\theta,$$

el valor absoluto del triple producto escalar es el volumen del paralelepípedo (una caja cuyas caras son paralelogramos) determinado por \mathbf{u} , \mathbf{v} y \mathbf{w} (figura 12.34). El número $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$ es el área del paralelogramo de la base. El producto punto y el producto cruz pueden intercambiarse en un triple producto escalar sin alterar su valor. El número $|\mathbf{w}|\cos\theta$ es la altura del para-

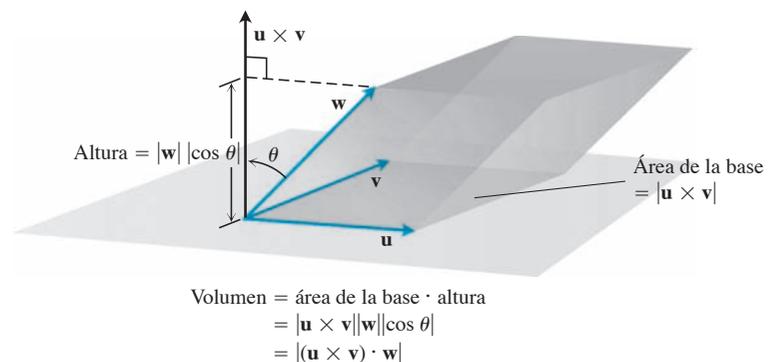


FIGURA 12.34 El número $|(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}|$ es el volumen de un paralelepípedo.

lelepipédo. Debido a esta interpretación geométrica, $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$ también se conoce como el **producto caja** de \mathbf{u} , \mathbf{v} y \mathbf{w} .

Considerando los planos de \mathbf{v} y \mathbf{w} , y de \mathbf{w} y \mathbf{u} como bases del paralelepípedo determinado por \mathbf{u} , \mathbf{v} y \mathbf{w} , vemos que

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}.$$

Puesto que el producto punto es conmutativo, también tenemos

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}).$$

El triple producto escalar se puede calcular como un determinante:

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} &= \left[\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \mathbf{k} \right] \cdot \mathbf{w} \\ &= w_1 \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - w_2 \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + w_3 \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Los productos punto y cruz pueden intercambiarse en un triple producto escalar sin alterar su valor.

Cálculo del triple producto escalar como un determinante

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

EJEMPLO 6 Obtenga el volumen de la caja (paralelepípedo) determinada por $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$, y $\mathbf{w} = 7\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$.

Solución Usando la regla para calcular determinantes, obtenemos

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & -4 \end{vmatrix} = -23.$$

El volumen es, por lo tanto, $|(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}| = 23$ unidades cúbicas. ■

Ejercicios 12.4

Cálculos con el producto cruz

En los ejercicios 1 a 8, obtenga la longitud y dirección (cuando esté definida) de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ y $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$.

1. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{k}$
2. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$
3. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$
4. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$
5. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i}$, $\mathbf{v} = -3\mathbf{j}$
6. $\mathbf{u} = \mathbf{i} \times \mathbf{j}$, $\mathbf{v} = \mathbf{j} \times \mathbf{k}$

7. $\mathbf{u} = -8\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$
8. $\mathbf{u} = \frac{3}{2}\mathbf{i} - \frac{1}{2}\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

En los ejercicios 9 a 14, dibuje los ejes coordenados y luego incluya los vectores \mathbf{u} , \mathbf{v} y $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ como vectores que parten del origen.

9. $\mathbf{u} = \mathbf{i}$, $\mathbf{v} = \mathbf{j}$
10. $\mathbf{u} = \mathbf{i} - \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{j}$
11. $\mathbf{u} = \mathbf{i} - \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$
12. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$
13. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$
14. $\mathbf{u} = \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i}$

Triángulos en el espacio

En los ejercicios 15 a 18,

- Obtenga el área del triángulo determinado por los puntos P , Q y R .
 - Determine un vector unitario perpendicular al plano PQR .
- $P(1, -1, 2)$, $Q(2, 0, -1)$, $R(0, 2, 1)$
 - $P(1, 1, 1)$, $Q(2, 1, 3)$, $R(3, -1, 1)$
 - $P(2, -2, 1)$, $Q(3, -1, 2)$, $R(3, -1, 1)$
 - $P(-2, 2, 0)$, $Q(0, 1, -1)$, $R(-1, 2, -2)$

Triple producto escalar

En los ejercicios 19 a 22, verifique que $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}$ y obtenga el volumen del paralelepípedo (caja) determinado por \mathbf{u} , \mathbf{v} y \mathbf{w} .

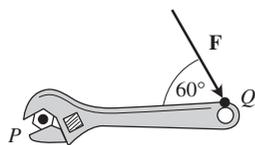
| \mathbf{u} | \mathbf{v} | \mathbf{w} |
|---|--|---|
| 19. $2\mathbf{i}$ | $2\mathbf{j}$ | $2\mathbf{k}$ |
| 20. $\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ | $2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ | $-\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ |
| 21. $2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ | $2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ | $\mathbf{i} + 2\mathbf{k}$ |
| 22. $\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ | $-\mathbf{i} - \mathbf{k}$ | $2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ |

Teoría y ejemplos

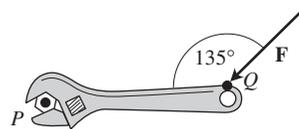
- Vectores paralelos y perpendiculares** Sean $\mathbf{u} = 5\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{j} - 5\mathbf{k}$, $\mathbf{w} = -15\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$. ¿Cuáles de estos vectores son (a) perpendiculares, (b) paralelos entre sí? Justifique su respuesta.
- Vectores paralelos y perpendiculares** Sean $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{w} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$, $\mathbf{r} = -(\pi/2)\mathbf{i} - \pi\mathbf{j} + (\pi/2)\mathbf{k}$. ¿Cuáles de estos vectores son (a) perpendiculares, (b) paralelos entre sí? Justifique su respuesta.

En los ejercicios 25 y 26, determine la magnitud del torque ejercido por \mathbf{F} sobre el tornillo en P si $|\overrightarrow{PQ}| = 8$ in. y $|\mathbf{F}| = 30$ lb. Conteste en libras-ft.

25.



26.



- ¿Cuáles de las siguientes igualdades *son verdaderas siempre* y cuáles *no siempre son verdaderas*? Dé sus razones para las respuestas.

a. $|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$

b. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}|$

c. $\mathbf{u} \times \mathbf{0} = \mathbf{0} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$

d. $\mathbf{u} \times (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$

e. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{v} \times \mathbf{u}$

f. $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$

g. $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = 0$

h. $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$

- ¿Cuáles de las siguientes igualdades *son verdaderas siempre* y cuáles *no siempre son verdaderas*? Dé razones para sus respuestas.

a. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$

b. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$

c. $(-\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = -(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$

d. $(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (c\mathbf{v}) = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$ (cualquier número c)

e. $c(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (c\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (c\mathbf{v})$ (cualquier número c)

f. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2$

g. $(\mathbf{u} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} = 0$

h. $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$

- Dados los vectores no nulos \mathbf{u} , \mathbf{v} y \mathbf{w} , escriba lo siguiente usando producto punto y/o producto cruz, según sea apropiado.

a. El vector proyección de \mathbf{u} sobre \mathbf{v} b. El vector ortogonal a \mathbf{u} y \mathbf{v} c. El vector ortogonal a $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ y \mathbf{w} d. El volumen del paralelepípedo determinado por \mathbf{u} , \mathbf{v} y \mathbf{w} e. El vector ortogonal a $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ y $\mathbf{u} \times \mathbf{w}$ f. Un vector de longitud $|\mathbf{u}|$ en la dirección de \mathbf{v}

- Calcule $(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{j}$ y $\mathbf{i} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{j})$. ¿Qué puede concluir acerca de la asociatividad del producto cruz?

- Sean \mathbf{u} , \mathbf{v} y \mathbf{w} vectores. ¿Cuáles de las siguientes expresiones tienen sentido y cuáles no? Justifique su respuesta.

a. $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$

b. $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$

c. $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$

d. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$

- Productos cruz de tres vectores** Demuestre que, excepto en casos degenerados, $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$ está en el plano de \mathbf{u} y \mathbf{v} , mientras que $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ está en el plano de \mathbf{v} y \mathbf{w} . ¿Cuáles *son* los casos degenerados?

- Cancelación en el producto cruz** Si $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{w}$ y $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, ¿es cierto que $\mathbf{v} = \mathbf{w}$? Justifique su respuesta.

- Doble cancelación** Si $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ y si $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{w}$ y $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$, ¿es $\mathbf{v} = \mathbf{w}$? Justifique su respuesta.

Área de un paralelogramo

Determine las áreas de los paralelogramos cuyos vértices se indican en los ejercicios 35 a 40.

35. $A(1, 0)$, $B(0, 1)$, $C(-1, 0)$, $D(0, -1)$

36. $A(0, 0)$, $B(7, 3)$, $C(9, 8)$, $D(2, 5)$

37. $A(-1, 2)$, $B(2, 0)$, $C(7, 1)$, $D(4, 3)$

38. $A(-6, 0)$, $B(1, -4)$, $C(3, 1)$, $D(-4, 5)$

39. $A(0, 0, 0)$, $B(3, 2, 4)$, $C(5, 1, 4)$, $D(2, -1, 0)$

40. $A(1, 0, -1)$, $B(1, 7, 2)$, $C(2, 4, -1)$, $D(0, 3, 2)$

Área de un triángulo

Obtenga las áreas de los triángulos cuyos vértices se indican en los ejercicios 41 a 47.

41. $A(0, 0)$, $B(-2, 3)$, $C(3, 1)$

42. $A(-1, -1)$, $B(3, 3)$, $C(2, 1)$

43. $A(-5, 3)$, $B(1, -2)$, $C(6, -2)$

44. $A(-6, 0)$, $B(10, -5)$, $C(-2, 4)$

45. $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(0, 0, -1)$

46. $A(0, 0, 0)$, $B(-1, 1, -1)$, $C(3, 0, 3)$

47. $A(1, -1, 1)$, $B(0, 1, 1)$, $C(1, 0, -1)$

48. Obtenga el volumen de un paralelepípedo si cuatro de sus ocho vértices son $A(0, 0, 0)$, $B(1, 2, 0)$, $C(0, -3, 2)$, y $D(3, -4, 5)$.
49. **Área de un triángulo** Determine una fórmula para el área del triángulo en el plano xy con vértices en $(0, 0)$, (a_1, a_2) y (b_1, b_2) . Explique su desarrollo.

50. **Área del triángulo** Obtenga una fórmula concisa para el área del triángulo en el plano xy con vértices en (a_1, a_2) y (b_1, b_2) y (c_1, c_2) . Explique sus resultados.

12.5 | Rectas y planos en el espacio

Esta sección muestra cómo usar productos escalares y vectoriales para escribir ecuaciones de rectas, segmentos de recta y planos en el espacio. Usaremos estas representaciones en lo que resta del libro.

Rectas y segmentos de recta en el espacio

En el plano, una recta se determina por un punto y un número que indica la pendiente de la recta. En el espacio, una recta está determinada por un punto y un *vector* que indica la dirección de la recta.

Suponga que L es una recta en el espacio que pasa por un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y que es paralela a un vector $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$. De esta forma, L es el conjunto de todos los puntos $P(x, y, z)$, tales que $\vec{P_0P}$ es paralelo a \mathbf{v} (figura 12.35). Por lo tanto, $\vec{P_0P} = t\mathbf{v}$ para algún parámetro escalar t . El valor de t depende de la localización del punto P a lo largo de la recta, y el dominio de t es $(-\infty, \infty)$. La forma desarrollada de la ecuación $\vec{P_0P} = t\mathbf{v}$ es

$$(x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k} = t(v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}),$$

la cual puede replantearse como

$$x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k} + t(v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}). \quad (1)$$

Si $\mathbf{r}(t)$ es el vector de posición de un punto $P(x, y, z)$ sobre la recta, y \mathbf{r}_0 es el vector de posición del punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$, entonces la ecuación (1) da la siguiente forma vectorial para la ecuación de una recta en el espacio.

Ecuación vectorial de una recta

Una ecuación vectorial de la recta L que pasa por $P_0(x_0, y_0, z_0)$ paralela a \mathbf{v} es

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}, \quad -\infty < t < \infty, \quad (2)$$

donde \mathbf{r} es el vector de posición de un punto $P(x, y, z)$ sobre L , y \mathbf{r}_0 es el vector de posición de $P_0(x_0, y_0, z_0)$.

Al igualar los componentes correspondientes de los dos lados de la ecuación (1) resultan tres ecuaciones escalares con el parámetro t :

$$x = x_0 + tv_1, \quad y = y_0 + tv_2, \quad z = z_0 + tv_3.$$

Estas ecuaciones nos dan la parametrización estándar de la recta para el intervalo $-\infty < t < \infty$.

Ecuaciones paramétricas de una recta

La parametrización estándar de la recta que pasa por $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y que es paralela a $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$ es

$$x = x_0 + tv_1, \quad y = y_0 + tv_2, \quad z = z_0 + tv_3, \quad -\infty < t < \infty \quad (3)$$

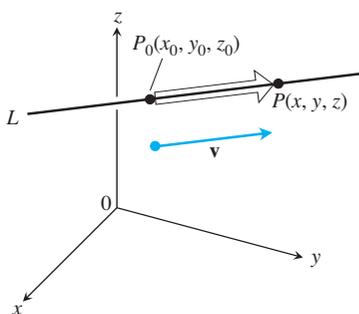


FIGURA 12.35 Un punto P está en la recta L que pasa por P_0 y es paralela a \mathbf{v} si y sólo si $\vec{P_0P}$ es un múltiplo escalar de \mathbf{v} .

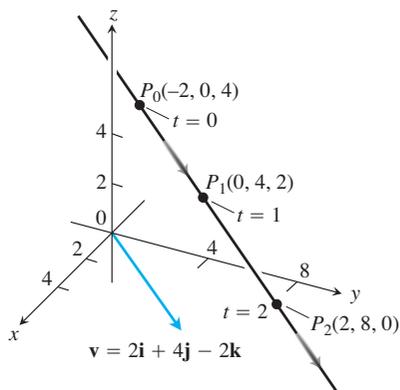


FIGURA 12.36 Algunos valores del parámetro y los puntos correspondientes sobre la recta del ejemplo 1. Las flechas indican la dirección en la que crece t .

EJEMPLO 1 Obtenga las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por $(-2, 0, 4)$ y que es paralela a $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ (figura 12.36).

Solución Con $P_0(x_0, y_0, z_0) = (-2, 0, 4)$ y $v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, las ecuaciones (3) se convierten en

$$x = -2 + 2t, \quad y = 4t, \quad z = 4 - 2t. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 2 Obtenga las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por $P(-3, 2, -3)$ y $Q(1, -1, 4)$.

Solución El vector

$$\begin{aligned} \vec{PQ} &= (1 - (-3))\mathbf{i} + (-1 - 2)\mathbf{j} + (4 - (-3))\mathbf{k} \\ &= 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 7\mathbf{k} \end{aligned}$$

es paralelo a la recta, y las ecuaciones (3) con $(x_0, y_0, z_0) = (-3, 2, -3)$ dan por resultado

$$x = -3 + 4t, \quad y = 2 - 3t, \quad z = -3 + 7t.$$

Pudimos seleccionar $Q(1, -1, 4)$ como el “punto base” y haber escrito

$$x = 1 + 4t, \quad y = -1 - 3t, \quad z = 4 + 7t.$$

Estas ecuaciones sirven tan bien como la primera; simplemente nos colocan en un punto diferente sobre la recta para un valor dado de t . ■

Observe que las parametrizaciones no son únicas. No sólo se puede cambiar el “punto base”, sino también el parámetro. Las ecuaciones $x = -3 + 4t^3$, $y = 2 - 3t^3$, $z = -3 + 7t^3$ también parametrizan a la recta del ejemplo 2.

Para parametrizar un segmento de recta que une dos puntos, primero parametrizamos la recta que pasa por los puntos. Luego obtenemos los valores de t para los extremos del segmento y restringimos t al intervalo cerrado limitado por estos valores. Las ecuaciones de la recta, junto con esta restricción adicional, parametrizan al segmento.

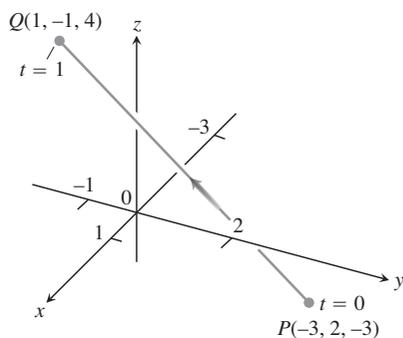


FIGURA 12.37 En el ejemplo 3 derivamos una parametrización del segmento de recta PQ . La flecha indica la dirección en que crece t .

EJEMPLO 3 Parametrice el segmento de recta que une los puntos $P(-3, 2, -3)$ y $Q(1, -1, 4)$ (figura 12.37).

Solución Iniciamos con las ecuaciones de la recta que pasa por P y Q , tomándolas, en este caso, del ejemplo 2:

$$x = -3 + 4t, \quad y = 2 - 3t, \quad z = -3 + 7t.$$

Observamos que el punto

$$(x, y, z) = (-3 + 4t, 2 - 3t, -3 + 7t)$$

sobre la recta pasa por $P(-3, 2, -3)$ en $t = 0$ y por $Q(1, -1, 4)$ en $t = 1$. Agregamos la restricción de $0 \leq t \leq 1$ para parametrizar el segmento:

$$x = -3 + 4t, \quad y = 2 - 3t, \quad z = -3 + 7t, \quad 0 \leq t \leq 1. \quad \blacksquare$$

La forma vectorial (ecuación 2) de una línea en el espacio es más ilustrativa si pensamos en ella como la trayectoria de una partícula que parte de la posición inicial $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y se mueve en la dirección del vector \mathbf{v} . Rescribiendo la ecuación (2), tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v} \\ &= \mathbf{r}_0 + t|\mathbf{v}| \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}. \end{aligned} \quad (4)$$

↑ Posición inicial
 ↑ Tiempo
 ↑ Rapidez
 ↑ Dirección

En otras palabras, la posición de la partícula en el tiempo t es su posición inicial más la distancia recorrida (rapidez \times tiempo) en la dirección $\mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ de su movimiento rectilíneo.

EJEMPLO 4 Un helicóptero volará directamente de un helipuerto ubicado en el origen en dirección del punto $(1, 1, 1)$ a una rapidez de 60 ft/segundo. ¿Cuál es la posición del helicóptero después de 10 segundos?

Solución Colocamos el origen en la posición inicial (helipuerto) del helicóptero. Entonces el vector unitario

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{k}$$

indica la dirección de vuelo del helicóptero. A partir de la ecuación (4), la posición del helicóptero en cualquier tiempo t es

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \mathbf{r}_0 + t(\text{rapidez})\mathbf{u} \\ &= \mathbf{0} + t(60)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{k}\right) \\ &= 20\sqrt{3}t(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}). \end{aligned}$$

Cuando $t = 10$ segundos,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(10) &= 200\sqrt{3}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) \\ &= \langle 200\sqrt{3}, 200\sqrt{3}, 200\sqrt{3} \rangle. \end{aligned}$$

Después de 10 segundos de vuelo del origen hacia $(1, 1, 1)$, el helicóptero se localiza en el punto $(200\sqrt{3}, 200\sqrt{3}, 200\sqrt{3})$ del espacio. Ha viajado una distancia de $(60 \text{ ft/seg})(10 \text{ seg}) = 600 \text{ ft}$, que es la longitud del vector $\mathbf{r}(10)$. ■

Distancia de un punto a una recta en el espacio

Para obtener la distancia de un punto S a una recta que pasa por un punto P , paralela a un vector \mathbf{v} , encontramos el valor absoluto del componente escalar de \vec{PS} en la dirección de un vector normal a la recta (figura 12.38). Con la notación de la figura, el valor absoluto del componente escalar es $|\vec{PS}| \text{ sen } \theta$, que es $\frac{|\vec{PS} \times \mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|}$.

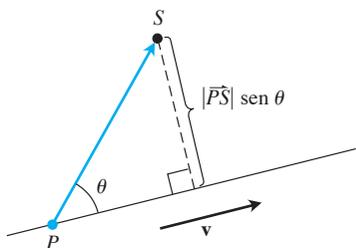


FIGURA 12.38 La distancia de S a la recta que pasa por P y que es paralela a \mathbf{v} es $|\vec{PS}| \text{ sen } \theta$, donde θ es el ángulo entre \vec{PS} y \mathbf{v} .

Distancia de un punto S a una recta que pasa por P y que es paralela a \mathbf{v}

$$d = \frac{|\vec{PS} \times \mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|} \tag{5}$$

EJEMPLO 5 Obtenga la distancia del punto $S(1, 1, 5)$ a la recta

$$L: \quad x = 1 + t, \quad y = 3 - t, \quad z = 2t.$$

Solución Vemos de la ecuación para L que L pasa por $P(1, 3, 0)$ y que es paralela a $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. Con

$$\vec{PS} = (1 - 1)\mathbf{i} + (1 - 3)\mathbf{j} + (5 - 0)\mathbf{k} = -2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$$

y

$$\vec{PS} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 2\mathbf{k},$$

La ecuación (5) da

$$d = \frac{|\vec{PS} \times \mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|} = \frac{\sqrt{1 + 25 + 4}}{\sqrt{1 + 1 + 4}} = \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{6}} = \sqrt{5}. \quad \blacksquare$$

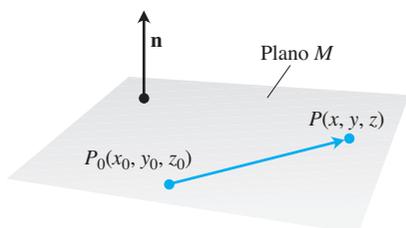


FIGURA 12.39 La ecuación estándar de un plano en el espacio está definida en términos de un vector normal al plano: un punto P está en el plano que contiene a P_0 y es normal a \mathbf{n} si y sólo si $\mathbf{n} \cdot \vec{P_0P} = 0$.

Una ecuación para un plano en el espacio

Un plano en el espacio está determinado por un punto en el plano y su “inclinación” u orientación. Esta “inclinación” se define especificando un vector que es perpendicular o normal al plano.

Suponga que el plano M pasa por un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y es normal al vector no nulo $\mathbf{n} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$. Entonces M es el conjunto de todos los puntos $P(x, y, z)$ para los cuales $\vec{P_0P}$ es ortogonal a \mathbf{n} (figura 12.39). Por lo tanto, el producto punto $\mathbf{n} \cdot \vec{P_0P} = 0$. Esta ecuación es equivalente a

$$(A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}) \cdot [(x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}] = 0$$

o bien,

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Ecuación de un plano

El plano que pasa por $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y es normal a $\mathbf{n} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$ tiene una

| | |
|--|---|
| Ecuación vectorial: | $\mathbf{n} \cdot \vec{P_0P} = 0$ |
| Ecuación cartesiana: | $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ |
| Ecuación cartesiana simplificada: | $Ax + By + Cz = D,$ donde $D = Ax_0 + By_0 + Cz_0$ |

EJEMPLO 6 Obtenga una ecuación para el plano que pasa por $P_0(-3, 0, 7)$ y es perpendicular a $\mathbf{n} = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

Solución La ecuación cartesiana es

$$5(x - (-3)) + 2(y - 0) + (-1)(z - 7) = 0.$$

Simplificando obtenemos

$$\begin{aligned} 5x + 15 + 2y - z + 7 &= 0 \\ 5x + 2y - z &= -22. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Observe en el ejemplo 6 cómo los componentes de $\mathbf{n} = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ se convierten en los coeficientes de x , y y z en la ecuación $5x + 2y - z = -22$. El vector $\mathbf{n} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$ es normal al plano $Ax + By + Cz = D$.

EJEMPLO 7 Obtenga una ecuación para el plano que pasa por $A(0, 0, 1)$, $B(2, 0, 0)$ y $C(0, 3, 0)$.

Solución Encontramos un vector normal al plano y lo usamos con uno de los puntos (no importa cuál) para escribir una ecuación del plano.

El producto cruz

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$$

es normal al plano. Sustituimos los componentes de este vector y las coordenadas de $A(0, 0, 1)$ en la ecuación cartesiana para obtener

$$\begin{aligned} 3(x - 0) + 2(y - 0) + 6(z - 1) &= 0 \\ 3x + 2y + 6z &= 6. \end{aligned}$$

Rectas de intersección

Así como las rectas son paralelas si y sólo si tienen la misma dirección, dos planos son **paralelos** si y sólo si sus vectores normales son paralelos, es decir, $\mathbf{n}_1 = k\mathbf{n}_2$ para algún escalar k . Dos planos que no son paralelos se intersecan en una recta.

EJEMPLO 8 Obtenga un vector paralelo a la recta de intersección de los planos $3x - 6y - 2z = 15$ y $2x + y - 2z = 5$.

Solución La recta de intersección de dos planos es perpendicular a los vectores normales de ambos planos \mathbf{n}_1 y \mathbf{n}_2 (figura 12.40) y, por lo tanto, es paralela a $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$. Visto de otra manera, $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$ es un vector paralelo a la recta de intersección de los planos. En nuestro caso,

$$\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -6 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 14\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 15\mathbf{k}.$$

Cualquier múltiplo escalar no nulo de $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$ nos sirve igual.

EJEMPLO 9 Obtenga las ecuaciones paramétricas de la recta de intersección de los planos $3x - 6y - 2z = 15$ y $2x + y - 2z = 5$.

Solución Obtenemos un vector paralelo a la recta y un punto sobre la recta, y usamos la ecuación (3).

El ejemplo 8 identifica a $\mathbf{v} = 14\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 15\mathbf{k}$ como un vector paralelo a la recta. Para obtener un punto sobre la recta, podemos tomar cualquier punto común a ambos planos. Con la sustitución de $z = 0$ en las ecuaciones de los planos y resolviendo simultáneamente el sistema en términos de x y y , se identifica uno de estos puntos como $(3, -1, 0)$. La recta es

$$x = 3 + 14t, \quad y = -1 + 2t, \quad z = 15t.$$

La elección de $z = 0$ es arbitraria y pudimos haber elegido también $z = 1$ o $z = -1$. O pudimos dejar que $x = 0$ y despejar y y z . Las diferentes opciones nos darían parametrizaciones diferentes de la misma recta.

Algunas veces queremos saber si una recta y un plano se intersecan. Por ejemplo, si estamos mirando una placa delgada y un segmento de recta que la atraviesa, podemos estar interesados en saber qué porción del segmento de recta está oculto por la placa. Esta aplicación se usa en gráficos por computadora (ejercicio 74).

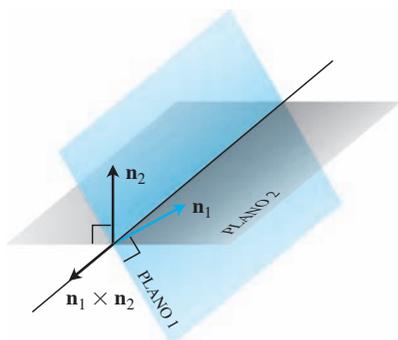


FIGURA 12.40 Relación entre la recta de intersección de dos planos y los vectores normales a tales planos (ejemplo 8).

EJEMPLO 10 Obtenga el punto donde la recta

$$x = \frac{8}{3} + 2t, \quad y = -2t, \quad z = 1 + t$$

corta al plano $3x + 2y + 6z = 6$.

Solución El punto

$$\left(\frac{8}{3} + 2t, -2t, 1 + t \right)$$

está en el plano si sus coordenadas satisfacen la ecuación del plano, es decir, si

$$\begin{aligned} 3\left(\frac{8}{3} + 2t\right) + 2(-2t) + 6(1 + t) &= 6 \\ 8 + 6t - 4t + 6 + 6t &= 6 \\ 8t &= -8 \\ t &= -1. \end{aligned}$$

El punto de intersección es

$$(x, y, z)|_{t=-1} = \left(\frac{8}{3} - 2, 2, 1 - 1 \right) = \left(\frac{2}{3}, 2, 0 \right). \quad \blacksquare$$

Distancia de un punto a un plano

Si P es un punto en un plano con vector normal \mathbf{n} , entonces la distancia de cualquier punto S al plano es la longitud del vector proyección de \overrightarrow{PS} sobre \mathbf{n} . Es decir, la distancia de S al plano es

$$d = \left| \overrightarrow{PS} \cdot \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} \right| \quad (6)$$

donde $\mathbf{n} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$ es normal al plano.

EJEMPLO 11 Obtenga la distancia de $S(1, 1, 3)$ al plano $3x + 2y + 6z = 6$.

Solución Obtenemos un punto P en el plano y calculamos la longitud del vector proyección de \overrightarrow{PS} sobre un vector \mathbf{n} normal al plano (figura 12.41). Los coeficientes de la ecuación $3x + 2y + 6z = 6$ dan

$$\mathbf{n} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}.$$

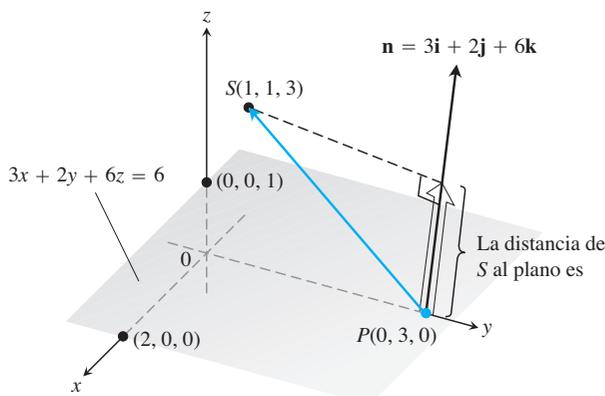


FIGURA 12.41 La distancia de S al plano es la longitud del vector proyección de \overrightarrow{PS} sobre \mathbf{n} (ejemplo 11).

Los puntos del plano que son más fáciles de encontrar a partir de su ecuación son las intersecciones con los ejes. Si tomamos como P la intersección del plano con el eje y $(0, 3, 0)$, entonces

$$\begin{aligned}\vec{PS} &= (1 - 0)\mathbf{i} + (1 - 3)\mathbf{j} + (3 - 0)\mathbf{k} \\ &= \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \\ |\mathbf{n}| &= \sqrt{(3)^2 + (2)^2 + (6)^2} = \sqrt{49} = 7.\end{aligned}$$

La distancia de S al plano es

$$\begin{aligned}d &= \left| \vec{PS} \cdot \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} \right| && \text{longitud de proy}_{\mathbf{n}} \vec{PS} \\ &= \left| (\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) \cdot \left(\frac{3}{7}\mathbf{i} + \frac{2}{7}\mathbf{j} + \frac{6}{7}\mathbf{k} \right) \right| \\ &= \left| \frac{3}{7} - \frac{4}{7} + \frac{18}{7} \right| = \frac{17}{7}.\end{aligned}$$

Ángulo entre planos

El ángulo entre dos planos que se intersecan está definido como el ángulo agudo entre sus vectores normales (figura 12.42).

EJEMPLO 12 Obtenga el ángulo entre los planos $3x - 6y - 2z = 15$ y $2x + y - 2z = 5$.

Solución Los vectores

$$\mathbf{n}_1 = 3\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 2\mathbf{k}, \quad \mathbf{n}_2 = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$

son normales a los planos. El ángulo entre ellos es

$$\begin{aligned}\theta &= \cos^{-1} \left(\frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} \right) \\ &= \cos^{-1} \left(\frac{4}{21} \right) \\ &\approx 1.38 \text{ radianes.} \quad \text{Aproximadamente } 79 \text{ grados.}\end{aligned}$$

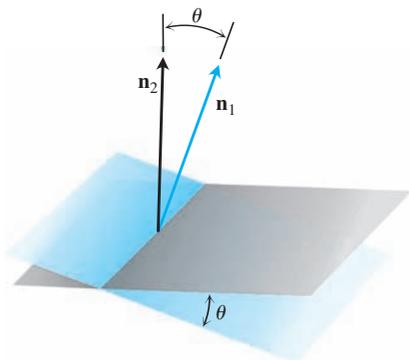


FIGURA 12.42 El ángulo entre dos planos se obtiene a partir del ángulo entre sus normales.

Ejercicios 12.5

Rectas y segmentos de recta

Obtenga las ecuaciones paramétricas para las rectas de los ejercicios 1 a 12.

- La recta que pasa por el punto $P(3, -4, -1)$ y que es paralela al vector $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$
- La recta que pasa por $P(1, 2, -1)$ y $Q(-1, 0, 1)$
- La recta que pasa por $P(-2, 0, 3)$ y $Q(3, 5, -2)$
- La recta que pasa por $P(1, 2, 0)$ y $Q(1, 1, -1)$
- La recta pasa por el origen y es paralela al vector $2\mathbf{j} + \mathbf{k}$
- La recta que pasa por el punto $(3, -2, 1)$ y es paralela a la recta $x = 1 + 2t, y = 2 - t, z = 3t$
- La recta que pasa por $(1, 1, 1)$ y es paralela al eje z
- La recta que pasa por $(2, 4, 5)$ y es perpendicular al plano $3x + 7y - 5z = 21$

- La recta que pasa por $(0, -7, 0)$ y es perpendicular al plano $x + 2y + 2z = 13$
- La recta que pasa por $(2, 3, 0)$ y es perpendicular a los vectores $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$
- El eje x
- El eje z

Obtenga las parametrizaciones de los segmentos de recta que unen los puntos dados en cada uno de los ejercicios 13 a 20. Dibuje los ejes coordenados y trace cada segmento, indicando la dirección en que crece t para la parametrización seleccionada.

- | | |
|------------------------------|-----------------------------|
| 13. $(0, 0, 0), (1, 1, 3/2)$ | 14. $(0, 0, 0), (1, 0, 0)$ |
| 15. $(1, 0, 0), (1, 1, 0)$ | 16. $(1, 1, 0), (1, 1, 1)$ |
| 17. $(0, 1, 1), (0, -1, 1)$ | 18. $(0, 2, 0), (3, 0, 0)$ |
| 19. $(2, 0, 2), (0, 2, 0)$ | 20. $(1, 0, -1), (0, 3, 0)$ |

Planos

Obtenga las ecuaciones de los planos en los ejercicios 21 a 26.

21. El plano que pasa por $P_0(0, 2, -1)$ y es normal a $\mathbf{n} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$
 22. El plano que pasa por $(1, -1, 3)$ y es paralelo al plano

$$3x + y + z = 7$$

23. El plano que pasa por $(1, 1, -1)$, $(2, 0, 2)$ y $(0, -2, 1)$
 24. El plano que pasa por $(2, 4, 5)$, $(1, 5, 7)$ y $(-1, 6, 8)$
 25. El plano que pasa por $P_0(2, 4, 5)$ y es perpendicular a la recta

$$x = 5 + t, \quad y = 1 + 3t, \quad z = 4t$$

26. El plano que pasa por $A(1, -2, 1)$ y es perpendicular al vector del origen a A
 27. Obtenga el punto de intersección de las rectas $x = 2t + 1$, $y = 3t + 2$, $z = 4t + 3$ y $x = s + 2$, $y = 2s + 4$, $z = -4s - 1$. Luego encuentre el plano determinado por estas rectas.
 28. Obtenga el punto de intersección de las rectas $x = t$, $y = -t + 2$, $z = t + 1$ y $x = 2s + 2$, $y = s + 3$, $z = 5s + 6$. Luego encuentre el plano determinado por estas rectas.

En los ejercicios 29 y 30 obtenga el plano determinado por las rectas que se intersecan

29. $L1: x = -1 + t, \quad y = 2 + t, \quad z = 1 - t; \quad -\infty < t < \infty$
 $L2: x = 1 - 4s, \quad y = 1 + 2s, \quad z = 2 - 2s; \quad -\infty < s < \infty$
 30. $L1: x = t, \quad y = 3 - 3t, \quad z = -2 - t; \quad -\infty < t < \infty$
 $L2: x = 1 + s, \quad y = 4 + s, \quad z = -1 + s; \quad -\infty < s < \infty$
 31. Determine el plano que pasa por $P_0(2, 1, -1)$ y es perpendicular a la línea de intersección de los planos $2x + y - z = 3$, $x + 2y + z = 2$.
 32. Obtenga el plano que pasa por los puntos $P_1(1, 2, 3)$, $P_2(3, 2, 1)$ y es perpendicular al plano $4x - y + 2z = 7$.

Distancias

En los ejercicios 33 a 38, obtenga la distancia del punto a la recta.

33. $(0, 0, 12); \quad x = 4t, \quad y = -2t, \quad z = 2t$
 34. $(0, 0, 0); \quad x = 5 + 3t, \quad y = 5 + 4t, \quad z = -3 - 5t$
 35. $(2, 1, 3); \quad x = 2 + 2t, \quad y = 1 + 6t, \quad z = 3$
 36. $(2, 1, -1); \quad x = 2t, \quad y = 1 + 2t, \quad z = 2t$
 37. $(3, -1, 4); \quad x = 4 - t, \quad y = 3 + 2t, \quad z = -5 + 3t$
 38. $(-1, 4, 3); \quad x = 10 + 4t, \quad y = -3, \quad z = 4t$

En los ejercicios 39 a 44, obtenga la distancia del punto al plano.

39. $(2, -3, 4), \quad x + 2y + 2z = 13$
 40. $(0, 0, 0), \quad 3x + 2y + 6z = 6$
 41. $(0, 1, 1), \quad 4y + 3z = -12$
 42. $(2, 2, 3), \quad 2x + y + 2z = 4$
 43. $(0, -1, 0), \quad 2x + y + 2z = 4$
 44. $(1, 0, -1), \quad -4x + y + z = 4$
 45. Obtenga la distancia del plano $x + 2y + 6z = 1$ al plano $x + 2y + 6z = 10$.
 46. Calcule la distancia de la recta $x = 2 + t, y = 1 + t, z = -(1/2) - (1/2)t$ al plano $x + 2y + 6z = 10$.

Ángulos

Calcule los ángulos entre los planos de los ejercicios 47 y 48.

47. $x + y = 1, \quad 2x + y - 2z = 2$
 48. $5x + y - z = 10, \quad x - 2y + 3z = -1$

T Use una calculadora para determinar los ángulos agudos entre los planos de los ejercicios 49 a 52 con una precisión de una centésima de radián.

49. $2x + 2y + 2z = 3, \quad 2x - 2y - z = 5$
 50. $x + y + z = 1, \quad z = 0$ (el plano xy)
 51. $2x + 2y - z = 3, \quad x + 2y + z = 2$
 52. $4y + 3z = -12, \quad 3x + 2y + 6z = 6$

Intersecciones de rectas y planos

En los ejercicios 53 a 56, obtenga el punto en el cual la recta encuentra al plano.

53. $x = 1 - t, \quad y = 3t, \quad z = 1 + t; \quad 2x - y + 3z = 6$
 54. $x = 2, \quad y = 3 + 2t, \quad z = -2 - 2t; \quad 6x + 3y - 4z = -12$
 55. $x = 1 + 2t, \quad y = 1 + 5t, \quad z = 3t; \quad x + y + z = 2$
 56. $x = -1 + 3t, \quad y = -2, \quad z = 5t; \quad 2x - 3z = 7$

Obtenga parametrizaciones para las rectas en las cuales los planos de los ejercicios 57 a 60 se intersecan.

57. $x + y + z = 1, \quad x + y = 2$
 58. $3x - 6y - 2z = 3, \quad 2x + y - 2z = 2$
 59. $x - 2y + 4z = 2, \quad x + y - 2z = 5$
 60. $5x - 2y = 11, \quad 4y - 5z = -17$

Dadas dos rectas en el espacio, o son paralelas, o se intersecan, o son oblicuas sin tocarse (imagine, por ejemplo, la trayectoria de vuelo de dos aviones en el cielo). Los ejercicios 61 y 62 dan tres rectas cada uno. En cada ejercicio determine si las rectas, tomadas por pares, son paralelas, se cortan o son oblicuas. Si se cortan, determine el punto de intersección.

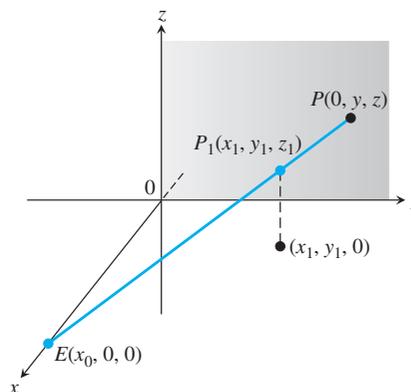
61. $L1: x = 3 + 2t, \quad y = -1 + 4t, \quad z = 2 - t; \quad -\infty < t < \infty$
 $L2: x = 1 + 4s, \quad y = 1 + 2s, \quad z = -3 + 4s; \quad -\infty < s < \infty$
 $L3: x = 3 + 2r, \quad y = 2 + r, \quad z = -2 + 2r; \quad -\infty < r < \infty$
 62. $L1: x = 1 + 2t, \quad y = -1 - t, \quad z = 3t; \quad -\infty < t < \infty$
 $L2: x = 2 - s, \quad y = 3s, \quad z = 1 + s; \quad -\infty < s < \infty$
 $L3: x = 5 + 2r, \quad y = 1 - r, \quad z = 8 + 3r; \quad -\infty < r < \infty$

Teoría y ejemplos

63. Use las ecuaciones (3) para generar una parametrización de la recta que pasa por $P(2, -4, 7)$ y que es paralela a $\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$. Luego genere otra parametrización de la recta usando el punto $P_2(-2, -2, 1)$ y el vector $\mathbf{v}_2 = -\mathbf{i} + (1/2)\mathbf{j} - (3/2)\mathbf{k}$.
 64. Use la ecuación tipo cartesiana para obtener una ecuación del plano que pasa por $P_1(4, 1, 5)$ y es normal a $\mathbf{n}_1 = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Luego obtenga otra ecuación para el mismo plano usando el punto $P_2(3, -2, 0)$ y el vector normal $\mathbf{n}_2 = -\sqrt{2}\mathbf{i} + 2\sqrt{2}\mathbf{j} - \sqrt{2}\mathbf{k}$.
 65. Obtenga los puntos donde la recta $x = 1 + 2t, y = -1 - t, z = 3t$ corta a los planos coordenados. Describa el razonamiento que lo llevó a su respuesta.
 66. Determine las ecuaciones de la recta en el plano $z = 3$ que forma un ángulo de $\pi/6$ radianes con \mathbf{i} y el ángulo $\pi/3$ radianes con \mathbf{j} . Describa el razonamiento que lo llevó a su respuesta.
 67. ¿Es cierto que la recta $x = 1 - 2t, y = 2 + 5t, z = -3t$ es paralela al plano $2x + y - z = 8$? Justifique su respuesta.

68. ¿Cómo podría saber si dos planos $A_1x + B_1y + C_1z = D_1$ y $A_2x + B_2y + C_2z = D_2$ son paralelos o perpendiculares? Justifique su respuesta.
69. Obtenga dos planos distintos cuya intersección sea la recta $x = 1 + t$, $y = 2 - t$, $z = 3 + 2t$. Escriba las ecuaciones para cada plano en la forma $Ax + By + Cz = D$.
70. Encuentre el plano que pasa por el origen y que corta al plano $M: 2x + 3y + z = 12$ en un ángulo recto. ¿Cómo sabe que su plano es perpendicular a M ?
71. La gráfica de $(x/a) + (y/b) + (z/c) = 1$ es un plano para cualesquiera números distintos de cero a , b y c . ¿Cuáles planos tienen una ecuación de esta forma?
72. Suponga que L_1 y L_2 son rectas no paralelas disjuntas (que no se intersecan). ¿Es posible que un vector no nulo sea perpendicular a ambas? Justifique su respuesta.
73. **La perspectiva en graficación por computadora** En los gráficos por computadora y el dibujo en perspectiva necesitamos representar objetos vistos por el ojo en el espacio como imágenes en un plano bidimensional. Suponga que el ojo está en $E(x_0, 0, 0)$, como se muestra en la figura, y que queremos representar un punto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ como un punto sobre el plano yz . Hacemos esto proyectando P_1 sobre el plano con un rayo desde E . El punto P_1 se representa mediante el punto $P(0, y, z)$. El problema para nosotros como diseñadores de gráficos es encontrar y y z dados E y P_1 .
- a. Escriba una ecuación vectorial que sea válida entre \vec{EP} y \vec{EP}_1 . Use esta ecuación para expresar y y z en términos de x_0, x_1, y_1 y z_1 .

- b. Compruebe las fórmulas obtenidas para y y z en el inciso (a), investigando su comportamiento en $x_1 = 0$ y $x_1 = x_0$ y también viendo qué pasa cuando $x_0 \rightarrow \infty$. ¿Qué encontró?



74. **Rectas ocultas en graficación por computadora** Éste es otro problema típico en la graficación por computadora. Su ojo está en $(4, 0, 0)$. Usted está mirando una placa triangular cuyos vértices están en $(1, 0, 1)$, $(1, 1, 0)$ y $(-2, 2, 2)$. El segmento de recta de $(1, 0, 0)$ a $(0, 2, 2)$ pasa por la placa. ¿Qué porción del segmento de recta está oculto a su vista por la placa? (Éste es un ejercicio de localización de intersecciones de rectas y planos).

12.6 Cilindros y superficies cuádricas

Hasta ahora hemos estudiado dos tipos de superficies: esferas y planos. En esta sección ampliaremos nuestro inventario para incluir una variedad de cilindros y superficies cuádricas. Las superficies cuádricas son superficies definidas por ecuaciones de segundo grado en x , y y z . Las esferas son superficies cuádricas y hay otras de igual interés que serán necesarias en los capítulos 14 a 16.

Cilindros

Un **cilindro** es una superficie que se genera por el movimiento de una línea recta paralela a una recta fija dada a lo largo de una curva plana dada. La curva se llama **curva generatriz** del cilindro (figura 12.43). En geometría sólida, donde *cilindro* significa *cilindro circular*, las curvas generatrices son circunferencias, pero ahora permitimos curvas generatrices de cualquier tipo. El cilindro de nuestro primer ejemplo es generado por una parábola.

EJEMPLO 1 Obtenga una ecuación para el cilindro formado por las rectas paralelas al eje z que pasan por la parábola $y = x^2, z = 0$ (figura 12.44).

Solución El punto $P_0(x_0, x_0^2, 0)$ está en la parábola $y = x^2$ en el plano xy . Entonces, para cualquier valor de z , el punto $Q_0(x_0, x_0^2, z)$ estará en el cilindro porque se encuentra en la recta $x = x_0, y = x_0^2$ que pasa por P_0 paralela al eje z . Recíprocamente, cualquier punto $Q(x_0, x_0^2, z)$ cuya coordenada y sea el cuadrado de su coordenada x , está sobre el cilindro, ya que se encuentra sobre la recta $x = x_0, y = x_0^2$ que pasa por P_0 paralela al eje z (figura 12.44).

Sin importar el valor de z , los puntos sobre la superficie son aquellos cuyas coordenadas satisfacen la ecuación $y = x^2$. Esto hace de $y = x^2$ una ecuación para el cilindro. Debido a esto, llamamos al cilindro “el cilindro $y = x^2$ ”.

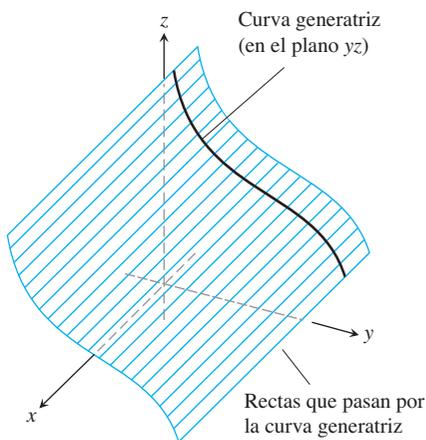


FIGURA 12.43 Cilindro y curva generatriz.

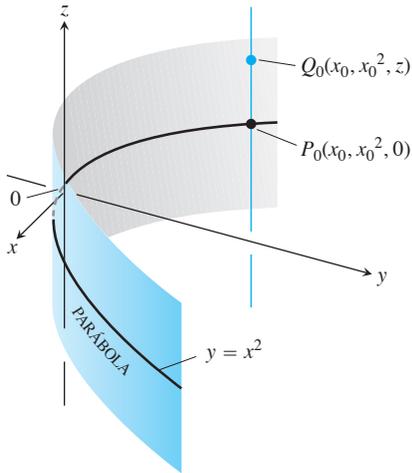


FIGURA 12.44 Todos los puntos del cilindro del ejemplo 1 tienen coordenadas de la forma (x_0, x_0^2, z) . Le llamamos “el cilindro $y = x^2$ ”.

Como sugiere el ejemplo 1, cualquier curva $f(x, y) = c$ en el plano xy define un cilindro paralelo al eje z , cuya ecuación también es $f(x, y) = c$. Por ejemplo, la ecuación $x^2 + y^2 = 1$ define el cilindro circular formado por las rectas paralelas al eje z que pasan por la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ en el plano xy .

De un modo similar, cualquier curva $g(x, z) = c$ en el plano xz define un cilindro paralelo al eje y cuya ecuación espacial también es $g(x, z) = c$. Cualquier curva $h(y, z) = c$ define un cilindro paralelo al eje x cuya ecuación espacial también es $h(y, z) = c$. Sin embargo, el eje de un cilindro no necesita ser paralelo a un eje coordenado.

Superficies cuádricas

Una **superficie cuádrica** es la gráfica en el espacio de una ecuación de segundo grado en x, y y z . Nos enfocaremos en la ecuación general

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dz = E,$$

donde A, B, C, D y E son constantes. Las superficies cuádricas básicas son los **elipsoides**, los **paraboloides**, los **conos elípticos** y los **hiperboloides**. Las esferas son casos especiales de los elipsoides. Daremos unos cuantos ejemplos para ilustrar cómo dibujar una superficie cuádrica y luego presentamos una tabla de gráficas en la que se resumen los tipos básicos.

EJEMPLO 2 El elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

(figura 12.45) corta los ejes coordenados en $(\pm a, 0, 0)$, $(0, \pm b, 0)$ y $(0, 0, \pm c)$. Se encuentra dentro de la caja rectangular definida por las desigualdades $|x| \leq a, |y| \leq b, |z| \leq c$. La superficie es simétrica con respecto a cada uno de los planos coordenados porque en la ecuación que la define, cada variable está elevada al cuadrado.

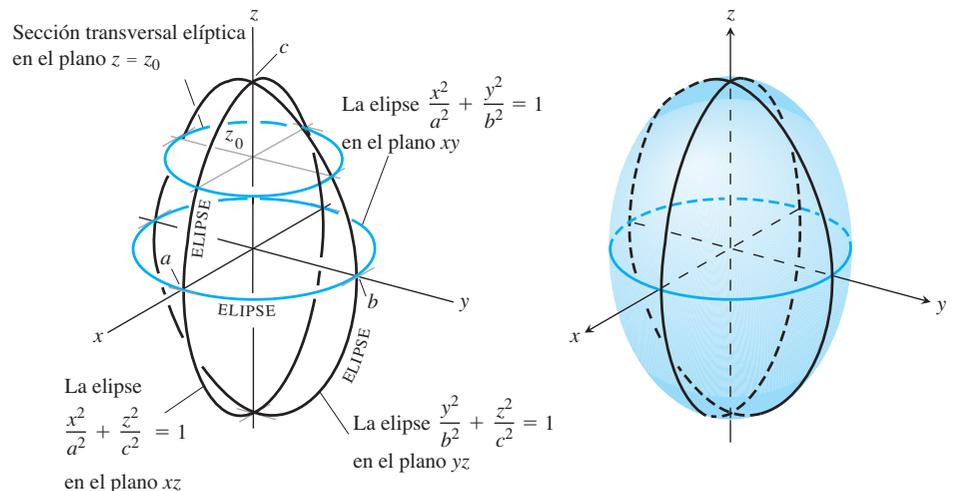


FIGURA 12.45 El elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

del ejemplo 2 tiene secciones transversales elípticas en cada uno de los tres planos coordenados.

Las curvas donde los tres planos coordenados cortan a la superficie son elipses. Por ejemplo,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{cuando} \quad z = 0.$$

La curva cortada a la superficie por el plano $z = z_0, |z_0| < c$, es la elipse

$$\frac{x^2}{a^2(1 - (z_0/c)^2)} + \frac{y^2}{b^2(1 - (z_0/c)^2)} = 1.$$

Si cualesquiera dos de los semiejes a, b y c son iguales entre sí, la superficie es un **elipsoide de revolución**. Si los tres semiejes son iguales, la superficie es una esfera. ■

EJEMPLO 3 El paraboloides hiperbólico

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{z}{c}, \quad c > 0$$

tiene simetría con respecto a los planos $x = 0$ y $y = 0$ (figura 12.46). Las secciones transversales en estos planos son

$$x = 0: \text{ la parábola } z = \frac{c}{b^2}y^2. \tag{1}$$

$$y = 0: \text{ la parábola } z = -\frac{c}{a^2}x^2. \tag{2}$$

En el plano $x = 0$, la parábola se abre hacia arriba a partir del origen. La parábola en el plano $y = 0$ se abre hacia abajo.

Si cortamos a la superficie con un plano $z = z_0 > 0$, la sección transversal es una hipérbola,

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{z_0}{c},$$

con su eje focal paralelo al eje y y sus vértices sobre la parábola de la ecuación (1). Si z_0 es negativo, el eje focal es paralelo al eje x y los vértices están sobre la parábola de la ecuación (2).

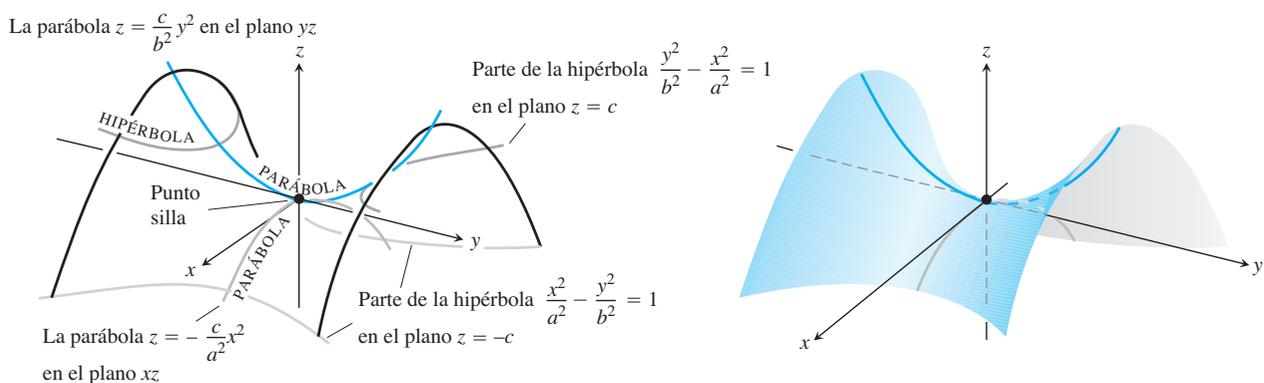
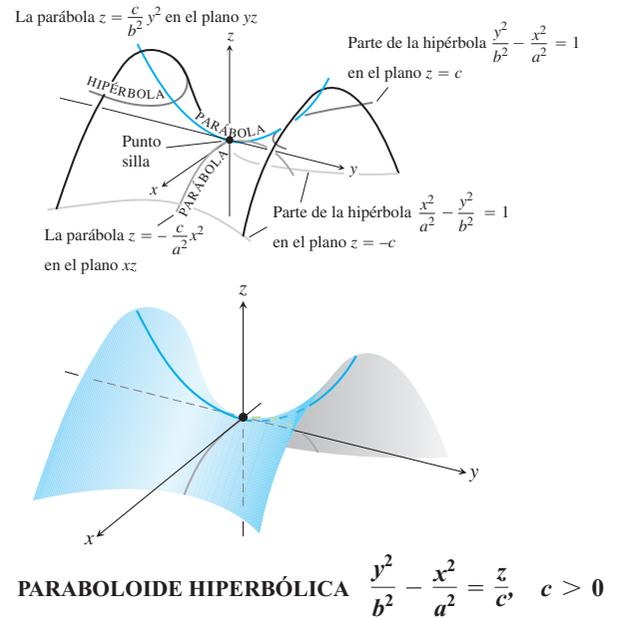
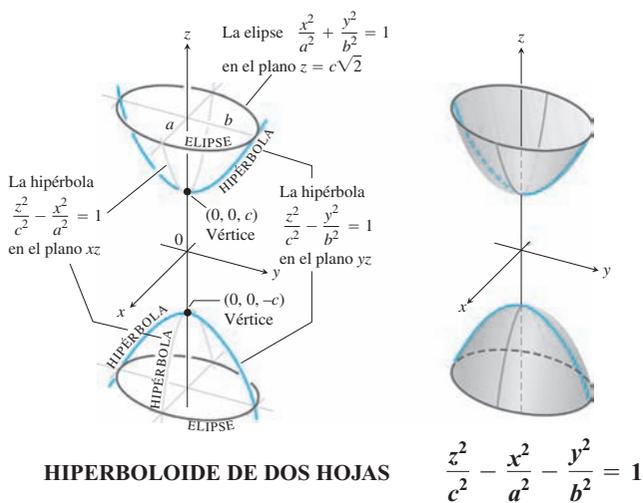
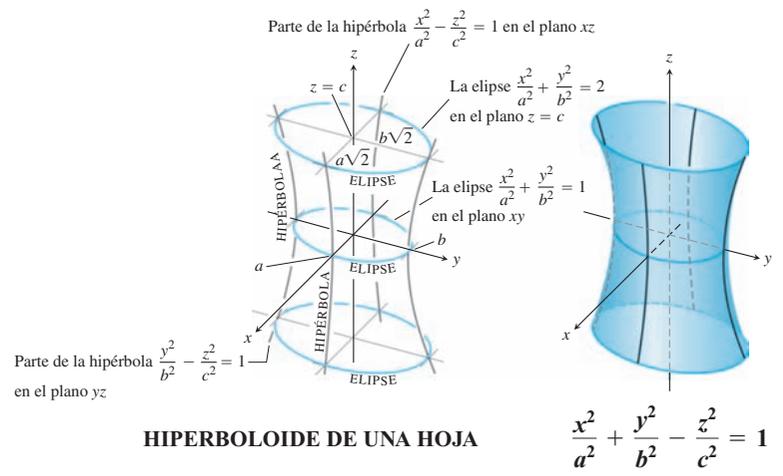
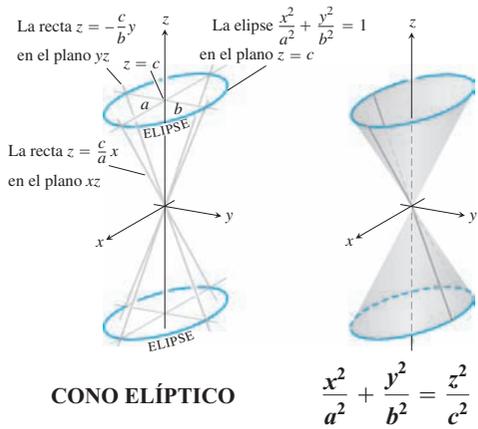
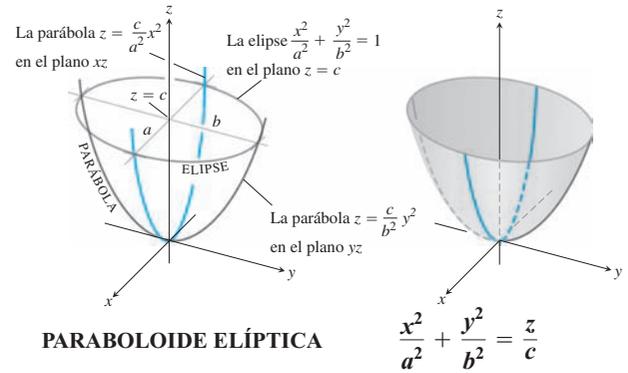
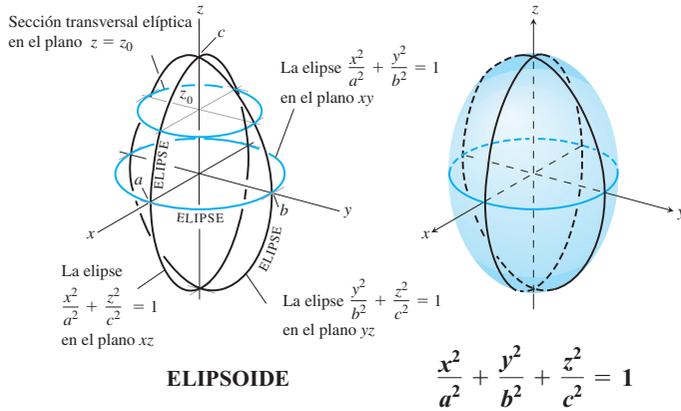


FIGURA 12.46 El paraboloides hiperbólico $(y^2/b^2) - (x^2/a^2) = z/c, c > 0$. Las secciones transversales por planos perpendiculares al eje z por arriba y por abajo del plano xy son hipérbolas. Las secciones transversales por planos perpendiculares a los otros ejes son parábolas.

Cerca del origen, la superficie tiene la forma de una silla de montar o de un paso de montaña. Para una persona que viaja lo largo de la superficie en el plano yz , el origen le parece un mínimo, pero para alguien que viaja en el plano xz , el origen parece un máximo. Este tipo de punto se llama **punto silla** (o punto de silla) de una superficie. Diremos más acerca de puntos silla en la sección 14.7. ■

La tabla 12.1 muestra las gráficas de los seis tipos básicos de superficies cuádricas. Cada superficie mostrada es simétrica con respecto al eje z , pero otros ejes coordenados pueden servir también (con los cambios apropiados en la ecuación).

TABLA 12.1 Gráficas de superficies cuádricas

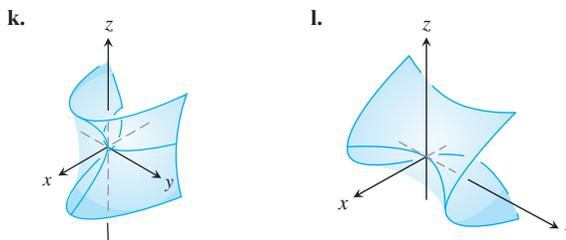
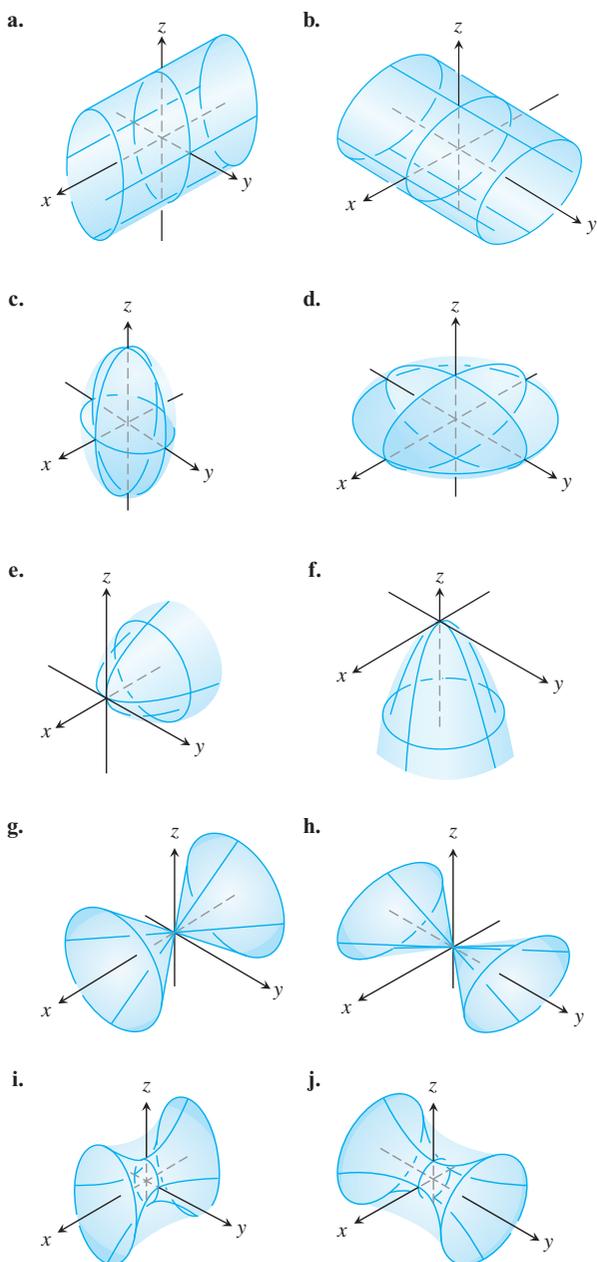


Ejercicios 12.6

Formar pares de ecuaciones y superficies

En los ejercicios 1 a 12, forme un par con cada ecuación y la superficie que ésta define. También identifique cada superficie por su tipo (paraboloide, elipsoide, etcétera). Las superficies están listadas de la “a” a la “l”.

- | | |
|----------------------------|-------------------------------|
| 1. $x^2 + y^2 + 4z^2 = 10$ | 2. $z^2 + 4y^2 - 4x^2 = 4$ |
| 3. $9y^2 + z^2 = 16$ | 4. $y^2 + z^2 = x^2$ |
| 5. $x = y^2 - z^2$ | 6. $x = -y^2 - z^2$ |
| 7. $x^2 + 2z^2 = 8$ | 8. $z^2 + x^2 - y^2 = 1$ |
| 9. $x = z^2 - y^2$ | 10. $z = -4x^2 - y^2$ |
| 11. $x^2 + 4z^2 = y^2$ | 12. $9x^2 + 4y^2 + 2z^2 = 36$ |



Trazado de superficies

Trace las superficies de los ejercicios 13 a 44.

CILINDROS

- | | |
|-----------------------|-----------------------|
| 13. $x^2 + y^2 = 4$ | 14. $z = y^2 - 1$ |
| 15. $x^2 + 4z^2 = 16$ | 16. $4x^2 + y^2 = 36$ |

ELIPSOIDES

- | | |
|-------------------------------|--------------------------------|
| 17. $9x^2 + y^2 + z^2 = 9$ | 18. $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 16$ |
| 19. $4x^2 + 9y^2 + 4z^2 = 36$ | 20. $9x^2 + 4y^2 + 36z^2 = 36$ |

PARABOLOIDES Y CONOS

- | | |
|--------------------------|--------------------------|
| 21. $z = x^2 + 4y^2$ | 22. $z = 8 - x^2 - y^2$ |
| 23. $x = 4 - 4y^2 - z^2$ | 24. $y = 1 - x^2 - z^2$ |
| 25. $x^2 + y^2 = z^2$ | 26. $4x^2 + 9z^2 = 9y^2$ |

HIPERBOLOIDES

- | | |
|---------------------------|-----------------------------------|
| 27. $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ | 28. $y^2 + z^2 - x^2 = 1$ |
| 29. $z^2 - x^2 - y^2 = 1$ | 30. $(y^2/4) - (x^2/4) - z^2 = 1$ |

PARABOLOIDES HIPERBÓLICOS

- | | |
|---------------------|---------------------|
| 31. $y^2 - x^2 = z$ | 32. $x^2 - y^2 = z$ |
|---------------------|---------------------|

DIVERSAS

- | | |
|-----------------------------|---------------------------|
| 33. $z = 1 + y^2 - x^2$ | 34. $4x^2 + 4y^2 = z^2$ |
| 35. $y = -(x^2 + z^2)$ | 36. $16x^2 + 4y^2 = 1$ |
| 37. $x^2 + y^2 - z^2 = 4$ | 38. $x^2 + z^2 = y$ |
| 39. $x^2 + z^2 = 1$ | 40. $16y^2 + 9z^2 = 4x^2$ |
| 41. $z = -(x^2 + y^2)$ | 42. $y^2 - x^2 - z^2 = 1$ |
| 43. $4y^2 + z^2 - 4x^2 = 4$ | 44. $x^2 + y^2 = z$ |

Teoría y ejemplos

45. a. Expresé el área A de la sección transversal del elipsoide

$$x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$$

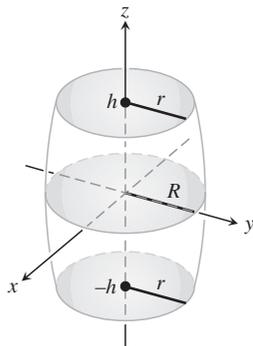
determinada por el plano $z = c$ como una función de c . (El área de una elipse con semiejes a y b es πab).

- b. Use cortes perpendiculares al eje z para obtener el volumen del elipsoide del inciso (a).
 c. Ahora obtenga el volumen del elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

¿Su fórmula proporciona el volumen de una esfera de radio a si $a = b = c$?

46. El barril que se ilustra en la figura tiene la forma de un elipsoide de cuyos extremos se cortan partes iguales por planos perpendiculares al eje z . Las secciones transversales perpendiculares al eje z son circulares. El barril tiene $2h$ unidades de altura, el radio de la sección media es R , y el radio de sus dos extremos es r . Obtenga una fórmula para el volumen del barril. Luego verifique dos cosas. Primero, suponga que los lados del barril se estiran hasta convertirlo en un cilindro de radio R y altura $2h$. ¿Proporciona su fórmula el volumen del cilindro? Segundo, suponga que $r = 0$ y $h = R$, entonces el barril es una esfera. ¿Proporciona su fórmula el volumen de la esfera?



47. Demuestre que el volumen del segmento cortado de un paraboloide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

por el plano $z = h$ es igual a la mitad de la base del sólido por la altura.

48. a. Obtenga el volumen del sólido limitado por la hiperboloide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

y los planos $z = 0$ y $z = h$, $h > 0$.

- b. Exprese la respuesta del inciso (a) en términos de h y las áreas A_0 y A_h de las regiones determinadas en el hiperboloide por los planos $z = 0$ y $z = h$.
- c. Demuestre que el volumen del inciso (a) también se obtiene mediante la fórmula

$$V = \frac{h}{6}(A_0 + 4A_m + A_h),$$

donde A_m es el área de la región determinada en el hiperboloide por el plano $z = h/2$.

Visualización de superficies

T Grafique las superficies de los ejercicios 49 a 52 en los dominios indicados. Si puede, gire la superficie para obtener varias perspectivas.

49. $z = y^2$, $-2 \leq x \leq 2$, $-0.5 \leq y \leq 2$
50. $z = 1 - y^2$, $-2 \leq x \leq 2$, $-2 \leq y \leq 2$
51. $z = x^2 + y^2$, $-3 \leq x \leq 3$, $-3 \leq y \leq 3$
52. $z = x^2 + 2y^2$ sobre
- $-3 \leq x \leq 3$, $-3 \leq y \leq 3$
 - $-1 \leq x \leq 1$, $-2 \leq y \leq 3$
 - $-2 \leq x \leq 2$, $-2 \leq y \leq 2$
 - $-2 \leq x \leq 2$, $-1 \leq y \leq 1$

EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

Use un sistema algebraico computacional (SAC) para trazar las superficies de los ejercicios 53 a 58. Identifique el tipo de superficie cuádrica mediante la gráfica.

53. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{36} = 1 - \frac{z^2}{25}$
54. $\frac{x^2}{9} - \frac{z^2}{9} = 1 - \frac{y^2}{16}$
55. $5x^2 = z^2 - 3y^2$
56. $\frac{y^2}{16} = 1 - \frac{x^2}{9} + z$
57. $\frac{x^2}{9} - 1 = \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{2}$
58. $y - \sqrt{4 - z^2} = 0$

Capítulo 12 Preguntas de repaso

- ¿Cuándo representan los segmentos de recta dirigidos en el plano al mismo vector?
- ¿Cómo se suman y restan geoméricamente los vectores? ¿Algebraicamente?
- ¿Cómo se obtienen la magnitud y la dirección de un vector?
- Si un vector se multiplica por un escalar positivo, ¿cómo es la relación del resultado con el vector original? ¿Qué pasa si el escalar es cero? ¿Y si es negativo?
- Defina el *producto punto* (*producto escalar*) de dos vectores. ¿Cuáles leyes algebraicas satisface el producto punto? Dé ejemplos. ¿Cuándo es el producto de dos vectores igual a cero?
- ¿Cuál es la interpretación geométrica del producto punto? Dé ejemplos.
- ¿Cuál es el vector proyección de un vector \mathbf{u} sobre un vector \mathbf{v} ? Dé un ejemplo de una aplicación útil del vector proyección.
- Defina el *producto cruz* (*producto vectorial*) de dos vectores. ¿Cuáles leyes algebraicas satisface el producto cruz y cuáles no? Dé ejemplos. ¿Cuándo el producto cruz de dos vectores es igual a cero?
- ¿Qué interpretaciones geométricas o físicas tiene el producto cruz? Dé ejemplos.
- ¿Cuál es la fórmula del determinante para calcular el producto cruz de dos vectores en relación con el sistema coordenado cartesiano \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} ? Utilícela en un ejemplo.
- ¿Cómo obtiene las ecuaciones para rectas, segmentos de recta y planos en el espacio? Dé ejemplos. ¿Puede expresar una recta en el espacio con una ecuación particular? ¿Y un plano?
- ¿Cómo se obtiene la distancia de un punto a una recta en el espacio? ¿Y de un punto a un plano? Dé ejemplos.
- ¿Qué son los productos caja? ¿Qué significado tienen? ¿Cómo se calculan? Dé un ejemplo.
- ¿Cómo se determina la ecuación de una esfera en el espacio? Dé ejemplos.
- ¿Cómo obtiene la intersección de dos rectas en el espacio? ¿De una recta y un plano? ¿De dos planos? Dé ejemplos.
- ¿Qué es un cilindro? Dé ejemplos de ecuaciones que definan cilindros en coordenadas cartesianas.
- ¿Qué son las superficies cuádricas? Dé ejemplos de diferentes clases de elipsoides, paraboloides, conos e hiperboloides (ecuaciones y gráficas).

Capítulo 12 Ejercicios de práctica

Cálculos con vectores en dos dimensiones

En los ejercicios 1 a 4, sean $\mathbf{u} = (-3, 4)$ y $\mathbf{v} = (2, -5)$. Obtenga (a) la expresión cartesiana del vector y (b) su magnitud.

- $3\mathbf{u} - 4\mathbf{v}$
- $\mathbf{u} + \mathbf{v}$
- $-2\mathbf{u}$
- $5\mathbf{v}$

En los ejercicios 5 a 8, obtenga la expresión cartesiana del vector.

- El vector que se obtiene al girar $(0, 1)$ un ángulo de $2\pi/3$ radianes.
- El vector unitario que forma un ángulo de $\pi/6$ radianes con el eje x positivo.
- El vector de 2 unidades de longitud en la dirección $4\mathbf{i} - \mathbf{j}$
- El vector de 5 unidades de longitud en dirección opuesta a la dirección de $(3/5)\mathbf{i} + (4/5)\mathbf{j}$

Expresé los vectores de los ejercicios 9 a 12 en términos de sus longitudes y direcciones.

- $\sqrt{2}\mathbf{i} + \sqrt{2}\mathbf{j}$
- $-\mathbf{i} - \mathbf{j}$
- Vector velocidad $\mathbf{v} = (-2 \sin t)\mathbf{i} + (2 \cos t)\mathbf{j}$ cuando $t = \pi/2$.
- Vector velocidad $\mathbf{v} = (e^t \cos t - e^t \sin t)\mathbf{i} + (e^t \sin t + e^t \cos t)\mathbf{j}$ cuando $t = \ln 2$.

Cálculo con vectores en tres dimensiones

Expresé los vectores de los ejercicios 13 y 14 en términos de sus longitudes y direcciones.

- $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$
- $\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$
- Obtenga un vector de 2 unidades de longitud en la dirección de $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.
- Obtenga el vector de 5 unidades de longitud en dirección opuesta a la dirección de $\mathbf{v} = (3/5)\mathbf{i} + (4/5)\mathbf{k}$.

En los ejercicios 17 y 18, obtenga $|\mathbf{v}|$, $|\mathbf{u}|$, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$, $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, $|\mathbf{v} \times \mathbf{u}|$, el ángulo entre \mathbf{v} y \mathbf{u} , el componente escalar de \mathbf{u} en la dirección de \mathbf{v} y el vector proyección de \mathbf{u} sobre \mathbf{v} .

- $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$
 $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$
- $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$
 $\mathbf{u} = -\mathbf{i} - \mathbf{k}$

En los ejercicios 19 y 20, obtenga $\text{proy}_{\mathbf{v}} \mathbf{u}$.

- $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$
 $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 5\mathbf{k}$
- $\mathbf{u} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$
 $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

En los ejercicios 21 y 22, dibuje los ejes coordenados y luego grafique \mathbf{u} , \mathbf{v} y $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ como vectores en el origen.

- $\mathbf{u} = \mathbf{i}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$
- $\mathbf{u} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$
- Si $|\mathbf{v}| = 2$, $|\mathbf{w}| = 3$, y el ángulo entre \mathbf{v} y \mathbf{w} es $\pi/3$, obtenga $|\mathbf{v} - 2\mathbf{w}|$.
- ¿Para cuál valor o valores de a serán paralelos los vectores $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = -4\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + a\mathbf{k}$?

En los ejercicios 25 y 26, obtenga (a) el área del paralelogramo determinado por los vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} , y (b) el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores \mathbf{u} , \mathbf{v} y \mathbf{w} .

- $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{w} = -\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$
- $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{v} = \mathbf{j}$, $\mathbf{w} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

Rectas, planos y distancias

- Suponga que \mathbf{n} es normal a un plano y que \mathbf{v} es paralelo al mismo plano. Describa cómo encontraría un vector \mathbf{n} que sea a la vez perpendicular a \mathbf{v} y paralelo al plano.
- Determine un vector en el plano, paralelo a la recta $ax + by = c$.

En los ejercicios 29 y 30, calcule la distancia del punto a la recta.

- $(2, 2, 0)$; $x = -t$, $y = t$, $z = -1 + t$
- $(0, 4, 1)$; $x = 2 + t$, $y = 2 + t$, $z = t$
- Parametrice la recta que pasa por el punto $(1, 2, 3)$ y que es paralela al vector $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 7\mathbf{k}$.
- Parametrice el segmento de recta que une a los puntos $P(1, 2, 0)$ y $Q(1, 3, -1)$.

En los ejercicios 33 y 34, obtenga la distancia del punto al plano.

- $(6, 0, -6)$, $x - y = 4$
- $(3, 0, 10)$, $2x + 3y + z = 2$
- Determine una ecuación del plano que pasa por el punto $(3, -2, 1)$ normal al vector $\mathbf{n} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$.
- Obtenga una ecuación del plano que pasa por el punto $(-1, 6, 0)$ y es perpendicular a la recta $x = -1 + t$, $y = 6 - 2t$, $z = 3t$.

En los ejercicios 37 y 38, encuentre una ecuación para el plano que pasa por los puntos P , Q y R .

- $P(1, -1, 2)$, $Q(2, 1, 3)$, $R(-1, 2, -1)$
- $P(1, 0, 0)$, $Q(0, 1, 0)$, $R(0, 0, 1)$
- Obtenga los puntos donde la recta $x = 1 + 2t$, $y = -1 - t$, $z = 3t$ corta a los tres planos coordenados.
- Encuentre el punto en el cual la recta que pasa por el origen y es perpendicular al plano $2x - y - z = 4$ corta al plano $3x - 5y + 2z = 6$.
- Calcule el ángulo agudo entre los planos $x = 7$ y $x + y + \sqrt{2}z = -3$.
- Obtenga el ángulo agudo entre los planos $x + y = 1$ y $y + z = 1$.
- Determine las ecuaciones paramétricas de la recta de intersección de los planos $x + 2y + z = 1$ y $x - y + 2z = -8$.
- Demuestre que la recta de intersección de los planos

$$x + 2y - 2z = 5 \quad \text{y} \quad 5x - 2y - z = 0$$

es paralela a la recta

$$x = -3 + 2t, \quad y = 3t, \quad z = 1 + 4t.$$

45. Los planos $3x + 6z = 1$ y $2x + 2y - z = 3$ se cortan en una recta.
 - a. Demuestre que los planos son ortogonales.
 - b. Determine las ecuaciones de la recta de intersección de los planos.
46. Obtenga una ecuación del plano que pasa por el punto $(1, 2, 3)$ y que es paralelo a $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.
47. ¿Está relacionado $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$ de algún modo con el plano $2x + y = 5$? Dé las razones de su respuesta.
48. La ecuación $\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$ representa al plano que pasa por P_0 y que es perpendicular a \mathbf{n} . ¿Qué conjunto de puntos en el espacio representa a la desigualdad $\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} > 0$?
49. Calcule la distancia del punto $P(1, 4, 0)$ al plano que pasa por $A(0, 0, 0)$, $B(2, 0, -1)$ y $C(2, -1, 0)$.
50. Calcule la distancia del punto $P(2, 2, 3)$ al plano $2x + 3y + 5z = 0$.
51. Obtenga el vector paralelo al plano $2x - y - z = 4$ y ortogonal a $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$.
52. Obtenga un vector unitario ortogonal a \mathbf{A} en el plano de \mathbf{B} y \mathbf{C} si $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{B} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{C} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.
53. Encuentre un vector de magnitud 2 paralelo a la recta de intersección de los planos $x + 2y + z - 1 = 0$ y $x - y + 2z + 7 = 0$.
54. Obtenga el punto en donde la recta que pasa por el origen y que es perpendicular al plano $2x - y - z = 4$ corta al plano $3x - 5y + 2z = 6$.
55. Encuentre el punto donde la recta que pasa por $P(3, 2, 1)$ y que es normal al plano $2x - y + 2z = -2$ corta al mismo.
56. ¿Qué ángulo forma la recta de intersección de los planos $2x + y - z = 0$ y $x + y + 2z = 0$ con el eje x positivo?
57. La recta

$$L: x = 3 + 2t, \quad y = 2t, \quad z = t$$

corta al plano $x + 3y - z = -4$ en un punto P . Encuentre las coordenadas de P y obtenga las ecuaciones de la recta en el plano que pasa por P y es perpendicular a L .

58. Demuestre que para cualquier número real k , el plano

$$x - 2y + z + 3 + k(2x - y - z + 1) = 0$$

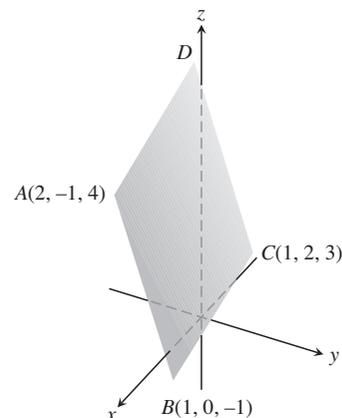
contiene a la recta de intersección de los planos

$$x - 2y + z + 3 = 0 \quad \text{y} \quad 2x - y - z + 1 = 0.$$

59. Determine una ecuación para el plano que pasa por $A(-2, 0, -3)$ y $B(1, -2, 1)$ y que es paralelo a la recta que pasa por $C(-2, -13/5, 26/5)$ y $D(16/5, -13/5, 0)$.
60. La recta $x = 1 + 2t$, $y = -2 + 3t$, $z = -5t$ ¿tiene alguna relación con el plano $-4x - 6y + 10z = 9$? Justifique su respuesta.
61. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones describe al plano que pasa por los puntos $P(1, 1, -1)$, $Q(3, 0, 2)$ y $R(-2, 1, 0)$?

- a. $(2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) \cdot ((x + 2)\mathbf{i} + (y - 1)\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = 0$
- b. $x = 3 - t, \quad y = -11t, \quad z = 2 - 3t$
- c. $(x + 2) + 11(y - 1) = 3z$
- d. $(2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) \times ((x + 2)\mathbf{i} + (y - 1)\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = 0$
- e. $(2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}) \times (-3\mathbf{i} + \mathbf{k}) \cdot ((x + 2)\mathbf{i} + (y - 1)\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = 0$

62. El paralelogramo que se muestra en la figura tiene vértices en $A(2, -1, 4)$, $B(1, 0, -1)$, $C(1, 2, 3)$, y D . Encuentre



- a. las coordenadas de D ,
 - b. el coseno del ángulo interno en B ,
 - c. el vector proyección de \overrightarrow{BA} sobre \overrightarrow{BC} ,
 - d. el área del paralelogramo,
 - e. una ecuación para el plano del paralelogramo,
 - f. las áreas de las proyecciones ortogonales del paralelogramo sobre los tres planos coordenados.
63. **Distancia entre rectas** Encuentre la distancia entre la recta L_1 que pasa por los puntos $A(1, 0, -1)$ y $B(-1, 1, 0)$ y la recta L_2 que pasa por los puntos $C(3, 1, -1)$ y $D(4, 5, -2)$. La distancia se mide a lo largo de una recta perpendicular a las dos rectas. Primero obtenga un vector \mathbf{n} perpendicular a ambas rectas. Luego proyecte \overrightarrow{AC} sobre \mathbf{n} .
 64. (Continuación del ejercicio 63.) Encuentre la distancia entre la recta que pasa por los puntos $A(4, 0, 2)$ y $B(2, 4, 1)$ y la recta que pasa por los puntos $C(1, 3, 2)$ y $D(2, 2, 4)$.

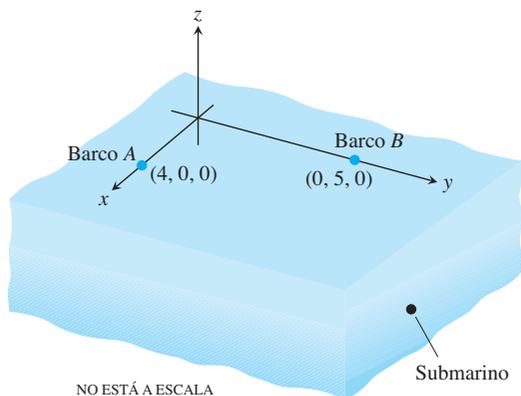
Superficies cuádricas

Identifique y grafique las superficies de los ejercicios 65 a 76.

- | | |
|-----------------------------|---------------------------------|
| 65. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ | 66. $x^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 1$ |
| 67. $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 4$ | 68. $36x^2 + 9y^2 + 4z^2 = 36$ |
| 69. $z = -(x^2 + y^2)$ | 70. $y = -(x^2 + z^2)$ |
| 71. $x^2 + y^2 = z^2$ | 72. $x^2 + z^2 = y^2$ |
| 73. $x^2 + y^2 - z^2 = 4$ | 74. $4y^2 + z^2 - 4x^2 = 4$ |
| 75. $y^2 - x^2 - z^2 = 1$ | 76. $z^2 - x^2 - y^2 = 1$ |

Capítulo 12 Ejercicios adicionales y avanzados

- 1. Caza de submarinos** Dos barcos maniobran en la superficie tratando de determinar el curso y la rapidez de un submarino para preparar un ataque aéreo. Como se observa en la figura, el barco A está en $(4, 0, 0)$, mientras que el barco B está en $(0, 5, 0)$. Todas las coordenadas están dadas en miles de ft. El barco A localiza el submarino en la dirección del vector $2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - (1/3)\mathbf{k}$, y el barco B , en la dirección $18\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - \mathbf{k}$. Cuatro minutos antes, el submarino estaba localizado en $(2, -1, -1/3)$. Se espera que el avión para el ataque aéreo llegue en 20 minutos. Si el submarino se desplaza en línea recta a velocidad constante, ¿a qué posición deben dirigir los barcos al avión?



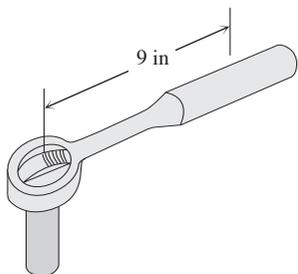
- 2. Rescate de un helicóptero** Dos helicópteros, H_1 y H_2 , viajan juntos. En el instante $t = 0$, se separan y siguen diferentes trayectorias rectas dadas por

$$H_1: x = 6 + 40t, \quad y = -3 + 10t, \quad z = -3 + 2t$$

$$H_2: x = 6 + 110t, \quad y = -3 + 4t, \quad z = -3 + t.$$

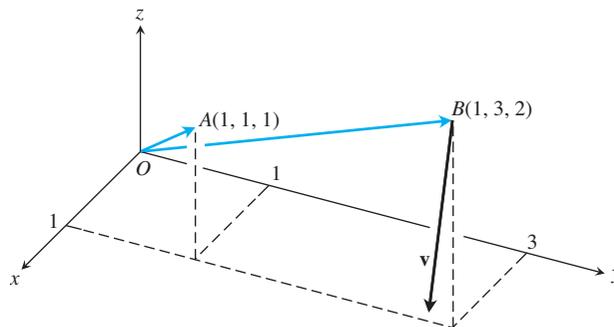
El tiempo t se mide en horas y todas las coordenadas se miden en millas. Debido a fallas mecánicas, el helicóptero H_2 detiene su vuelo en $(446, 13, 1)$ y, en un tiempo despreciable, aterriza en $(446, 13, 0)$. Dos horas después, H_1 es notificado de esto y se encamina hacia H_2 a 150 mph. ¿Cuánto tiempo le tomará a H_1 llegar a la posición de H_2 ?

- 3. Torque** El manual del usuario de la podadora Toro® de 21 in dice: “Apriete la bujía a 15 libras-ft (20.4 N-m)”. Si usted está instalando la bujía con una llave que tiene un brazo de 10.5 in y coloca el centro de su mano a 9 in del eje de la bujía, ¿con qué fuerza debe halar? Dé la respuesta en libras.

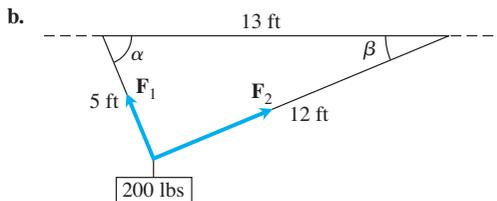
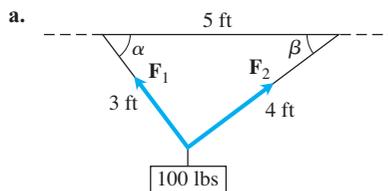


- 4. Cuerpo en rotación** La recta que pasa por el origen y el punto $A(1, 1, 1)$ es el eje de rotación de un cuerpo recto que gira con una rapidez angular constante de $3/2$ rad/seg. La rotación es en el sentido de las

manecillas del reloj cuando miramos al origen desde A . Obtenga la velocidad \mathbf{v} del punto del cuerpo que está en la posición $B(1, 3, 2)$.

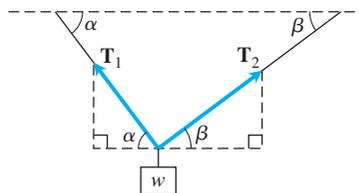


- 5.** En cada diagrama considere un peso suspendido por dos alambres. Obtenga la magnitud y componentes de los vectores \mathbf{F}_1 y \mathbf{F}_2 , y los ángulos α y β .



(Sugerencia: Considere que este triángulo es un triángulo rectángulo).

- 6.** Considere un peso de w N suspendido por dos alambres como en el diagrama, donde \mathbf{T}_1 y \mathbf{T}_2 son vectores de fuerzas dirigidos a lo largo de los alambres.



- a. Obtenga los vectores \mathbf{T}_1 y \mathbf{T}_2 y demuestre que sus magnitudes son

$$|\mathbf{T}_1| = \frac{w \cos \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$$

y

$$|\mathbf{T}_2| = \frac{w \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$$

- b. Para β fijo, determine el valor de α que minimiza la magnitud de $|\mathbf{T}_1|$.
- c. Para α fijo, determine el valor de β que minimiza la magnitud de $|\mathbf{T}_2|$.

7. Determinantes y planos

a. Demuestre que

$$\begin{vmatrix} x_1 - x & y_1 - y & z_1 - z \\ x_2 - x & y_2 - y & z_2 - z \\ x_3 - x & y_3 - y & z_3 - z \end{vmatrix} = 0$$

es una ecuación del plano que pasa por los tres puntos no colineales $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$, y $P_3(x_3, y_3, z_3)$.

b. ¿Qué conjunto de puntos en el espacio describe esta ecuación?

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0?$$

8. Determinantes y rectas Demuestre que las rectas

$$x = a_1s + b_1, \quad y = a_2s + b_2, \quad z = a_3s + b_3, \quad -\infty < s < \infty$$

y

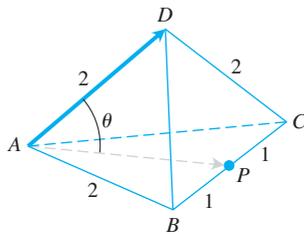
$$x = c_1t + d_1, \quad y = c_2t + d_2, \quad z = c_3t + d_3, \quad -\infty < t < \infty,$$

se cortan o son paralelas si y sólo si

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 - d_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 - d_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 - d_3 \end{vmatrix} = 0.$$

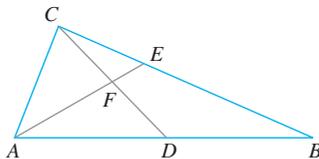
9. Considere un tetraedro regular con lado de longitud igual a 2.

a. Use vectores para encontrar el ángulo θ determinado por la base del tetraedro y cualquiera de sus otras aristas.



b. Use vectores para encontrar el ángulo θ determinado por dos caras adyacentes cualesquiera del tetraedro. Este ángulo comúnmente se conoce como un ángulo diedro.

10. En la figura que se muestra, D es el punto medio del lado AB del triángulo ABC , y E es un tercio de la distancia entre C y B . Use vectores para probar que F es el punto medio del segmento de recta CD .



11. Use vectores para demostrar que la distancia de $P_1(x_1, y_1)$ a la recta $ax + by = c$ es

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

12. a. Use vectores para demostrar que la distancia de $P_1(x_1, y_1, z_1)$ al plano $Ax + By + Cz = D$ es

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 - D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

b. Obtenga una ecuación para la esfera que es tangente a los planos $x + y + z = 3$ y $x + y + z = 9$, si los planos $2x - y = 0$ y $3x - z = 0$ pasan por el centro de la esfera.

13. a. Demuestre que la distancia entre los planos paralelos $Ax + By + Cz = D_1$ y $Ax + By + Cz = D_2$ es

$$d = \frac{|D_1 - D_2|}{|A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}|}.$$

b. Obtenga la distancia entre los planos $2x + 3y - z = 6$ y $2x + 3y - z = 12$.

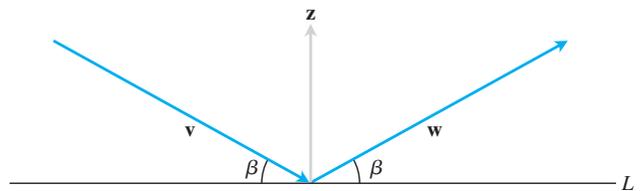
c. Determine una ecuación para el plano paralelo al plano $2x - y + 2z = -4$ si el punto $(3, 2, -1)$ es equidistante de ambos planos.

d. Escriba ecuaciones para los planos que son paralelos y están a 5 unidades del plano $x - 2y + z = 3$.

14. Pruebe que los cuatro puntos A, B, C y D son coplanares (se encuentran en un mismo plano) si y sólo si $\overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}) = 0$.

15. La proyección de un vector sobre un plano Sean P un plano en el espacio y \mathbf{v} un vector. El vector proyección de \mathbf{v} sobre el plano P , $\text{proy}_P \mathbf{v}$, se puede visualizar como sigue. Suponga que los rayos del sol son normales al plano P . Entonces, $\text{proy}_P \mathbf{v}$ es la "sombra" de \mathbf{v} sobre P . Si P es el plano $x + 2y + 6z = 6$ y $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, obtenga $\text{proy}_P \mathbf{v}$.

16. La figura muestra los vectores no nulos \mathbf{v}, \mathbf{w} y \mathbf{z} , con \mathbf{z} ortogonal a la recta L , mientras que \mathbf{v} y \mathbf{w} forman ángulos iguales β con L . Suponiendo que $|\mathbf{v}| = |\mathbf{w}|$, calcule \mathbf{w} en términos de \mathbf{v} y \mathbf{z} .



17. Triple producto vectorial Por lo general, los triples productos vectoriales $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$ y $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ no son iguales, aunque las fórmulas para calcularlos a partir de sus componentes sean similares:

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{u}.$$

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}.$$

Verifique cada fórmula para los siguientes vectores evaluando ambos lados de la igualdad y comparando los resultados.

| \mathbf{u} | \mathbf{v} | \mathbf{w} |
|--|--|---|
| a. $2\mathbf{i}$ | $2\mathbf{j}$ | $2\mathbf{k}$ |
| b. $\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ | $2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ | $-\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ |
| c. $2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ | $2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ | $\mathbf{i} + 2\mathbf{k}$ |
| d. $\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ | $-\mathbf{i} - \mathbf{k}$ | $2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ |

18. Productos cruz y punto Demuestre que si \mathbf{u} , \mathbf{v} , \mathbf{w} y \mathbf{r} son vectores cualesquiera, entonces

a. $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) + \mathbf{v} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) + \mathbf{w} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{0}$

b. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{j})\mathbf{j} + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{k})\mathbf{k}$

c. $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{r}) = \begin{vmatrix} \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} & \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{r} & \mathbf{v} \cdot \mathbf{r} \end{vmatrix}$.

19. Productos cruz y punto Determine si la siguiente fórmula es correcta o incorrecta:

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{u} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v})) \cdot \mathbf{w} = -|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w}.$$

20. Forme el producto cruz de dos vectores adecuados y deduzca la identidad trigonométrica

$$\text{sen}(A - B) = \text{sen } A \cos B - \cos A \text{sen } B.$$

21. Use vectores para probar que

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2$$

para cualesquiera cuatro números a , b , c y d . (*Sugerencia:* Sean $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = c\mathbf{i} + d\mathbf{j}$).

22. El producto punto es definido positivo Demuestre que el producto punto de vectores es *definido positivo*; es decir, demuestre que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$ para todo vector \mathbf{u} y que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$ si y sólo si $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

23. Demuestre que $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$ para todo vector \mathbf{u} y \mathbf{v} .

24. Demuestre que $\mathbf{w} = |\mathbf{v}|\mathbf{u} + |\mathbf{u}|\mathbf{v}$ biseca el ángulo entre \mathbf{u} y \mathbf{v} .

25. Demuestre que $|\mathbf{v}|\mathbf{u} + |\mathbf{u}|\mathbf{v}$ y $|\mathbf{v}|\mathbf{u} - |\mathbf{u}|\mathbf{v}$ son ortogonales.

Capítulo 12 Proyectos de aplicación tecnológica

Matemáticas/Módulo Maple

Uso de vectores para representar rectas y calcular distancias

Partes I y II: Aprenda las ventajas de interpretar rectas como vectores.

Parte III: Uso de vectores para calcular la distancia de un punto a una recta.

Poner una escena en tres dimensiones sobre un lienzo bidimensional

Use el concepto de planos en el espacio para obtener una imagen bidimensional.

Introducción a la graficación en 3D

Parte I: Uso de la definición vectorial de las rectas y los planos para generar gráficas y ecuaciones, y comparar diferentes formas de las ecuaciones de una recta particular.

Parte II: Grafique funciones definidas implícitamente.



13

FUNCIONES CON VALORES VECTORIALES Y MOVIMIENTO EN EL ESPACIO

INTRODUCCIÓN Ahora que hemos aprendido acerca de los vectores y de la geometría del espacio, podemos integrar estas ideas con nuestro estudio previo de funciones. En este capítulo presentaremos el cálculo de funciones con valores vectoriales. Los dominios de estas funciones son números reales, como antes, pero sus rangos son vectores, no escalares. Usaremos este tipo de cálculo para describir las trayectorias y los movimientos de objetos que se desplazan en un plano o en el espacio, y veremos que las velocidades o aceleraciones de estos objetos a lo largo de su trayectoria son vectores. También presentaremos nuevas cantidades que describen de qué manera la trayectoria de un objeto puede curvarse o torcerse en el espacio.

13.1 | Curvas en el espacio y sus tangentes

Cuando una partícula se mueve en el espacio durante un intervalo de tiempo I , visualizamos las coordenadas de la partícula como funciones definidas de I :

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t), \quad t \in I. \quad (1)$$

Los puntos $(x, y, z) = (f(t), g(t), h(t))$, $t \in I$, forman la **curva** en el espacio que llamamos la **trayectoria** de la partícula. Las ecuaciones y el intervalo de la ecuación (1) **parametrizan** a la curva.

Una curva en el espacio también se representa en forma vectorial. El vector

$$\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{OP} = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k} \quad (2)$$

del origen a la **posición** de la partícula $P(f(t), g(t), h(t))$ en el tiempo t es el **vector de posición** de la partícula (figura 13.1). Las funciones f , g y h son las **funciones componentes** (los **componentes**) del vector de posición. Consideramos la trayectoria de la partícula como la **curva trazada por \mathbf{r}** durante el intervalo de tiempo I . La figura 13.2 muestra varias curvas en el espacio generadas por un programa de graficación por computadora. No sería fácil dibujar estas curvas a mano.

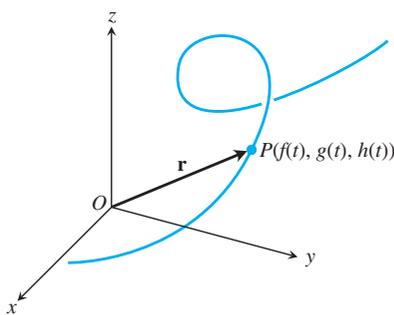


FIGURA 13.1 El vector de posición $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$ de una partícula que se mueve en el espacio es una función del tiempo.

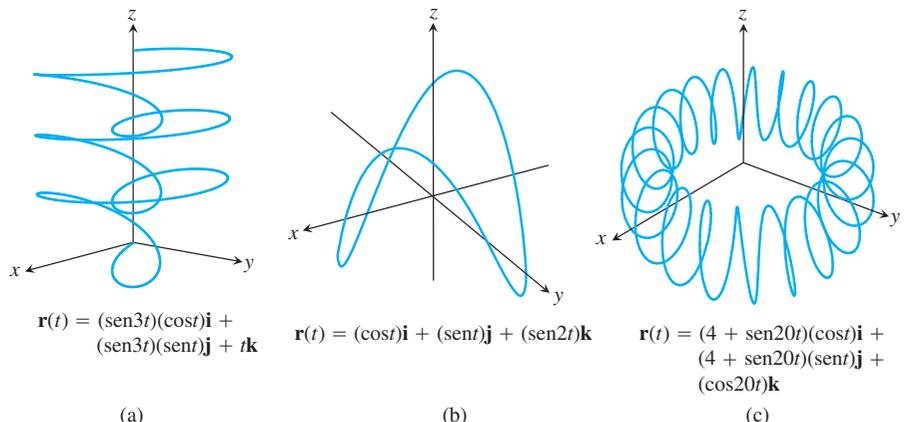


FIGURA 13.2 Las curvas en el espacio están definidas mediante los vectores de posición $\mathbf{r}(t)$.

La ecuación (2) define a \mathbf{r} como una función vectorial de la variable real t en el intervalo I . Generalmente, una **función con valores vectoriales** o **función vectorial** sobre un dominio D es una regla que asigna un vector en el espacio a cada elemento de D . Por ahora, los dominios serán intervalos de números reales que producirán una curva en el espacio. Posteriormente, en el capítulo 16, los dominios serán regiones en el plano. Las funciones vectoriales representarán entonces superficies en el espacio. Las funciones vectoriales en un dominio del plano o del espacio también dan lugar a “campos vectoriales”, los cuales son importantes en el estudio del flujo de un fluido, los campos gravitacionales y los fenómenos electromagnéticos. En el capítulo 16 investigaremos los campos vectoriales y sus aplicaciones.

Las funciones con valores reales se llaman **funciones escalares**, para distinguirlas de las funciones vectoriales. Los componentes de \mathbf{r} en la ecuación (2) son funciones escalares de t . El dominio de una función con valores vectoriales es el dominio común de sus funciones componentes.

EJEMPLO 1 Grafique la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}.$$

Solución La función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

está definida para todos los números reales t . La curva trazada por \mathbf{r} es una hélice que se enrolla alrededor del cilindro circular $x^2 + y^2 = 1$ (figura 13.3). La curva está en el cilindro, puesto que los componentes \mathbf{i} y \mathbf{j} de \mathbf{r} , siendo las coordenadas x y y de la punta de \mathbf{r} , satisfacen la ecuación del cilindro:

$$x^2 + y^2 = (\cos t)^2 + (\sin t)^2 = 1.$$

La curva sube cuando el componente \mathbf{k} , $z = t$, se incrementa. Cada vez que t aumenta en 2π , la curva completa una vuelta alrededor del cilindro. La curva descrita se llama **hélice** (el término proviene de una palabra griega que significa “espiral”). Las ecuaciones

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = t$$

parametrizan a la hélice, en el intervalo $-\infty < t < \infty$. La figura 13.4 muestra más hélices. Observe cómo los múltiplos constantes del parámetro t pueden cambiar el número de vueltas por unidad de tiempo. ■

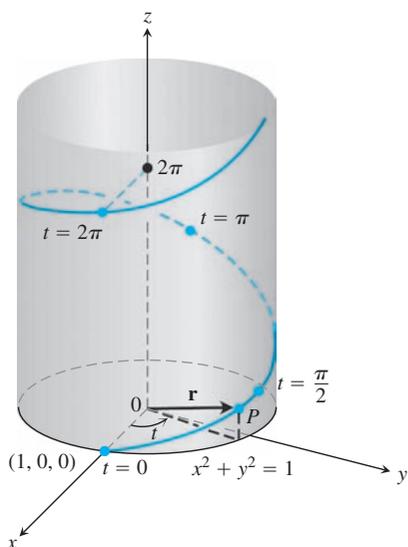


FIGURA 13.3 Mitad superior de la hélice $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ (ejemplo 1).

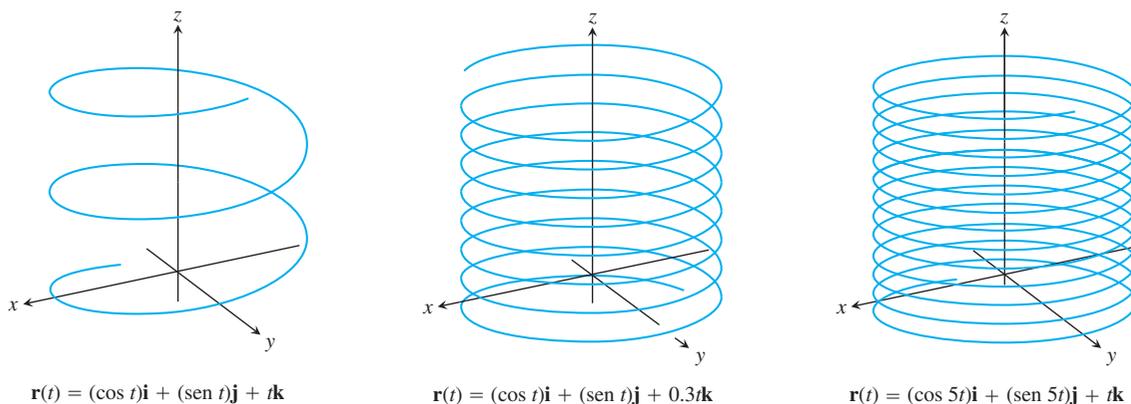


FIGURA 13.4 Hélices con espiral hacia arriba alrededor de un cilindro, como alambres embobinados.

Límites y continuidad

La forma en que definimos los límites de las funciones con valores vectoriales es similar al modo como definimos los límites de las funciones con valores reales.

DEFINICIÓN Sea $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$ una función vectorial con dominio D , y \mathbf{L} un vector. Decimos que \mathbf{r} tiene **límite \mathbf{L}** cuando t se aproxima a t_0 y se escribe

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{L}$$

si para todo número $\epsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$, tal que para toda $t \in D$

$$|\mathbf{r}(t) - \mathbf{L}| < \epsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |t - t_0| < \delta.$$

Si $\mathbf{L} = L_1\mathbf{i} + L_2\mathbf{j} + L_3\mathbf{k}$, entonces se puede demostrar que $\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{L}$ precisamente cuando

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = L_1, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} g(t) = L_2 \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow t_0} h(t) = L_3.$$

Omitimos la demostración. La ecuación

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}(t) = \left(\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) \right) \mathbf{i} + \left(\lim_{t \rightarrow t_0} g(t) \right) \mathbf{j} + \left(\lim_{t \rightarrow t_0} h(t) \right) \mathbf{k} \quad (3)$$

ofrece un modo práctico de calcular límites de funciones vectoriales.

EJEMPLO 2 Si $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, entonces

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \pi/4} \mathbf{r}(t) &= \left(\lim_{t \rightarrow \pi/4} \cos t \right) \mathbf{i} + \left(\lim_{t \rightarrow \pi/4} \sin t \right) \mathbf{j} + \left(\lim_{t \rightarrow \pi/4} t \right) \mathbf{k} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{j} + \frac{\pi}{4} \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Definimos la continuidad para funciones vectoriales del mismo modo en que definimos la continuidad para funciones escalares.

DEFINICIÓN Una función vectorial $\mathbf{r}(t)$ es **continua en un punto** $t = t_0$ de su dominio, si $\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0)$. La función es **continua** si es continua en cada punto de su dominio.

Partiendo de la ecuación (3), vemos que $\mathbf{r}(t)$ es continua en el punto $t = t_0$, si y sólo si cada una de sus funciones componentes es continua en tal punto (ejercicio 31).

EJEMPLO 3

- (a) Todas las curvas en el espacio mostradas en las figuras 13.2 y 13.4 son continuas porque sus funciones componentes son continuas para todo valor de t en $(-\infty, \infty)$.
 (b) La función

$$\mathbf{g}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + \lfloor t \rfloor \mathbf{k}$$

es discontinua en cada entero donde la función mayor entero $\lfloor t \rfloor$ es discontinua.

Derivadas y movimiento

Suponga que $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$ es el vector de posición de una partícula que se mueve a lo largo de una curva en el espacio y que f , g y h son funciones derivables de t . Entonces, la diferencia entre las posiciones de la partícula en el tiempo t y el tiempo $t + \Delta t$ es

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$$

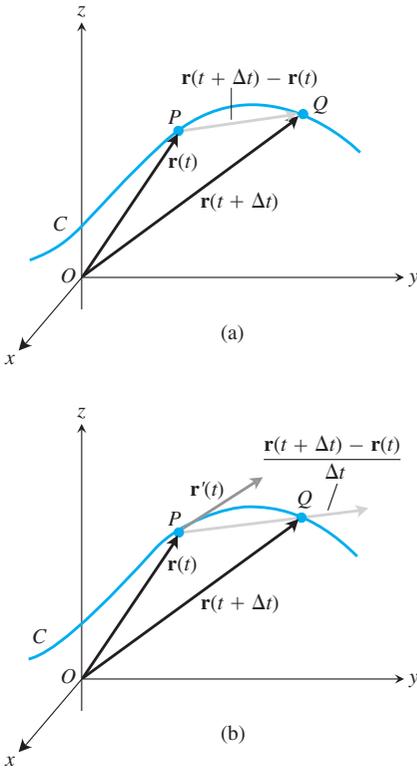


FIGURA 13.5 Cuando $\Delta t \rightarrow 0$, el punto Q se aproxima al punto P a lo largo de la curva C . En el límite, el vector $\overrightarrow{PQ}/\Delta t$ se convierte en el vector tangente $\mathbf{r}'(t)$.

(figura 13.5a). En términos de componentes,

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{r} &= \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t) \\ &= [f(t + \Delta t)\mathbf{i} + g(t + \Delta t)\mathbf{j} + h(t + \Delta t)\mathbf{k}] \\ &\quad - [f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}] \\ &= [f(t + \Delta t) - f(t)]\mathbf{i} + [g(t + \Delta t) - g(t)]\mathbf{j} + [h(t + \Delta t) - h(t)]\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Cuando Δt tiende a cero, parecen ocurrir tres cosas simultáneamente. Primero, Q se aproxima a P a lo largo de la curva. Segundo, la recta secante PQ parece aproximarse a una posición límite, tangente a la curva en P . Tercero, el cociente $\Delta \mathbf{r}/\Delta t$ (figura 13.5b) aproxima el límite

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} &= \left[\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \right] \mathbf{i} + \left[\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{g(t + \Delta t) - g(t)}{\Delta t} \right] \mathbf{j} \\ &\quad + \left[\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{h(t + \Delta t) - h(t)}{\Delta t} \right] \mathbf{k} \\ &= \left[\frac{df}{dt} \right] \mathbf{i} + \left[\frac{dg}{dt} \right] \mathbf{j} + \left[\frac{dh}{dt} \right] \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Esto nos lleva, por lo tanto, a la siguiente definición.

DEFINICIÓN La función vectorial $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$ tiene **derivada (es derivable) en t** si f , g y h son derivables en t . La derivada es la función vectorial

$$\mathbf{r}'(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \frac{df}{dt} \mathbf{i} + \frac{dg}{dt} \mathbf{j} + \frac{dh}{dt} \mathbf{k}.$$

Una función vectorial \mathbf{r} es **derivable** si es derivable en cada punto de su dominio. La curva trazada por \mathbf{r} es **suave** (regular) si $d\mathbf{r}/dt$ es continua y nunca es $\mathbf{0}$, es decir, si f , g y h tienen primeras derivadas continuas y éstas no se anulan en forma simultánea.

El significado geométrico de la definición de derivada se muestra en la figura 13.5. Los puntos P y Q tienen vectores posición $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{r}(t + \Delta t)$, y el vector \overrightarrow{PQ} se representa mediante $\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$. Para $\Delta t > 0$, el vector $(1/\Delta t)(\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t))$ apunta en la misma dirección que el vector \overrightarrow{PQ} . Cuando $\Delta t \rightarrow 0$, este vector tiende a un vector tangente a la curva en P (figura 13.5b). Cuando el vector $\mathbf{r}'(t)$ es diferente de $\mathbf{0}$, se define como el vector **tangente** a la curva en P . La **recta tangente** a la curva en un punto $(f(t_0), g(t_0), h(t_0))$ se define como la recta que pasa por el punto y es paralela a $\mathbf{r}'(t_0)$. Requerimos que $d\mathbf{r}/dt \neq \mathbf{0}$ en una curva suave para asegurar que la curva tenga una tangente que varíe continuamente en cada punto. En una curva suave no hay esquinas ni cúspides puntiagudas.

Una curva formada por un número finito de curvas suaves unidas de manera continua se llama **suave por tramos** (figura 13.6).

Observe una vez más la figura 13.5. Dibujamos la figura para Δt positivo, de manera que $\Delta \mathbf{r}$ apunta hacia delante, en la dirección del movimiento. El vector $\Delta \mathbf{r}/\Delta t$ tiene la misma dirección que $\Delta \mathbf{r}$: apunta también hacia delante. En caso de que Δt fuera negativo, $\Delta \mathbf{r}$ tendería que apuntar hacia atrás, en contra de la dirección de movimiento. Sin embargo, el cociente $\Delta \mathbf{r}/\Delta t$, al ser un múltiplo escalar negativo de $\Delta \mathbf{r}$, otra vez apuntaría hacia delante. Sin importar hacia dónde apunte $\Delta \mathbf{r}$, $\Delta \mathbf{r}/\Delta t$ apunta hacia delante y esperamos que el vector $d\mathbf{r}/dt = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta \mathbf{r}/\Delta t$, cuando sea diferente de $\mathbf{0}$, cumpla lo mismo. Esto significa que la derivada $d\mathbf{r}/dt$, que es la tasa de cambio de la posición con respecto al tiempo, siempre apunta en la dirección del movimiento. Para una curva suave, $d\mathbf{r}/dt$ nunca es cero; la partícula no se detiene ni invierte su dirección.

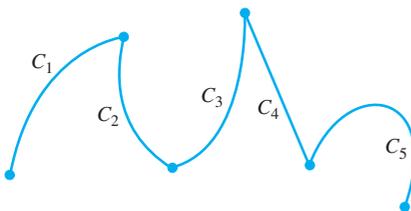


FIGURA 13.6 Una curva suave por tramos, formada por cinco curvas suaves conectadas extremo con extremo de una manera continua. Esta curva no es suave en los puntos donde se unen las cinco curvas suaves.

DEFINICIONES Si \mathbf{r} es el vector de posición de una partícula que se mueve a lo largo de una curva suave en el espacio, entonces

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

es el **vector velocidad** de la partícula, tangente a la curva. Para cualquier tiempo t , la dirección de \mathbf{v} es la **dirección del movimiento**, la magnitud de \mathbf{v} es la **rapidez** de la partícula, y la derivada $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$, cuando existe, es el **vector aceleración** de la partícula. En resumen,

1. La velocidad es la derivada de la posición: $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$.
2. La rapidez es la magnitud de la velocidad: Rapidez = $|\mathbf{v}|$.
3. La aceleración es la derivada de la velocidad: $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$.
4. El vector unitario $\mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ es la dirección del movimiento en el tiempo t .

EJEMPLO 4 Obtenga la velocidad, rapidez y aceleración de una partícula cuyo movimiento en el espacio está dado por el vector de posición $\mathbf{r}(t) = 2 \cos t \mathbf{i} + 2 \sin t \mathbf{j} + 5 \cos^2 t \mathbf{k}$. Trace el vector velocidad $\mathbf{v}(7\pi/4)$.

Solución Los vectores de velocidad y aceleración en el tiempo t son

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(t) &= \mathbf{r}'(t) = -2 \sin t \mathbf{i} + 2 \cos t \mathbf{j} - 10 \cos t \sin t \mathbf{k} \\ &= -2 \sin t \mathbf{i} + 2 \cos t \mathbf{j} - 5 \sin 2t \mathbf{k}, \\ \mathbf{a}(t) &= \mathbf{r}''(t) = -2 \cos t \mathbf{i} - 2 \sin t \mathbf{j} - 10 \cos 2t \mathbf{k},\end{aligned}$$

y la rapidez es

$$|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{(-2 \sin t)^2 + (2 \cos t)^2 + (-5 \sin 2t)^2} = \sqrt{4 + 25 \sin^2 2t}.$$

Cuando $t = 7\pi/4$, tenemos

$$\mathbf{v}\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \mathbf{i} + \sqrt{2} \mathbf{j} + 5 \mathbf{k}, \quad \mathbf{a}\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \mathbf{i} + \sqrt{2} \mathbf{j}, \quad \left|\mathbf{v}\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right| = \sqrt{29}.$$

El bosquejo de la curva del movimiento y el vector velocidad cuando $t = 7\pi/4$, se puede ver en la figura 13.7. ■

Podemos expresar la velocidad de una partícula en movimiento como el producto de su rapidez y su dirección:

$$\text{Velocidad} = |\mathbf{v}| \left(\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \right) = (\text{rapidez})(\text{dirección}).$$

Reglas de derivación

Debido a que las derivadas de las funciones vectoriales se pueden calcular componente por componente, las reglas para derivar a las funciones vectoriales tienen la misma forma que las reglas para derivar funciones escalares.

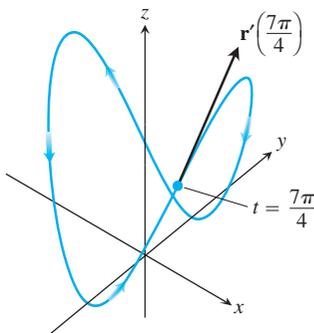


FIGURA 13.7 La curva y el vector de velocidad cuando $t = 7\pi/4$ para el movimiento dado en el ejemplo 4.

Reglas para derivar funciones vectoriales

Sean \mathbf{u} y \mathbf{v} funciones vectoriales diferenciables de t , \mathbf{C} un vector constante, c un escalar y f una función escalar derivable.

1. Regla para una función constante: $\frac{d}{dt} \mathbf{C} = \mathbf{0}$
2. Reglas para múltiplos escalares: $\frac{d}{dt} [c\mathbf{u}(t)] = c\mathbf{u}'(t)$
 $\frac{d}{dt} [f(t)\mathbf{u}(t)] = f'(t)\mathbf{u}(t) + f(t)\mathbf{u}'(t)$
3. Regla de la suma: $\frac{d}{dt} [\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) + \mathbf{v}'(t)$
4. Regla de la resta: $\frac{d}{dt} [\mathbf{u}(t) - \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) - \mathbf{v}'(t)$
5. Regla del producto punto: $\frac{d}{dt} [\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) \cdot \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}'(t)$
6. Regla del producto cruz: $\frac{d}{dt} [\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) \times \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}'(t)$
7. Regla de la cadena: $\frac{d}{dt} [\mathbf{u}(f(t))] = f'(t)\mathbf{u}'(f(t))$

Cuando use la regla del producto cruz, recuerde conservar el orden de los factores. Si \mathbf{u} viene primero en el lado izquierdo de la ecuación, también debe venir primero en el lado derecho, o los signos serán incorrectos.

Probaremos las reglas del producto y de la cadena, pero dejaremos como ejercicios las reglas para constantes, múltiplos escalares, sumas y restas.

Demostración de la regla del producto punto Suponga que

$$\mathbf{u} = u_1(t)\mathbf{i} + u_2(t)\mathbf{j} + u_3(t)\mathbf{k}$$

y

$$\mathbf{v} = v_1(t)\mathbf{i} + v_2(t)\mathbf{j} + v_3(t)\mathbf{k}.$$

De esta forma,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) &= \frac{d}{dt} (u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3) \\ &= \underbrace{u_1'v_1 + u_2'v_2 + u_3'v_3}_{\mathbf{u}' \cdot \mathbf{v}} + \underbrace{u_1v_1' + u_2v_2' + u_3v_3'}_{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}'} \end{aligned}$$

Demostración de la regla del producto cruz Esta demostración sigue el modelo de la demostración de la regla del producto para funciones escalares. De acuerdo con la definición de derivada,

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{u}(t+h) \times \mathbf{v}(t+h) - \mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)}{h}.$$

Para cambiar esta fracción en una fracción equivalente que contenga los cocientes diferenciales para las derivadas de \mathbf{u} y \mathbf{v} , sumamos y restamos $\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t+h)$ en el numerador. Así,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{u}(t+h) \times \mathbf{v}(t+h) - \mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t+h) + \mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t+h) - \mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\mathbf{u}(t+h) - \mathbf{u}(t)}{h} \times \mathbf{v}(t+h) + \mathbf{u}(t) \times \frac{\mathbf{v}(t+h) - \mathbf{v}(t)}{h} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{u}(t+h) - \mathbf{u}(t)}{h} \times \lim_{h \rightarrow 0} \mathbf{v}(t+h) + \lim_{h \rightarrow 0} \mathbf{u}(t) \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}(t+h) - \mathbf{v}(t)}{h}. \end{aligned}$$

La última de estas igualdades es válida porque el límite del producto cruz de dos funciones vectoriales es el producto cruz de sus límites, si estos últimos existen (ejercicio 32). Cuando h tiende a cero, $\mathbf{v}(t+h)$ tiende a $\mathbf{v}(t)$ porque \mathbf{v} , siendo derivable en t , es continua en t (ejercicio 33). Las dos fracciones tienden a los valores de $d\mathbf{u}/dt$ y $d\mathbf{v}/dt$ en t . En resumen

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{u}}{dt} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt}. \quad \blacksquare$$

Por conveniencia algebraica, algunas veces escribiremos el producto de un escalar c y un vector \mathbf{v} como \mathbf{vc} en vez de $c\mathbf{v}$. Esto permite, por ejemplo, escribir la regla de la cadena en una forma familiar:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{d\mathbf{u}}{ds} \frac{ds}{dt},$$

donde $s = f(t)$.

Demostración de la regla de la cadena Suponga que $\mathbf{u}(s) = a(s)\mathbf{i} + b(s)\mathbf{j} + c(s)\mathbf{k}$ es una función vectorial derivable de s y que $s = f(t)$ es una función escalar derivable de t . Entonces a , b y c son funciones derivables de t , y la regla de la cadena para funciones reales derivables da

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[\mathbf{u}(s)] &= \frac{da}{dt}\mathbf{i} + \frac{db}{dt}\mathbf{j} + \frac{dc}{dt}\mathbf{k} \\ &= \frac{da}{ds} \frac{ds}{dt}\mathbf{i} + \frac{db}{ds} \frac{ds}{dt}\mathbf{j} + \frac{dc}{ds} \frac{ds}{dt}\mathbf{k} \\ &= \frac{ds}{dt} \left(\frac{da}{ds}\mathbf{i} + \frac{db}{ds}\mathbf{j} + \frac{dc}{ds}\mathbf{k} \right) \\ &= \frac{ds}{dt} \frac{d\mathbf{u}}{ds} \\ &= f'(t)\mathbf{u}'(f(t)). \end{aligned} \quad s = f(t) \quad \blacksquare$$

Funciones vectoriales de magnitud constante

Cuando seguimos una partícula que se mueve sobre una esfera con centro en el origen (figura 13.8), el vector de posición tiene longitud constante e igual al radio de la esfera. El vector velocidad $d\mathbf{r}/dt$, siempre es tangente a la trayectoria del movimiento, por lo tanto, es tangente a la esfera y perpendicular a \mathbf{r} . Éste es siempre el caso para una función vectorial derivable de magnitud constante: el vector y su primera derivada son ortogonales. Si hacemos el cálculo directamente,

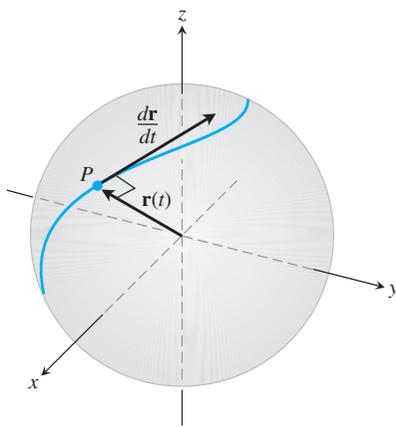


FIGURA 13.8 Si una partícula se mueve sobre una esfera de manera que su posición \mathbf{r} es una función derivable del tiempo, entonces $\mathbf{r} \cdot (d\mathbf{r}/dt) = 0$.

$$\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t) = c^2 \quad |\mathbf{r}(t)| = c \text{ es constante}$$

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t)] = 0 \quad \text{Se deriva a ambos lados}$$

$$\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}(t) + \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0 \quad \text{Regla 5 con } \mathbf{r}(t) = \mathbf{u}(t) = \mathbf{v}(t)$$

$$2\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}(t) = 0.$$

Los vectores $\mathbf{r}'(t)$ y $\mathbf{r}(t)$ son ortogonales debido a que su producto punto es 0. En resumen,

Si \mathbf{r} es una función vectorial derivable de t de longitud constante, entonces

$$\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 0. \quad (4)$$

Recurriremos a esta observación varias veces en la sección 13.4. Lo inverso también es cierto (véase el ejercicio 27).

Ejercicios 13.1

Movimiento en el plano

En los ejercicios 1 a 4, $\mathbf{r}(t)$ es la posición de una partícula en el plano xy en el instante t . Obtenga una ecuación en x y en y cuya gráfica sea la trayectoria de la partícula. Luego, determine los vectores velocidad y aceleración de la partícula en el valor dado de t .

1. $\mathbf{r}(t) = (t+1)\mathbf{i} + (t^2-1)\mathbf{j}$, $t = 1$

2. $\mathbf{r}(t) = \frac{t}{t+1}\mathbf{i} + \frac{1}{t}\mathbf{j}$, $t = -1/2$

3. $\mathbf{r}(t) = e^t\mathbf{i} + \frac{2}{9}e^{2t}\mathbf{j}$, $t = \ln 3$

4. $\mathbf{r}(t) = (\cos 2t)\mathbf{i} + (3 \sin 2t)\mathbf{j}$, $t = 0$

En los ejercicios 5 a 8 se proporcionan los vectores posición de partículas que se mueven a lo largo de varias curvas en el plano xy . En cada caso, determine los vectores velocidad y aceleración de la partícula en los tiempos indicados y grafíquelos como vectores en la curva.

5. Movimiento en la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$

$$\mathbf{r}(t) = (\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j}; \quad t = \pi/4 \text{ y } \pi/2$$

6. Movimiento en la circunferencia $x^2 + y^2 = 16$

$$\mathbf{r}(t) = \left(4 \cos \frac{t}{2}\right)\mathbf{i} + \left(4 \sin \frac{t}{2}\right)\mathbf{j}; \quad t = \pi \text{ y } 3\pi/2$$

7. Movimiento en la cicloide $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t$

$$\mathbf{r}(t) = (t - \sin t)\mathbf{i} + (1 - \cos t)\mathbf{j}; \quad t = \pi \text{ y } 3\pi/2$$

8. Movimiento en la parábola $y = x^2 + 1$

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (t^2 + 1)\mathbf{j}; \quad t = -1, 0, \text{ y } 1$$

Movimiento en el espacio

En los ejercicios 9 a 14, $\mathbf{r}(t)$ es la posición de una partícula en el espacio en el instante t . Determine los vectores velocidad y aceleración de la partícula. Luego obtenga la rapidez y la dirección de movimiento de la partícula en el valor dado de t . Escriba la velocidad de la partícula en ese instante como el producto de su rapidez y dirección.

9. $\mathbf{r}(t) = (t + 1)\mathbf{i} + (t^2 - 1)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}, \quad t = 1$

10. $\mathbf{r}(t) = (1 + t)\mathbf{i} + \frac{t^2}{\sqrt{2}}\mathbf{j} + \frac{t^3}{3}\mathbf{k}, \quad t = 1$

11. $\mathbf{r}(t) = (2 \cos t)\mathbf{i} + (3 \sin t)\mathbf{j} + 4t\mathbf{k}, \quad t = \pi/2$

12. $\mathbf{r}(t) = (\sec t)\mathbf{i} + (\tan t)\mathbf{j} + \frac{4}{3}t\mathbf{k}, \quad t = \pi/6$

13. $\mathbf{r}(t) = (2 \ln(t + 1))\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \frac{t^2}{2}\mathbf{k}, \quad t = 1$

14. $\mathbf{r}(t) = (e^{-t})\mathbf{i} + (2 \cos 3t)\mathbf{j} + (2 \sin 3t)\mathbf{k}, \quad t = 0$

En los ejercicios 15 a 18, $\mathbf{r}(t)$ es la posición de una partícula en el espacio en el instante t . Obtenga el ángulo entre los vectores de velocidad y de aceleración en el instante $t = 0$.

15. $\mathbf{r}(t) = (3t + 1)\mathbf{i} + \sqrt{3}t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$

16. $\mathbf{r}(t) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}t - 16t^2\right)\mathbf{j}$

17. $\mathbf{r}(t) = (\ln(t^2 + 1))\mathbf{i} + (\tan^{-1}t)\mathbf{j} + \sqrt{t^2 + 1}\mathbf{k}$

18. $\mathbf{r}(t) = \frac{4}{9}(1 + t)^{3/2}\mathbf{i} + \frac{4}{9}(1 - t)^{3/2}\mathbf{j} + \frac{1}{3}t\mathbf{k}$

Tangentes a curvas

Como se mencionó en el texto, la **recta tangente** a una curva suave $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$ en $t = t_0$ es la recta que pasa por el punto $(f(t_0), g(t_0), h(t_0))$ y que es paralela a $\mathbf{v}(t_0)$, el vector de velocidad de la curva en t_0 . En los ejercicios 19 a 22, obtenga las ecuaciones paramétricas de la recta que es tangente a la curva dada con el valor proporcionado del parámetro $t = t_0$.

19. $\mathbf{r}(t) = (\sin t)\mathbf{i} + (t^2 - \cos t)\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}, \quad t_0 = 0$

20. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + (2t - 1)\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}, \quad t_0 = 2$

21. $\mathbf{r}(t) = \ln t\mathbf{i} + \frac{t-1}{t+2}\mathbf{j} + t \ln t\mathbf{k}, \quad t_0 = 1$

22. $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + (\sin 2t)\mathbf{k}, \quad t_0 = \frac{\pi}{2}$

Teoría y ejemplos

23. Movimiento a lo largo de un círculo Cada una de las siguientes ecuaciones en los incisos (a) a (e) describe el movimiento de una partícula con la misma trayectoria, a saber, la circunferencia unitaria $x^2 + y^2 = 1$. Si bien la trayectoria de todas las partículas de los incisos (a) a (e) es la misma, el comportamiento, o “dinámica”, de cada partícula es diferente. Para cada partícula, conteste las siguientes preguntas.

i) ¿Tiene la partícula rapidez constante? Si es así, ¿cuál es?

ii) ¿Siempre es ortogonal el vector de aceleración de la partícula a su vector de velocidad?

iii) ¿La partícula se mueve en la circunferencia en sentido de las manecillas del reloj o en sentido contrario?

iv) ¿La partícula inicia en el punto $(1, 0)$?

a. $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j}, \quad t \geq 0$

b. $\mathbf{r}(t) = \cos(2t)\mathbf{i} + \sin(2t)\mathbf{j}, \quad t \geq 0$

c. $\mathbf{r}(t) = \cos(t - \pi/2)\mathbf{i} + \sin(t - \pi/2)\mathbf{j}, \quad t \geq 0$

d. $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} - (\sin t)\mathbf{j}, \quad t \geq 0$

e. $\mathbf{r}(t) = \cos(t^2)\mathbf{i} + \sin(t^2)\mathbf{j}, \quad t \geq 0$

24. Movimiento a lo largo de una circunferencia Demuestre que la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = (2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) + \cos t \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j} \right) + \sin t \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{k} \right)$$

describe el movimiento de una partícula que se desplaza en una circunferencia de radio 1 con centro en el punto $(2, 2, 1)$ y contenida en el plano $x + y - 2z = 2$.

25. Movimiento a lo largo de una parábola Una partícula se mueve a lo largo de la parte superior de la parábola $y^2 = 2x$ de izquierda a derecha con rapidez constante de 5 unidades por segundo. Obtenga la velocidad de la partícula cuando pasa por el punto $(2, 2)$.

26. Movimiento a lo largo de una cicloide Una partícula se mueve en el plano xy de forma tal que su posición en el instante t es

$$\mathbf{r}(t) = (t - \sin t)\mathbf{i} + (1 - \cos t)\mathbf{j}.$$

T a. Grafique $\mathbf{r}(t)$. La curva resultante es una cicloide.

b. Obtenga los valores máximo y mínimo de $|\mathbf{v}|$ y $|\mathbf{a}|$. (Sugerencia: Primero encuentre los valores extremos de $|\mathbf{v}|^2$ y $|\mathbf{a}|^2$ y después saque la raíz cuadrada).

27. Sea \mathbf{r} una función vectorial derivable de t . Demuestre que si $\mathbf{r} \cdot (d\mathbf{r}/dt) = 0$ para todas las t , entonces $|\mathbf{r}|$ es constante.

28. Derivadas del triple producto escalar

a. Demuestre que si \mathbf{u}, \mathbf{v} y \mathbf{w} son funciones vectoriales derivables de t , entonces

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \frac{d\mathbf{u}}{dt} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w} + \mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} \times \mathbf{w} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \frac{d\mathbf{w}}{dt}.$$

b. Demuestre que

$$\frac{d}{dt} \left(\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right) = \mathbf{r} \cdot \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3} \right).$$

(Sugerencia: Derive el lado izquierdo y busque los vectores cuyos productos sean cero).

29. Compruebe las dos reglas de múltiplos escalares de las funciones vectoriales.

30. Compruebe las reglas de suma y resta de las funciones vectoriales.

31. **Prueba por componentes de la continuidad en un punto** Demuestre que la función vectorial \mathbf{r} dada por $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$ es continua en $t = t_0$ si y sólo si las funciones f , g y h son continuas en t_0 .

32. **Límites del producto cruz de funciones vectoriales** Suponga que $\mathbf{r}_1(t) = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j} + f_3(t)\mathbf{k}$, $\mathbf{r}_2(t) = g_1(t)\mathbf{i} + g_2(t)\mathbf{j} + g_3(t)\mathbf{k}$, $\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}_1(t) = \mathbf{A}$ y $\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}_2(t) = \mathbf{B}$. Utilice la fórmula del determinante para el producto cruz y la regla del límite del producto de funciones escalares para demostrar que

$$\lim_{t \rightarrow t_0} (\mathbf{r}_1(t) \times \mathbf{r}_2(t)) = \mathbf{A} \times \mathbf{B}.$$

33. **Las funciones vectoriales derivables son continuas** Demuestre que si $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$ es derivable en $t = t_0$, entonces también es continua en t_0 .

34. **Regla de la función constante** Compruebe que si \mathbf{u} es una función vectorial con valor constante \mathbf{C} , entonces $d\mathbf{u}/dt = 0$.

EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

Use algún sistema algebraico computacional (SAC) para ejecutar los siguientes pasos en los ejercicios 35 a 38.

- Grafique la curva espacial trazada por el vector de posición \mathbf{r} .
- Obtenga los componentes del vector velocidad $d\mathbf{r}/dt$.
- Calcule $d\mathbf{r}/dt$ en el punto t_0 dado y determine la ecuación para la recta tangente a la curva en $\mathbf{r}(t_0)$.
- Grafique la recta tangente junto con la curva en el intervalo dado.

$$35. \mathbf{r}(t) = (\sin t - t \cos t)\mathbf{i} + (\cos t + t \sin t)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}, \\ 0 \leq t \leq 6\pi, \quad t_0 = 3\pi/2$$

$$36. \mathbf{r}(t) = \sqrt{2}t\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k}, \quad -2 \leq t \leq 3, \quad t_0 = 1$$

$$37. \mathbf{r}(t) = (\sin 2t)\mathbf{i} + (\ln(1+t))\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 4\pi, \quad t_0 = \pi/4$$

$$38. \mathbf{r}(t) = (\ln(t^2 + 2))\mathbf{i} + (\tan^{-1} 3t)\mathbf{j} + \sqrt{t^2 + 1}\mathbf{k}, \\ -3 \leq t \leq 5, \quad t_0 = 3$$

En los ejercicios 39 y 40 analizará gráficamente el comportamiento de la hélice

$$\mathbf{r}(t) = (\cos at)\mathbf{i} + (\sin at)\mathbf{j} + bt\mathbf{k}$$

cuando se varían los valores de las constantes a y b . Use un SAC para ejecutar los pasos en cada ejercicio.

39. Haga $b = 1$. Grafique la hélice $\mathbf{r}(t)$ con la recta tangente a la curva en $t = 3\pi/2$ para $a = 1, 2, 4$ y 6 sobre el intervalo $0 \leq t \leq 4\pi$. Describa con sus propias palabras qué le pasa a la gráfica de la hélice y a la posición de la recta tangente cuando a aumenta según los valores positivos dados.

40. Ahora sea $a = 1$. Grafique la hélice $\mathbf{r}(t)$ con la recta tangente a la curva en $t = 3\pi/2$ para $b = 1/4, 1/2, 2$ y 4 en el intervalo $0 \leq t \leq 4\pi$. Describa con sus propias palabras qué le pasa a la gráfica de la hélice y a la posición de la recta tangente cuando b aumenta de acuerdo con los valores positivos dados.

13.2

Integrales de funciones vectoriales; movimiento de proyectiles

En esta sección investigaremos integrales de funciones vectoriales y sus aplicaciones al movimiento a lo largo de una trayectoria en el espacio o en el plano.

Integrales de funciones vectoriales

Una función vectorial derivable $\mathbf{R}(t)$ es una **antiderivada** de una función vectorial $\mathbf{r}(t)$ en un intervalo I si $d\mathbf{R}/dt = \mathbf{r}$ para cada punto de I . Si \mathbf{R} es una antiderivada de \mathbf{r} en I , se puede demostrar, trabajando con componentes, que todas las antiderivadas de \mathbf{r} en I tienen la forma $\mathbf{R} + \mathbf{C}$ para algún vector constante \mathbf{C} (ejercicio 41). El conjunto de todas las antiderivadas de \mathbf{r} en I es la **integral indefinida** de \mathbf{r} en I .

DEFINICIÓN La **integral indefinida** de \mathbf{r} con respecto a t es el conjunto de todas las antiderivadas de \mathbf{r} , denotado por $\int \mathbf{r}(t) dt$. Si \mathbf{R} es cualquier antiderivada de \mathbf{r} , entonces

$$\int \mathbf{r}(t) dt = \mathbf{R}(t) + \mathbf{C}.$$

Las reglas aritméticas usuales de las integrales indefinidas siguen siendo válidas.

EJEMPLO 1 Para integrar una función vectorial, integramos cada uno de sus componentes.

$$\int ((\cos t)\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2t\mathbf{k}) dt = \left(\int \cos t dt\right)\mathbf{i} + \left(\int dt\right)\mathbf{j} - \left(\int 2t dt\right)\mathbf{k} \quad (1)$$

$$= (\sin t + C_1)\mathbf{i} + (t + C_2)\mathbf{j} - (t^2 + C_3)\mathbf{k} \quad (2)$$

$$= (\sin t)\mathbf{i} + t\mathbf{j} - t^2\mathbf{k} + \mathbf{C} \quad \mathbf{C} = C_1\mathbf{i} + C_2\mathbf{j} - C_3\mathbf{k}$$

Como en el caso de la integración de funciones escalares, recomendamos que se salte los pasos de las ecuaciones (1) y (2) y vaya directamente a la forma final. Obtenga una antiderivada de cada componente y sume un *vector constante* al final. ■

Las integrales definidas de las funciones vectoriales se definen mejor en términos de componentes. La definición es congruente con la manera de calcular los límites y las derivadas de las funciones vectoriales.

DEFINICIÓN Si los componentes de $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$ son integrables en $[a, b]$, entonces también lo es \mathbf{r} , y la **integral definida** de \mathbf{r} de a a b es

$$\int_a^b \mathbf{r}(t) dt = \left(\int_a^b f(t) dt\right)\mathbf{i} + \left(\int_a^b g(t) dt\right)\mathbf{j} + \left(\int_a^b h(t) dt\right)\mathbf{k}.$$

EJEMPLO 2 Como en el ejemplo 1, integramos cada componente.

$$\int_0^\pi ((\cos t)\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2t\mathbf{k}) dt = \left(\int_0^\pi \cos t dt\right)\mathbf{i} + \left(\int_0^\pi dt\right)\mathbf{j} - \left(\int_0^\pi 2t dt\right)\mathbf{k}$$

$$= [\sin t]_0^\pi \mathbf{i} + [t]_0^\pi \mathbf{j} - [t^2]_0^\pi \mathbf{k}$$

$$= [0 - 0]\mathbf{i} + [\pi - 0]\mathbf{j} - [\pi^2 - 0^2]\mathbf{k}$$

$$= \pi\mathbf{j} - \pi^2\mathbf{k} \quad \blacksquare$$

El teorema fundamental del cálculo para funciones vectoriales continuas dice que

$$\int_a^b \mathbf{r}(t) dt = \mathbf{R}(t) \Big|_a^b = \mathbf{R}(b) - \mathbf{R}(a)$$

donde \mathbf{R} es cualquier antiderivada de \mathbf{r} , de manera que $\mathbf{R}'(t) = \mathbf{r}(t)$ (ejercicio 42).

EJEMPLO 3 Suponga que no conocemos la trayectoria de un planeador, sólo su vector de aceleración, que es $\mathbf{a}(t) = -(3 \cos t)\mathbf{i} - (3 \sin t)\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. También sabemos que inicialmente (en el instante $t = 0$), el planeador partió del punto $(3, 0, 0)$ con una velocidad $\mathbf{v}(0) = 3\mathbf{j}$. Obtenga la posición del planeador como una función de t .

Solución Nuestro objetivo es calcular $\mathbf{r}(t)$ si sabemos

La ecuación diferencial: $\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -(3 \cos t)\mathbf{i} - (3 \sin t)\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

Las condiciones iniciales: $\mathbf{v}(0) = 3\mathbf{j}$ y $\mathbf{r}(0) = 3\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$.

Al integrar ambos lados de la ecuación diferencial con respecto a t tenemos

$$\mathbf{v}(t) = -(3 \sin t)\mathbf{i} + (3 \cos t)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k} + \mathbf{C}_1.$$

Usamos $\mathbf{v}(0) = 3\mathbf{j}$ para obtener \mathbf{C}_1 :

$$3\mathbf{j} = -(3 \sin 0)\mathbf{i} + (3 \cos 0)\mathbf{j} + (0)\mathbf{k} + \mathbf{C}_1$$

$$3\mathbf{j} = 3\mathbf{j} + \mathbf{C}_1$$

$$\mathbf{C}_1 = \mathbf{0}.$$

La velocidad del planeador como una función del tiempo es

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}(t) = -(3 \sin t)\mathbf{i} + (3 \cos t)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}.$$

Al integrar ambos lados de esta última ecuación diferencial tenemos

$$\mathbf{r}(t) = (3 \cos t)\mathbf{i} + (3 \sin t)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k} + \mathbf{C}_2.$$

Usamos la condición inicial $\mathbf{r}(0) = 3\mathbf{i}$ para encontrar \mathbf{C}_2 :

$$3\mathbf{i} = (3 \cos 0)\mathbf{i} + (3 \sin 0)\mathbf{j} + (0^2)\mathbf{k} + \mathbf{C}_2$$

$$3\mathbf{i} = 3\mathbf{i} + (0)\mathbf{j} + (0)\mathbf{k} + \mathbf{C}_2$$

$$\mathbf{C}_2 = \mathbf{0}.$$

La posición del planeador como una función de t es

$$\mathbf{r}(t) = (3 \cos t)\mathbf{i} + (3 \sin t)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}.$$

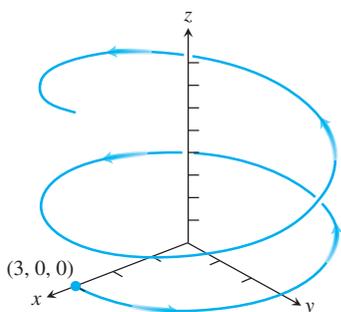


FIGURA 13.9 Trayectoria del planeador del ejemplo 3. Aunque la trayectoria es como una espiral alrededor del eje z , no es una hélice.

Ésta es la trayectoria del planeador mostrada en la figura 13.9. Si bien la trayectoria se asemeja a la de una hélice, porque es como una espiral alrededor del eje z , no es una hélice por su modo de elevarse. (Diremos más acerca de esto en la sección 13.5).

Nota: En este ejemplo los dos vectores constantes de integración, \mathbf{C}_1 y \mathbf{C}_2 , resultaron ser $\mathbf{0}$. Los ejercicios 15 y 16 ilustran ejemplos para los cuales los vectores constantes de integración no son $\mathbf{0}$. ■

Ecuaciones vectoriales y paramétricas para el movimiento de un proyectil ideal

Un ejemplo clásico de integración de funciones vectoriales es la derivación de las ecuaciones para el movimiento de un proyectil. En física, el movimiento de proyectiles describe cómo un objeto disparado con cierto ángulo, desde una posición inicial y sobre el que actúa solamente la fuerza de la gravedad, se mueve en un plano coordenado vertical (es decir, su trayectoria está contenida en un plano vertical). En el ejemplo clásico, ignoramos los efectos de cualquier fuerza de fricción sobre el objeto, la cual puede variar con la rapidez y la altura del proyectil. También ignoramos el hecho de que la fuerza de gravedad cambia ligeramente al modificarse la altitud del proyectil. Además, ignoramos los efectos en distancias largas producidos por la rotación de la Tierra, debajo del proyectil, tal como sucede en el despegue de un cohete o el disparo de un proyectil por un cañón. Al ignorar estos efectos tenemos una aproximación razonable del movimiento en la mayoría de los casos.

Para deducir las ecuaciones de movimiento de un proyectil, suponemos que éste se comporta como una partícula que se mueve en un plano coordenado vertical, y que la única fuerza que actúa sobre el proyectil durante su vuelo es la fuerza constante de la gravedad, la cual siempre apunta hacia abajo. Suponemos que el proyectil es lanzado desde el origen en el instante $t = 0$ hacia el primer cuadrante con una velocidad inicial \mathbf{v}_0 (figura 13.10). Si \mathbf{v}_0 forma un ángulo α con la horizontal, entonces

$$\mathbf{v}_0 = (|\mathbf{v}_0| \cos \alpha)\mathbf{i} + (|\mathbf{v}_0| \sin \alpha)\mathbf{j}.$$

Si usamos la notación más simple v_0 para la rapidez inicial $|\mathbf{v}_0|$, entonces

$$\mathbf{v}_0 = (v_0 \cos \alpha)\mathbf{i} + (v_0 \sin \alpha)\mathbf{j}. \quad (3)$$

La posición inicial del proyectil es

$$\mathbf{r}_0 = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} = \mathbf{0}. \quad (4)$$

La segunda ley de Newton para movimiento dice que la fuerza que actúa sobre el proyectil es igual a la masa m del proyectil multiplicada por su aceleración, es decir, $m(d^2\mathbf{r}/dt^2)$ si \mathbf{r} es el vector de posición del proyectil y t el tiempo. Si la fuerza es solamente la fuerza gravitacional $-mg\mathbf{j}$, entonces

$$m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -mg\mathbf{j} \quad \text{y} \quad \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -g\mathbf{j}$$

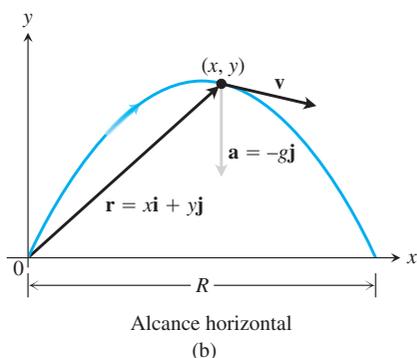
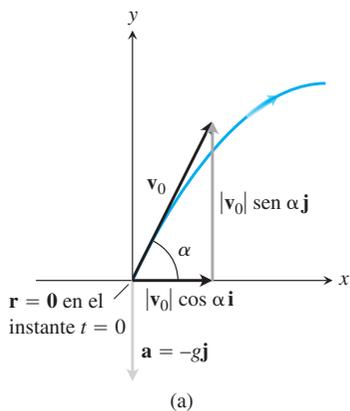


FIGURA 13.10 (a) Posición, velocidad, aceleración y ángulo de lanzamiento en $t = 0$. (b) Posición, velocidad y aceleración en un instante posterior t .

donde g es la aceleración debida a la gravedad. Obtenemos \mathbf{r} como una función de t al resolver el siguiente problema con valores iniciales

Ecuación diferencial: $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -g\mathbf{j}$

Condiciones iniciales: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ y $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}_0$ cuando $t = 0$

Al integrar una vez se obtiene

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -(gt)\mathbf{j} + \mathbf{v}_0.$$

Integrar de nuevo da

$$\mathbf{r} = -\frac{1}{2}gt^2\mathbf{j} + \mathbf{v}_0t + \mathbf{r}_0.$$

Al sustituir los valores de \mathbf{v}_0 y \mathbf{r}_0 de las ecuaciones (3) y (4) obtenemos

$$\mathbf{r} = -\frac{1}{2}gt^2\mathbf{j} + \underbrace{(v_0 \cos \alpha)t\mathbf{i} + (v_0 \sin \alpha)t\mathbf{j}}_{v_0t} + \mathbf{0}.$$

Al agrupar términos, tenemos

Ecuación del movimiento para un proyectil ideal

$$\mathbf{r} = (v_0 \cos \alpha)t\mathbf{i} + \left((v_0 \sin \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 \right)\mathbf{j}. \tag{5}$$

La ecuación (5) es la *ecuación vectorial* para el movimiento de un proyectil ideal. El ángulo α es el **ángulo de lanzamiento** (**ángulo de disparo** o **ángulo de elevación**) del proyectil, y v_0 , como dijimos antes, es la **rapidez inicial** del proyectil. Los componentes de \mathbf{r} dan las ecuaciones paramétricas

$$x = (v_0 \cos \alpha)t \quad y \quad y = (v_0 \sin \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2, \tag{6}$$

donde x es la distancia horizontal recorrida, y y es la altura del proyectil en el instante $t \geq 0$.

EJEMPLO 4 Un proyectil es disparado desde el origen sobre suelo horizontal con una rapidez inicial de 500 m/seg y un ángulo de lanzamiento de 60° . ¿Dónde se encontrará el proyectil 10 segundos después?

Solución Usamos la ecuación (5) con $v_0 = 500$, $\alpha = 60^\circ$, $g = 9.8$ y $t = 10$ para encontrar los componentes del vector de posición del proyectil 10 segundos después del disparo.

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= (v_0 \cos \alpha)t\mathbf{i} + \left((v_0 \sin \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 \right)\mathbf{j} \\ &= (500)\left(\frac{1}{2}\right)(10)\mathbf{i} + \left((500)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)10 - \left(\frac{1}{2}\right)(9.8)(100) \right)\mathbf{j} \\ &\approx 2500\mathbf{i} + 3840\mathbf{j} \end{aligned}$$

Diez segundos después del disparo, el proyectil está aproximadamente a 3840 m sobre el suelo y a 2500 m de distancia horizontal del origen. ■

Los proyectiles ideales se mueven a lo largo de parábolas, como deduciremos de la ecuación (6). Si sustituimos $t = x/(v_0 \cos \alpha)$ de la primera ecuación en la segunda, obtenemos la ecuación en coordenadas cartesianas.

$$y = -\left(\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}\right)x^2 + (\tan \alpha)x.$$

Esta ecuación tiene la forma $y = ax^2 + bx$, por lo que su gráfica es una parábola.

Un proyectil alcanza su punto más alto cuando el componente vertical de su velocidad es cero. Si se le dispara sobre suelo horizontal, el proyectil aterriza cuando su componente vertical es cero en la ecuación (5), y el **rango** o alcance R es la distancia del origen al punto de impacto. Aquí resumimos los resultados, los cuales habrá que verificar en el ejercicio 27.

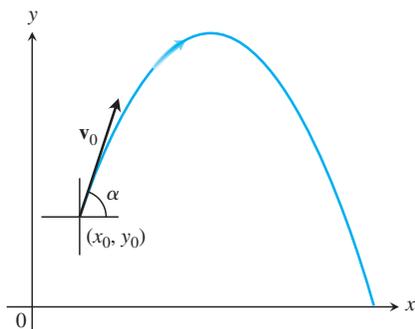


FIGURA 13.11 La trayectoria de un proyectil disparado desde (x_0, y_0) con una velocidad inicial v_0 y un ángulo de α grados con respecto a la horizontal.

Altura, tiempo de vuelo y alcance para el movimiento de un proyectil ideal

Para el movimiento de un proyectil ideal, cuando un objeto es lanzado desde el origen sobre una superficie horizontal con rapidez inicial v_0 y ángulo de lanzamiento α :

$$\text{Altura máxima: } y_{\text{máx}} = \frac{(v_0 \operatorname{sen} \alpha)^2}{2g}$$

$$\text{Tiempo de vuelo: } t = \frac{2v_0 \operatorname{sen} \alpha}{g}$$

$$\text{Alcance: } R = \frac{v_0^2}{g} \operatorname{sen} 2\alpha.$$

Si disparamos nuestro proyectil ideal desde el punto (x_0, y_0) y no desde el origen (figura 13.11), el vector de posición para la trayectoria del movimiento es

$$\mathbf{r} = (x_0 + (v_0 \cos \alpha)t)\mathbf{i} + \left(y_0 + (v_0 \operatorname{sen} \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 \right)\mathbf{j}, \quad (7)$$

como se pide demostrar en el ejercicio 29.

Movimiento de un proyectil con ráfagas de viento

El siguiente ejemplo ilustra cómo tomar en cuenta otra fuerza que actúa sobre un proyectil y que se debe a ráfagas de viento. También suponemos que la trayectoria de la pelota de béisbol del ejemplo 5 está en un plano vertical.

EJEMPLO 5 Una pelota de béisbol es bateada cuando está a 3 ft sobre el suelo. Abandona el bate con una rapidez inicial de 152 ft/seg, formando un ángulo de 20° con la horizontal. En el instante en que la pelota es bateada, una ráfaga instantánea de viento sopla en dirección horizontal en sentido opuesto a la dirección que la pelota está tomando hacia el jardín, agregando un componente de $-8.8\mathbf{i}$ (ft/seg) a la velocidad inicial de la pelota (8.8 ft/seg = 6 mph).

- Obtenga la ecuación vectorial (vector de posición) de la trayectoria de la pelota.
- ¿Qué tan alto sube la pelota y cuándo alcanzará la altura máxima?
- Suponiendo que la pelota no es atrapada, obtenga su alcance y tiempo de vuelo.

Solución

- De acuerdo con la ecuación (3) y tomando en cuenta la ráfaga de viento, la velocidad inicial de la pelota es

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_0 &= (v_0 \cos \alpha)\mathbf{i} + (v_0 \operatorname{sen} \alpha)\mathbf{j} - 8.8\mathbf{i} \\ &= (152 \cos 20^\circ)\mathbf{i} + (152 \operatorname{sen} 20^\circ)\mathbf{j} - (8.8)\mathbf{i} \\ &= (152 \cos 20^\circ - 8.8)\mathbf{i} + (152 \operatorname{sen} 20^\circ)\mathbf{j}. \end{aligned}$$

La posición inicial es $\mathbf{r}_0 = 0\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$. La integración de $d^2\mathbf{r}/dt^2 = -g\mathbf{j}$ da como resultado

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -(gt)\mathbf{j} + \mathbf{v}_0.$$

Una segunda integración da por resultado

$$\mathbf{r} = -\frac{1}{2}gt^2\mathbf{j} + \mathbf{v}_0t + \mathbf{r}_0.$$

Al sustituir los valores de \mathbf{v}_0 y \mathbf{r}_0 en la última ecuación, obtenemos el vector de posición de la pelota.

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= -\frac{1}{2}gt^2\mathbf{j} + \mathbf{v}_0t + \mathbf{r}_0 \\ &= -16t^2\mathbf{j} + (152 \cos 20^\circ - 8.8)t\mathbf{i} + (152 \sin 20^\circ)t\mathbf{j} + 3\mathbf{j} \\ &= (152 \cos 20^\circ - 8.8)t\mathbf{i} + (3 + (152 \sin 20^\circ)t - 16t^2)\mathbf{j}.\end{aligned}$$

- (b) La pelota alcanza su punto más alto cuando el componente vertical de la velocidad es cero, es decir,

$$\frac{dy}{dt} = 152 \sin 20^\circ - 32t = 0.$$

Al despejar t obtenemos

$$t = \frac{152 \sin 20^\circ}{32} \approx 1.62 \text{ seg.}$$

Al sustituir este tiempo en el componente vertical de \mathbf{r} obtenemos la altura máxima

$$\begin{aligned}y_{\text{máx}} &= 3 + (152 \sin 20^\circ)(1.62) - 16(1.62)^2 \\ &\approx 45.2 \text{ ft.}\end{aligned}$$

Es decir, la altura máxima de la pelota es de alrededor de 45.2 ft, y se alcanza aproximadamente 1.6 segundos después del instante en que es bateada.

- (c) Para ver cuándo toca tierra la pelota, igualamos a 0 el componente vertical de \mathbf{r} y despejamos a t :

$$\begin{aligned}3 + (152 \sin 20^\circ)t - 16t^2 &= 0 \\ 3 + (51.99)t - 16t^2 &= 0.\end{aligned}$$

Los valores que resuelven la ecuación son, aproximadamente, $t = 3.3$ s y $t = -0.06$ seg. Al sustituir el valor positivo en el componente horizontal de \mathbf{r} , obtenemos el alcance

$$\begin{aligned}R &= (152 \cos 20^\circ - 8.8)(3.3) \\ &\approx 442 \text{ ft.}\end{aligned}$$

Por lo tanto, el alcance horizontal es de aproximadamente 442 ft, y el tiempo de vuelo es de alrededor de 3.3 segundos. ■

En los ejercicios 37 y 38 consideramos el movimiento del proyectil cuando existe resistencia del aire que frena el vuelo.

Ejercicios 13.2

Integración de funciones vectoriales

Calcule las integrales de los ejercicios 1 a 10.

$$1. \int_0^1 [t^3\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + (t+1)\mathbf{k}] dt$$

$$2. \int_1^2 \left[(6-6t)\mathbf{i} + 3\sqrt{t}\mathbf{j} + \left(\frac{4}{t^2}\right)\mathbf{k} \right] dt$$

$$3. \int_{-\pi/4}^{\pi/4} [(\sin t)\mathbf{i} + (1 + \cos t)\mathbf{j} + (\sec^2 t)\mathbf{k}] dt$$

$$4. \int_0^{\pi/3} [(\sec t \tan t)\mathbf{i} + (\tan t)\mathbf{j} + (2 \sin t \cos t)\mathbf{k}] dt$$

$$5. \int_1^4 \left[\frac{1}{t}\mathbf{i} + \frac{1}{5-t}\mathbf{j} + \frac{1}{2t}\mathbf{k} \right] dt$$

6. $\int_0^1 \left[\frac{2}{\sqrt{1-t^2}} \mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{1+t^2} \mathbf{k} \right] dt$
7. $\int_0^1 [te^t \mathbf{i} + e^{-t} \mathbf{j} + \mathbf{k}] dt$
8. $\int_1^{\ln 3} [te^t \mathbf{i} + e^t \mathbf{j} + \ln t \mathbf{k}] dt$
9. $\int_0^{\pi/2} [\cos t \mathbf{i} - \sin 2t \mathbf{j} + \sin^2 t \mathbf{k}] dt$
10. $\int_0^{\pi} [\sec t \mathbf{i} + \tan^2 t \mathbf{j} - t \sin t \mathbf{k}] dt$

Problemas con valores iniciales

Resuelva los problemas con valores iniciales que se indican en los ejercicios 11 a 16 para \mathbf{r} como una función vectorial de t .

11. Ecuación diferencial: $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -t\mathbf{i} - t\mathbf{j} - t\mathbf{k}$
Condición inicial: $\mathbf{r}(0) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$
12. Ecuación diferencial: $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = (180t)\mathbf{i} + (180t - 16t^2)\mathbf{j}$
Condición inicial: $\mathbf{r}(0) = 100\mathbf{j}$
13. Ecuación diferencial: $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{3}{2}(t+1)^{1/2}\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j} + \frac{1}{t+1}\mathbf{k}$
Condición inicial: $\mathbf{r}(0) = \mathbf{k}$
14. Ecuación diferencial: $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = (t^3 + 4t)\mathbf{i} + t\mathbf{j} + 2t^2\mathbf{k}$
Condición inicial: $\mathbf{r}(0) = \mathbf{i} + \mathbf{j}$
15. Ecuación diferencial: $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -32\mathbf{k}$
Condición inicial: $\mathbf{r}(0) = 100\mathbf{k}$ y $\left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_{t=0} = 8\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$
16. Ecuación diferencial: $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$
Condición inicial: $\mathbf{r}(0) = 10\mathbf{i} + 10\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$ y $\left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_{t=0} = \mathbf{0}$

Movimiento a lo largo de una línea recta

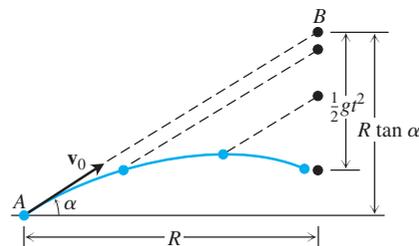
17. En el instante $t = 0$, una partícula se localiza en el punto $(1, 2, 3)$. Viaja en línea recta hasta el punto $(4, 1, 4)$, tiene una rapidez de 2 en $(1, 2, 3)$ y aceleración constante $3\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$. Obtenga la ecuación para el vector de posición $\mathbf{r}(t)$ de la partícula en el instante t .
18. Una partícula que viaja en línea recta se localiza en el punto $(1, -1, 2)$ y tiene una rapidez de 2 en el instante $t = 0$. La partícula se desplaza hacia el punto $(3, 0, 3)$ con una aceleración constante $2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$. Obtenga el vector de posición $\mathbf{r}(t)$ en el instante t .

Movimiento de proyectiles

Los proyectiles de los siguientes ejercicios deben considerarse ideales, a menos que se indique lo contrario. Se supone que los ángulos de lanzamiento se miden con respecto a y a partir de la horizontal. Se supone que todos los proyectiles se lanzan desde el origen y sobre una superficie horizontal a menos que se especifique de otra forma.

19. **Tiempo de recorrido** Un proyectil es disparado a una rapidez de 840 m/seg con un ángulo de 60° . ¿Cuánto tiempo tardará en alcanzar un desplazamiento horizontal de 21 km?

20. **Cálculo de la rapidez de boca** Calcule la rapidez de boca (máxima rapidez inicial) de un cañón cuyo alcance máximo es de 24.5 km.
21. **Tiempo de vuelo y altura** Un proyectil se dispara con una rapidez inicial de 500 m/s con un ángulo de elevación de 45° .
- ¿Cuándo y qué tan lejos tocará tierra el proyectil?
 - ¿A qué altura estará el proyectil cuando se encuentre a una distancia horizontal de 5 km?
 - ¿Cuál es la máxima altura alcanzada por el proyectil?
22. **Lanzamiento de una pelota** Una pelota de béisbol se lanza desde las gradas a 32 ft sobre el campo con un ángulo de 30° hacia arriba con respecto a la horizontal. ¿Cuándo y a qué distancia tocará el suelo si su rapidez inicial es de 32 ft/seg?
23. **Lanzamiento de pelotas de golf** Una máquina que lanza pelotas de golf, dispara al nivel del suelo una pelota con un ángulo de 45° . La pelota toca tierra a 10 m de distancia.
- ¿Cuál fue la rapidez inicial de la pelota?
 - Para la misma rapidez inicial, obtenga los dos ángulos de lanzamiento para los cuales el alcance sea de 6 m.
24. **Haz de electrones** Un electrón en un cinescopio de TV es lanzado horizontalmente con una rapidez de 5×10^6 m/s hacia la parte delantera del tubo a 40 cm de distancia. ¿Aproximadamente a qué distancia caerá el electrón antes de que choque?
25. **Ángulos de disparo de igual alcance** ¿Cuáles son los dos ángulos de elevación que harán que un proyectil alcance un objetivo a 16 km de distancia al mismo nivel del arma si la velocidad inicial del proyectil es de 400 m/seg?
26. **Alcance y altura contra rapidez**
- Demuestre que al duplicar la rapidez inicial de un proyectil con un ángulo de lanzamiento dado, su alcance se multiplica por 4.
 - ¿En qué porcentaje debe incrementarse la rapidez inicial para duplicar la altura y el alcance?
27. Verifique los resultados dados en el texto (a continuación del ejemplo 4) para la altura máxima, tiempo de vuelo y alcance del movimiento de un proyectil ideal.
28. **Choque de canicas** La figura muestra un experimento con dos canicas. La canica A fue lanzada hacia la canica B con un ángulo de lanzamiento α y a una rapidez inicial v_0 . En el mismo instante, la canica B , en reposo, se dejó caer desde $R \tan \alpha$ unidades directamente sobre un punto a R unidades de distancia horizontal de A . Se encontró que las canicas chocan sin importar cuál es la velocidad inicial v_0 . ¿Fue esto mera coincidencia o debía ocurrir? Justifique su respuesta.



29. **Disparo desde (x_0, y_0)** Deduzca las ecuaciones

$$x = x_0 + (v_0 \cos \alpha)t,$$

$$y = y_0 + (v_0 \sin \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2$$

[véase la ecuación (7) del libro] resolviendo el siguiente problema con los valores iniciales que se indican para un vector \mathbf{r} en el plano.

Ecuación diferencial: $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -g\mathbf{j}$

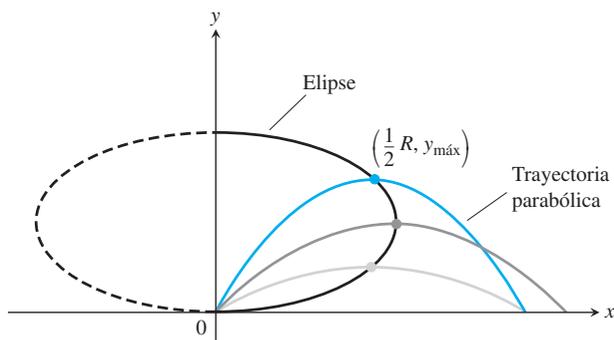
Condiciones iniciales: $\mathbf{r}(0) = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j}$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}(0) = (v_0 \cos \alpha)\mathbf{i} + (v_0 \sin \alpha)\mathbf{j}$$

30. Cima de una trayectoria Para un proyectil que se dispara desde el suelo con un ángulo de inclinación α y rapidez inicial v_0 , considere a α como una variable y a v_0 como una constante. Para cada $0 < \alpha < \pi/2$, se obtiene una trayectoria parabólica como se muestra en la figura. Demuestre que los puntos en el plano que proporcionan las alturas máximas de estas trayectorias parabólicas están en la elipse

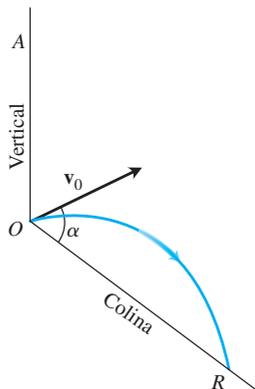
$$x^2 + 4\left(y - \frac{v_0^2}{4g}\right)^2 = \frac{v_0^4}{4g^2},$$

donde $x \geq 0$.

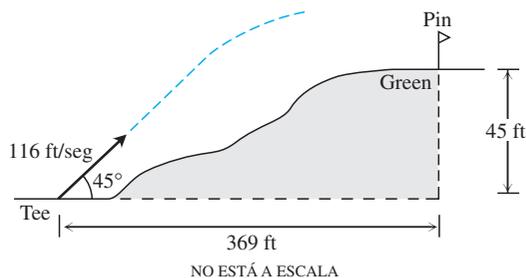


31. Lanzamiento colina abajo Un proyectil ideal es lanzado directamente hacia abajo en un plano inclinado, como se muestra en la figura.

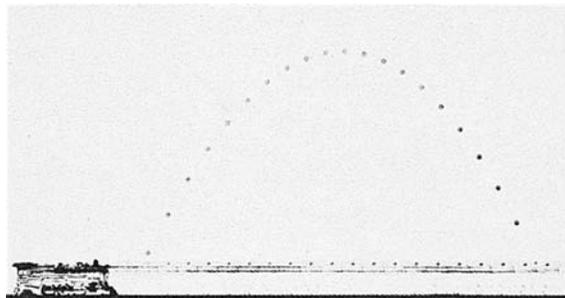
- Demuestre que el alcance máximo colina abajo se obtiene cuando el vector de velocidad inicial biseca al ángulo AOR .
- Si el proyectil fuera lanzado colina arriba en vez de hacia abajo, ¿qué ángulo de lanzamiento maximiza su alcance? Justifique su respuesta.



32. Green elevado Una pelota de golf es golpeada hacia el green que está 45 ft arriba del tee (soporte donde se coloca la bola), como se muestra en la figura, con una rapidez inicial de 116 ft/seg y con un ángulo de elevación de 45° desde el tee. Suponiendo que el pin, a una distancia horizontal de 369 ft, no se encuentra en el camino de la pelota, ¿dónde caerá la pelota en relación con el pin?



- Voleibol** Un balón de voleibol es golpeado cuando está a 4 ft sobre el suelo y a 12 ft de una red de 6 ft de altura. El balón deja el punto de impacto con una rapidez inicial de 35 ft/seg a un ángulo de 27° y pasa para el equipo contrario sin ser tocado.
 - Obtenga la ecuación vectorial para la trayectoria del balón.
 - ¿Qué altura alcanza el balón y cuándo alcanza su altura máxima?
 - Obtenga su alcance y su tiempo de vuelo.
 - ¿Cuándo está a 7 ft sobre el suelo? ¿A qué distancia horizontal se encuentra el balón del punto donde tocará el suelo?
 - Suponga que la red se eleva a 8 ft. ¿Esto cambia las cosas? Explique.
- Lanzamiento de bala** En 1987, en Moscú, Natalya Lisouskaya estableció un récord mundial femenino en lanzamiento de bala de 8 libras 13 onzas lanzándola a una distancia de 73 ft 10 in. Suponiendo que lanzó la bala a un ángulo de 40° con respecto a la horizontal, desde 6.5 ft sobre el suelo, ¿cuál fue la rapidez inicial de la bala?
- Tren miniatura** La siguiente fotografía multiframe muestra un tren miniatura que se desplaza con una rapidez constante en una vía horizontal recta. Conforme la máquina se desplaza, una canica se lanza hacia el aire mediante un resorte en la chimenea de la locomotora. La canica continúa moviéndose con la misma rapidez hacia adelante que la máquina, y regresa a ésta un segundo después del lanzamiento. Mida el ángulo que forma la trayectoria de la canica con la horizontal y use la información para determinar la altura máxima de la canica y la rapidez de la locomotora.

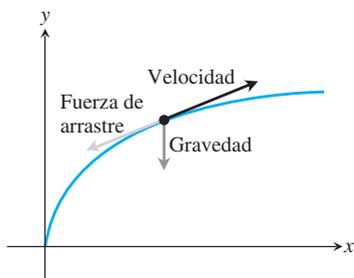


- Bateo de una pelota de béisbol bajo la influencia de una ráfaga de viento** Una pelota de béisbol es golpeada cuando está a 2.5 ft sobre el suelo. Abandona el bate con una rapidez inicial de 145 ft/seg y un ángulo de lanzamiento de 23° . En el instante del golpe, una ráfaga instantánea de viento sopla contra la pelota, agregando un componente de $-14\mathbf{i}$ (ft/seg) a la velocidad inicial de la pelota. Una barda de 15 ft de alto está a 300 ft del home (el pentágono en la caja de bateo) en la dirección del vuelo.
 - Obtenga una ecuación vectorial para la trayectoria de la pelota.
 - ¿A qué altura llega la pelota, y cuándo alcanza su máxima altura?

- Calcule el alcance y el tiempo de vuelo de la pelota, suponiendo que no es atrapada.
- ¿Cuándo está la pelota a 20 ft de altura? ¿A qué distancia (horizontal) está la pelota del home a esta altura?
- ¿Conecta el bateador un jonrón? Explique.

Movimiento de proyectiles con arrastre lineal

La principal fuerza que afecta al movimiento de un proyectil, además de la gravedad, es la resistencia del aire. Esta **fuerza de retención** es una fuerza de arrastre o resistencia, y actúa en dirección opuesta a la velocidad del proyectil (véase la figura). Sin embargo, para el movimiento de proyectiles a través del aire con una rapidez relativamente baja, la fuerza de arrastre es (aproximadamente) proporcional a la rapidez (elevada a la primera potencia) y, por lo mismo, se llama **lineal**.



- 37. Arrastre lineal** Deduzca las ecuaciones

$$x = \frac{v_0}{k}(1 - e^{-kt}) \cos \alpha$$

$$y = \frac{v_0}{k}(1 - e^{-kt})(\sin \alpha) + \frac{g}{k^2}(1 - kt - e^{-kt})$$

resolviendo el siguiente problema con condiciones iniciales para un vector \mathbf{r} en el plano.

Ecuación diferencial: $\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -g\mathbf{j} - k\mathbf{v} = -g\mathbf{j} - k \frac{d\mathbf{r}}{dt}$

Condiciones iniciales: $\mathbf{r}(0) = \mathbf{0}$

$$\left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_{t=0} = \mathbf{v}_0 = (v_0 \cos \alpha)\mathbf{i} + (v_0 \sin \alpha)\mathbf{j}$$

El **coeficiente de arrastre** k es una constante positiva que representa la resistencia debida a la densidad del aire, v_0 y α son la rapidez inicial y el ángulo de lanzamiento del proyectil, y g es la aceleración de la gravedad.

- 38. Bateo de una pelota de béisbol con arrastre lineal** Considere el problema de la pelota de béisbol del ejemplo 5 cuando hay un arrastre lineal (véase el ejercicio 37). Suponga que el coeficiente de arrastre es $k = 0.12$, pero sin ráfagas de viento.
- Con base en el ejercicio 37, obtenga la forma vectorial de la trayectoria de la pelota.
 - ¿Qué altura alcanza la pelota y cuándo alcanza la máxima altura?
 - Obtenga el alcance y tiempo de vuelo de la pelota.
 - ¿Cuándo está la pelota a 30 ft de altura? ¿A qué distancia (horizontal) está la pelota del home a esa altura?
 - Una barda de 10 ft de altura se encuentra a 340 ft del home en dirección del vuelo de la pelota. El jardinero puede saltar y atrapar cualquier pelota a 11 ft por arriba del suelo para impedir que se vaya sobre la barda. ¿El bateador conecta un hit o un jonrón?

Teoría y ejemplos

- 39.** Establezca las siguientes propiedades de las funciones vectoriales integrables.

- a. La *regla de múltiplos escalares constantes*:

$$\int_a^b k\mathbf{r}(t) dt = k \int_a^b \mathbf{r}(t) dt \quad (\text{cualquier escalar } k)$$

La *regla para negativos*,

$$\int_a^b (-\mathbf{r}(t)) dt = - \int_a^b \mathbf{r}(t) dt,$$

se obtiene considerando $k = -1$.

- b. Las *reglas de suma y resta*:

$$\int_a^b (\mathbf{r}_1(t) \pm \mathbf{r}_2(t)) dt = \int_a^b \mathbf{r}_1(t) dt \pm \int_a^b \mathbf{r}_2(t) dt$$

- c. La *regla de múltiplos vectoriales constantes*:

$$\int_a^b \mathbf{C} \cdot \mathbf{r}(t) dt = \mathbf{C} \cdot \int_a^b \mathbf{r}(t) dt \quad (\text{cualquier vector constante } \mathbf{C})$$

y

$$\int_a^b \mathbf{C} \times \mathbf{r}(t) dt = \mathbf{C} \times \int_a^b \mathbf{r}(t) dt \quad (\text{cualquier vector constante } \mathbf{C})$$

- 40. Productos de funciones escalares y vectoriales** Suponga que la función escalar $u(t)$ y la función vectorial $\mathbf{r}(t)$ están definidas para $a \leq t \leq b$.

- Demuestre que $u\mathbf{r}$ es continua en $[a, b]$ si u y \mathbf{r} son continuas en $[a, b]$.
- Si u y \mathbf{r} son derivables en $[a, b]$, demuestre que $u\mathbf{r}$ es derivable en $[a, b]$ y que

$$\frac{d}{dt}(u\mathbf{r}) = u \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \mathbf{r} \frac{du}{dt}.$$

- 41. Antiderivadas de funciones vectoriales**

- Con base en el corolario 2 del teorema del valor medio para funciones escalares, demuestre que si dos funciones vectoriales $\mathbf{R}_1(t)$ y $\mathbf{R}_2(t)$ tienen derivadas idénticas en un intervalo I , entonces las funciones difieren en I por un vector constante.
- Con base en el resultado del inciso (a), demuestre que si $\mathbf{R}(t)$ es cualquier antiderivada de $\mathbf{r}(t)$ en I , entonces cualquier otra antiderivada de \mathbf{r} en I es igual a $\mathbf{R}(t) + \mathbf{C}$ para algún vector constante \mathbf{C} .

- 42. El teorema fundamental del cálculo** El teorema fundamental del cálculo de las funciones escalares de una variable real se aplica también para las funciones vectoriales de una variable real. Pruébalo usando el teorema de las funciones escalares para demostrar primero que si una función vectorial $\mathbf{r}(t)$ es continua en $a \leq t \leq b$, entonces

$$\frac{d}{dt} \int_a^t \mathbf{r}(\tau) d\tau = \mathbf{r}(t)$$

en cada punto t de (a, b) . Luego use la conclusión del inciso (b) del ejercicio 41 para demostrar que si \mathbf{R} es cualquier antiderivada de \mathbf{r} en $[a, b]$ entonces

$$\int_a^b \mathbf{r}(t) dt = \mathbf{R}(b) - \mathbf{R}(a).$$

- 43. Bateo de una pelota de béisbol con arrastre lineal bajo una ráfaga de viento** Considere otra vez el problema de la pelota de béisbol del ejemplo 5. Esta vez suponga un coeficiente de arrastre de 0.08 y una ráfaga instantánea de viento que agrega un componente de $-17.6\mathbf{i}$ (ft/seg) a la rapidez inicial en el momento en que la pelota es golpeada.
- Obtenga una ecuación vectorial para la trayectoria de la pelota.
 - ¿Qué altura alcanza la pelota y cuándo alcanza su máxima altura?
 - Calcule el alcance y tiempo de vuelo de la pelota.
 - ¿Cuándo está la pelota a 35 ft de altura? ¿A qué distancia (horizontal) se encuentra la pelota del home a esa altura?

e. Una barda de 20 ft de alto está a 380 ft del home en la dirección del vuelo de la pelota. ¿El bateador hace un jonrón? Si la respuesta es afirmativa, ¿qué cambio en el componente horizontal de la velocidad inicial de la pelota hubiera mantenido a la pelota dentro del parque? En caso negativo, ¿qué cambio le hubiera permitido ser un jonrón?

- 44. Altura contra tiempo** Demuestre que un proyectil llega a tres cuartos de su altura máxima en la mitad del tiempo que le toma alcanzar la máxima altura.

13.3 Longitud de arco en el espacio

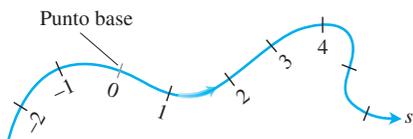


FIGURA 13.12 En las curvas suaves puede marcarse una escala como en la recta numérica. La coordenada de cada punto es su distancia dirigida a lo largo de la curva hasta un punto base preseleccionado.

En esta sección y en las dos siguientes estudiaremos los parámetros matemáticos asociados con la forma de una curva que describen qué tanto ésta se curva o se tuerce.

Longitud de arco a lo largo de una curva en el espacio

Una de las características de las curvas suaves en el espacio y en el plano es que se puede medir su longitud. Esto nos permite localizar puntos en estas curvas por medio de su distancia dirigida, s , a lo largo de la curva y desde un punto base, de la misma forma en que localizamos puntos en los ejes coordenados al dar su distancias dirigidas al origen (figura 13.12). Esto es lo que hicimos para curvas en el plano en la sección 11.2.

Para medir la distancia a lo largo de una curva suave en el espacio, agregamos el término z a la fórmula que usamos para las curvas en el plano.

DEFINICIÓN La **longitud** de una curva suave $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$, $a \leq t \leq b$, recorrida exactamente una vez cuando t va desde $t = a$ hasta $t = b$, es

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt. \tag{1}$$

Al igual que con las curvas planas, podemos calcular la longitud de una curva en el espacio a partir de cualquier parametrización conveniente que satisfaga las condiciones requeridas. Omitiremos la prueba.

La raíz cuadrada en la ecuación (1) es $|\mathbf{v}|$, la longitud del vector velocidad $d\mathbf{r}/dt$. Esto nos permite escribir la fórmula de la longitud en forma simplificada.

Fórmula para la longitud de un arco

$$L = \int_a^b |\mathbf{v}| dt \tag{2}$$

EJEMPLO 1 Un planeador se eleva a lo largo de la hélice $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$. ¿Cuál es la longitud de la trayectoria del planeador, desde $t = 0$ hasta $t = 2\pi$?

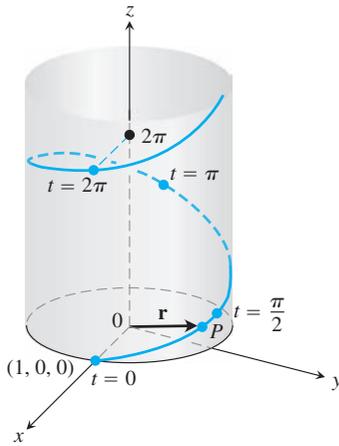


FIGURA 13.13 La hélice del ejemplo (1), $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$.

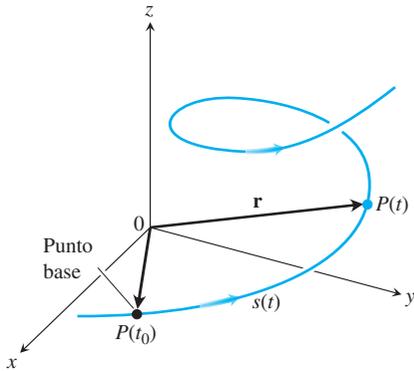


FIGURA 13.14 La distancia dirigida a lo largo de la curva desde $P(t_0)$ hasta cualquier punto $P(t)$ es

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\mathbf{v}(\tau)| d\tau.$$

Solución El segmento de la trayectoria durante este tiempo corresponde a una vuelta completa de la hélice (figura 13.13). La longitud de esta parte de la curva es

$$\begin{aligned} L &= \int_a^b |\mathbf{v}| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sen t)^2 + (\cos t)^2 + (1)^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2} dt = 2\pi\sqrt{2} \text{ unidades de longitud.} \end{aligned}$$

Esto es $\sqrt{2}$ veces la longitud de la circunferencia en el plano xy sobre el cual se eleva la hélice. ■

Si seleccionamos un punto base $P(t_0)$ en una curva suave C parametrizada por t , cada valor de t determina un punto $P(t) = (x(t), y(t), z(t))$ en C y una “distancia dirigida”

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\mathbf{v}(\tau)| d\tau,$$

medida a lo largo de C desde el punto base (figura 13.14). Ésta es la función de longitud de arco que definimos en la sección 11.2 para curvas planas que no tienen un componente z . Si $t > t_0$, $s(t)$ es la distancia a lo largo de la curva de $P(t_0)$ hasta $P(t)$. Si $t < t_0$, $s(t)$ es el negativo de la distancia. Cada valor de s determina un punto en C , y esto parametriza a C con respecto a s . Llamamos a s un **parámetro de longitud de arco** de la curva. El valor del parámetro se incrementa en la dirección en la que crece t . Veremos que el parámetro de longitud de arco es particularmente útil al estudiar los giros y las torsiones naturales a una curva en el espacio.

Parámetro de longitud de arco con punto base $P(t_0)$

$$s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{[x'(\tau)]^2 + [y'(\tau)]^2 + [z'(\tau)]^2} d\tau = \int_{t_0}^t |\mathbf{v}(\tau)| d\tau \quad (3)$$

Usamos la letra griega τ (“tau”) como variable de integración en la ecuación (3), porque la letra t ya la estamos usando como límite superior.

Si una curva $\mathbf{r}(t)$ ya está dada en términos de algún parámetro t , y $s(t)$ es la función de longitud de arco dada por la ecuación (3), entonces a veces podemos despejar t como función de s : $t = t(s)$. Así, la curva se puede reparametrizar en términos de s sustituyendo a t : $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t(s))$. La nueva parametrización identifica un punto en la curva con su distancia dirigida a lo largo de la curva desde el punto base.

EJEMPLO 2 Éste es un ejemplo en el cual sí podemos encontrar la parametrización por longitud de arco de una curva. Si $t_0 = 0$, el parámetro de la longitud de arco a lo largo de la hélice

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

de t_0 a t es

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_{t_0}^t |\mathbf{v}(\tau)| d\tau && \text{Ecuación (3)} \\ &= \int_0^t \sqrt{2} d\tau && \text{Valor del ejemplo 1} \\ &= \sqrt{2} t. \end{aligned}$$

Al despejar t de esta ecuación, obtenemos que $t = s/\sqrt{2}$. Sustituimos este valor en el vector de posición \mathbf{r} para obtener la siguiente parametrización por longitud de arco para la hélice:

$$\mathbf{r}(t(s)) = \left(\cos \frac{s}{\sqrt{2}} \right) \mathbf{i} + \left(\sin \frac{s}{\sqrt{2}} \right) \mathbf{j} + \frac{s}{\sqrt{2}} \mathbf{k}. \quad \blacksquare$$

BIOGRAFÍA HISTÓRICA

Josiah Willard Gibbs
(1839–1903)

A diferencia del ejemplo 2, la parametrización por longitud de arco es en general difícil de calcular para una curva ya parametrizada en términos de algún otro parámetro t . Sin embargo, y por fortuna, rara vez necesitamos una fórmula exacta para $s(t)$ o su inversa $t(s)$.

Rapidez en una curva suave

Puesto que las derivadas dentro del radical de la ecuación (3) son continuas (la curva es suave), el teorema fundamental del cálculo nos dice que s es una función derivable de t con derivada

$$\frac{ds}{dt} = |\mathbf{v}(t)|. \tag{4}$$

La ecuación (4) dice que la rapidez con la cual se mueve una partícula a lo largo de su trayectoria es la magnitud de \mathbf{v} , lo cual es consistente con lo que ya sabemos.

Si bien el punto base $P(t_0)$ tiene que ver con la definición de s en la ecuación (3), éste no desempeña ningún papel en la ecuación (4). La tasa a la que una partícula en movimiento recorre distancia a lo largo de su trayectoria, es independiente de lo lejos que se encuentre del punto base.

Observe que $ds/dt > 0$ puesto que, por definición, $|\mathbf{v}|$ nunca se anula para una curva suave. Vemos otra vez que s es una función creciente de t .

Vector tangente unitario \mathbf{T}

Ya sabemos que el vector velocidad $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ es tangente a la curva $\mathbf{r}(t)$ y que el vector

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$$

es, por lo tanto, un vector tangente unitario a la curva (suave), llamado **vector tangente unitario** (figura 13.15). El vector tangente unitario \mathbf{T} es una función derivable de t siempre que \mathbf{v} sea una función derivable de t . Como veremos en la sección 13.5, \mathbf{T} es uno de tres vectores unitarios en un sistema de referencia móvil que se usa para describir el movimiento de objetos que viajan en tres dimensiones.

EJEMPLO 3 Obtenga el vector tangente unitario a la curva

$$\mathbf{r}(t) = (3 \cos t)\mathbf{i} + (3 \sin t)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$$

que representa la trayectoria del planeador del ejemplo 3, en la sección 13.2.

Solución En aquel ejemplo, obtuvimos

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -(3 \sin t)\mathbf{i} + (3 \cos t)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$$

y

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{9 + 4t^2}.$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = -\frac{3 \sin t}{\sqrt{9 + 4t^2}}\mathbf{i} + \frac{3 \cos t}{\sqrt{9 + 4t^2}}\mathbf{j} + \frac{2t}{\sqrt{9 + 4t^2}}\mathbf{k}. \quad \blacksquare$$

Para el movimiento en sentido contrario de las manecillas del reloj

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j}$$

alrededor de la circunferencia unitaria, vemos que

$$\mathbf{v} = (-\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j}$$

ya es un vector unitario, de manera que $\mathbf{T} = \mathbf{v}$ (figura 13.16).

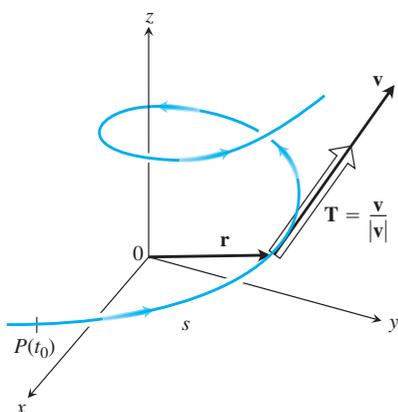


FIGURA 13.15 Obtenemos el vector tangente unitario \mathbf{T} dividiendo \mathbf{v} entre $|\mathbf{v}|$.

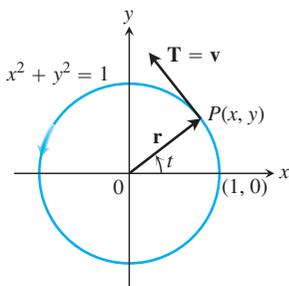


FIGURA 13.16 Movimiento en sentido contrario de las manecillas del reloj alrededor de la circunferencia unitaria.

El vector velocidad es el cambio en el vector de posición \mathbf{r} con respecto al tiempo t , pero ¿cómo cambia el vector de posición con respecto a la longitud de arco? Más exactamente, ¿cuál es la derivada $d\mathbf{r}/ds$? Puesto que $ds/dt > 0$ para las curvas que estamos considerando, s es uno a uno y tiene una inversa que pone a t como una función derivable de s (sección 7.1). La derivada de la inversa es

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{ds/dt} = \frac{1}{|\mathbf{v}|}.$$

Esto hace a \mathbf{r} una función derivable de s cuya derivada puede calcularse con la regla de la cadena y es

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{dt}{ds} = \mathbf{v} \frac{1}{|\mathbf{v}|} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \mathbf{T}. \quad (5)$$

Esta ecuación dice que $d\mathbf{r}/ds$ es el vector tangente unitario en la dirección del vector de la velocidad \mathbf{v} (figura 13.15).

Ejercicios 13.3

Obtención de vectores tangentes y longitudes

En los ejercicios 1 a 8, obtenga el vector tangente unitario a la curva. También, calcule la longitud de la parte indicada de la curva.

- $\mathbf{r}(t) = (2 \cos t)\mathbf{i} + (2 \sin t)\mathbf{j} + \sqrt{5}t\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq \pi$
- $\mathbf{r}(t) = (6 \sin 2t)\mathbf{i} + (6 \cos 2t)\mathbf{j} + 5t\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq \pi$
- $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (2/3)t^{3/2}\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 8$
- $\mathbf{r}(t) = (2 + t)\mathbf{i} - (t + 1)\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 3$
- $\mathbf{r}(t) = (\cos^3 t)\mathbf{j} + (\sin^3 t)\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq \pi/2$
- $\mathbf{r}(t) = 6t^3\mathbf{i} - 2t^3\mathbf{j} - 3t^3\mathbf{k}, \quad 1 \leq t \leq 2$
- $\mathbf{r}(t) = (t \cos t)\mathbf{i} + (t \sin t)\mathbf{j} + (2\sqrt{2}/3)t^{3/2}\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq \pi$
- $\mathbf{r}(t) = (t \sin t + \cos t)\mathbf{i} + (t \cos t - \sin t)\mathbf{j}, \quad \sqrt{2} \leq t \leq 2$
- Obtenga el punto sobre la curva

$$\mathbf{r}(t) = (5 \sin t)\mathbf{i} + (5 \cos t)\mathbf{j} + 12t\mathbf{k}$$

que se encuentra a una distancia, a lo largo de la curva, de 26π unidades desde el punto $(0, 5, 0)$ y en la dirección en la que crece la longitud de arco.

- Determine el punto en la curva

$$\mathbf{r}(t) = (12 \sin t)\mathbf{i} - (12 \cos t)\mathbf{j} + 5t\mathbf{k}$$

que se encuentra a una distancia de 13π unidades a lo largo de la curva desde el punto $(0, -12, 0)$ en la dirección opuesta a la dirección en que crece la longitud de arco.

Parámetro de longitud de arco

En los ejercicios 11 a 14, obtenga el parámetro de longitud de arco a lo largo de la curva desde el punto donde $t = 0$, calculando la integral

$$s = \int_0^t |\mathbf{v}(\tau)| d\tau$$

de la ecuación (3). Luego calcule la longitud de la parte indicada de la curva.

- $\mathbf{r}(t) = (4 \cos t)\mathbf{i} + (4 \sin t)\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq \pi/2$
- $\mathbf{r}(t) = (\cos t + t \sin t)\mathbf{i} + (\sin t - t \cos t)\mathbf{j}, \quad \pi/2 \leq t \leq \pi$
- $\mathbf{r}(t) = (e^t \cos t)\mathbf{i} + (e^t \sin t)\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}, \quad -\ln 4 \leq t \leq 0$
- $\mathbf{r}(t) = (1 + 2t)\mathbf{i} + (1 + 3t)\mathbf{j} + (6 - 6t)\mathbf{k}, \quad -1 \leq t \leq 0$

Teoría y ejemplos

- Longitud de arco** Calcule la longitud de la curva

$$\mathbf{r}(t) = (\sqrt{2}t)\mathbf{i} + (\sqrt{2}t)\mathbf{j} + (1 - t^2)\mathbf{k}$$

desde $(0, 0, 1)$ a $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$.

- Longitud de una hélice** La longitud $2\pi\sqrt{2}$ de una de las vueltas de la hélice del ejemplo 1 es también la longitud de la diagonal de un cuadrado de 2π unidades de longitud por lado. Muestre cómo obtener este cuadrado cortando y aplanando una parte del cilindro en el que se enrolla la hélice.

- Elipse**

a. Demuestre que la curva $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + (1 - \cos t)\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ es una elipse, mostrando que es la intersección de un cilindro circular recto y un plano. Obtenga las ecuaciones del cilindro y del plano.

b. Grafique la elipse en el cilindro. Agregue a su gráfica los vectores tangentes unitarios en $t = 0, \pi/2, \pi$, y $3\pi/2$.

c. Demuestre que el vector de aceleración siempre es paralelo al plano (ortogonal a un vector normal al plano). Por lo tanto, si dibuja la aceleración como un vector unido a la elipse, estará en el plano de la elipse. Agregue a su dibujo los vectores de aceleración para $t = 0, \pi/2, \pi$, y $3\pi/2$.

d. Escriba una integral para la longitud de la elipse. No trate de calcular la integral, pues no es integrable en términos elementales.

- T** e. **Integrador numérico** Calcule la longitud de la elipse con precisión de dos cifras decimales.

- La longitud es independiente de la parametrización** Para ilustrar el hecho de que la longitud de una curva suave en el espacio no depende de la parametrización que use para calcularla, calcule la longitud de una vuelta de la hélice del ejemplo 1 con las siguientes parametrizaciones.

a. $\mathbf{r}(t) = (\cos 4t)\mathbf{i} + (\sin 4t)\mathbf{j} + 4t\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq \pi/2$

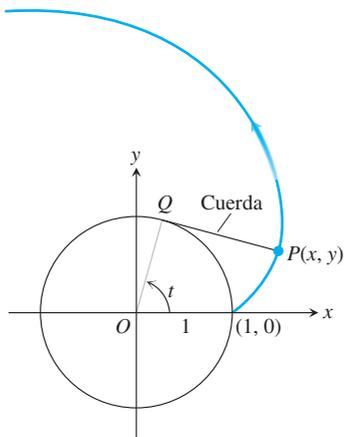
b. $\mathbf{r}(t) = [\cos(t/2)]\mathbf{i} + [\sin(t/2)]\mathbf{j} + (t/2)\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 4\pi$

c. $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} - (\sin t)\mathbf{j} - t\mathbf{k}, \quad -2\pi \leq t \leq 0$

19. La involuta de una circunferencia Si una cuerda enrollada alrededor de una circunferencia fija se desenrolla manteniéndola tensa y en el plano de la circunferencia, su extremo P traza una *involuta* de la circunferencia. En la figura, se muestra la circunferencia en cuestión, la cual está dada por $x^2 + y^2 = 1$, y el punto que traza la curva comienza en $(1, 0)$. La parte no desenrollada de la cuerda es tangente a la circunferencia en Q , y t es la medida en radianes del ángulo del eje x positivo al segmento OQ . Deduzca las ecuaciones paramétricas

$$x = \cos t + t \operatorname{sen} t, \quad y = \operatorname{sen} t - t \cos t, \quad t > 0$$

del punto $P(x, y)$ de la involuta.



- 20. (Continuación del ejercicio 19). Obtenga el vector tangente unitario de la involuta de la circunferencia en el punto $P(x, y)$.
- 21. **Distancia a lo largo de una recta** Demuestre que si \mathbf{u} es un vector unitario, entonces el parámetro de la longitud de arco a lo largo de la recta $\mathbf{r}(t) = P_0 + t\mathbf{u}$ desde el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ donde $t = 0$ es t mismo.
- 22. Utilice la regla de Simpson con $n = 10$ para aproximar la longitud de arco de $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$ desde el origen al punto $(2, 4, 8)$.

13.4 Curvatura y vectores normales de una curva

En esta sección estudiaremos cómo se dobla o tuerce una curva. Veremos primero las curvas en el plano coordenado y luego las curvas en el espacio.

Curvatura de una curva plana

Cuando una partícula se mueve a lo largo de una curva suave en el plano, $\mathbf{T} = d\mathbf{r}/ds$ gira conforme la curva se va doblando. Puesto que \mathbf{T} es un vector unitario, su longitud es constante y sólo cambia su dirección cuando la partícula se desplaza a lo largo de la curva. La razón a la que \mathbf{T} gira por unidad de longitud a lo largo de la curva se llama *curvatura* (figura 13.17). El símbolo tradicional para la función de curvatura es la letra griega κ ("kappa").

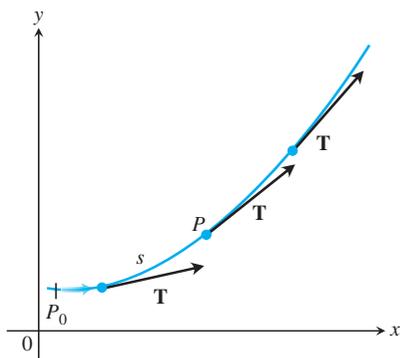


FIGURA 13.17 Cuando P se mueve a lo largo de la curva, en la dirección en que crece la longitud del arco, el vector tangente unitario va girando. El valor de $|d\mathbf{T}/ds|$ en P se llama la *curvatura* de la curva en P .

DEFINICIÓN Si \mathbf{T} es el vector tangente unitario de una curva suave, la función de **curvatura** de la curva es

$$\kappa = \left| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right|.$$

Si $|d\mathbf{T}/ds|$ es grande, \mathbf{T} gira rápidamente cuando la partícula pasa por P , y la curvatura en P también es grande. Si $|d\mathbf{T}/ds|$ es cercana a cero, \mathbf{T} gira más lentamente y la curvatura en P es menor.

Si una curva regular $\mathbf{r}(t)$ está dada en términos de otro parámetro t diferente al parámetro de longitud de arco s , podemos calcular la curvatura como

$$\begin{aligned}\kappa &= \left| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right| = \left| \frac{d\mathbf{T}}{dt} \frac{dt}{ds} \right| && \text{Regla de la cadena} \\ &= \frac{1}{|ds/dt|} \left| \frac{d\mathbf{T}}{dt} \right| \\ &= \frac{1}{|\mathbf{v}|} \left| \frac{d\mathbf{T}}{dt} \right|. && \frac{ds}{dt} = |\mathbf{v}|\end{aligned}$$

Fórmula para el cálculo de la curvatura

Si $\mathbf{r}(t)$ es una curva suave, entonces la curvatura es

$$\kappa = \frac{1}{|\mathbf{v}|} \left| \frac{d\mathbf{T}}{dt} \right|, \quad (1)$$

donde $\mathbf{T} = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ es el vector tangente unitario.

Para poner a prueba la definición, veremos en los ejemplos 1 y 2 que aparecen a continuación que la curvatura es constante para las líneas rectas y las circunferencias.

EJEMPLO 1 Una línea recta es parametrizada por $\mathbf{r}(t) = \mathbf{C} + t\mathbf{v}$ para vectores constantes \mathbf{C} y \mathbf{v} . Por lo tanto, $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{v}$ y el vector tangente unitario $\mathbf{T} = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ es un vector constante que siempre apunta en la misma dirección y su derivada es $\mathbf{0}$ (figura 13.18). Se deduce que, para cualquier valor del parámetro t , la curvatura de la línea recta es

$$\kappa = \frac{1}{|\mathbf{v}|} \left| \frac{d\mathbf{T}}{dt} \right| = \frac{1}{|\mathbf{v}|} |\mathbf{0}| = 0. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 2 Aquí obtenemos la curvatura de una circunferencia. Empezamos con la parametrización

$$\mathbf{r}(t) = (a \cos t)\mathbf{i} + (a \sin t)\mathbf{j}$$

de una circunferencia de radio a . Entonces,

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -(a \sin t)\mathbf{i} + (a \cos t)\mathbf{j} \\ |\mathbf{v}| &= \sqrt{(-a \sin t)^2 + (a \cos t)^2} = \sqrt{a^2} = |a| = a. && \text{Puesto que } a > 0, \\ &&& |a| = a.\end{aligned}$$

De esto obtenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = -(\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j} \\ \frac{d\mathbf{T}}{dt} &= -(\cos t)\mathbf{i} - (\sin t)\mathbf{j} \\ \left| \frac{d\mathbf{T}}{dt} \right| &= \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1.\end{aligned}$$

Por lo tanto, para cualquier valor del parámetro t , la curvatura de la circunferencia es

$$\kappa = \frac{1}{|\mathbf{v}|} \left| \frac{d\mathbf{T}}{dt} \right| = \frac{1}{a} (1) = \frac{1}{a} = \frac{1}{\text{radio}}. \quad \blacksquare$$

Si bien la fórmula para el cálculo de κ en la ecuación (1) también es válida para curvas en el espacio, en la siguiente sección encontraremos otra fórmula que es más conveniente de aplicar, desde el punto de vista computacional.

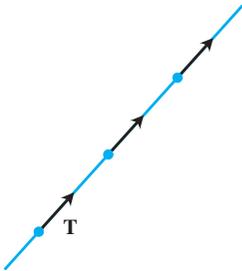


FIGURA 13.18 A lo largo de una línea recta, \mathbf{T} siempre apunta en la misma dirección. La curvatura $|d\mathbf{T}/ds|$ es cero (ejemplo 1).

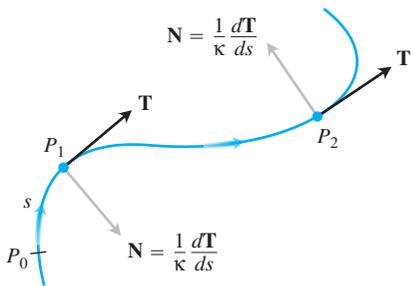


FIGURA 13.19 El vector $d\mathbf{T}/ds$, normal a la curva, siempre apunta en la dirección en la cual \mathbf{T} está girando. El vector normal unitario \mathbf{N} es la dirección de $d\mathbf{T}/ds$.

Entre los vectores ortogonales al vector tangente unitario \mathbf{T} hay uno de particular importancia porque apunta en la dirección en la cual gira la curva. Puesto que \mathbf{T} tiene longitud constante (a saber, 1), la derivada $d\mathbf{T}/ds$ es ortogonal a \mathbf{T} (ecuación 4, sección 13.1). Por lo tanto, si dividimos $d\mathbf{T}/ds$ entre su longitud κ , obtenemos un vector *unitario* \mathbf{N} ortogonal a \mathbf{T} (figura 13.19).

DEFINICIÓN En un punto donde $\kappa \neq 0$, el vector **normal unitario principal** de una curva suave en el plano es

$$\mathbf{N} = \frac{1}{\kappa} \frac{d\mathbf{T}}{ds}.$$

El vector $d\mathbf{T}/ds$ apunta en la dirección en la que \mathbf{T} gira al doblarse la curva. Por lo tanto, si observamos en la dirección en la que la longitud del arco aumenta, el vector $d\mathbf{T}/ds$ apunta hacia la derecha si \mathbf{T} gira en el sentido de las manecillas del reloj, y hacia la izquierda si \mathbf{T} gira en sentido contrario a las manecillas del reloj. En otras palabras, el vector normal principal \mathbf{N} apunta hacia el lado cóncavo de la curva (figura 13.19).

Si una curva suave $\mathbf{r}(t)$ está dada en términos de algún parámetro t diferente del parámetro de longitud de arco s , podemos usar la regla de la cadena para calcular \mathbf{N} directamente:

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \frac{d\mathbf{T}/ds}{|d\mathbf{T}/ds|} \\ &= \frac{(d\mathbf{T}/dt)(dt/ds)}{|d\mathbf{T}/dt||dt/ds|} \\ &= \frac{d\mathbf{T}/dt}{|d\mathbf{T}/dt|}. \end{aligned} \quad \frac{dt}{ds} = \frac{1}{ds/dt} > 0 \text{ se cancela.}$$

Esta fórmula nos permite obtener \mathbf{N} sin necesidad de hallar primero κ y s .

Fórmula para calcular \mathbf{N}

Si $\mathbf{r}(t)$ es una curva suave, entonces el vector normal unitario principal es

$$\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{T}/dt}{|d\mathbf{T}/dt|}, \tag{2}$$

donde $\mathbf{T} = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ es el vector tangente unitario.

EJEMPLO 3 Obtenga \mathbf{T} y \mathbf{N} para el movimiento circular

$$\mathbf{r}(t) = (\cos 2t)\mathbf{i} + (\sin 2t)\mathbf{j}.$$

Solución Primero encontramos \mathbf{T} :

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= -(2 \sin 2t)\mathbf{i} + (2 \cos 2t)\mathbf{j} \\ |\mathbf{v}| &= \sqrt{4 \sin^2 2t + 4 \cos^2 2t} = 2 \\ \mathbf{T} &= \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = -(\sin 2t)\mathbf{i} + (\cos 2t)\mathbf{j}. \end{aligned}$$

A partir de esto vemos que

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{T}}{dt} &= -(2 \cos 2t)\mathbf{i} - (2 \sin 2t)\mathbf{j} \\ \left| \frac{d\mathbf{T}}{dt} \right| &= \sqrt{4 \cos^2 2t + 4 \sin^2 2t} = 2 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\mathbf{N} &= \frac{d\mathbf{T}/dt}{|d\mathbf{T}/dt|} \\ &= -(\cos 2t)\mathbf{i} - (\sin 2t)\mathbf{j}. \quad \text{Ecuación (2)}\end{aligned}$$

Observe que $\mathbf{T} \cdot \mathbf{N} = 0$, lo que comprueba que \mathbf{N} es ortogonal a \mathbf{T} . Advierta también que, para este movimiento circular, \mathbf{N} apunta de $\mathbf{r}(t)$ hacia el centro de la circunferencia en el origen. ■

Círculo de curvatura para curvas planas

El **círculo de curvatura** o **círculo osculador** en un punto P de una curva plana donde $\kappa \neq 0$ es el círculo en el plano de la curva que

1. Es tangente a la curva en P (tiene la misma recta tangente que la curva)
2. Tiene la misma curvatura que tiene la curva en P
3. Está del lado cóncavo o interno de la curva (como en la figura 13.20).

El **radio de curvatura** de la curva en P es el radio del círculo de curvatura, el cual, de acuerdo con el ejemplo 2, es

$$\text{Radio de curvatura} = \rho = \frac{1}{\kappa}.$$

Para determinar ρ , obtenemos κ y tomamos su recíproco. El **centro de curvatura** de la curva en P es el centro del círculo de curvatura.

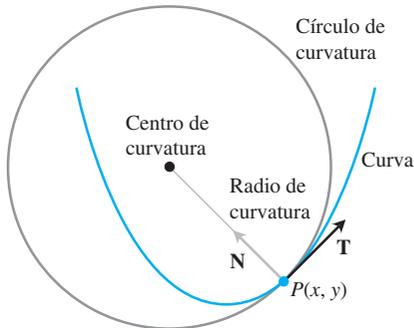


FIGURA 13.20 El círculo osculador en $P(x, y)$ está hacia el lado interior de la curva.

EJEMPLO 4 Obtenga y grafique el círculo osculador de la parábola $y = x^2$ en el origen.

Solución Parametrizamos la parábola con el parámetro $t = x$ (sección 11.1, ejemplo 5)

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}.$$

Primero calculamos la curvatura de la parábola en el origen usando la ecuación (1):

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} \\ |\mathbf{v}| &= \sqrt{1 + 4t^2}\end{aligned}$$

de manera que

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = (1 + 4t^2)^{-1/2}\mathbf{i} + 2t(1 + 4t^2)^{-1/2}\mathbf{j}.$$

A partir de esto vemos que

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = -4t(1 + 4t^2)^{-3/2}\mathbf{i} + [2(1 + 4t^2)^{-1/2} - 8t^2(1 + 4t^2)^{-3/2}]\mathbf{j}.$$

En el origen, $t = 0$, por lo que la curvatura es

$$\begin{aligned}\kappa(0) &= \frac{1}{|\mathbf{v}(0)|} \left| \frac{d\mathbf{T}}{dt}(0) \right| \quad \text{Ecuación (1)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1}} |0\mathbf{i} + 2\mathbf{j}| \\ &= (1)\sqrt{0^2 + 2^2} = 2.\end{aligned}$$

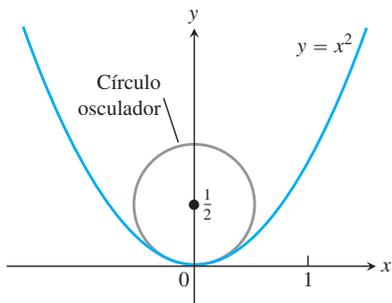


FIGURA 13.21 Círculo osculador de la parábola $y = x^2$ en el origen (ejemplo 4).

Por lo tanto, el radio de curvatura es $1/\kappa = 1/2$. En el origen tenemos que $t = 0$ y $\mathbf{T} = \mathbf{i}$, de manera que $\mathbf{N} = \mathbf{j}$. Por lo tanto, el centro del círculo osculador es $(0, 1/2)$. Así, la ecuación para el círculo osculador es

$$(x - 0)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Como podrá ver en la figura 13.21, el círculo osculador es una mejor aproximación a la parábola en el origen que la aproximación por la recta tangente $y = 0$. ■

Curvatura y vectores normales para curvas en el espacio

Si una curva suave en el espacio está especificada por el vector de posición $\mathbf{r}(t)$ como función de algún parámetro t , y si s es el parámetro de longitud de arco de la curva, entonces el vector tangente unitario \mathbf{T} es $d\mathbf{r}/ds = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$. Por consiguiente, la **curvatura** en el espacio se define como

$$\kappa = \left| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right| = \frac{1}{|\mathbf{v}|} \left| \frac{d\mathbf{T}}{dt} \right| \quad (3)$$

justo como en el caso de curvas planas. El vector $d\mathbf{T}/ds$ es ortogonal a \mathbf{T} , y definimos que el vector **normal unitario principal** como

$$\mathbf{N} = \frac{1}{\kappa} \frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{d\mathbf{T}/dt}{|d\mathbf{T}/dt|}. \quad (4)$$

EJEMPLO 5 Obtenga la curvatura de la hélice (figura 13.22)

$$\mathbf{r}(t) = (a \cos t)\mathbf{i} + (a \sin t)\mathbf{j} + bt\mathbf{k}, \quad a, b \geq 0, \quad a^2 + b^2 \neq 0.$$

Solución Calculamos \mathbf{T} a partir del vector de velocidad \mathbf{v} :

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= -(a \sin t)\mathbf{i} + (a \cos t)\mathbf{j} + b\mathbf{k} \\ |\mathbf{v}| &= \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \mathbf{T} &= \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} [-(a \sin t)\mathbf{i} + (a \cos t)\mathbf{j} + b\mathbf{k}]. \end{aligned}$$

Luego usamos la ecuación (3)

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{1}{|\mathbf{v}|} \left| \frac{d\mathbf{T}}{dt} \right| \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left| \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} [-(a \cos t)\mathbf{i} - (a \sin t)\mathbf{j}] \right| \\ &= \frac{a}{a^2 + b^2} |-(\cos t)\mathbf{i} - (\sin t)\mathbf{j}| \\ &= \frac{a}{a^2 + b^2} \sqrt{(\cos t)^2 + (\sin t)^2} = \frac{a}{a^2 + b^2}. \end{aligned}$$

De esta ecuación, vemos que al aumentar b y manteniendo constante a a , la curvatura decrece. Pero si a decrece y b se mantiene fija, con el tiempo, la curvatura también decrece.

Si $b = 0$, la hélice se reduce a una circunferencia de radio a y su curvatura se reduce a $1/a$, como debe ser. Si $a = 0$, la hélice es el eje z y su curvatura es 0, como debe ser. ■

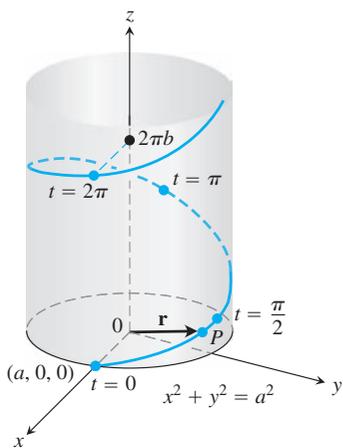


FIGURA 13.22 La hélice $\mathbf{r}(t) = (a \cos t)\mathbf{i} + (a \sin t)\mathbf{j} + bt\mathbf{k}$, dibujada con a y b positivos y $t \geq 0$ (ejemplo 5).

EJEMPLO 6 Obtenga \mathbf{N} para la hélice del ejemplo 5 y describa hacia dónde apunta el vector.

Solución Tenemos

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{T}}{dt} &= -\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} [(a \cos t)\mathbf{i} + (a \sin t)\mathbf{j}] && \text{Ejemplo 5} \\ \left| \frac{d\mathbf{T}}{dt} \right| &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sqrt{a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \mathbf{N} &= \frac{d\mathbf{T}/dt}{|d\mathbf{T}/dt|} && \text{Ecuación (4)} \\ &= -\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} [(a \cos t)\mathbf{i} + (a \sin t)\mathbf{j}] \\ &= -(\cos t)\mathbf{i} - (\sin t)\mathbf{j}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, \mathbf{N} es paralela al plano xy y siempre apunta hacia el eje z . ■

Ejercicios 13.4

Curvas planas

Obtenga \mathbf{T} , \mathbf{N} y κ para las curvas planas de los ejercicios 1 a 4.

- $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (\ln \cos t)\mathbf{j}$, $-\pi/2 < t < \pi/2$
- $\mathbf{r}(t) = (\ln \sec t)\mathbf{i} + t\mathbf{j}$, $-\pi/2 < t < \pi/2$
- $\mathbf{r}(t) = (2t + 3)\mathbf{i} + (5 - t^2)\mathbf{j}$
- $\mathbf{r}(t) = (\cos t + t \sin t)\mathbf{i} + (\sin t - t \cos t)\mathbf{j}$, $t > 0$

5. Fórmula de la curvatura para la gráfica de una función en el plano xy

- a. La gráfica $y = f(x)$ en el plano xy automáticamente tiene la parametrización $x = x$, $y = f(x)$ y la fórmula vectorial $\mathbf{r}(x) = x\mathbf{i} + f(x)\mathbf{j}$. Use esta fórmula para demostrar que si f es una función de x dos veces derivable, entonces

$$\kappa(x) = \frac{|f''(x)|}{[1 + (f'(x))^2]^{3/2}}.$$

- b. Use la fórmula para κ del inciso (a) para determinar la curvatura de $y = \ln(\cos x)$, $-\pi/2 < x < \pi/2$. Compare su respuesta con la del ejercicio 1.
- c. Demuestre que la curvatura es cero en un punto de inflexión.

6. Fórmula para la curvatura de una curva plana parametrizada

- a. Demuestre que la curvatura de una curva suave $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$ definida mediante las funciones dos veces derivables $x = f(t)$ y $y = g(t)$ está dada por la fórmula

$$\kappa = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}.$$

Los puntos en la fórmula denotan diferenciación con respecto a t , una derivada por cada punto. Aplique la fórmula para determinar las curvaturas de las siguientes curvas.

- $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (\ln \sin t)\mathbf{j}$, $0 < t < \pi$
- $\mathbf{r}(t) = [\tan^{-1}(\sinh t)]\mathbf{i} + (\ln \cosh t)\mathbf{j}$.

7. Normales a curvas planas

- a. Demuestre que $\mathbf{n}(t) = -g'(t)\mathbf{i} + f'(t)\mathbf{j}$ y $-\mathbf{n}(t) = g'(t)\mathbf{i} - f'(t)\mathbf{j}$ son normales a la curva $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$ en el punto $(f(t), g(t))$.

Para obtener \mathbf{N} para una curva plana en particular, podemos seleccionar uno de \mathbf{n} o $-\mathbf{n}$ del inciso (a), que apunte hacia el lado cóncavo de la curva, y convertirlo en un vector unitario. (Véase la figura 13.19). Aplique este método para encontrar \mathbf{N} para las siguientes curvas.

- $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + e^{2t}\mathbf{j}$
- $\mathbf{r}(t) = \sqrt{4 - t^2}\mathbf{i} + t\mathbf{j}$, $-2 \leq t \leq 2$

8. (Continuación del ejercicio 7).

- Use el método del ejercicio 7 para determinar \mathbf{N} para la curva $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (1/3)t^3\mathbf{j}$ cuando $t < 0$; cuando $t > 0$.
- Calcule \mathbf{N} para $t \neq 0$, directamente de \mathbf{T} , usando la ecuación (4) de la curva del inciso (a). ¿Existe \mathbf{N} en $t = 0$? Grafique la curva y explique qué ocurre con \mathbf{N} cuando t pasa de valores negativos a valores positivos.

Curvas espaciales

Obtenga \mathbf{T} , \mathbf{N} y κ para las curvas en el espacio de los ejercicios 9 a 16.

- $\mathbf{r}(t) = (3 \sin t)\mathbf{i} + (3 \cos t)\mathbf{j} + 4t\mathbf{k}$
- $\mathbf{r}(t) = (\cos t + t \sin t)\mathbf{i} + (\sin t - t \cos t)\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$
- $\mathbf{r}(t) = (e^t \cos t)\mathbf{i} + (e^t \sin t)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$
- $\mathbf{r}(t) = (6 \sin 2t)\mathbf{i} + (6 \cos 2t)\mathbf{j} + 5t\mathbf{k}$
- $\mathbf{r}(t) = (t^3/3)\mathbf{i} + (t^2/2)\mathbf{j}$, $t > 0$
- $\mathbf{r}(t) = (\cos^3 t)\mathbf{i} + (\sin^3 t)\mathbf{j}$, $0 < t < \pi/2$
- $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (a \cosh(t/a))\mathbf{j}$, $a > 0$
- $\mathbf{r}(t) = (\cosh t)\mathbf{i} - (\sinh t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$

Más sobre la curvatura

- Demuestre que la parábola $y = ax^2$, $a \neq 0$, tiene su mayor curvatura en su vértice y que no tiene curvatura mínima. (Nota: Puesto que la curvatura de una curva permanece igual si la curva se traslada o se hace girar, este resultado es verdadero para cualquier parábola).

18. Demuestre que la elipse $x = a \cos t, y = b \sin t, a > b > 0$, tiene su curvatura máxima en el eje mayor, y su curvatura mínima en el eje menor. (Como en el ejercicio 17, esto es válido para cualquier elipse).
19. **Maximización de la curvatura de una hélice** En el ejemplo 5 encontramos que la curvatura de la hélice $\mathbf{r}(t) = (a \cos t)\mathbf{i} + (a \sin t)\mathbf{j} + bt\mathbf{k}$ ($a, b \geq 0$) es $\kappa = a/(a^2 + b^2)$. ¿Cuál es el máximo valor que κ puede tener para un valor dado de b ? Justifique su respuesta.
20. **Curvatura total** Obtenemos la curvatura total de la parte de una curva suave que va de $s = s_0$ a $s = s_1 > s_0$ integrando κ de s_0 a s_1 . Si la curva tiene algún otro parámetro, digamos t , entonces la curvatura total es

$$K = \int_{s_0}^{s_1} \kappa \, ds = \int_{t_0}^{t_1} \kappa \frac{ds}{dt} \, dt = \int_{t_0}^{t_1} \kappa |\mathbf{v}| \, dt,$$

donde t_0 y t_1 corresponden a s_0 y s_1 . Calcule las curvaturas totales de

- a. La parte de la hélice $\mathbf{r}(t) = (3 \cos t)\mathbf{i} + (3 \sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 4\pi$.
- b. La parábola $y = x^2, -\infty < x < \infty$.
21. Obtenga la ecuación para el círculo de curvatura que corresponde a la curva $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j}$, en el punto $(\pi/2, 1)$. (La curva parametriza la gráfica de $y = \sin x$ en el plano xy).
22. Determine una ecuación para el círculo de curvatura de la curva $\mathbf{r}(t) = (2 \ln t)\mathbf{i} - [t + (1/t)]\mathbf{j}$, $e^{-2} \leq t \leq e^2$, en el punto $(0, -2)$, donde $t = 1$.

T La fórmula

$$\kappa(x) = \frac{|f''(x)|}{[1 + (f'(x))^2]^{3/2}},$$

obtenida en el ejercicio 5 expresa la curvatura $\kappa(x)$ de una curva plana dos veces diferenciable $y = f(x)$ como función de x . Obtenga la función de curvatura de cada una de las curvas de los ejercicios 23 a 26. Luego grafique $f(x)$ junto con $\kappa(x)$ sobre el intervalo dado. Encontrará algunas sorpresas.

23. $y = x^2, -2 \leq x \leq 2$ 24. $y = x^4/4, -2 \leq x \leq 2$
 25. $y = \sin x, 0 \leq x \leq 2\pi$ 26. $y = e^x, -1 \leq x \leq 2$

EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

En los ejercicios 29 a 34 use un SAC para explorar el círculo osculador en un punto P de una curva plana donde $\kappa \neq 0$. Use dicho software para ejecutar los siguientes pasos:

- a. Grafique la curva plana dada en forma paramétrica o como una función en el intervalo dado para ver su apariencia.
- b. Calcule la curvatura κ de la curva en t_0 usando la fórmula apropiada de los ejercicios 5 o 6. Use la parametrización $x = t$ y $y = f(t)$ si la curva está dada como una función $y = f(x)$.
- c. Obtenga el vector normal unitario \mathbf{N} en t_0 . Observe que los signos de los componentes de \mathbf{N} dependen de si el vector tangente unitario \mathbf{T} , en $t = t_0$, gira en el sentido de las manecillas del reloj o en sentido contrario. (Véase el ejercicio 7).
- d. Si $\mathbf{C} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ es el vector que va del origen al centro (a, b) del círculo osculador, determine el centro \mathbf{C} a partir de la ecuación vectorial

$$\mathbf{C} = \mathbf{r}(t_0) + \frac{1}{\kappa(t_0)} \mathbf{N}(t_0).$$

El punto $P(x_0, y_0)$ en la curva está dado por el vector de posición $\mathbf{r}(t_0)$.

- e. Grafique implícitamente la ecuación $(x - a)^2 + (y - b)^2 = 1/\kappa^2$ del círculo osculador. Luego trace juntos la curva y el círculo osculador. Podría ser necesario experimentar con el tamaño de la ventana de la gráfica, pero asegúrese de que sea cuadrada.
27. $\mathbf{r}(t) = (3 \cos t)\mathbf{i} + (5 \sin t)\mathbf{j}, 0 \leq t \leq 2\pi, t_0 = \pi/4$
 28. $\mathbf{r}(t) = (\cos^3 t)\mathbf{i} + (\sin^3 t)\mathbf{j}, 0 \leq t \leq 2\pi, t_0 = \pi/4$
 29. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + (t^3 - 3t)\mathbf{j}, -4 \leq t \leq 4, t_0 = 3/5$
 30. $\mathbf{r}(t) = (t^3 - 2t^2 - t)\mathbf{i} + \frac{3t}{\sqrt{1+t^2}}\mathbf{j}, -2 \leq t \leq 5, t_0 = 1$
 31. $\mathbf{r}(t) = (2t - \sin t)\mathbf{i} + (2 - 2 \cos t)\mathbf{j}, 0 \leq t \leq 3\pi, t_0 = 3\pi/2$
 32. $\mathbf{r}(t) = (e^{-t} \cos t)\mathbf{i} + (e^{-t} \sin t)\mathbf{j}, 0 \leq t \leq 6\pi, t_0 = \pi/4$
 33. $y = x^2 - x, -2 \leq x \leq 5, x_0 = 1$
 34. $y = x(1 - x)^{2/5}, -1 \leq x \leq 2, x_0 = 1/2$

13.5 Componentes tangencial y normal de la aceleración

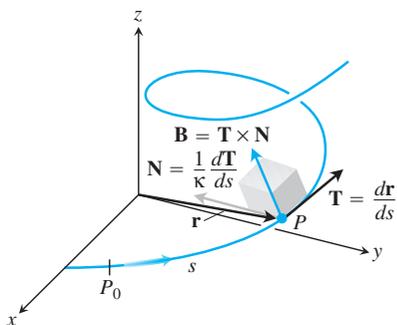


FIGURA 13.23 El marco (sistema) TNB de vectores unitarios mutuamente ortogonales que viajan a lo largo de una curva en el espacio.

Si usted viaja a lo largo de una curva en el espacio, representar los vectores que describen su movimiento en el sistema de coordenadas cartesiano $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ no es realmente relevante para usted. Lo que sí es importante son los vectores representativos de la dirección hacia donde se dirige (el vector tangente unitario \mathbf{T}), la dirección en la que gira la trayectoria (el vector normal unitario \mathbf{N}), y la tendencia de su movimiento a “torcerse” y salirse en dirección perpendicular (definida por el **vector binormal unitario** $\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$) del plano creado por estos vectores. Expresar el vector de aceleración a lo largo de la curva como una combinación lineal de este sistema TNB de vectores unitarios mutuamente ortogonales que viaja conforme al movimiento (figura 13.23) es particularmente revelador de la naturaleza de la trayectoria y del movimiento a lo largo de ella.

El marco TNB

El **vector binormal** de una curva en el espacio es $\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$, un vector unitario ortogonal a \mathbf{T} y \mathbf{N} (figura 13.24). Juntos \mathbf{T}, \mathbf{N} y \mathbf{B} definen un marco de referencia vectorial de mano derecha, en movimiento, que desempeña un papel central para el cálculo de las trayectorias de las partículas que se mueven en el espacio. Se conoce como **marco de Frenet** (o sistema Frenet, en honor de Jean-Frédéric Frenet, 1816-1900), o **marco TNB**.

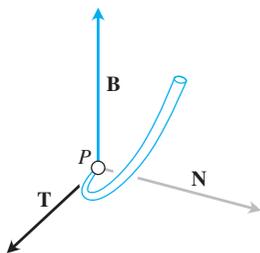


FIGURA 13.24 Los vectores \mathbf{T} , \mathbf{N} y \mathbf{B} (en ese orden) definen un marco de referencia vectorial de mano derecha de vectores unitarios mutuamente ortogonales en el espacio.

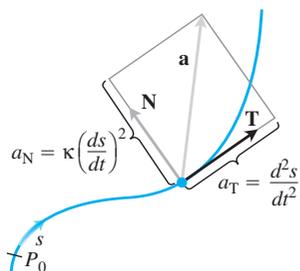


FIGURA 13.25 Componentes tangencial y normal de la aceleración. La aceleración \mathbf{a} siempre está en el plano de \mathbf{T} y \mathbf{N} , es ortogonal a \mathbf{B} .

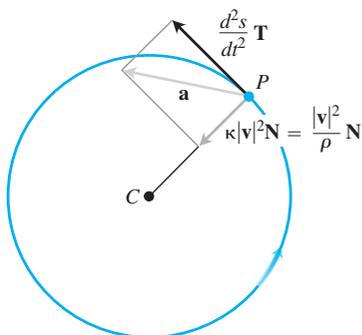


FIGURA 13.26 Los componentes tangencial y normal de la aceleración de un cuerpo que aumenta su rapidez conforme se mueve en sentido contrario a las manecillas del reloj alrededor de una circunferencia de radio ρ .

Componentes tangencial y normal de la aceleración

Cuando un cuerpo es acelerado por la gravedad, los frenos o una combinación de motores en un cohete, por lo general deseamos saber qué parte de la aceleración actúa en la dirección del movimiento, es decir, en la dirección tangencial \mathbf{T} . Esto lo podemos calcular usando la regla de la cadena para reescribir a \mathbf{v} como

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \mathbf{T} \frac{ds}{dt}.$$

Luego derivamos los dos extremos de esta cadena de igualdades para obtener

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\mathbf{T} \frac{ds}{dt} \right) = \frac{d^2s}{dt^2} \mathbf{T} + \frac{ds}{dt} \frac{d\mathbf{T}}{dt} \\ &= \frac{d^2s}{dt^2} \mathbf{T} + \frac{ds}{dt} \left(\frac{d\mathbf{T}}{ds} \frac{ds}{dt} \right) = \frac{d^2s}{dt^2} \mathbf{T} + \frac{ds}{dt} \left(\kappa \mathbf{N} \frac{ds}{dt} \right) \\ &= \frac{d^2s}{dt^2} \mathbf{T} + \kappa \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \mathbf{N}. \end{aligned} \quad \frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa \mathbf{N}$$

DEFINICIÓN Si el vector aceleración se escribe como

$$\mathbf{a} = a_T \mathbf{T} + a_N \mathbf{N}, \quad (1)$$

entonces

$$a_T = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{d}{dt} |\mathbf{v}| \quad \text{y} \quad a_N = \kappa \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = \kappa |\mathbf{v}|^2 \quad (2)$$

son los componentes escalares **tangencial** y **normal** de la aceleración.

Observe que el vector binormal \mathbf{B} no aparece en la ecuación (1). No importa cuánto parezca torcerse y girar en el espacio la trayectoria del cuerpo que observamos moverse, la aceleración \mathbf{a} siempre está en el plano de \mathbf{T} y \mathbf{N} , el cual es ortogonal a \mathbf{B} . La ecuación también nos dice exactamente cuánto de la aceleración es tangente al movimiento (d^2s/dt^2) y cuánto es normal al movimiento [$\kappa(ds/dt)^2$] (figura 13.25).

¿Qué información podemos obtener de la ecuación (2)? Por definición, la aceleración \mathbf{a} es la tasa de cambio de la velocidad \mathbf{v} y, en general, tanto la longitud como la dirección de \mathbf{v} cambian cuando un cuerpo se mueve a lo largo de su trayectoria. El componente tangencial de la aceleración a_T mide la tasa del cambio en la *magnitud* de \mathbf{v} (es decir, el cambio en la rapidez). El componente normal de la aceleración a_N mide la tasa de cambio de la *dirección* de \mathbf{v} .

Observe que el componente escalar en la normal de la aceleración es el producto de la curvatura por el *cuadrado* de la rapidez. Esto explica por qué no se debe acelerar cuando su automóvil da una vuelta cerrada (κ grande), con gran rapidez ($|\mathbf{v}|$ grande). Si duplica la velocidad de su automóvil, experimentará cuatro veces el componente normal de la aceleración para la misma curvatura.

Si un cuerpo se mueve en una circunferencia con una rapidez constante, d^2s/dt^2 es cero y la aceleración apunta en la dirección de \mathbf{N} hacia el centro de la circunferencia. Si el cuerpo acelera o frena, \mathbf{a} tiene un componente tangencial no nulo (figura 13.26).

Para calcular a_N , por lo general usamos la fórmula $a_N = \sqrt{|\mathbf{a}|^2 - a_T^2}$, la cual proviene de despejar a_N de la ecuación $|\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a_T^2 + a_N^2$. Con esta fórmula podemos obtener a_N sin tener que calcular primero κ .

Fórmula para calcular el componente normal de la aceleración

$$a_N = \sqrt{|\mathbf{a}|^2 - a_T^2} \quad (3)$$

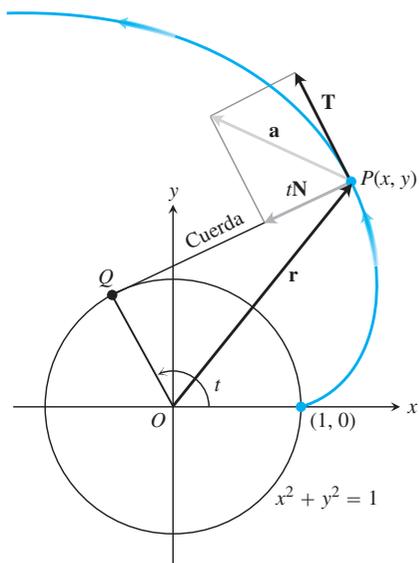


FIGURA 13.27 Los componentes tangencial y normal de la aceleración del movimiento $\mathbf{r}(t) = (\cos t + t \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} t - t \cos t)\mathbf{j}$, para $t > 0$. Si una cuerda enrollada en una circunferencia fija se desenrolla mientras se mantiene tensa en el plano de la circunferencia, su extremo P traza una involuta de la circunferencia (ejemplo 1).

EJEMPLO 1 Sin encontrar \mathbf{T} y \mathbf{N} , escriba la aceleración del movimiento

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t + t \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} t - t \cos t)\mathbf{j}, \quad t > 0$$

en la forma $\mathbf{a} = a_T\mathbf{T} + a_N\mathbf{N}$. (La trayectoria del movimiento es la involuta de la circunferencia de la figura 13.27. Véase también la sección 13.3, ejercicio 19).

Solución Usamos la primera de las ecuaciones (2) para determinar a_T :

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} = (-\operatorname{sen} t + \operatorname{sen} t + t \cos t)\mathbf{i} + (\cos t - \cos t + t \operatorname{sen} t)\mathbf{j} \\ &= (t \cos t)\mathbf{i} + (t \operatorname{sen} t)\mathbf{j} \end{aligned}$$

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{t^2 \cos^2 t + t^2 \operatorname{sen}^2 t} = \sqrt{t^2} = |t| = t \quad t > 0$$

$$a_T = \frac{d}{dt} |\mathbf{v}| = \frac{d}{dt} (t) = 1. \quad \text{Ecuación (2)}$$

Al conocer a_T , usamos la ecuación (3) para obtener a_N :

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (\cos t - t \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} t + t \cos t)\mathbf{j} \\ |\mathbf{a}|^2 &= t^2 + 1 && \text{Después de un poco de álgebra} \\ a_N &= \sqrt{|\mathbf{a}|^2 - a_T^2} \\ &= \sqrt{(t^2 + 1) - (1)} = \sqrt{t^2} = t. \end{aligned}$$

Entonces usamos la ecuación (1) para determinar \mathbf{a} :

$$\mathbf{a} = a_T\mathbf{T} + a_N\mathbf{N} = (1)\mathbf{T} + (t)\mathbf{N} = \mathbf{T} + t\mathbf{N}. \quad \blacksquare$$

Torsión

¿Cómo se comporta $d\mathbf{B}/ds$ en relación con \mathbf{T} , \mathbf{N} y \mathbf{B} ? De la regla para derivar un producto cruz, tenemos

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = \frac{d(\mathbf{T} \times \mathbf{N})}{ds} = \frac{d\mathbf{T}}{ds} \times \mathbf{N} + \mathbf{T} \times \frac{d\mathbf{N}}{ds}.$$

Puesto que \mathbf{N} está en la dirección de $d\mathbf{T}/ds$, $(d\mathbf{T}/ds) \times \mathbf{N} = \mathbf{0}$ y

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = \mathbf{0} + \mathbf{T} \times \frac{d\mathbf{N}}{ds} = \mathbf{T} \times \frac{d\mathbf{N}}{ds}.$$

Aquí vemos que $d\mathbf{B}/ds$ es ortogonal a \mathbf{T} , puesto que un producto cruz es ortogonal a sus factores.

Como $d\mathbf{B}/ds$ también es ortogonal a \mathbf{B} (este último tiene longitud constante), se deduce que $d\mathbf{B}/ds$ es ortogonal al plano de \mathbf{B} y \mathbf{T} . En otras palabras, $d\mathbf{B}/ds$ es paralela a \mathbf{N} , es decir, $d\mathbf{B}/ds$ es un múltiplo escalar de \mathbf{N} . En símbolos,

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = -\tau\mathbf{N}.$$

El signo negativo en esta expresión es tradicional. Al escalar τ se le llama la *torsión* a lo largo de la curva. Observe que

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} \cdot \mathbf{N} = -\tau\mathbf{N} \cdot \mathbf{N} = -\tau(1) = -\tau.$$

Usamos esta ecuación para nuestra siguiente definición.

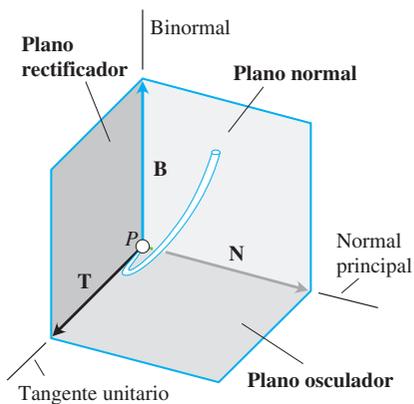


FIGURA 13.28 Los nombres de los tres planos determinados por \mathbf{T} , \mathbf{N} y \mathbf{B} .

DEFINICIÓN Sea $\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$. La función de torsión de una curva suave es

$$\tau = -\frac{d\mathbf{B}}{ds} \cdot \mathbf{N}. \quad (4)$$

A diferencia de la curvatura κ , la cual nunca es negativa, la torsión τ puede ser positiva, negativa o nula.

Los tres planos determinados por \mathbf{T} , \mathbf{N} y \mathbf{B} tienen los nombres que se indican en la figura 13.28. La curvatura $\kappa = |d\mathbf{T}/ds|$ puede considerarse como la razón a la cual el plano normal gira cuando el punto P se mueve a lo largo de su trayectoria. De manera análoga, la torsión $\tau = (d\mathbf{B}/ds) \cdot \mathbf{N}$ es la razón a la cual el plano osculador gira alrededor de \mathbf{T} cuando P se mueve a lo largo de la curva. La torsión mide cuánto se tuerce la curva.

Observe la figura 13.29. Si P es un tren que sube por una vía curva, la razón a la que las luces de sus faros giran de un lado a otro por unidad de distancia es la curvatura de la vía. La razón a la cual la locomotora tiende a salir del plano formado por \mathbf{T} y \mathbf{N} es la torsión. En un curso más avanzado es posible demostrar que una curva en el espacio es una hélice si y sólo si tiene una curvatura constante no nula y una torsión constante no nula.

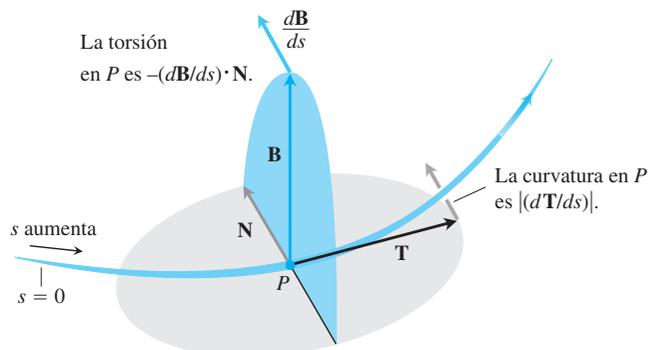


FIGURA 13.29 Todo cuerpo en movimiento viaja con un marco \mathbf{TNB} que caracteriza la geometría de su trayectoria.

Fórmulas para calcular

La fórmula más usada para la torsión, que se deduce en textos más avanzados, es

$$\tau = \frac{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \ddot{\ddot{x}} & \ddot{\ddot{y}} & \ddot{\ddot{z}} \end{vmatrix}}{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|^2} \quad (\text{si } \mathbf{v} \times \mathbf{a} \neq \mathbf{0}). \quad (5)$$

Los puntos en la ecuación (5) denotan derivación con respecto a t , una derivada por cada punto. Así, \dot{x} (“ x punto”) significa dx/dt , \ddot{x} (“ x dos puntos”) significa d^2x/dt^2 , y $\ddot{\ddot{x}}$ (“ x tres puntos”) significa d^3x/dt^3 . De forma similar, $\dot{y} = dy/dt$, etcétera.

También existen fórmulas fáciles de usar para la curvatura, como las que se incluyen en la siguiente tabla (véase el ejercicio 21).

Fórmulas para cálculos para curvas en el espacio

Vector tangente unitario: $\mathbf{T} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$

Vector normal unitario principal: $\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{T}/dt}{|d\mathbf{T}/dt|}$

Vector binormal: $\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$

Curvatura: $\kappa = \left| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right| = \frac{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|}{|\mathbf{v}|^3}$

Torsión: $\tau = -\frac{d\mathbf{B}}{ds} \cdot \mathbf{N} = \frac{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \ddot{\ddot{x}} & \ddot{\ddot{y}} & \ddot{\ddot{z}} \end{vmatrix}}{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|^2}$

Componentes escalares tangencial y normal de la aceleración:

$$\mathbf{a} = a_T \mathbf{T} + a_N \mathbf{N}$$

$$a_T = \frac{d}{dt} |\mathbf{v}|$$

$$a_N = \kappa |\mathbf{v}|^2 = \sqrt{|\mathbf{a}|^2 - a_T^2}$$

Ejercicios 13.5

Obtención de los componentes tangencial y normal

En los ejercicios 1 y 2, escriba \mathbf{a} en la forma $\mathbf{a} = a_T \mathbf{T} + a_N \mathbf{N}$ sin obtener ni \mathbf{T} ni \mathbf{N} .

- $\mathbf{r}(t) = (a \cos t)\mathbf{i} + (a \sin t)\mathbf{j} + bt\mathbf{k}$
- $\mathbf{r}(t) = (1 + 3t)\mathbf{i} + (t - 2)\mathbf{j} - 3t\mathbf{k}$

En los ejercicios 3 a 6, escriba \mathbf{a} en la forma $\mathbf{a} = a_T \mathbf{T} + a_N \mathbf{N}$ para el valor dado de t sin calcular ni \mathbf{T} ni \mathbf{N} .

- $\mathbf{r}(t) = (t + 1)\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}, \quad t = 1$
- $\mathbf{r}(t) = (t \cos t)\mathbf{i} + (t \sin t)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}, \quad t = 0$
- $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + (t + (1/3)t^3)\mathbf{j} + (t - (1/3)t^3)\mathbf{k}, \quad t = 0$
- $\mathbf{r}(t) = (e^t \cos t)\mathbf{i} + (e^t \sin t)\mathbf{j} + \sqrt{2}e^t\mathbf{k}, \quad t = 0$

Obtención del marco TNB

En los ejercicios 7 y 8, obtenga \mathbf{r} , \mathbf{T} , \mathbf{N} y \mathbf{B} para el valor dado de t . Luego encuentre las ecuaciones de los planos osculador, normal y rectificador para ese valor de t .

- $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} - \mathbf{k}, \quad t = \pi/4$
- $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad t = 0$

En los ejercicios 9 a 16 de la sección 13.4, obtuvo \mathbf{T} , \mathbf{N} y κ . Ahora, en los ejercicios 9 a 16, obtenga \mathbf{B} y τ para esas curvas en el espacio.

- $\mathbf{r}(t) = (3 \sin t)\mathbf{i} + (3 \cos t)\mathbf{j} + 4t\mathbf{k}$
- $\mathbf{r}(t) = (\cos t + t \sin t)\mathbf{i} + (\sin t - t \cos t)\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$
- $\mathbf{r}(t) = (e^t \cos t)\mathbf{i} + (e^t \sin t)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$

- $\mathbf{r}(t) = (6 \sin 2t)\mathbf{i} + (6 \cos 2t)\mathbf{j} + 5t\mathbf{k}$
- $\mathbf{r}(t) = (t^3/3)\mathbf{i} + (t^2/2)\mathbf{j}, \quad t > 0$
- $\mathbf{r}(t) = (\cos^3 t)\mathbf{i} + (\sin^3 t)\mathbf{j}, \quad 0 < t < \pi/2$
- $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (a \cosh(t/a))\mathbf{j}, \quad a > 0$
- $\mathbf{r}(t) = (\cosh t)\mathbf{i} - (\sinh t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$

Aplicaciones físicas

- En el velocímetro de su automóvil se leen 35 mph continuamente. ¿Podría estar acelerando? Explique su respuesta.
- ¿Puede decirse algo acerca de la aceleración de una partícula que se mueve con rapidez constante? Justifique su respuesta.
- ¿Puede decirse algo acerca de la rapidez de una partícula cuya aceleración siempre es ortogonal a su velocidad? Justifique su respuesta.
- Un objeto de masa m viaja a lo largo de la parábola $y = x^2$ con una rapidez constante de 10 unidades/seg. ¿Cuál es la fuerza neta sobre el objeto debida a su aceleración en $(0, 0)$? ¿Y en el punto $(2^{1/2}, 2)$? Escriba sus respuestas en términos de \mathbf{i} y \mathbf{j} . (Recuerde la segunda ley de Newton, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$).

Teoría y ejemplos

- Fórmula vectorial para la curvatura** Para una curva suave, utilice la ecuación (1) para deducir la fórmula de curvatura

$$\kappa = \frac{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|}{|\mathbf{v}|^3}.$$

22. Demuestre que una partícula en movimiento continuará moviéndose en línea recta si el componente normal de su aceleración es cero.

23. **Atajo para la curvatura** Si usted ya conoce $|a_N|$ y $|v|$, entonces la fórmula $a_N = \kappa|v|^2$ ofrece una manera conveniente de obtener la curvatura. Úsela para calcular la curvatura y el radio de curvatura de la curva

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t + t \sin t)\mathbf{i} + (\sin t - t \cos t)\mathbf{j}, \quad t > 0.$$

(Tome a_N y $|v|$ del ejemplo 1).

24. Demuestre que κ y τ son ambos cero para la recta

$$\mathbf{r}(t) = (x_0 + At)\mathbf{i} + (y_0 + Bt)\mathbf{j} + (z_0 + Ct)\mathbf{k}.$$

25. ¿Qué se puede decir acerca de la torsión de una curva suave plana $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$? Justifique su respuesta.

26. **Torsión de una hélice** Demuestre que la torsión de la hélice

$$\mathbf{r}(t) = (a \cos t)\mathbf{i} + (a \sin t)\mathbf{j} + bt\mathbf{k}, \quad a, b \geq 0$$

es $\tau = b/(a^2 + b^2)$. ¿Cuál es el valor máximo que τ puede tener para un valor dado de a ? Justifique su respuesta.

27. **Curvas derivables con torsión cero están en planos** El hecho de que una curva suficientemente derivable con torsión cero esté en un plano es un caso especial de la situación en la que una partícula cuya velocidad permanece perpendicular a un vector fijo \mathbf{C} se mueve en un plano perpendicular a \mathbf{C} . Esto, a la vez, puede verse como el siguiente resultado.

Suponga que $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$ es dos veces derivable para toda t en el intervalo $[a, b]$, que $\mathbf{r} = 0$ cuando $t = a$ y que

$\mathbf{v} \cdot \mathbf{k} = 0$ para toda t en el intervalo $[a, b]$. Demuestre que $h(t) = 0$ para toda t en el intervalo $[a, b]$. (Sugerencia: Inicie con $\mathbf{a} = d^2\mathbf{r}/dt^2$ y aplique las condiciones iniciales en sentido inverso).

28. **Fórmula que calcula τ a partir de \mathbf{B} y \mathbf{v}** Si comenzamos con la definición de $\tau = -(d\mathbf{B}/ds) \cdot \mathbf{N}$ y aplicamos la regla de la cadena para describir $d\mathbf{B}/ds$ como

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = \frac{d\mathbf{B}}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{d\mathbf{B}}{dt} \frac{1}{|v|},$$

llegamos a la fórmula

$$\tau = -\frac{1}{|v|} \left(\frac{d\mathbf{B}}{dt} \cdot \mathbf{N} \right).$$

La ventaja de esta fórmula sobre la ecuación (5) es que es más fácil de deducir y enunciar. La desventaja es que su evaluación requiere de mucho trabajo sin una computadora. Use la nueva fórmula para determinar la torsión de la hélice del ejercicio 26.

EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

Redondee las respuestas a cuatro decimales. Use un SAC para determinar \mathbf{v} , \mathbf{a} , la rapidez, \mathbf{T} , \mathbf{N} , \mathbf{B} , κ , τ y los componentes tangencial y normal de la aceleración para las curvas de los ejercicios 29 a 32 para los valores dados de t .

29. $\mathbf{r}(t) = (t \cos t)\mathbf{i} + (t \sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad t = \sqrt{3}$

30. $\mathbf{r}(t) = (e^t \cos t)\mathbf{i} + (e^t \sin t)\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}, \quad t = \ln 2$

31. $\mathbf{r}(t) = (t - \sin t)\mathbf{i} + (1 - \cos t)\mathbf{j} + \sqrt{-t}\mathbf{k}, \quad t = -3\pi$

32. $\mathbf{r}(t) = (3t - t^2)\mathbf{i} + (3t^2)\mathbf{j} + (3t + t^3)\mathbf{k}, \quad t = 1$

13.6

Velocidad y aceleración en coordenadas polares

En esta sección deduciremos las ecuaciones de velocidad y aceleración en coordenadas polares. Estas ecuaciones son útiles para calcular las trayectorias de planetas y satélites en el espacio, y las usaremos para revisar las tres leyes del movimiento planetario de Kepler.

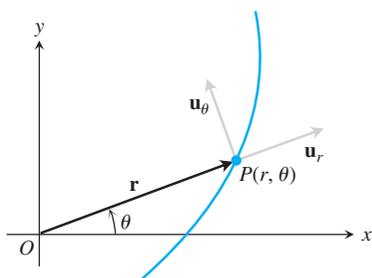


FIGURA 13.30 La longitud de \mathbf{r} es la coordenada polar positiva r del punto P . Así, \mathbf{u}_r , que es $\mathbf{r}/|r|$, también es \mathbf{r}/r . Las ecuaciones (1) expresan a \mathbf{u}_r y a \mathbf{u}_θ en términos de \mathbf{i} y \mathbf{j} .

Movimiento en coordenadas polares y cilíndricas

Cuando una partícula en $P(r, \theta)$ se mueve a lo largo de una curva en el plano de coordenadas polares, expresamos su posición, velocidad y aceleración en términos de los vectores unitarios móviles

$$\mathbf{u}_r = (\cos \theta)\mathbf{i} + (\sin \theta)\mathbf{j}, \quad \mathbf{u}_\theta = -(\sin \theta)\mathbf{i} + (\cos \theta)\mathbf{j}, \quad (1)$$

representados en la figura 13.30. El vector de posición \mathbf{u}_r apunta en la dirección del vector de posición \overline{OP} , de manera que $\mathbf{r} = r\mathbf{u}_r$. El vector \mathbf{u}_θ , ortogonal a \mathbf{u}_r , apunta en la dirección de crecimiento de θ .

A partir de las ecuaciones (1) encontramos que

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}_r}{d\theta} &= -(\sin \theta)\mathbf{i} + (\cos \theta)\mathbf{j} = \mathbf{u}_\theta \\ \frac{d\mathbf{u}_\theta}{d\theta} &= -(\cos \theta)\mathbf{i} - (\sin \theta)\mathbf{j} = -\mathbf{u}_r. \end{aligned}$$

Cuando derivamos \mathbf{u}_r y \mathbf{u}_θ con respecto a t , obtenemos la forma en que cambian con el tiempo. La regla de la cadena implica

$$\dot{\mathbf{u}}_r = \frac{d\mathbf{u}_r}{d\theta} \dot{\theta} = \dot{\theta} \mathbf{u}_\theta, \quad \dot{\mathbf{u}}_\theta = \frac{d\mathbf{u}_\theta}{d\theta} \dot{\theta} = -\dot{\theta} \mathbf{u}_r. \quad (2)$$

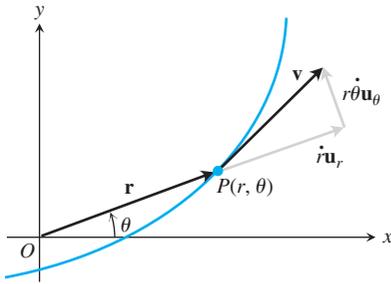


FIGURA 13.31 En coordenadas polares, el vector de velocidad es

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta.$$

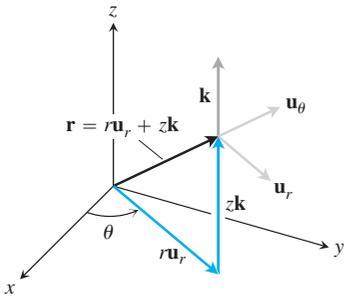


FIGURA 13.32 Vector de posición y vectores unitarios básicos en coordenadas cilíndricas. Observe que $|\mathbf{r}| \neq r$ si $z \neq 0$.

Por lo tanto, podemos expresar el vector de velocidad en términos de \mathbf{u}_r y \mathbf{u}_θ como

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt}(r\mathbf{u}_r) = \dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\mathbf{u}}_r = \dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta.$$

Vea la figura 13.31. Como en la sección anterior, usamos la notación de Newton de punto para las derivadas con respecto al tiempo y así simplificar las fórmulas: $\dot{\mathbf{u}}_r$ significa, $d\mathbf{u}_r/dt$, $\dot{\theta}$ significa $d\theta/dt$, etcétera.

La aceleración es

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = (\dot{r}\dot{\mathbf{u}}_r + \dot{r}\ddot{\mathbf{u}}_r) + (\dot{r}\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta + r\ddot{\theta}\mathbf{u}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\mathbf{u}}_\theta).$$

Cuando se usan las ecuaciones (2) para calcular $\dot{\mathbf{u}}_r$ y $\dot{\mathbf{u}}_\theta$ y los componentes son separados, la ecuación para la aceleración en términos de \mathbf{u}_r y \mathbf{u}_θ se convierte en

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{u}_\theta.$$

Para extender estas ecuaciones al movimiento en el espacio, agregamos $z\mathbf{k}$ al lado derecho de la ecuación $\mathbf{r} = r\mathbf{u}_r$. Entonces, en *coordenadas cilíndricas* tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= r\mathbf{u}_r + z\mathbf{k} \\ \mathbf{v} &= \dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta + \dot{z}\mathbf{k} \\ \mathbf{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{u}_\theta + \ddot{z}\mathbf{k}. \end{aligned} \tag{3}$$

Los vectores \mathbf{u}_r , \mathbf{u}_θ y \mathbf{k} forman un marco de referencia vectorial de mano derecha (figura 13.32) en el cual

$$\mathbf{u}_r \times \mathbf{u}_\theta = \mathbf{k}, \quad \mathbf{u}_\theta \times \mathbf{k} = \mathbf{u}_r, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{u}_r = \mathbf{u}_\theta.$$

Los planetas se mueven en planos

La ley de Newton de la gravitación dice que si \mathbf{r} es el radio vector desde el centro de un sol de masa M hasta el centro de un planeta de masa m , entonces la fuerza \mathbf{F} de la atracción gravitacional entre el planeta y el sol es

$$\mathbf{F} = -\frac{GmM}{|\mathbf{r}|^2} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$$

(figura 13.33). G es la **constante de gravitación universal**. Si medimos la masa en kilogramos, la fuerza en newtons y la distancia en metros, G es aproximadamente $6.6726 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2}$.

Al combinar la ley de la gravitación con la segunda ley de Newton, $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}$, para la fuerza que actúa sobre el planeta, tenemos

$$\begin{aligned} m\ddot{\mathbf{r}} &= -\frac{GmM}{|\mathbf{r}|^2} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \\ \ddot{\mathbf{r}} &= -\frac{GM}{|\mathbf{r}|^2} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}. \end{aligned}$$

El planeta se acelera todo el tiempo hacia el centro de masa del sol.

Puesto que $\ddot{\mathbf{r}}$ es un múltiplo escalar de \mathbf{r} , tenemos

$$\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{0}.$$

Partiendo de esta última ecuación,

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = \underbrace{\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}}}_0 + \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{0}.$$

Se deduce que

$$\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{C} \tag{4}$$

para algún vector constante \mathbf{C} .

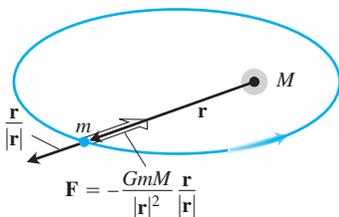


FIGURA 13.33 La fuerza de gravedad está dirigida a lo largo de la línea que une los centros de masa.

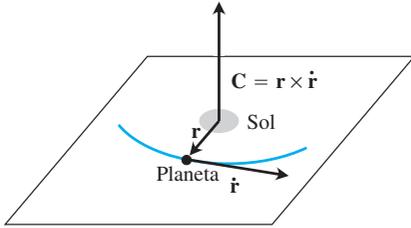


FIGURA 13.34 Un planeta que obedece las leyes de gravitación y de movimiento de Newton viaja en el plano que pasa por el centro de masa del sol perpendicular a $\mathbf{C} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$.

BIOGRAFÍA HISTÓRICA

Johannes Kepler
(1571–1630)

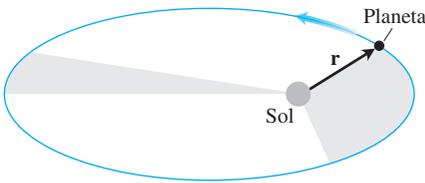


FIGURA 13.35 La línea que une a un planeta con su sol barre áreas iguales en tiempos iguales.

La ecuación (4) dice que r y $\dot{\mathbf{r}}$ siempre se encuentran en un plano perpendicular a \mathbf{C} . Por lo tanto, el planeta se mueve en un plano fijo que pasa por el centro de su sol (figura 13.34). A continuación veremos cómo las leyes de Kepler describen el movimiento de manera precisa.

Primera ley de Kepler (Ley de la elipse)

La *primera ley de Kepler* dice que la trayectoria de un planeta es una elipse con el sol en uno de sus focos. La excentricidad de la elipse es

$$e = \frac{r_0 v_0^2}{GM} - 1 \quad (5)$$

y la ecuación polar (véase la sección 11.7, ecuación (5)) es

$$r = \frac{(1 + e)r_0}{1 + e \cos \theta}. \quad (6)$$

Aquí v_0 es la rapidez cuando el planeta se posiciona a la distancia mínima r_0 del sol. Se omite la prueba, pues es muy larga. La masa del sol M es 1.99×10^{30} kg.

Segunda ley de Kepler (ley de las áreas iguales)

La *segunda ley de Kepler* dice que el radio vector desde el centro del sol hasta el centro de un planeta (el vector r en nuestro modelo) barre áreas iguales en tiempos iguales (figura 13.35). Para deducir la ley, usamos la ecuación (3) para calcular el producto cruz $\mathbf{C} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$ de la ecuación (4):

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} \\ &= r \mathbf{u}_r \times (\dot{r} \mathbf{u}_r + r \dot{\theta} \mathbf{u}_\theta) && \text{Ecuación (3), } \dot{z} = 0 \\ &= r \dot{r} (\mathbf{u}_r \times \mathbf{u}_r) + r(r \dot{\theta}) (\mathbf{u}_r \times \mathbf{u}_\theta) \\ &= r(r \dot{\theta}) \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (7)$$

Establecer que $t = 0$, demuestra que

$$\mathbf{C} = [r(r \dot{\theta})]_{t=0} \mathbf{k} = r_0 v_0 \mathbf{k}.$$

Sustituyendo este valor de \mathbf{C} en la ecuación (7) da

$$r_0 v_0 \mathbf{k} = r^2 \dot{\theta} \mathbf{k}, \quad \text{o} \quad r^2 \dot{\theta} = r_0 v_0.$$

Así es como obtenemos el área. La diferencial de área en coordenadas polares es

$$dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

(sección 11.15). Por consiguiente, dA/dt tiene el valor constante

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{1}{2} r_0 v_0. \quad (8)$$

Así, dA/dt es constante, y se obtiene la segunda ley de Kepler.

Tercera ley de Kepler (ley del tiempo-distancia)

El tiempo T que tarda un planeta en dar una vuelta alrededor de su sol es el **periodo orbital** del planeta. La *tercera ley de Kepler* dice que T y el semieje mayor a de la órbita están relacionados por la ecuación

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}.$$

Puesto que el lado derecho de esta ecuación es constante en un sistema solar dado, la razón de T^2 a a^3 es la misma para cada planeta del sistema.

Aquí incluimos una derivación parcial de la tercera ley de Kepler. El área acotada por la órbita elíptica del planeta se calcula como sigue

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_0^T dA \\ &= \int_0^T \frac{1}{2} r_0 v_0 dt \quad \text{Ecuación (8)} \\ &= \frac{1}{2} T r_0 v_0. \end{aligned}$$

Si b es el semieje menor, el área de la elipse es πab , por lo que

$$T = \frac{2\pi ab}{r_0 v_0} = \frac{2\pi a^2}{r_0 v_0} \sqrt{1 - e^2}. \quad \text{Para cualquier elipse } b = a\sqrt{1 - e^2} \quad (9)$$

Sólo queda expresar a y e en términos de r_0 , v_0 , G y M . La ecuación (5) lo hace para e . Para a , observamos que al igualar θ a π en la ecuación (6) da

$$r_{\text{máx}} = r_0 \frac{1 + e}{1 - e}.$$

Por lo tanto, de acuerdo con la figura 13.36

$$2a = r_0 + r_{\text{máx}} = \frac{2r_0}{1 - e} = \frac{2r_0 GM}{2GM - r_0 v_0^2}. \quad (10)$$

Al elevar al cuadrado ambos lados de la ecuación (9) y sustituir los resultados de las ecuaciones (5) y (10) obtenemos la tercera ley de Kepler (ejercicio 9).

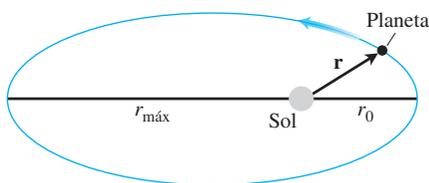


FIGURA 13.36 La longitud del eje mayor de la elipse es $2a = r_0 + r_{\text{máx}}$.

Ejercicios 13.6

En los ejercicios 1 a 5, obtenga los vectores de velocidad y aceleración en términos de \mathbf{u}_r y \mathbf{u}_θ .

1. $r = a(1 - \cos \theta)$ y $\frac{d\theta}{dt} = 3$

2. $r = a \sin 2\theta$ y $\frac{d\theta}{dt} = 2t$

3. $r = e^{a\theta}$ y $\frac{d\theta}{dt} = 2$

4. $r = a(1 + \sin t)$ y $\theta = 1 - e^{-t}$

5. $r = 2 \cos 4t$ y $\theta = 2t$

6. **Tipo de órbita** ¿Para cuáles valores de v_0 en la ecuación (5) la órbita de la ecuación (6) es una circunferencia? ¿Una elipse? ¿Una parábola? ¿Una hipérbola?

7. **Órbitas circulares** Demuestre que un planeta con una órbita circular se mueve a velocidad constante. (*Sugerencia:* Considere que esto es una consecuencia de una de las leyes de Kepler).

8. Suponga que \mathbf{r} es el vector de posición de una partícula que se mueve a lo largo de una curva plana y dA/dt es la razón a la cual el vector barre el área. Sin usar coordenadas y suponiendo que existen las derivadas necesarias, dé un argumento geométrico con base en incrementos y límites para demostrar la validez de la ecuación

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} |\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}|.$$

9. **Tercera ley de Kepler** Complete la deducción de la tercera ley de Kepler [la parte que sigue de la ecuación (10)].

10. Obtenga la longitud del eje mayor de la órbita de la Tierra con base en la tercera ley de Kepler y en el hecho de que el periodo de la órbita de la Tierra es de 365.256 días.

Capítulo 13 Preguntas de repaso

1. Enuncie las reglas para derivar e integrar las funciones vectoriales. Dé ejemplos.
2. ¿Cómo se define y calcula la velocidad, rapidez, dirección del movimiento y aceleración de un cuerpo que se mueve a lo largo de una curva en el espacio suficientemente derivable? Dé un ejemplo.

3. ¿Qué hay de especial acerca de las derivadas de las funciones vectoriales con longitud constante? Dé un ejemplo.
4. ¿Cuáles son las ecuaciones vectoriales y paramétricas para el movimiento de un proyectil ideal? ¿Cómo obtiene la altura máxima, el tiempo de vuelo y el alcance de un proyectil? Dé ejemplos.

- ¿Cómo se define y calcula la longitud de un segmento de una curva suave en el espacio? Dé un ejemplo. ¿Cuáles hipótesis matemáticas están implicadas en la definición?
- ¿Cómo se mide la distancia a lo largo de una curva suave en el espacio desde un punto base preseleccionado? Dé un ejemplo.
- ¿Qué es el vector tangente unitario a una curva derivable? Dé un ejemplo.
- Defina curvatura, círculo de curvatura (círculo osculador), centro y radio de curvatura para curvas dos veces derivables en el plano. Dé ejemplos. ¿Cuáles curvas tienen curvatura cero? ¿Cuáles curvatura constante?
- ¿Qué es un vector normal principal de una curva plana? ¿Cuándo está definido? ¿Hacia dónde apunta? Dé un ejemplo.
- ¿Cómo define \mathbf{N} y κ para curvas en el espacio? ¿Cómo se relacionan estas cantidades? Dé ejemplos.
- ¿Qué es el vector binormal de una curva? Dé un ejemplo. ¿Cómo se relaciona este vector con la torsión de la curva? Dé un ejemplo.
- ¿Qué fórmulas permiten escribir la aceleración de un cuerpo en movimiento como la suma de sus componentes normal y tangencial? Dé un ejemplo. ¿Por qué desearíamos escribir la aceleración de este modo? ¿Qué pasa si el cuerpo se mueve con rapidez constante? ¿Y con rapidez constante a lo largo de una circunferencia?
- Enuncie las leyes de Kepler.

Capítulo 13 Ejercicios de práctica

Movimiento en el plano

En los ejercicios 1 y 2, grafique las curvas y bosqueje los vectores de velocidad y aceleración para los valores dados de t . Luego escriba \mathbf{a} en la forma $\mathbf{a} = a_T\mathbf{T} + a_N\mathbf{N}$ sin obtener \mathbf{T} y \mathbf{N} , y encuentre κ en los valores dados de t .

- $\mathbf{r}(t) = (4 \cos t)\mathbf{i} + (\sqrt{2} \sin t)\mathbf{j}$, $t = 0$ y $\pi/4$
- $\mathbf{r}(t) = (\sqrt{3} \sec t)\mathbf{i} + (\sqrt{3} \tan t)\mathbf{j}$, $t = 0$
- La posición de una partícula en el plano en el instante t es

$$\mathbf{r} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\mathbf{i} + \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\mathbf{j}.$$

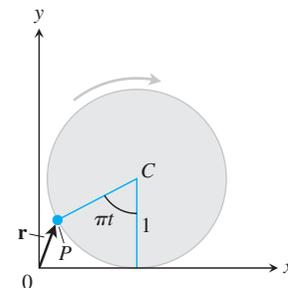
Calcule la velocidad máxima de la partícula.

- Suponga que $\mathbf{r}(t) = (e^t \cos t)\mathbf{i} + (e^t \sin t)\mathbf{j}$. Demuestre que el ángulo entre \mathbf{r} y \mathbf{a} jamás cambia. ¿Cuál es ese ángulo?
- Cálculo de la curvatura** En el punto P , la velocidad y aceleración de una partícula que se mueve en el plano son $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ y $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} + 15\mathbf{j}$. Calcule la curvatura de la trayectoria de la partícula en P .
- Determine el punto en la curva $y = e^x$ donde la curvatura es máxima.
- Una partícula se mueve a lo largo de la circunferencia unitaria en el plano xy . Su posición en el instante t es $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, donde x y y son funciones derivables de t . Obtenga dy/dt si $\mathbf{v} \cdot \mathbf{i} = y$. ¿El movimiento se realiza en el sentido de las manecillas del reloj o en sentido contrario?
- Usted manda un mensaje a través de un tubo neumático que sigue la curva $9y = x^3$ (distancia en metros). En el punto $(3, 3)$, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{i} = 4$ y $\mathbf{a} \cdot \mathbf{i} = -2$. Obtenga los valores de $\mathbf{v} \cdot \mathbf{j}$ y $\mathbf{a} \cdot \mathbf{j}$ en $(3, 3)$.
- Caracterización del movimiento circular** Una partícula se mueve en el plano de forma que sus vectores de velocidad y posición siempre son ortogonales. Demuestre que la partícula se mueve en una circunferencia con centro en el origen.
- Rapidez a lo largo de una cicloide** Una rueda circular con radio de 1 ft y centro en C rueda hacia la derecha a lo largo del eje x dando media vuelta por segundo. (Véase la figura). En el instante t (en segundos), el vector de posición del punto P en la circunferencia de la rueda es

$$\mathbf{r} = (\pi t - \sin \pi t)\mathbf{i} + (1 - \cos \pi t)\mathbf{j}.$$

- Dibuje la curva trazada por P durante el intervalo $0 \leq t \leq 3$.

- Determine \mathbf{v} y \mathbf{a} en $t = 0, 1, 2$ y 3 y agregue estos vectores a su dibujo.
- En un instante dado, ¿cuál es la rapidez hacia delante del punto superior de la rueda? ¿Y la de C ?



Movimiento de proyectiles

- Lanzamiento** Un peso pierde contacto con la mano que lo lanza a 6.5 ft sobre el suelo con un ángulo de 45° a 80 ft/seg. ¿Dónde está 3 segundos después?
- Jabalina** Una jabalina sale de la mano del lanzador a 7 ft sobre el suelo con un ángulo de 45° a 80 ft/seg. ¿Qué altura alcanza?
- Una pelota de golf es golpeada con una rapidez inicial v_0 formando un ángulo α con respecto a la horizontal desde un punto que está al pie de una colina que guarda un ángulo de inclinación ϕ con la horizontal, donde

$$0 < \phi < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

Demuestre que la pelota toca tierra a una distancia

$$\frac{2v_0^2 \cos \alpha}{g \cos^2 \phi} \sin(\alpha - \phi),$$

medida sobre la colina. Demuestre que el mayor alcance que se puede lograr para un v_0 dado ocurre cuando $\alpha = (\phi/2) + (\pi/4)$; es decir, cuando el vector de velocidad inicial biseca el ángulo entre la vertical y la colina.

- T 14. Jabalina** En Postdam en 1988, Petra Felke, de la entonces República Democrática Alemana, estableció el récord mundial femenino con un lanzamiento de jabalina de 262 ft 5 in.
- Si Felke lanzó la jabalina con un ángulo de 40° con respecto a la horizontal a 6.5 ft sobre el suelo, ¿cuál fue la rapidez inicial de la jabalina?
 - ¿Qué tan alto llegó la jabalina?

Movimiento en el espacio

Calcule las longitudes de las curvas en los ejercicios 15 y 16.

- $\mathbf{r}(t) = (2 \cos t)\mathbf{i} + (2 \sin t)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq \pi/4$
- $\mathbf{r}(t) = (3 \cos t)\mathbf{i} + (3 \sin t)\mathbf{j} + 2t^{3/2}\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 3$

En los ejercicios 17 a 20 obtenga \mathbf{T} , \mathbf{N} , \mathbf{B} , κ y τ en el valor dado de t .

- $\mathbf{r}(t) = \frac{4}{9}(1+t)^{3/2}\mathbf{i} + \frac{4}{9}(1-t)^{3/2}\mathbf{j} + \frac{1}{3}t\mathbf{k}, \quad t = 0$
- $\mathbf{r}(t) = (e^t \sin 2t)\mathbf{i} + (e^t \cos 2t)\mathbf{j} + 2e^t\mathbf{k}, \quad t = 0$
- $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \frac{1}{2}e^{2t}\mathbf{j}, \quad t = \ln 2$
- $\mathbf{r}(t) = (3 \cosh 2t)\mathbf{i} + (3 \sinh 2t)\mathbf{j} + 6t\mathbf{k}, \quad t = \ln 2$

En los ejercicios 21 y 22 escriba \mathbf{a} en la forma $\mathbf{a} = a_T\mathbf{T} + a_N\mathbf{N}$ en $t = 0$ sin calcular \mathbf{T} y \mathbf{N} .

- $\mathbf{r}(t) = (2 + 3t + 3t^2)\mathbf{i} + (4t + 4t^2)\mathbf{j} - (6 \cos t)\mathbf{k}$
- $\mathbf{r}(t) = (2 + t)\mathbf{i} + (t + 2t^2)\mathbf{j} + (1 + t^2)\mathbf{k}$
- Determine \mathbf{T} , \mathbf{N} , \mathbf{B} , κ y τ como funciones de t si

$$\mathbf{r}(t) = (\sin t)\mathbf{i} + (\sqrt{2} \cos t)\mathbf{j} + (\sin t)\mathbf{k}.$$

- ¿En qué tiempos del intervalo $0 \leq t \leq \pi$ son ortogonales los vectores de velocidad y aceleración del movimiento $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + (5 \cos t)\mathbf{j} + (3 \sin t)\mathbf{k}$?
- La posición de una partícula que se mueve en el espacio en el tiempo $t \geq 0$ es

$$\mathbf{r}(t) = 2\mathbf{i} + \left(4 \sin \frac{t}{2}\right)\mathbf{j} + \left(3 - \frac{t}{\pi}\right)\mathbf{k}.$$

Determine el primer instante en que \mathbf{r} es ortogonal a $\mathbf{i} - \mathbf{j}$.

- Determine las ecuaciones de los planos osculador, normal y rectificador de la curva $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$ en el punto $(1, 1, 1)$.
- Determine las ecuaciones paramétricas de la recta que es tangente a la curva $\mathbf{r}(t) = e^t\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + \ln(1-t)\mathbf{k}$ para $t = 0$.
- Obtenga las ecuaciones paramétricas de la recta tangente a la hélice $\mathbf{r}(t) = (\sqrt{2} \cos t)\mathbf{i} + (\sqrt{2} \sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ en el punto donde $t = \pi/4$.

Teoría y ejemplos

- Curvas sincronas** Elimine α de las ecuaciones de un proyectil ideal

$$x = (v_0 \cos \alpha)t, \quad y = (v_0 \sin \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2,$$

para demostrar que $x^2 + (y + gt^2/2)^2 = v_0^2 t^2$. Esto muestra que los proyectiles lanzados simultáneamente desde el origen con la misma rapidez inicial estarán, en cualquier instante dado, sobre la circunferencia de radio $v_0 t$ con centro en $(0, -gt^2/2)$, sin importar su ángulo de lanzamiento. Estas circunferencias son *curvas sincronas* del lanzamiento.

- Radio de curvatura** Demuestre que el radio de curvatura de una curva plana dos veces derivable $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$ está dado por la fórmula

$$\rho = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \dot{s}^2}}, \quad \text{donde } \dot{s} = \frac{d}{dt} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}.$$

- Definición alternativa de curvatura en el plano** Una definición alternativa de curvatura de una curva plana suficientemente derivable es $|d\phi/ds|$, donde ϕ es el ángulo entre \mathbf{T} y \mathbf{i} (fig. 13.37a). La figura 13.37b muestra la distancia s medida en sentido contrario a las manecillas del reloj a lo largo de la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ desde el punto $(a, 0)$ hasta un punto P , junto con el ángulo ϕ en P . Calcule la curvatura de la circunferencia usando la definición alternativa. (Sugerencia: $\phi = \theta + \pi/2$).

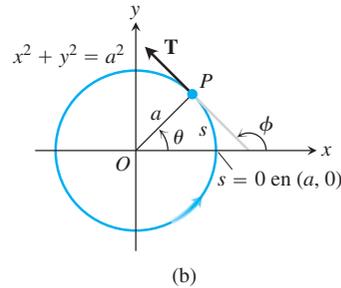
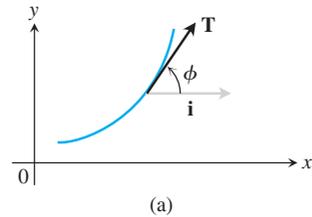


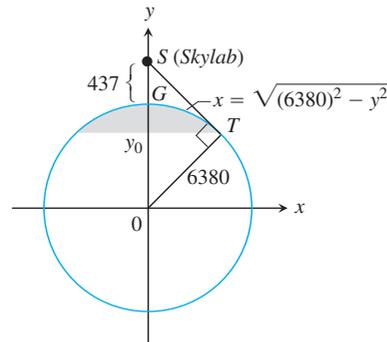
FIGURA 13.37 Figuras del ejercicio 31.

- Vista desde el Skylab 4** ¿Qué porcentaje del área de la Tierra podía ver un astronauta cuando el Skylab 4 estaba en su altura de apogeo, 437 km arriba de la superficie? Para determinar esto, modele la superficie visible como la superficie generada al girar el arco circular GT , mostrado aquí, alrededor del eje y . Luego realice los siguientes pasos:

- Use triángulos semejantes en la figura para demostrar que $y_0/6380 = 6380/(6380 + 437)$. Despeje y_0 .
- Calcule el área visible (con cuatro cifras significativas) como

$$VA = \int_{y_0}^{6380} 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy.$$

- Expresar el resultado como un porcentaje de la superficie de la Tierra.



Capítulo 13 Ejercicios adicionales y avanzados

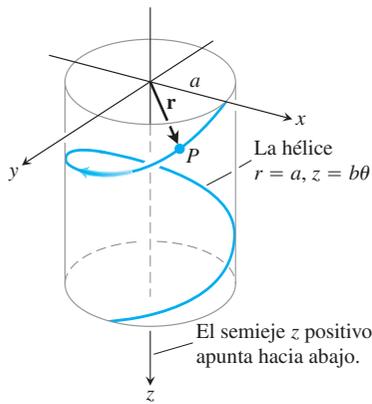
Aplicaciones

- Una partícula P sin fricción parte del reposo en el instante $t = 0$ en el punto $(a, 0, 0)$ y se desliza hacia abajo por la hélice

$$\mathbf{r}(\theta) = (a \cos \theta)\mathbf{i} + (a \sin \theta)\mathbf{j} + b\theta\mathbf{k} \quad (a, b > 0)$$

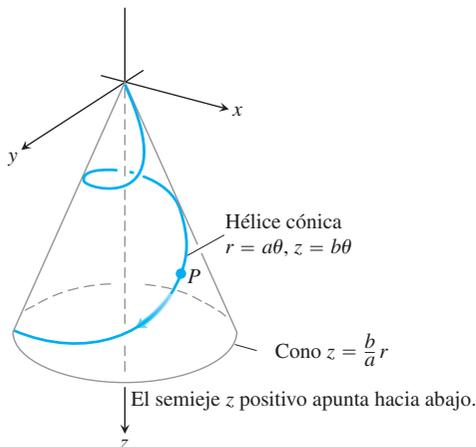
bajo la influencia de la gravedad, como indica la figura. θ en esta ecuación es la coordenada cilíndrica θ , y la hélice es la curva $r = a$, $z = b\theta$, $\theta \geq 0$, en coordenadas cilíndricas. Suponemos que θ es una función derivable de t para el movimiento. La ley de conservación de la energía nos dice que la rapidez de la partícula después de caer directamente en línea recta una distancia z es $\sqrt{2gz}$, donde g es la aceleración constante de la gravedad.

- Encuentre la velocidad angular $d\theta/dt$ cuando $\theta = 2\pi$.
- Expresar las coordenadas θ y z de la partícula como funciones de t .
- Expresar los componentes tangencial y normal de la velocidad $d\mathbf{r}/dt$ y de la aceleración $d^2\mathbf{r}/dt^2$ como funciones de t . ¿Tiene la aceleración un componente no nulo en la dirección del vector binormal \mathbf{B} ?



- Suponga que la curva del ejercicio 1 se sustituye por la hélice cónica $r = a\theta$, $z = b\theta$ mostrada en la figura.

- Expresar la velocidad angular $d\theta/dt$ como una función de θ .
- Expresar la distancia recorrida por la partícula a lo largo de la hélice como una función de θ .



Movimiento en coordenadas polares y cilíndricas

- Deduzca, a partir de la ecuación de la órbita

$$r = \frac{(1 + e)r_0}{1 + e \cos \theta}$$

que un planeta está más cerca del sol cuando $\theta = 0$ y demuestre que $r = r_0$ en ese instante.

- 4. Ecuación de Kepler** El problema de localizar un planeta en su órbita, en una fecha y una hora determinadas, finalmente lleva a resolver ecuaciones de "Kepler" de la forma

$$f(x) = x - 1 - \frac{1}{2} \sin x = 0.$$

- Demuestre que esta ecuación particular tiene una solución entre $x = 0$ y $x = 2$.
 - Con su computadora o calculadora en modo de "radianes", use el método de Newton para hallar la solución con tantos dígitos como sea posible.
- En la sección 13.6, vimos que la velocidad de una partícula que se mueve en el plano es

$$\mathbf{v} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} = \dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta.$$

- Expresar \dot{x} y \dot{y} en términos de \dot{r} y $r\dot{\theta}$ calculando los productos punto $\mathbf{v} \cdot \mathbf{i}$ y $\mathbf{v} \cdot \mathbf{j}$.
 - Expresar \dot{r} y $r\dot{\theta}$ en términos de \dot{x} y \dot{y} calculando los productos punto $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_r$ y $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_\theta$.
- Expresar la curvatura de una curva dos veces derivable $r = f(\theta)$ en el plano de coordenadas polares en términos de f y sus derivadas.
 - Una varilla delgada que pasa por el origen del plano de coordenadas polares gira (en el plano) alrededor del origen a razón de 3 rad/min. Un escarabajo parte del punto $(2, 0)$ y camina a lo largo de la varilla hacia el origen a razón de 1 in/min.
 - Determine la aceleración y velocidad del escarabajo en forma polar cuando está a la mitad del camino (1 in) hacia el origen.

- 7.** A la décima de pulgada más próxima, ¿cuál será la longitud de la trayectoria que ha viajado el escarabajo en el instante en que alcanza el origen?

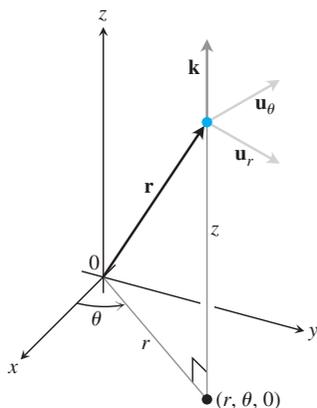
8. Longitud de arco en coordenadas cilíndricas

- Demuestre que cuando se expresa $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ en términos de coordenadas cilíndricas, se obtiene $ds^2 = dr^2 + r^2d\theta^2 + dz^2$.
- Interprete este resultado geoméricamente en términos de las aristas y la diagonal de una caja. Elabore el bosquejo de la caja.
- Use el resultado del inciso (a) para encontrar la longitud de la curva $r = e^\theta, z = e^\theta, 0 \leq \theta \leq \ln 8$.

- 9. Vector unitario para la posición y el movimiento en coordenadas cilíndricas** Cuando la posición de una partícula que se mueve en el espacio está dada en coordenadas cilíndricas, los vectores unitarios que usamos para describir su posición y movimiento son

$$\mathbf{u}_r = (\cos \theta)\mathbf{i} + (\sin \theta)\mathbf{j}, \quad \mathbf{u}_\theta = -(\sin \theta)\mathbf{i} + (\cos \theta)\mathbf{j},$$

y \mathbf{k} (véase la figura). El vector de posición de la partícula es $\mathbf{r} = r\mathbf{u}_r + z\mathbf{k}$, donde r es la coordenada de distancia polar positiva de la posición de la partícula.



a. Demuestre que \mathbf{u}_r , \mathbf{u}_θ y \mathbf{k} , en ese orden, forman un marco de referencia vectorial de mano derecha de vectores unitarios.

b. Demuestre que

$$\frac{d\mathbf{u}_r}{d\theta} = \mathbf{u}_\theta \quad \text{y} \quad \frac{d\mathbf{u}_\theta}{d\theta} = -\mathbf{u}_r.$$

c. Suponiendo que las derivadas necesarias con respecto a t existen, exprese $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ y $\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}}$ en términos de \mathbf{u}_r , \mathbf{u}_θ , \mathbf{k} , \dot{r} , y $\dot{\theta}$.

10. **Conservación del momento angular** Sea $\mathbf{r}(t)$ la posición de un cuerpo que se mueve en el espacio en el instante t . Suponga que la fuerza que actúa sobre el objeto en el instante t es

$$\mathbf{F}(t) = -\frac{c}{|\mathbf{r}(t)|^3} \mathbf{r}(t),$$

donde c es una constante. En física, el **momento angular** de un objeto en el instante t se define como $\mathbf{L}(t) = \mathbf{r}(t) \times m\mathbf{v}(t)$, donde m es la masa del objeto y $\mathbf{v}(t)$ es la velocidad. Pruebe que el momento angular es una cantidad que se conserva; es decir, pruebe que $\mathbf{L}(t)$ es un vector constante, independiente del tiempo. Recuerde la ley de Newton $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. (Éste es un problema de cálculo, no un problema de física).

Capítulo 13 Proyectos de aplicación tecnológica

Módulo de Mathematica/Maple

Rastreo por radar de un objeto en movimiento

Visualización de los vectores de posición, velocidad y aceleración para analizar el movimiento.

Ecuaciones paramétricas y polares para un profesional del patinaje artístico

Visualización de los vectores posición, velocidad y aceleración para analizar el movimiento.

Movimiento en tres dimensiones

Cálculo de la distancia viajada, rapidez, curvatura y torsión del movimiento a lo largo de una curva en el espacio. Visualización y cálculo de los vectores tangencial, normal, binormal asociados con el movimiento a lo largo de una curva en el espacio.



14

DERIVADAS PARCIALES

INTRODUCCIÓN Muchas funciones dependen de más de una variable independiente. Por ejemplo, el volumen de un cilindro circular recto $V = \pi r^2 h$ es función de su radio y de su altura, de manera que es una función $V(r, h)$ de las dos variables r y h . En este capítulo ampliaremos las ideas básicas del cálculo de una variable a funciones de más variables. Sus derivadas son más variadas e interesantes debido a las diferentes maneras en que las variables pueden interactuar. Las aplicaciones de estas derivadas también son más variadas que las del cálculo de una sola variable. En el siguiente capítulo veremos que esto también es verdad para las integrales que implican más de una variable.

14.1

Funciones de varias variables

En esta sección definiremos funciones de más de una variable independiente y explicaremos la forma de graficarlas.

Las funciones con valores reales de varias variables independientes reales se definen de manera similar a las funciones de una sola variable. Los puntos en el dominio son pares ordenados (ternas, cuartetos, ..., n -adas) de números reales, y los valores del rango son números reales como los que hemos trabajado desde el principio.

DEFINICIONES Suponga que D es un conjunto de n -adas de números reales (x_1, x_2, \dots, x_n) . Una **función de valores reales** f en D es una regla que asigna un único número real (individual)

$$w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

a cada elemento en D . El conjunto D es el **dominio** de la función. El conjunto de valores w asignados por f es el **rango** de la función. El símbolo w es la **variable dependiente** de f , y se dice que f es una función de n **variables independientes** x_1 a x_n . También llamamos a las x_j **variables de entrada** de la función y a w la **variable de salida de la función**.

Si f es una función de dos variables independientes, por lo general llamamos x y y a las variables independientes, y z a la variable dependiente; además, dibujamos el dominio de f como una región en el plano xy (figura 14.1). Si f es una función de tres variables independientes, llamamos x , y y z a las variables independientes y w a la dependiente, y dibujamos el dominio como una región en el espacio.

En las aplicaciones tendemos a usar letras que nos recuerden lo que representan las variables. Por decir algo, el volumen de un cilindro circular recto es una función de su radio y su altura; podemos escribir $V = f(r, h)$. Para precisar, podemos sustituir la notación $f(r, h)$ por la fórmula que calcula el valor de V a partir de los valores de r y h , y escribir $V = \pi r^2 h$. En tal caso, r y h serán las variables independientes y V la variable dependiente de la función.

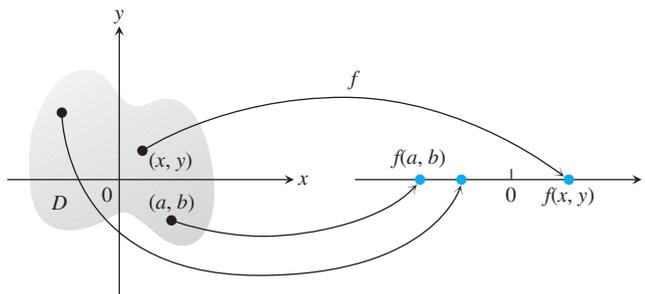


FIGURA 14.1 Diagrama de flechas para la función $z = f(x, y)$.

Como es usual, calculamos las funciones definidas mediante fórmulas, sustituimos los valores de las variables independientes en la fórmula y calculamos el valor correspondiente de la variable dependiente. Por ejemplo, el valor de $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ en el punto $(3, 0, 4)$ es

$$f(3, 0, 4) = \sqrt{(3)^2 + (0)^2 + (4)^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Dominios y rangos

Para definir una función de más de una variable, seguimos la práctica usual de excluir las entradas que conducen a números complejos o a la división entre cero. Si $f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$, y no puede ser menor que x^2 . Si $f(x, y) = 1/(xy)$, xy no puede ser cero. Supondremos que el dominio de una función es el conjunto más grande para el cual la regla que la define genera números reales, a menos que el dominio esté indicado de manera explícita. El rango consiste en el conjunto de valores de salida para la variable dependiente.

EJEMPLO 1 (a) Ahora veamos funciones de dos variables. Observe las restricciones que se aplican para obtener un valor real de la variable dependiente z .

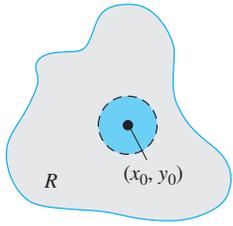
| Función | Dominio | Rango |
|----------------------|-------------------|---------------------------------|
| $z = \sqrt{y - x^2}$ | $y \geq x^2$ | $[0, \infty)$ |
| $z = \frac{1}{xy}$ | $xy \neq 0$ | $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ |
| $z = \text{sen } xy$ | El plano completo | $[-1, 1]$ |

(b) Las siguientes son funciones de tres variables con restricciones.

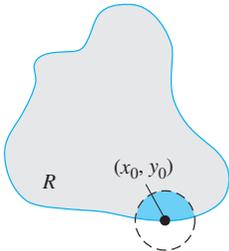
| Función | Dominio | Rango |
|---------------------------------|----------------------------|---------------------|
| $w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ | El espacio completo | $[0, \infty)$ |
| $w = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$ | $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ | $(0, \infty)$ |
| $w = xy \ln z$ | El semiespacio $z > 0$ | $(-\infty, \infty)$ |

Funciones de dos variables

Las regiones en el plano pueden tener puntos interiores y puntos frontera, tal como los intervalos en la recta real. Los intervalos cerrados $[a, b]$ incluyen sus puntos frontera, los intervalos abiertos (a, b) no incluyen sus puntos frontera, y los intervalos $[a, b)$ no son abiertos ni cerrados.

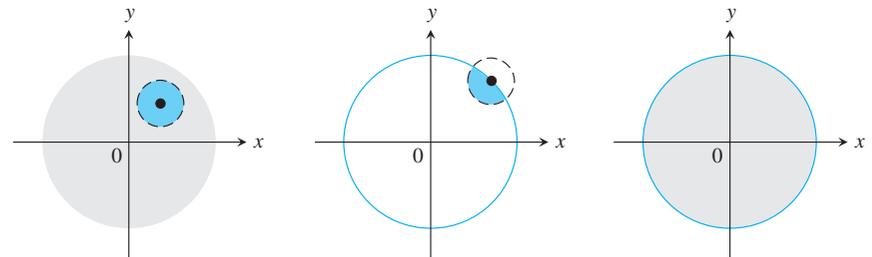


(a) Punto interior



(b) Punto frontera

FIGURA 14.2 Puntos interiores y puntos frontera de una región plana R . Un punto interior necesariamente es un punto de R . Un punto frontera de R no tiene que pertenecer a R .



$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$
 Disco unitario abierto.
 Cada punto es un punto interior.

$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$
 Frontera del disco unitario. (El círculo unitario).

$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$
 Disco unitario cerrado.
 Contiene a todos los puntos frontera.

FIGURA 14.3 Puntos interiores y puntos frontera de un disco unitario en el plano.

Como en el intervalo semiabierto de valores reales $[a, b]$, algunas regiones del plano no son abiertas ni cerradas. Comenzamos con el disco abierto de la figura 14.3 y agregamos algunos de los puntos frontera (pero no todos); el conjunto resultante no es abierto ni cerrado. Los puntos frontera que *están* en él hacen que el conjunto no sea abierto. La ausencia de los puntos frontera restantes hace que el conjunto sea no cerrado.

DEFINICIONES Una región en el plano está **acotada** si está dentro de un disco de radio fijo. Una región es **no acotada** si carece de fronteras.

Ejemplos de conjuntos *acotados* en el plano incluyen segmentos de recta, triángulos, interiores de triángulos, rectángulos, círculos y discos. Ejemplos de conjuntos *no acotados* en el plano incluyen rectas, ejes coordenados, gráficas de funciones definidas en intervalos infinitos, los cuadrantes, semiplanos y el plano mismo.

EJEMPLO 2 Describa el dominio de la función $f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$.

Solución Puesto que f está definida sólo cuando $y - x^2 \geq 0$, el dominio es la región cerrada, no acotada, que se muestra en la figura 14.4. La parábola $y = x^2$ es la frontera del dominio. Los puntos dentro de la parábola forman el interior del dominio. ■

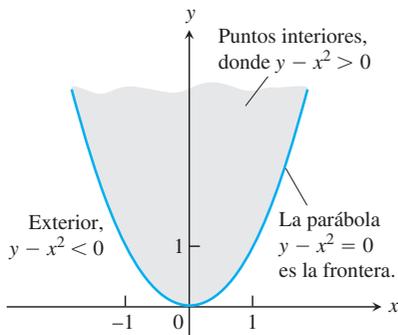


FIGURA 14.4 El dominio de $f(x, y)$ en el ejemplo 2 consta de la región sombreada y de su parábola que es la frontera.

Gráficas, curvas de nivel y contornos de funciones de dos variables

Hay dos maneras habituales de dibujar los valores de una función $f(x, y)$. Una es trazar y etiquetar las curvas en el dominio donde f asume un valor constante. La otra es dibujar la superficie $z = f(x, y)$ en el espacio.

DEFINICIONES El conjunto de puntos en el plano donde la función $f(x, y)$ tiene un valor constante $f(x, y) = c$ se llama **curva de nivel** de f . El conjunto de todos los puntos $(x, y, f(x, y))$ en el espacio, para (x, y) en el dominio de f , se llama la **gráfica** de f . La gráfica de f también se llama **superficie $z = f(x, y)$** .

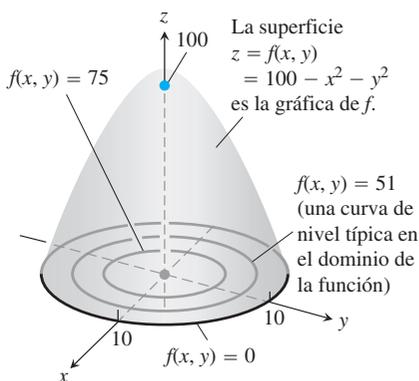


FIGURA 14.5 Gráfica y curvas de nivel seleccionadas de la función $f(x, y)$ del ejemplo 3.

EJEMPLO 3 Grafique $f(x, y) = 100 - x^2 - y^2$ y trace las curvas de nivel $f(x, y) = 0$, $f(x, y) = 51$, y $f(x, y) = 75$ en el dominio de f en el plano.

Solución El dominio de f es el plano xy completo, y el rango de f es el conjunto de números reales menores o iguales a 100. La gráfica es el paraboloide $z = 100 - x^2 - y^2$, la porción positiva que se muestra en la figura 14.5.

La curva de nivel $f(x, y) = 0$ es el conjunto de puntos en el plano xy para los cuales

$$f(x, y) = 100 - x^2 - y^2 = 0, \quad \text{o} \quad x^2 + y^2 = 100,$$

lo cual es una circunferencia de radio 10 con centro en el origen. De manera similar, las curvas de nivel $f(x, y) = 51$ y $f(x, y) = 75$ (figura 14.5) son las circunferencias

$$f(x, y) = 100 - x^2 - y^2 = 51, \quad \text{o} \quad x^2 + y^2 = 49$$

$$f(x, y) = 100 - x^2 - y^2 = 75, \quad \text{o} \quad x^2 + y^2 = 25.$$

La curva de nivel $f(x, y) = 100$ sólo consta del origen. (Es sólo una curva de nivel).

Si $x^2 + y^2 > 100$, entonces los valores de $f(x, y)$ son negativos. Por ejemplo, la circunferencia $x^2 + y^2 = 144$, la cual es una circunferencia de radio 12 con centro en el origen, da un valor constante $f(x, y) = -44$ y es una curva de nivel f . ■

La curva en el espacio donde el plano $z = c$ corta a una superficie $z = f(x, y)$ está formada por los puntos que representan el valor de la función $f(x, y) = c$. Esta curva se llama **curva de contorno** $f(x, y) = c$ para distinguirla de la curva de nivel $f(x, y) = c$ en el dominio de f . La figura 14.6 muestra la curva contorno $f(x, y) = 75$ sobre la superficie $z = 100 - x^2 - y^2$ definida por la función $f(x, y) = 100 - x^2 - y^2$. La curva de contorno se encuentra directamente arriba de la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$, que es la curva de nivel $f(x, y) = 75$ en el dominio de la función.

Sin embargo, no todos hacen esta distinción y usted podría llamar a ambas clases de curvas por el mismo nombre y usar el contexto para aclarar lo que tiene en mente. En la mayoría de los mapas, por ejemplo, las curvas que representan una elevación constante (altura sobre el nivel del mar) se llaman contornos, no curvas de nivel (figura 14.7).

Funciones de tres variables

En el plano, los puntos donde una función de dos variables independientes tiene un valor constante $f(x, y) = c$ forman una curva en el dominio de la función. En el espacio, los puntos donde una función de tres variables independientes tiene un valor constante $f(x, y, z) = c$ forman una superficie en el dominio de la función.

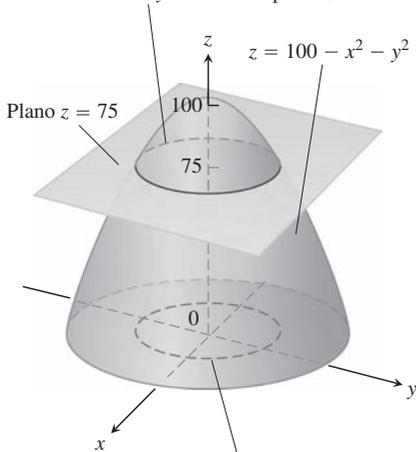
DEFINICIÓN El conjunto de puntos (x, y, z) en el espacio, donde una función de tres variables independientes tiene un valor constante $f(x, y, z) = c$, es una **superficie de nivel** de f .

Como las gráficas de las funciones de tres variables consisten en puntos $(x, y, z, f(x, y, z))$ que se encuentran en un espacio con cuatro dimensiones, no podemos trazarlas en nuestro marco de referencia tridimensional. Sin embargo, podemos ver cómo se comporta la función analizando sus superficies de nivel tridimensionales.

EJEMPLO 4 Describa las superficies de nivel de la función

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

La curva de contorno $f(x, y) = 100 - x^2 - y^2 = 75$ es el círculo $x^2 + y^2 = 25$ en el plano $z = 75$.



La curva de nivel $f(x, y) = 100 - x^2 - y^2 = 75$ es el círculo $x^2 + y^2 = 25$ en el plano xy .

FIGURA 14.6 Un plano $z = c$ paralelo al plano xy que corta una superficie $z = f(x, y)$ produce una curva de contorno.

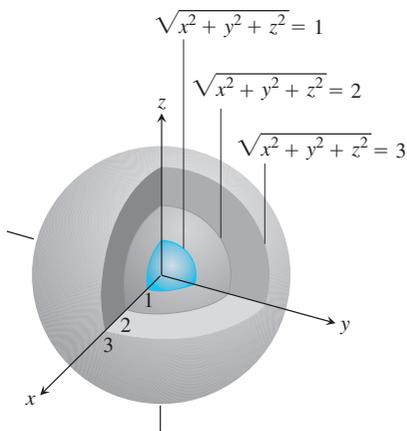


FIGURA 14.8 Las superficies de nivel de $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ son esferas concéntricas (ejemplo 4).

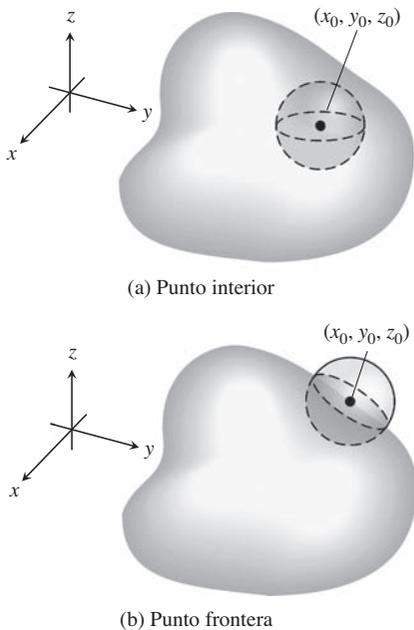


FIGURA 14.9 Puntos interiores y puntos frontera de una región en el espacio. Como en las regiones en un plano, un punto frontera no necesariamente pertenece a la región R del espacio.

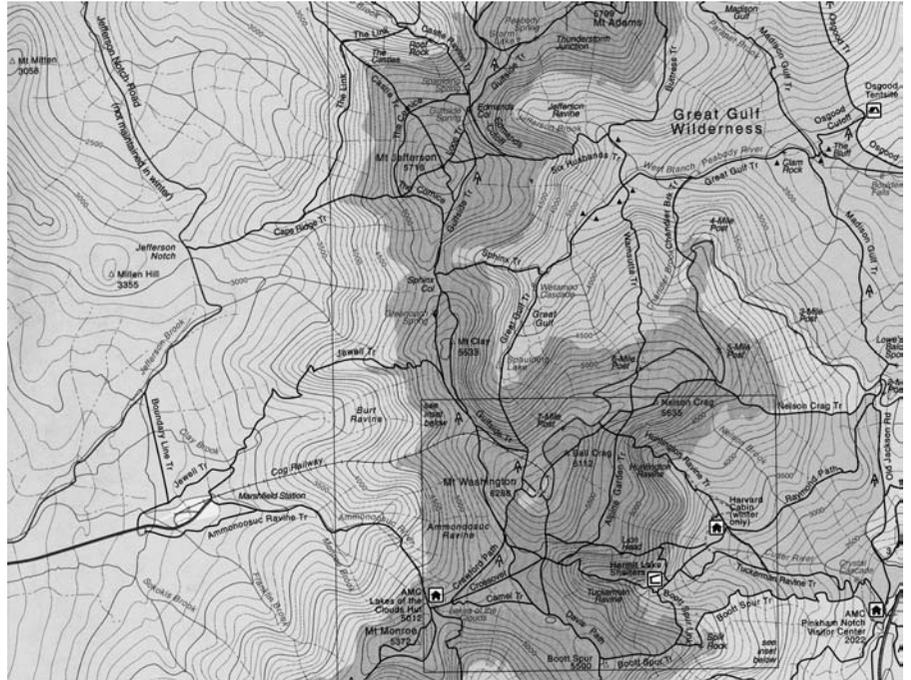


FIGURA 14.7 Contornos del Monte Washington en New Hampshire. (Reproducida con permiso del Club Montañés Apalache).

Solución El valor de f es la distancia del origen al punto (x, y, z) . Cada superficie de nivel $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = c$, $c > 0$, es una esfera de radio c con centro en el origen. La figura 14.8 muestra un corte esquemático de tres de estas esferas. La superficie de nivel $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 0$ consta sólo del origen.

Aquí no graficamos la función; sólo observamos las superficies de nivel en su dominio de la función. Las superficies de nivel muestran cómo cambian los valores de la función conforme nos movemos a través de su dominio. Si permanecemos en una esfera de radio c con centro en el origen, la función mantiene un valor constante, digamos, c . Si nos movemos de una esfera a otra, el valor de la función cambia. Crece al alejarnos del origen y decrece si nos movemos hacia el origen. La manera como cambian los valores depende de la dirección que tomemos. El hecho de que el cambio dependa de la dirección es importante. Regresaremos a esto en la sección 14.5.

Las definiciones de interior, frontera, abierta, cerrada, acotada y no acotada para las regiones en el espacio son similares a las de las regiones en el plano. Para incluir la dimensión extra, usamos esferas sólidas de radios positivos en vez de discos.

DEFINICIONES Un punto (x_0, y_0, z_0) en una región R del espacio es un **punto interior** de R si es el centro de una bola sólida que está completamente dentro de R (figura 14.9a). Un punto (x_0, y_0, z_0) es un **punto frontera** de R si la esfera con centro en (x_0, y_0, z_0) tiene puntos que están fuera de R y puntos que están en R (figura 14.9b). El **interior** de R es el conjunto de los puntos interiores de R . La **frontera** de R es el conjunto de puntos frontera de R .

Una región es **abierta** si consta sólo de puntos interiores. Una región es **cerrada** si contiene a toda su frontera.

Algunos ejemplos de conjuntos *abiertos* en el espacio incluyen el interior de una esfera, el semiespacio abierto $z > 0$, el primer octante (donde x, y y z son todos positivos) y el espacio mismo. Ejemplos de conjuntos cerrados en el espacio incluyen rectas, planos, el semiespacio

cerrado $z \geq 0$. Una esfera sólida con una parte de su frontera eliminada o un cubo sólido sin una cara, arista o esquina *no son abiertos ni cerrados*.

Las funciones con más de tres variables independientes también son importantes. Por ejemplo, la temperatura de una superficie en el espacio puede depender no sólo de la posición del punto $P(x_0, y_0, z_0)$ sobre la superficie, sino también del tiempo t , de manera que podríamos escribir $T = f(x, y, z, t)$.

Graficación por computadora

Los programas de graficación tridimensional para las computadoras y calculadoras hacen posible graficar funciones de dos variables oprimiendo unas cuantas teclas. Con frecuencia, podemos obtener información más rápidamente de una gráfica que de una fórmula.

EJEMPLO 5 La temperatura w debajo de la superficie de la Tierra es una función de la profundidad x y del tiempo t del año. Si medimos x en ft, y t es el número de días transcurridos desde la fecha esperada para la temperatura superficial máxima anual, podemos modelar la variación de la temperatura mediante la función

$$w = \cos(1.7 \times 10^{-2}t - 0.2x)e^{-0.2x}.$$

(La temperatura a 0 ft está en una escala que varía entre $+1$ y -1 , de manera que la variación en x ft se pueda interpretar como una fracción de la variación sobre la superficie).

La figura 14.10 presenta la gráfica de la función. A una profundidad de 15 ft, la variación (el cambio en la amplitud vertical de la figura) es de alrededor del 5% de la variación en la superficie. A 25 ft casi no hay variación durante el año.

La gráfica también indica que la temperatura a 15 ft bajo la superficie está desfasada casi medio año en relación con la temperatura de la superficie. Cuando la temperatura baja a un mínimo sobre la superficie (digamos, a finales de enero), está en su punto máximo a 15 ft debajo. A 15 ft debajo del suelo, las estaciones están invertidas. ■

La figura 14.11 muestra gráficas generadas por computadora de varias funciones de dos variables, junto con sus curvas de nivel.

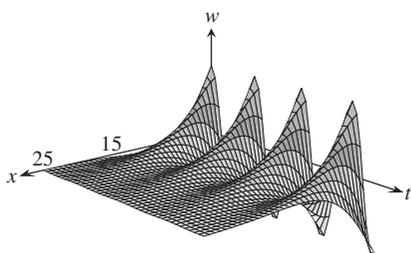


FIGURA 14.10 Esta gráfica muestra la variación estacional de la temperatura debajo del suelo como una fracción de la temperatura en la superficie (ejemplo 5).

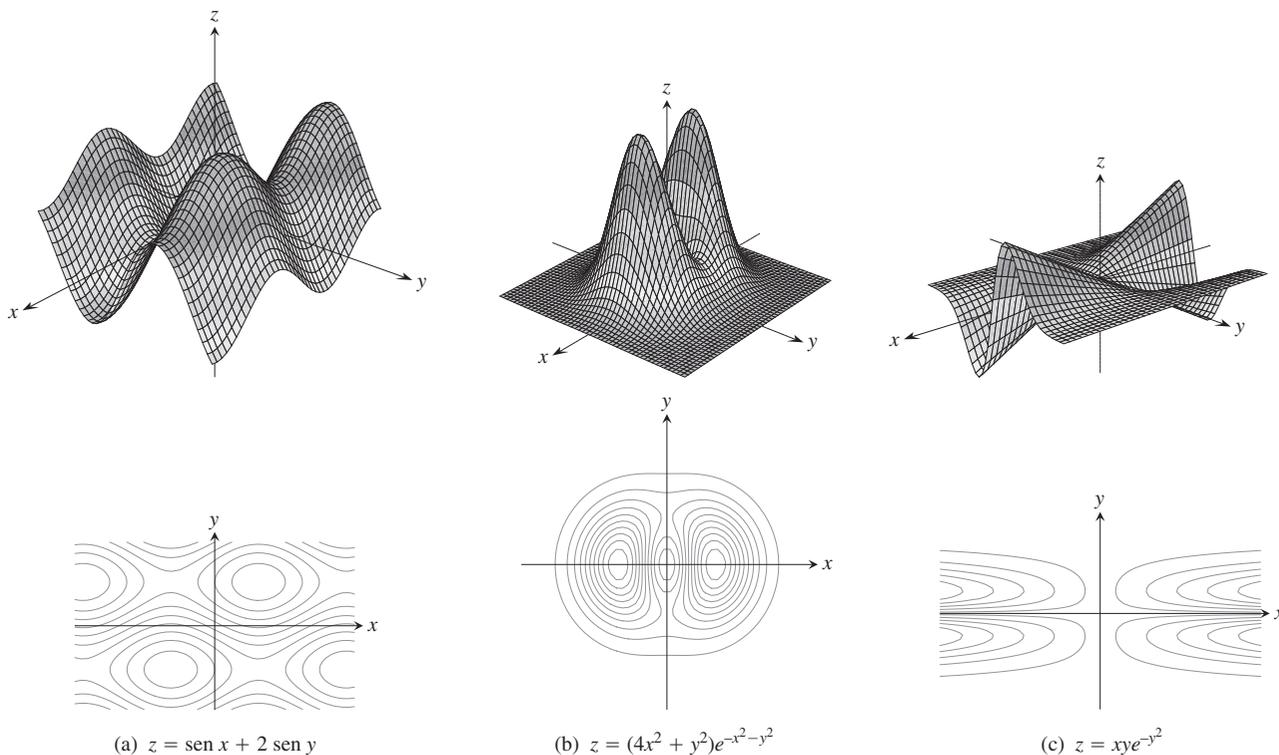


FIGURA 14.11 Gráficas generadas por computadora y curvas de nivel de funciones típicas de dos variables.

Ejercicios 14.1

Dominio, rango y curvas de nivel

En los ejercicios 1 a 4, obtenga los valores específicos de la función.

1. $f(x, y) = x^2 + xy^3$
 - a. $f(0, 0)$
 - b. $f(-1, 1)$
 - c. $f(2, 3)$
 - d. $f(-3, -2)$
2. $f(x, y) = \text{sen}(xy)$
 - a. $f\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$
 - b. $f\left(-3, \frac{\pi}{12}\right)$
 - c. $f\left(\pi, \frac{1}{4}\right)$
 - d. $f\left(-\frac{\pi}{2}, -7\right)$
3. $f(x, y, z) = \frac{x - y}{y^2 + z^2}$
 - a. $f(3, -1, 2)$
 - b. $f\left(1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$
 - c. $f\left(0, -\frac{1}{3}, 0\right)$
 - d. $f(2, 2, 100)$
4. $f(x, y, z) = \sqrt{49 - x^2 - y^2 - z^2}$
 - a. $f(0, 0, 0)$
 - b. $f(2, -3, 6)$
 - c. $f(-1, 2, 3)$
 - d. $f\left(\frac{4}{\sqrt{2}}, \frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{6}{\sqrt{2}}\right)$

En los ejercicios 5 a 12, obtenga y grafique el dominio de cada función.

5. $f(x, y) = \sqrt{y - x - 2}$
6. $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 4)$
7. $f(x, y) = \frac{(x - 1)(y + 2)}{(y - x)(y - x^3)}$
8. $f(x, y) = \frac{\text{sen}(xy)}{x^2 + y^2 - 25}$
9. $f(x, y) = \cos^{-1}(y - x^2)$
10. $f(x, y) = \ln(xy + x - y - 1)$
11. $f(x, y) = \sqrt{(x^2 - 4)(y^2 - 9)}$
12. $f(x, y) = \frac{1}{\ln(4 - x^2 - y^2)}$

En los ejercicios 13 a 16, obtenga y bosqueje las curvas de nivel $f(x, y) = c$ sobre el mismo conjunto de ejes coordenados para los valores dados de c . Nos referimos a estas curvas de nivel como un mapa de contorno.

13. $f(x, y) = x + y - 1$, $c = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$
14. $f(x, y) = x^2 + y^2$, $c = 0, 1, 4, 9, 16, 25$
15. $f(x, y) = xy$, $c = -9, -4, -1, 0, 1, 4, 9$
16. $f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$, $c = 0, 1, 2, 3, 4$

En los ejercicios 17 a 30, (a) obtenga el dominio de la función, (b) determine el rango de la función, (c) describa las curvas de nivel de la función, (d) encuentre la frontera del dominio de la función, (e) determine si el dominio es una región abierta, cerrada, o ninguna de las dos y (f) decida si el dominio está o no acotado.

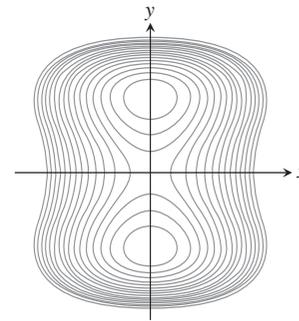
17. $f(x, y) = y - x$
18. $f(x, y) = \sqrt{y - x}$
19. $f(x, y) = 4x^2 + 9y^2$
20. $f(x, y) = x^2 - y^2$

21. $f(x, y) = xy$
22. $f(x, y) = y/x^2$
23. $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}$
24. $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$
25. $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$
26. $f(x, y) = e^{-(x^2 + y^2)}$
27. $f(x, y) = \text{sen}^{-1}(y - x)$
28. $f(x, y) = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$
29. $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 1)$
30. $f(x, y) = \ln(9 - x^2 - y^2)$

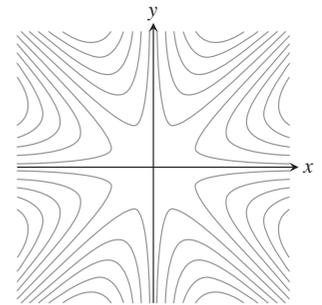
Asociación de superficies con curvas de nivel

En los ejercicios 31 a 36 se muestran curvas de nivel para las funciones graficadas en los incisos (a) a (f) de la página siguiente. Asocie cada conjunto de curvas con la función apropiada.

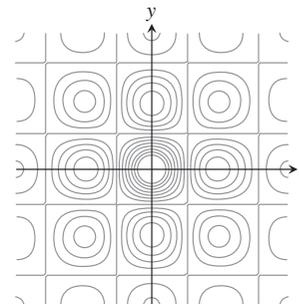
31.



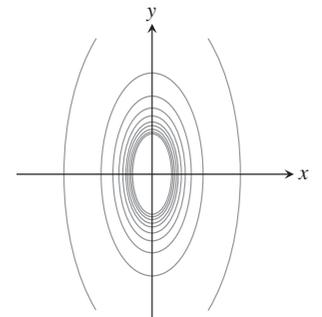
32.



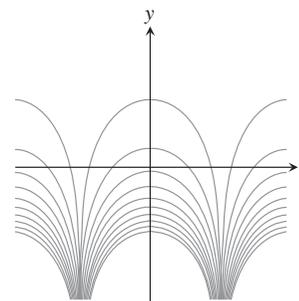
33.



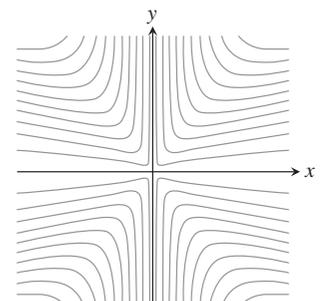
34.

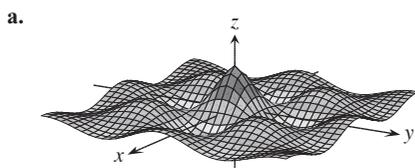


35.

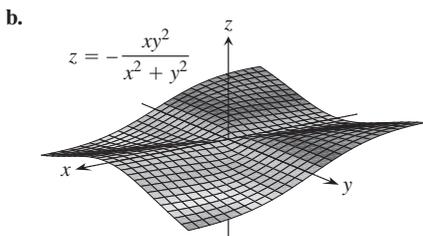


36.

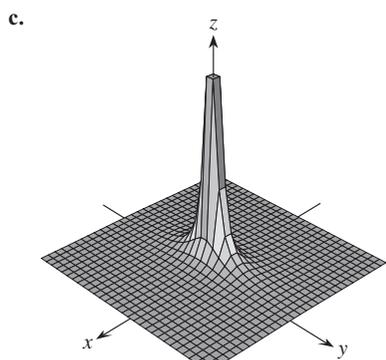




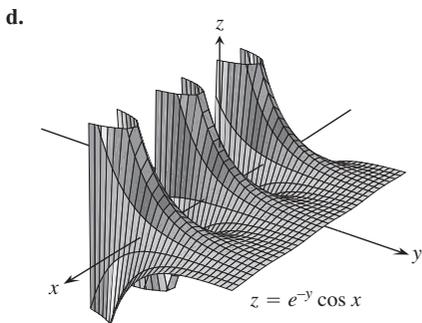
$$z = (\cos x)(\cos y) e^{-\sqrt{x^2 + y^2}/4}$$



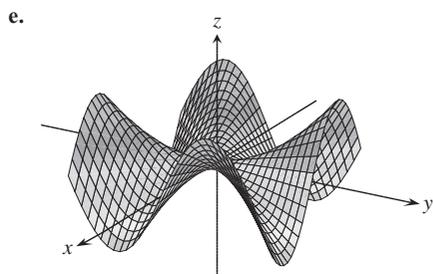
$$z = -\frac{xy^2}{x^2 + y^2}$$



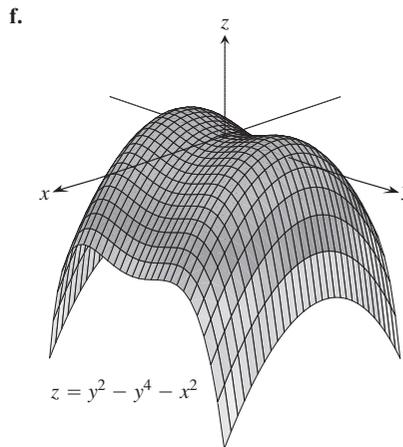
$$z = \frac{1}{4x^2 + y^2}$$



$$z = e^{-y} \cos x$$



$$z = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$$



$$z = y^2 - y^4 - x^2$$

Funciones de dos variables

Muestre los valores de las funciones de los ejercicios 37 a 48 de dos maneras: (a) graficando la superficie $z = f(x, y)$ y (b) dibujando varias curvas de nivel en el dominio de la función. Marque cada curva de nivel con el valor de su función.

- | | |
|--------------------------------------|--------------------------------------|
| 37. $f(x, y) = y^2$ | 38. $f(x, y) = \sqrt{x}$ |
| 39. $f(x, y) = x^2 + y^2$ | 40. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ |
| 41. $f(x, y) = x^2 - y$ | 42. $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ |
| 43. $f(x, y) = 4x^2 + y^2$ | 44. $f(x, y) = 6 - 2x - 3y$ |
| 45. $f(x, y) = 1 - y $ | 46. $f(x, y) = 1 - x - y $ |
| 47. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 4}$ | 48. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$ |

Determinación de curvas de nivel

En los ejercicios 49 a 52, encuentre una ecuación y dibuje la gráfica de la curva de nivel de la función $f(x, y)$ que pasa por el punto dado.

49. $f(x, y) = 16 - x^2 - y^2$, $(2\sqrt{2}, \sqrt{2})$
 50. $f(x, y) = \sqrt{x^2 - 1}$, $(1, 0)$
 51. $f(x, y) = \sqrt{x + y^2 - 3}$, $(3, -1)$
 52. $f(x, y) = \frac{2y - x}{x + y + 1}$, $(-1, 1)$

Trazo de superficies de nivel

En los ejercicios 53 a 60, dibuje la superficie de nivel típica para la función.

- | | |
|--|---|
| 53. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ | 54. $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ |
| 55. $f(x, y, z) = x + z$ | 56. $f(x, y, z) = z$ |
| 57. $f(x, y, z) = x^2 + y^2$ | 58. $f(x, y, z) = y^2 + z^2$ |
| 59. $f(x, y, z) = z - x^2 - y^2$ | |
| 60. $f(x, y, z) = (x^2/25) + (y^2/16) + (z^2/9)$ | |

Obtención de superficies de nivel

En los ejercicios 61 a 64, determine la ecuación para la superficie de nivel de la función en el punto dado.

61. $f(x, y, z) = \sqrt{x - y} - \ln z$, $(3, -1, 1)$
 62. $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y + z^2)$, $(-1, 2, 1)$

63. $g(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (1, -1, \sqrt{2})$

64. $g(x, y, z) = \frac{x - y + z}{2x + y - z}, \quad (1, 0, -2)$

En los ejercicios 65 a 68, determine y grafique el dominio de f . Luego obtenga la ecuación para la curva o superficie de nivel de la función que pasa por el punto dado.

65. $f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{y}\right)^n, \quad (1, 2)$

66. $g(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!z^n}, \quad (\ln 4, \ln 9, 2)$

67. $f(x, y) = \int_x^y \frac{d\theta}{\sqrt{1-\theta^2}}, \quad (0, 1)$

68. $g(x, y, z) = \int_x^y \frac{dt}{1+t^2} + \int_0^z \frac{d\theta}{\sqrt{4-\theta^2}}, \quad (0, 1, \sqrt{3})$

EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

Use un SAC para efectuar los siguientes pasos para cada función en los ejercicios 69 a 72.

- Trace la superficie en el rectángulo dado.
 - Trace varias curvas de nivel en el rectángulo.
 - Trace la curva de nivel de f que pasa por el punto dado.
69. $f(x, y) = x \sin \frac{y}{2} + y \sin 2x, \quad 0 \leq x \leq 5\pi, \quad 0 \leq y \leq 5\pi,$
 $P(3\pi, 3\pi)$
70. $f(x, y) = (\sin x)(\cos y)e^{\sqrt{x^2+y^2}/8}, \quad 0 \leq x \leq 5\pi,$
 $0 \leq y \leq 5\pi, \quad P(4\pi, 4\pi)$

71. $f(x, y) = \sin(x + 2 \cos y), \quad -2\pi \leq x \leq 2\pi,$
 $-2\pi \leq y \leq 2\pi, \quad P(\pi, \pi)$

72. $f(x, y) = e^{(x^{0.1}-y)} \sin(x^2 + y^2), \quad 0 \leq x \leq 2\pi,$
 $-2\pi \leq y \leq \pi, \quad P(\pi, -\pi)$

Use un software matemático (CAS) para trazar las superficies de nivel implícitamente definidas en los ejercicios 73 a 76.

73. $4 \ln(x^2 + y^2 + z^2) = 1$

74. $x^2 + z^2 = 1$

75. $x + y^2 - 3z^2 = 1$

76. $\sin\left(\frac{x}{2}\right) - (\cos y)\sqrt{x^2 + z^2} = 2$

Superficies parametrizadas Así como las curvas en el plano se describen en formas paramétricas con un par de ecuaciones $x = f(t), y = g(t)$ definidas en algún intervalo I del parámetro, usted puede describir a las superficies en el espacio con una terna de ecuaciones $x = f(u, v), y = g(u, v), z = h(u, v)$ definida en un rectángulo de parámetros $a \leq u \leq b, c \leq v \leq d$. Muchos sistemas de computación matemáticos le permiten dibujar tales superficies en *modo paramétrico*. (Las superficies parametrizadas se estudian con detalle en la sección 16.5). Use un software matemático para trazar las superficies de los ejercicios 77 a 80. También trace varias curvas de nivel en el plano xy .

77. $x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = u, \quad 0 \leq u \leq 2, \quad 0 \leq v \leq 2\pi$

78. $x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = v, \quad 0 \leq u \leq 2, \quad 0 \leq v \leq 2\pi$

79. $x = (2 + \cos u) \cos v, \quad y = (2 + \cos u) \sin v, \quad z = \sin u,$
 $0 \leq u \leq 2\pi, \quad 0 \leq v \leq 2\pi$

80. $x = 2 \cos u \cos v, \quad y = 2 \cos u \sin v, \quad z = 2 \sin u,$
 $0 \leq u \leq 2\pi, \quad 0 \leq v \leq \pi$

14.2 Límites y continuidad en dimensiones superiores

Esta sección trata los límites y la continuidad de funciones multivariables. Las definiciones son análogas a las de límites y continuidad de funciones de una variable, pero incluyen más variables independientes que traen consigo mayor complejidad y diferencias importantes que requieren algunas nociones nuevas.

Límites para funciones de dos variables

Si valores de $f(x, y)$ son arbitrariamente cercanos a un número real fijo L para todos los puntos (x, y) suficientemente cercanos a un punto (x_0, y_0) , decimos que f tiende al límite L cuando (x, y) tiende a (x_0, y_0) . Esto es similar a la definición informal de límite de una función de una sola variable. Sin embargo, observe que si (x_0, y_0) está en el interior del dominio de f , (x, y) se puede acercar a (x_0, y_0) desde cualquier dirección. Para que el límite exista, se debe obtener el mismo valor límite desde cualquier dirección de aproximación. Ilustramos este hecho con varios ejemplos después de la definición.

DEFINICIÓN Decimos que una función $f(x, y)$ tiende al **límite** L cuando (x, y) tiende a (x_0, y_0) , y escribimos

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = L$$

si para cada número $\epsilon > 0$, existe un número correspondiente $\delta > 0$ tal que para todo (x, y) en el dominio de f ,

$$|f(x, y) - L| < \epsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta.$$

La definición de límite dice que la distancia entre $f(x, y)$ y L es arbitrariamente pequeña siempre que la distancia de (x, y) a (x_0, y_0) sea suficientemente pequeña (pero no cero). La definición se aplica tanto a puntos interiores (x_0, y_0) como a puntos frontera del dominio de f , aun cuando el punto frontera no necesariamente esté dentro del dominio. Los puntos (x, y) que se aproximan a (x_0, y_0) están siempre en el dominio de f . Observe la figura 14.12.

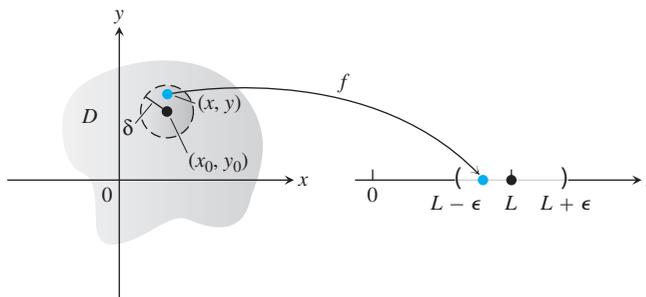


FIGURA 14.12 En la definición de límite, δ es el radio de un disco con centro en (x_0, y_0) . Para todos los puntos (x, y) dentro de este disco, los valores de la función $f(x, y)$ se encuentran dentro del intervalo correspondiente $(L - \epsilon, L + \epsilon)$.

Como en las funciones de una sola variable, es posible demostrar que

$$\begin{aligned} \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} x &= x_0 \\ \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} y &= y_0 \\ \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} k &= k \quad (\text{cualquier número } k). \end{aligned}$$

Por ejemplo, en la primera de las afirmaciones anteriores, $f(x, y) = x$ y $L = x_0$. Empleando la definición de límite, supongamos que se selecciona $\epsilon > 0$. Si hacemos que δ sea igual a esta ϵ , vemos que

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta = \epsilon$$

lo que implica

$$\begin{aligned} \sqrt{(x - x_0)^2} &< \epsilon & (x - x_0)^2 &\leq (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \\ |x - x_0| &< \epsilon & \sqrt{a^2} &= |a| \\ |f(x, y) - x_0| &< \epsilon & x &= f(x, y) \end{aligned}$$

Es decir,

$$|f(x, y) - x_0| < \epsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta.$$

De esta forma, se ha encontrado una δ que satisface el requerimiento de la definición, y

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} x = x_0.$$

Como en las funciones de una sola variable, el límite de la suma de dos funciones es la suma de sus límites (cuando ambos existen), con resultados similares para los límites de las diferencias, multiplicación por una constante, productos, cocientes, potencias y raíces.

TEOREMA 1: Propiedades de los límites de funciones de dos variables

Las siguientes reglas se cumplen si L , M y k son números reales y

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L \quad \text{y} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} g(x,y) = M.$$

1. *Regla de la suma:* $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} (f(x,y) + g(x,y)) = L + M$
2. *Regla de la resta:* $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} (f(x,y) - g(x,y)) = L - M$
3. *Regla de la multiplicación por una constante:* $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} kf(x,y) = kL$ (para cualquier número k)
4. *Regla del producto:* $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} (f(x,y) \cdot g(x,y)) = L \cdot M$
5. *Regla del cociente:* $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{L}{M}$, $M \neq 0$
6. *Regla de la potencia:* $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} [f(x,y)]^n = L^n$, n es un entero positivo
7. *Regla de la raíz:* $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \sqrt[n]{f(x,y)} = \sqrt[n]{L} = L^{1/n}$,
 n es un entero positivo, y si n es par, suponemos que $L > 0$.

Aunque aquí no demostraremos el teorema 1, analizaremos de manera informal por qué es verdadero. Si (x, y) está suficientemente cerca de (x_0, y_0) , entonces $f(x, y)$ está cerca de L , y $g(x, y)$ está cerca de M (de la interpretación informal de los límites). De esta forma, es razonable que $f(x, y) + g(x, y)$ esté cerca de $L + M$; $f(x, y) - g(x, y)$ esté cerca de $L - M$; $kf(x, y)$ esté cerca de kL ; $f(x, y)g(x, y)$ esté cerca de LM ; y $f(x, y)/g(x, y)$ esté cerca de L/M si $M \neq 0$.

Cuando aplicamos el teorema 1 a polinomios y a las funciones racionales obtenemos el útil resultado de que los límites de estas funciones cuando $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ pueden calcularse evaluando las funciones en (x_0, y_0) . El único requisito es que las funciones racionales estén definidas en (x_0, y_0) .

EJEMPLO 1 En este ejemplo podemos combinar los tres sencillos resultados que siguen a la definición de límite con los resultados del teorema 1 para calcular los límites. Simplemente sustituimos en la expresión funcional los valores de x y y del punto que se está aproximando, para obtener el valor del límite.

$$(a) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x - xy + 3}{x^2y + 5xy - y^3} = \frac{0 - (0)(1) + 3}{(0)^2(1) + 5(0)(1) - (1)^3} = -3$$

$$(b) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (3,-4)} \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5 \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 2 Obtenga

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}.$$

Solución Como el denominador $\sqrt{x} - \sqrt{y}$ tiende a cero cuando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$, no podemos usar la regla del cociente del teorema 1. Sin embargo, si multiplicamos el numerador y el denominador por $\sqrt{x} + \sqrt{y}$, obtenemos una fracción equivalente cuyo límite podemos calcular:

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x^2 - xy)(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x(x - y)(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{x - y} && \text{Usando el álgebra} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x(\sqrt{x} + \sqrt{y}) && \text{Se cancela el factor no nulo } (x - y). \\ &= 0(\sqrt{0} + \sqrt{0}) = 0 && \text{Conocemos los valores del límite} \end{aligned}$$

Podemos cancelar el factor $(x - y)$ porque la trayectoria $y = x$ (a lo largo de la cual $x - y = 0$) no está en el dominio de la función

$$\frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}.$$

EJEMPLO 3 Obtenga $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4xy^2}{x^2 + y^2}$ si existe.

Solución Primero observamos que a lo largo de la recta $x = 0$, la función siempre tiene el valor 0 cuando $y \neq 0$. Asimismo, a lo largo de la recta $y = 0$, la función tiene valor de 0 siempre que $x \neq 0$. De manera que si el límite existe cuando (x, y) tiende a $(0, 0)$, el valor de este límite debe ser 0. Para ver si es verdad, aplicamos la definición de límite.

Dado $\epsilon > 0$ arbitrario. Queremos encontrar $\delta > 0$, tal que

$$\left| \frac{4xy^2}{x^2 + y^2} - 0 \right| < \epsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$$

o bien,

$$\frac{4|x|y^2}{x^2 + y^2} < \epsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta.$$

Puesto que $y^2 \leq x^2 + y^2$, tenemos que

$$\frac{4|x|y^2}{x^2 + y^2} \leq 4|x| = 4\sqrt{x^2} \leq 4\sqrt{x^2 + y^2}. \quad \frac{y^2}{x^2 + y^2} \leq 1$$

Entonces, si seleccionamos $\delta = \epsilon/4$ y hacemos que $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$, tenemos

$$\left| \frac{4xy^2}{x^2 + y^2} - 0 \right| \leq 4\sqrt{x^2 + y^2} < 4\delta = 4\left(\frac{\epsilon}{4}\right) = \epsilon.$$

Se deduce de la definición que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4xy^2}{x^2 + y^2} = 0.$$

EJEMPLO 4 Si $f(x, y) = \frac{y}{x}$, ¿existe $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$?

Solución El dominio de f no incluye el eje y , así que no consideramos puntos (x, y) donde $x = 0$ en la aproximación hacia el origen $(0, 0)$. A lo largo del eje x , el valor de la función es $f(x, 0) = 0$ para cualquier $x \neq 0$. De esta forma, si el límite existe cuando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$, el valor del límite debe ser $L = 0$. Por otro lado, a lo largo de la recta $y = x$, el valor de la función es $f(x, x) = x/x = 1$ para cualquier $x \neq 0$. Es decir, la función f tiende al valor 1 a lo largo de la recta $y = x$. Esto significa que cada disco de radio δ con centro en $(0, 0)$ contendrá puntos $(x, 0)$ en el eje x , donde el valor de la función es 0, y también puntos (x, x) a lo largo de la recta $y = x$ donde el valor de la función es 1. De esta forma, sin importar qué tan pequeño seleccionemos δ como radio del disco de la figura 14.12, habrá puntos dentro del disco para los cuales los valores de la función difieren de 1. Por lo tanto, el límite no puede existir porque podemos hacer que ϵ sea cualquier número menor que 1 en la definición de límite y negar que $L = 0$ o 1, o cualquier otro número real. El límite no existe porque tenemos diferentes valores limitantes a lo largo de distintas trayectorias que tienden al punto $(0, 0)$. ■

Continuidad

Como en las funciones de una variable, la continuidad se define en términos de límites.

DEFINICIÓN Una función $f(x, y)$ es **continua en el punto** (x_0, y_0) si

1. f está definida en (x_0, y_0) ,
2. $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y)$ existe,
3. $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

Una función es **continua** si es continua en todos los puntos de su dominio.

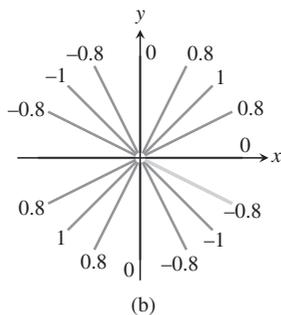
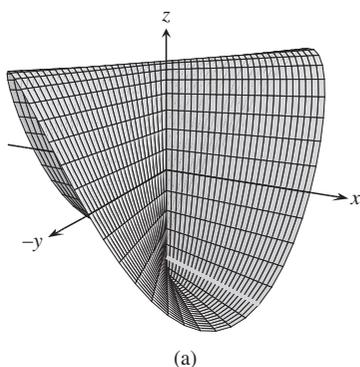


FIGURA 14.13 (a) Gráfica de

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

La función es continua en todo punto excepto en el origen. (b) Los valores de f son constantes diferentes a lo largo de cada recta $y = mx$, $x \neq 0$ (ejemplo 5).

Como en la definición de límite, la definición de continuidad se aplica tanto a puntos frontera como a puntos interiores del dominio de f . El único requisito es que cada punto (x, y) cerca de (x_0, y_0) esté en el dominio de f .

Una consecuencia del teorema 1 es que las combinaciones algebraicas de las funciones continuas son continuas en cada punto donde estén definidas las funciones implicadas. Esto significa que las sumas, las restas, los productos, los múltiplos constantes, los cocientes y las potencias de las funciones continuas son continuas siempre que estén definidas. En particular, las funciones polinomiales y racionales de dos variables son continuas en todos los puntos donde están definidas.

EJEMPLO 5 Demuestre que

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

es continua en todo punto, excepto en el origen (figura 14.13).

Solución La función f es continua en cualquier punto $(x, y) \neq (0, 0)$ porque sus valores están dados por una función racional de x y y , y el valor limitante se obtiene al sustituir los valores de x y y en la expresión de la función.

En $(0, 0)$, el valor de f está definido, pero afirmamos que f no tiene límite cuando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$. La razón es que las diferentes trayectorias de aproximación al origen traen consigo resultados distintos, como veremos ahora.

Para cada valor de m , la función f tiene un valor constante en la recta “perforada” $y = mx, x \neq 0$, porque

$$f(x, y) \Big|_{y=mx} = \frac{2xy}{x^2 + y^2} \Big|_{y=mx} = \frac{2x(mx)}{x^2 + (mx)^2} = \frac{2mx^2}{x^2 + m^2x^2} = \frac{2m}{1 + m^2}.$$

Por lo tanto, f tiene este número como su límite conforme (x, y) tiende a $(0, 0)$ a lo largo de la recta:

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ \text{a lo largo de } y=mx}} f(x, y) = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \left[f(x, y) \Big|_{y=mx} \right] = \frac{2m}{1 + m^2}.$$

Este límite cambia con cada valor de la pendiente m . Por lo tanto, no existe un único número que podamos llamar el límite de f conforme (x, y) tiende al origen. El límite no existe y la función no es continua. ■

Los ejemplos 4 y 5 ilustran un punto importante acerca de los límites de las funciones de dos o más variables. Para que un límite exista en un punto, el límite debe ser el mismo a lo largo de cualquier trayectoria de acercamiento. Este resultado es análogo al del caso de una variable, donde los límites por la izquierda y por la derecha deben tener el mismo valor. Para funciones de dos o más variables, si encontramos trayectorias de valores diferentes como límites, sabemos que la función no tiene límite en el punto al que tiende. ■

Criterio de dos trayectorias para demostrar la inexistencia de un límite

Si una función $f(x, y)$ tiene límites diferentes a lo largo de dos trayectorias distintas en el dominio de f cuando (x, y) tiende a (x_0, y_0) , entonces $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y)$ no existe.

EJEMPLO 6 Demuestre que la función

$$f(x, y) = \frac{2x^2y}{x^4 + y^2}$$

(figura 14.14) no tiene límite cuando (x, y) tiende a $(0, 0)$.

Solución El límite no se puede obtener por sustitución directa, la cual da la indeterminación $0/0$. Examinamos los valores de f a lo largo de las curvas que terminan en $(0, 0)$. A lo largo de la curva $y = kx^2, x \neq 0$, la función tiene el valor constante

$$f(x, y) \Big|_{y=kx^2} = \frac{2x^2y}{x^4 + y^2} \Big|_{y=kx^2} = \frac{2x^2(kx^2)}{x^4 + (kx^2)^2} = \frac{2kx^4}{x^4 + k^2x^4} = \frac{2k}{1 + k^2}.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ \text{a lo largo de } y=kx^2}} f(x, y) = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \left[f(x, y) \Big|_{y=kx^2} \right] = \frac{2k}{1 + k^2}.$$

Este límite varía con la trayectoria de acercamiento. Si (x, y) tiende a $(0, 0)$ a lo largo de la parábola $y = x^2$, por ejemplo, $k = 1$ y el límite es 1. Si (x, y) tiende a $(0, 0)$ a lo largo del eje x , $k = 0$ y el límite es 0. Por la prueba del criterio de las dos trayectorias, f no tiene límite conforme (x, y) tiende a $(0, 0)$. ■

Puede demostrarse que la función del ejemplo 6 tiene límite 0 a lo largo de cada trayectoria $y = mx$ (ejercicio 53). Concluimos que

El hecho de que las aproximaciones por líneas rectas a (x_0, y_0) tengan el mismo límite no implica que exista un límite en (x_0, y_0) .

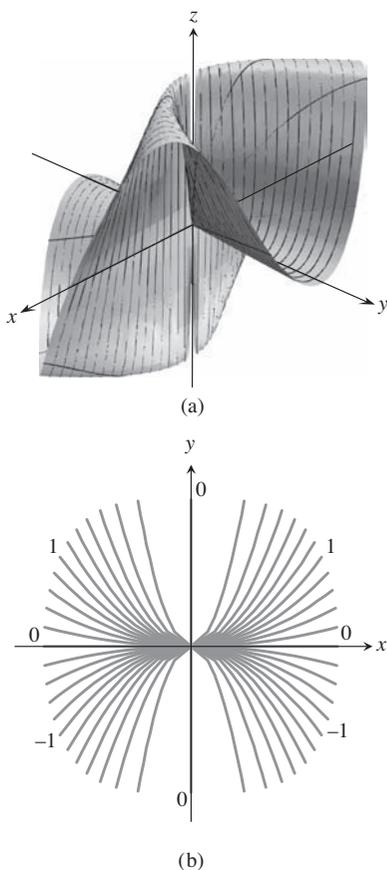


FIGURA 14.14 (a) Gráfica de $f(x, y) = 2x^2y/(x^4 + y^2)$. (b) A lo largo de cada trayectoria $y = kx^2$ el valor de f es constante, pero varía con k (ejemplo 6).

Siempre que es correctamente definida, una composición de funciones continuas también es continua. El único requisito es que cada función sea continua donde se aplica. La demostración, que aquí se omite, es similar a la de funciones de una sola variable (teorema 9 en la sección 2.5).

Continuidad de composiciones

Si f es continua en (x_0, y_0) y g es una función de una variable continua en $f(x_0, y_0)$, entonces la composición $h = g \circ f$ definida por $h(x, y) = g(f(x, y))$ es continua en (x_0, y_0) .

Por ejemplo, las composiciones

$$e^{x-y}, \quad \cos \frac{xy}{x^2 + 1}, \quad \ln(1 + x^2y^2)$$

son continuas en todo punto (x, y) .

Funciones de más de dos variables

Las definiciones de límite y continuidad para funciones de dos variables así como las conclusiones acerca de los límites y continuidad son extensivas para sumas, productos, cocientes, potencias y composiciones para funciones de tres o más variables. Funciones como

$$\ln(x + y + z) \quad \text{y} \quad \frac{y \operatorname{sen} z}{x - 1}$$

son continuas a través de sus dominios; y límites como

$$\lim_{P \rightarrow (1,0,-1)} \frac{e^{x+z}}{z^2 + \cos \sqrt{xy}} = \frac{e^{1-1}}{(-1)^2 + \cos 0} = \frac{1}{2},$$

donde P representa el punto (x, y, z) , se pueden obtener por sustitución directa.

Valores extremos de funciones continuas en conjuntos cerrados y acotados

El teorema de los valores extremos (teorema 1, sección 4.1) establece que la función de una variable que es continua a través de un intervalo cerrado, acotado $[a, b]$, asume un valor máximo absoluto y un valor mínimo absoluto por lo menos una vez en $[a, b]$. Esto también es cierto para una función $z = f(x, y)$ que es continua en un conjunto R cerrado y acotado en el plano (como un segmento de recta, un disco o un triángulo sólido). La función toma un valor máximo absoluto en algún punto de R y un valor mínimo absoluto en algún punto de R .

Teoremas similares se obtienen para funciones de tres o más variables. Una función continua $w = f(x, y, z)$, por ejemplo, debe asumir valores máximo y mínimo absolutos en cualquier conjunto cerrado y acotado (esfera o cubo sólido, cascarón esférico, sólido rectangular) donde esté definida. Aprenderemos cómo obtener estos valores extremos en la sección 14.7.

Ejercicios 14.2

Límites con dos variables

Obtenga los límites en los ejercicios 1 a 12.

1. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2 - y^2 + 5}{x^2 + y^2 + 2}$

2. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,4)} \frac{x}{\sqrt{y}}$

3. $\lim_{(x,y) \rightarrow (3,4)} \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$

4. $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,-3)} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)^2$

5. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,\pi/4)} \sec x \tan y$

6. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \cos \frac{x^2 + y^3}{x + y + 1}$

7. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0, \ln 2)} e^{x-y}$ 8. $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \ln |1 + x^2 y^2|$
 9. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^y \operatorname{sen} x}{x}$ 10. $\lim_{(x,y) \rightarrow (1/27, \pi^3)} \cos \sqrt[3]{xy}$
 11. $\lim_{(x,y) \rightarrow (1, \pi/6)} \frac{x \operatorname{sen} y}{x^2 + 1}$ 12. $\lim_{(x,y) \rightarrow (\pi/2, 0)} \frac{\cos y + 1}{y - \operatorname{sen} x}$

Límites de cocientes

Calcule los límites en los ejercicios 13 a 24 replanteando primero las fracciones.

13. $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (1,1) \\ x \neq y}} \frac{x^2 - 2xy + y^2}{x - y}$ 14. $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (1,1) \\ x \neq y}} \frac{x^2 - y^2}{x - y}$
 15. $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (1,1) \\ x \neq 1}} \frac{xy - y - 2x + 2}{x - 1}$
 16. $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (2, -4) \\ y \neq -4, x \neq x^2}} \frac{y + 4}{x^2 y - xy + 4x^2 - 4x}$
 17. $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x \neq y}} \frac{x - y + 2\sqrt{x} - 2\sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$
 18. $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (2,2) \\ x+y \neq 4}} \frac{x + y - 4}{\sqrt{x + y} - 2}$ 19. $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (2,0) \\ 2x-y \neq 4}} \frac{\sqrt{2x - y} - 2}{2x - y - 4}$
 20. $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (4,3) \\ x \neq y+1}} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y+1}}{x - y - 1}$
 21. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$ 22. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos(xy)}{xy}$
 23. $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} \frac{x^3 + y^3}{x + y}$ 24. $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,2)} \frac{x - y}{x^4 - y^4}$

Límites con tres variables

Determine los límites en los ejercicios 25 a 30.

25. $\lim_{P \rightarrow (1,3,4)} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)$ 26. $\lim_{P \rightarrow (1,-1,-1)} \frac{2xy + yz}{x^2 + z^2}$
 27. $\lim_{P \rightarrow (\pi, \pi, 0)} (\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{cos}^2 y + \operatorname{sec}^2 z)$
 28. $\lim_{P \rightarrow (-1/4, \pi/2, 2)} \tan^{-1} xyz$ 29. $\lim_{P \rightarrow (\pi, 0, 3)} ze^{-2y} \cos 2x$
 30. $\lim_{P \rightarrow (2, -3, 6)} \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Continuidad en el plano

¿En cuáles puntos (x, y) del plano, las funciones de los ejercicios 31 a 34 son continuas?

31. a. $f(x, y) = \operatorname{sen}(x + y)$ b. $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$
 32. a. $f(x, y) = \frac{x + y}{x - y}$ b. $f(x, y) = \frac{y}{x^2 + 1}$
 33. a. $g(x, y) = \operatorname{sen} \frac{1}{xy}$ b. $g(x, y) = \frac{x + y}{2 + \operatorname{cos} x}$
 34. a. $g(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - 3x + 2}$ b. $g(x, y) = \frac{1}{x^2 - y}$

Continuidad en el espacio

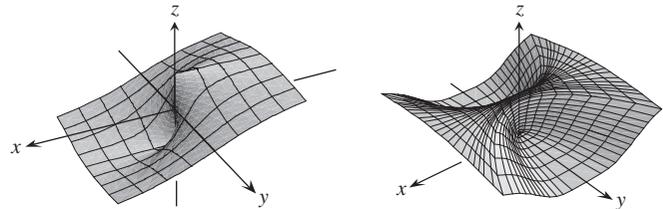
¿En cuáles puntos (x, y, z) del espacio son continuas las funciones de los ejercicios 35 a 40?

35. a. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z^2$
 b. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$
 36. a. $f(x, y, z) = \ln xyz$ b. $f(x, y, z) = e^{x+y} \operatorname{cos} z$
 37. a. $h(x, y, z) = xy \operatorname{sen} \frac{1}{z}$ b. $h(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + z^2 - 1}$
 38. a. $h(x, y, z) = \frac{1}{|y| + |z|}$ b. $h(x, y, z) = \frac{1}{|xy| + |z|}$
 39. a. $h(x, y, z) = \ln(z - x^2 - y^2 - 1)$
 b. $h(x, y, z) = \frac{1}{z - \sqrt{x^2 + y^2}}$
 40. a. $h(x, y, z) = \sqrt{4 - x^2 - y^2 - z^2}$
 b. $h(x, y, z) = \frac{1}{4 - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - 9}$

Inexistencia del límite en un punto

Considerando diferentes trayectorias de aproximación, demuestre que las funciones en los ejercicios 41 a 48 no tienen límite cuando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.

41. $f(x, y) = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ 42. $f(x, y) = \frac{x^4}{x^4 + y^2}$



43. $f(x, y) = \frac{x^4 - y^2}{x^4 + y^2}$ 44. $f(x, y) = \frac{xy}{|xy|}$
 45. $g(x, y) = \frac{x - y}{x + y}$ 46. $g(x, y) = \frac{x^2 - y}{x - y}$
 47. $h(x, y) = \frac{x^2 + y}{y}$ 48. $h(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$

Teoría y problemas

En los ejercicios 49 y 50, demuestre que los límites no existen.

49. $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{xy^2 - 1}{y - 1}$ 50. $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} \frac{xy + 1}{x^2 - y^2}$

51. Sea $f(x, y) = \begin{cases} 1, & y \geq x^4 \\ 1, & y \leq 0 \\ 0, & \text{de otra forma.} \end{cases}$

Obtenga cada uno de los siguientes límites o explique por qué el límite no existe.

- a. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} f(x, y)$
 b. $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,3)} f(x, y)$
 c. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$

52. Sea $f(x, y) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ x^3, & x < 0 \end{cases}$.

Obtenga los siguientes límites.

a. $\lim_{(x,y) \rightarrow (3, -2)} f(x, y)$

b. $\lim_{(x,y) \rightarrow (-2, 1)} f(x, y)$

c. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$

53. Demuestre que la función del ejemplo 6 tiene límite 0 a lo largo de todas las líneas rectas que tienden a $(0, 0)$.

54. Si $(x_0, y_0) = 3$, ¿qué puede decir de

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y)$$

si f es continua en (x_0, y_0) ? ¿Si f no es continua en (x_0, y_0) ? Justifique sus respuestas.

El teorema de la compresión para funciones de dos variables establece que si $g(x, y) \leq f(x, y) \leq h(x, y)$ para toda $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ en un disco con centro en (x_0, y_0) , y si g y h tienen el mismo límite finito L cuando $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$, entonces

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = L.$$

Con base en este resultado, fundamente sus respuestas a las preguntas de los ejercicios 55 a 58.

55. ¿El hecho de saber que

$$1 - \frac{x^2 y^2}{3} < \frac{\tan^{-1} xy}{xy} < 1$$

le dice algo acerca de

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\tan^{-1} xy}{xy}?$$

Justifique su respuesta.

56. ¿El hecho de saber que

$$2|xy| - \frac{x^2 y^2}{6} < 4 - 4 \cos \sqrt{|xy|} < 2|xy|$$

le dice algo acerca de

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4 - 4 \cos \sqrt{|xy|}}{|xy|}?$$

Justifique su respuesta.

57. ¿El hecho de saber que $|\sin(1/x)| \leq 1$ le dice algo acerca de

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y \sin \frac{1}{x}?$$

Justifique su respuesta.

58. El hecho de saber que $|\cos(1/y)| \leq 1$ le dice algo acerca de

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \cos \frac{1}{y}?$$

Justifique su respuesta.

59. (Continuación del ejemplo 5).

a. Revise el ejemplo 5. Luego sustituya $m = \tan \theta$ en la fórmula

$$f(x, y) \Big|_{y=mx} = \frac{2m}{1+m^2}$$

y simplifique el resultado para mostrar cómo varía el valor de f con el ángulo de inclinación de la recta.

b. Utilice la fórmula que obtuvo en el inciso (a) para demostrar que el límite de f cuando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ a lo largo de la recta $y = mx$ varía de -1 a 1 dependiendo del ángulo de aproximación.

60. **Extensión continua** Defina $f(0, 0)$ de manera que su extensión

$$f(x, y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

sea continua en el origen.

Cambio a coordenadas polares Si no puede obtener $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ en coordenadas rectangulares, trate de cambiar a coordenadas polares. Sustituya $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, e investigue el límite de la función resultante cuando $r \rightarrow 0$. En otras palabras, trate de determinar si existe un número L que satisfaga el siguiente criterio:

Dado $\epsilon > 0$, existe una $\delta > 0$, tal que para todas las r y θ ,

$$|r| < \delta \implies |f(r, \theta) - L| < \epsilon. \quad (1)$$

Si tal L existe, entonces

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{r \rightarrow 0} f(r \cos \theta, r \sin \theta) = L.$$

Por ejemplo,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^3 \cos^3 \theta}{r^2} = \lim_{r \rightarrow 0} r \cos^3 \theta = 0.$$

Para verificar la última de estas igualdades, necesitamos demostrar que la ecuación (1) se satisface cuando $f(r, \theta) = r \cos^3 \theta$ y $L = 0$. Es decir, necesitamos demostrar que, dado cualquier $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que para toda r y θ ,

$$|r| < \delta \implies |r \cos^3 \theta - 0| < \epsilon.$$

Puesto que

$$|r \cos^3 \theta| = |r| |\cos^3 \theta| \leq |r| \cdot 1 = |r|,$$

la implicación es válida para toda r y θ si tomamos $\delta = \epsilon$.

En contraste,

$$\frac{x^2}{x^2 + y^2} = \frac{r^2 \cos^2 \theta}{r^2} = \cos^2 \theta$$

asume todos los valores de 0 a 1, sin importar qué tan pequeño sea $|r|$, de manera que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^2/(x^2 + y^2)$ no existe.

En cada uno de estos ejemplos, la existencia o no existencia del límite cuando $r \rightarrow 0$ es bastante clara. Sin embargo, el cambio a coordenadas polares no siempre ayuda e inclusive podría llevarnos a falsear conclusiones. Por ejemplo, el límite puede existir a lo largo de toda línea recta (o rayo) $\theta = \text{constante}$, y no existir en sentido estricto. El ejemplo 5 ilustra este punto. En coordenadas polares, $f(x, y) = (2x^2y)/(x^4 + y^2)$ se convierte en

$$f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{r \cos \theta \sin 2\theta}{r^2 \cos^4 \theta + \sin^2 \theta}$$

para $r \neq 0$. Si mantenemos a θ constante y dejamos que $r \rightarrow 0$, el límite es 0. Sin embargo, en la trayectoria $y = x^2$, tenemos que $r \operatorname{sen} \theta = r^2 \cos^2 \theta$ y

$$\begin{aligned} f(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta) &= \frac{r \cos \theta \operatorname{sen} 2\theta}{r^2 \cos^4 \theta + (r \cos^2 \theta)^2} \\ &= \frac{2r \cos^2 \theta \operatorname{sen} \theta}{2r^2 \cos^4 \theta} = \frac{r \operatorname{sen} \theta}{r^2 \cos^2 \theta} = 1. \end{aligned}$$

En los ejercicios 61 a 66, determine el límite de f cuando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ o demuestre que el límite no existe.

$$61. f(x, y) = \frac{x^3 - xy^2}{x^2 + y^2} \quad 62. f(x, y) = \cos\left(\frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}\right)$$

$$63. f(x, y) = \frac{y^2}{x^2 + y^2} \quad 64. f(x, y) = \frac{2x}{x^2 + x + y^2}$$

$$65. f(x, y) = \tan^{-1}\left(\frac{|x| + |y|}{x^2 + y^2}\right)$$

$$66. f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

En los ejercicios 67 y 68, defina $f(0, 0)$, de manera que la extensión de f sea continua en el origen.

$$67. f(x, y) = \ln\left(\frac{3x^2 - x^2y^2 + 3y^2}{x^2 + y^2}\right)$$

$$68. f(x, y) = \frac{3x^2y}{x^2 + y^2}$$

Uso de la definición de límite

Cada uno de los ejercicios 69 a 74 presenta una función $f(x, y)$ y un número positivo ϵ . En cada ejercicio, demuestre que existe una $\delta > 0$ tal que para todas las (x, y) ,

$$\sqrt{x^2 + y^2} < \delta \implies |f(x, y) - f(0, 0)| < \epsilon.$$

$$69. f(x, y) = x^2 + y^2, \quad \epsilon = 0.01$$

$$70. f(x, y) = y/(x^2 + 1), \quad \epsilon = 0.05$$

$$71. f(x, y) = (x + y)/(x^2 + 1), \quad \epsilon = 0.01$$

$$72. f(x, y) = (x + y)/(2 + \cos x), \quad \epsilon = 0.02$$

$$73. f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2} \text{ y } f(0, 0) = 0, \quad \epsilon = 0.04$$

$$74. f(x, y) = \frac{x^3 + y^4}{x^2 + y^2} \text{ y } f(0, 0) = 0, \quad \epsilon = 0.02$$

Cada uno de los ejercicios 75 a 78 presenta una función $f(x, y, z)$ y un número positivo ϵ . En cada ejercicio, demuestre que existe una $\delta > 0$, tal que para toda (x, y, z) ,

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} < \delta \implies |f(x, y, z) - f(0, 0, 0)| < \epsilon.$$

$$75. f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, \quad \epsilon = 0.015$$

$$76. f(x, y, z) = xyz, \quad \epsilon = 0.008$$

$$77. f(x, y, z) = \frac{x + y + z}{x^2 + y^2 + z^2 + 1}, \quad \epsilon = 0.015$$

$$78. f(x, y, z) = \tan^2 x + \tan^2 y + \tan^2 z, \quad \epsilon = 0.03$$

$$79. \text{ Demuestre que } f(x, y, z) = x + y - z \text{ es continua en todo punto } (x_0, y_0, z_0).$$

$$80. \text{ Demuestre que } f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \text{ es continua en el origen.}$$

14.3 Derivadas parciales

El cálculo de varias variables es como el cálculo de una variable aplicado a cada una de las variables. Cuando mantenemos constantes todas las variables independientes de una función, excepto una, y derivamos con respecto a esa variable, obtenemos una derivada "parcial". Esta sección muestra cómo se definen e interpretan geoméricamente las derivadas parciales y cómo calcularlas aplicando las reglas de derivación para funciones de una sola variable. La idea de *derivabilidad* de funciones de varias variables requiere algo más que la existencia de las derivadas parciales, pero veremos que las funciones derivables de varias variables se comportan del mismo modo que las funciones derivables de una variable.

Derivadas parciales de una función de dos variables

Si (x_0, y_0) es un punto en el dominio de una función $f(x, y)$, el plano vertical $y = y_0$ cortará la superficie $z = f(x, y)$ en la curva $z = f(x, y_0)$ (figura 14.15). Esta curva es la gráfica de la función $z = f(x, y_0)$ en el plano $y = y_0$. La coordenada horizontal en este plano es x ; la coordenada vertical es z . El valor de y se mantiene constante en y_0 , de manera que y no es una variable.

Definimos la derivada parcial de f con respecto a x en el punto (x_0, y_0) como la derivada ordinaria de $f(x, y_0)$ con respecto a x en el punto $x = x_0$. Para distinguir las derivadas parciales de las ordinarias usamos el símbolo ∂ en vez de la d usada previamente. En la definición, h representa un número real, positivo o negativo.

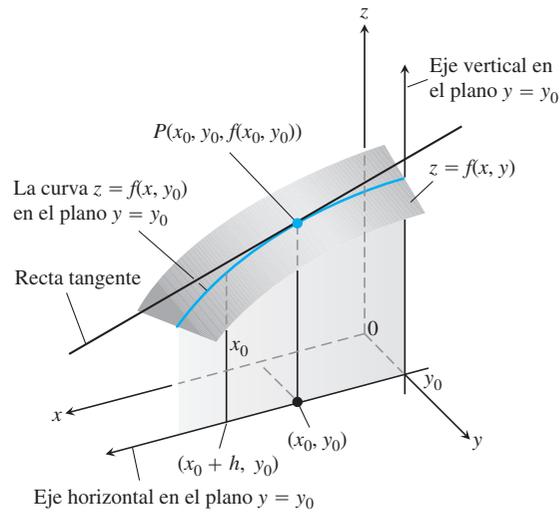


FIGURA 14.15 La intersección del plano $y = y_0$ con la superficie $z = f(x, y)$, vista desde arriba del primer cuadrante del plano xy .

DEFINICIÓN La derivada parcial de $f(x, y)$ con respecto a x en el punto (x_0, y_0) es

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h},$$

si el límite existe.

Una expresión equivalente de la derivada parcial es

$$\left. \frac{d}{dx} f(x, y_0) \right|_{x=x_0}.$$

La pendiente de la curva $z = f(x, y_0)$ en el punto $P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ en el plano $y = y_0$ es el valor de la derivada parcial de f con respecto a x en (x_0, y_0) . (En la figura 14.15 esta pendiente es negativa). La recta tangente a la curva en P es la recta en el plano $y = y_0$ que pasa por P con esta pendiente. La derivada parcial $\partial f / \partial x$ en (x_0, y_0) proporciona la tasa de cambio de f con respecto a x cuando y se mantiene fija en el valor y_0 .

Usamos varias notaciones para la derivada parcial:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} \text{ o } f_x(x_0, y_0), \quad \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)}, \quad \text{y} \quad f_x, \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad z_x, \text{ o } \frac{\partial z}{\partial x}.$$

La definición de la derivada parcial de $f(x, y)$ con respecto a y en el punto (x_0, y_0) es similar a la definición de la derivada parcial de f con respecto a x . Mantenemos a x fija en el valor x_0 y tomamos la derivada ordinaria de $f(x_0, y)$ con respecto a y en y_0 .

DEFINICIÓN La derivada parcial de $f(x, y)$ con respecto a y en el punto (x_0, y_0) es

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} = \left. \frac{d}{dy} f(x_0, y) \right|_{y=y_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h},$$

siempre que el límite exista.

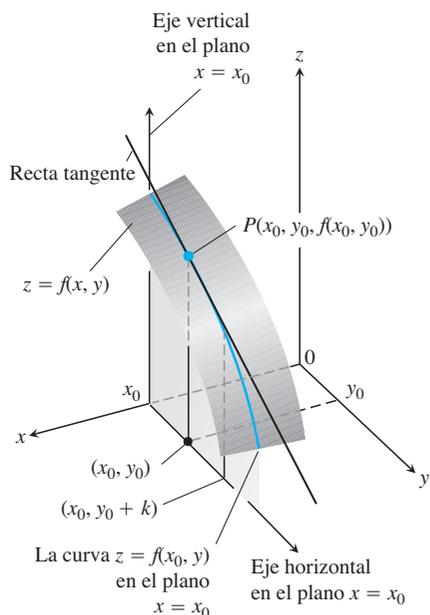


FIGURA 14.16 La intersección del plano $x = x_0$ con la superficie $z = f(x, y)$, vista desde arriba del primer cuadrante del plano xy .

La pendiente de la curva $z = f(x_0, y)$ en el punto $P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ del plano vertical $x = x_0$ (figura 14.16) es la derivada parcial de f con respecto a y en (x_0, y_0) . La recta tangente a la curva en P es la recta en el plano $x = x_0$ que pasa por P con esta pendiente. La derivada parcial proporciona la tasa de cambio de f con respecto a y en (x_0, y_0) cuando x se mantiene fija en el valor x_0 .

La derivada parcial con respecto a y se representa del mismo modo que la derivada parcial con respecto a x :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), \quad f_y(x_0, y_0), \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad f_y.$$

Observe que ahora tenemos dos rectas tangentes asociadas a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto $P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ (figura 14.17). ¿El plano que determinan es tangente a la superficie en P ? Veremos que así es para las funciones *derivables* definidas al final de esta sección y aprenderemos cómo obtener el plano tangente en la sección 14.6. Primero tenemos que aprender más acerca de las derivadas parciales.

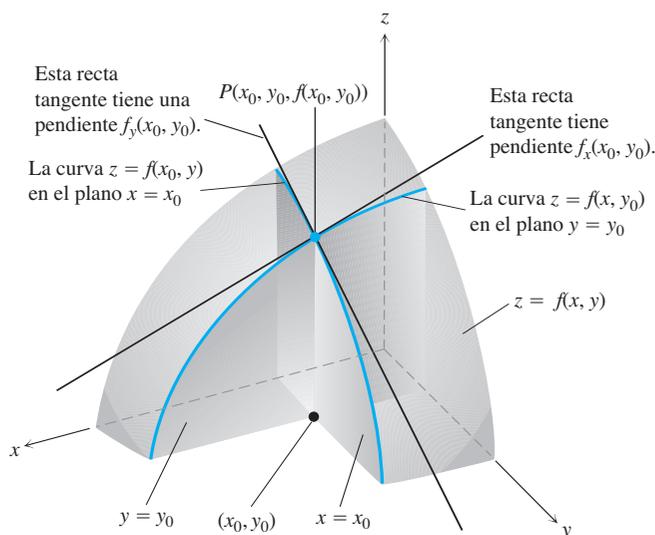


FIGURA 14.17 Las figuras 14.15 y 14.16 combinadas. Las rectas tangentes en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ determinan un plano que, en esta figura por lo menos, parece ser tangente a la superficie.

Cálculos

Las definiciones de $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ nos ofrecen dos maneras diferentes de derivar f en un punto: con respecto a x , del modo usual, mientras se trata a y como constante, y con respecto a y , del modo usual, cuando se trata a x como constante. Como lo demuestran los siguientes ejemplos, los valores de estas derivadas parciales por lo general son diferentes en un punto dado (x_0, y_0) .

EJEMPLO 1 Encuentre los valores de $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ en el punto $(4, -5)$, si

$$f(x, y) = x^2 + 3xy + y - 1.$$

Solución Para obtener $\partial f/\partial x$, tratamos a y como una constante y derivamos con respecto a x :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + 3xy + y - 1) = 2x + 3 \cdot 1 \cdot y + 0 - 0 = 2x + 3y.$$

El valor de $\partial f/\partial x$ en $(4, -5)$ es $2(4) + 3(-5) = -7$.

Para obtener $\partial f/\partial y$, tratamos a x como una constante y derivamos con respecto a y :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + 3xy + y - 1) = 0 + 3 \cdot x \cdot 1 + 1 - 0 = 3x + 1.$$

El valor de $\partial f/\partial y$ en $(4, -5)$ es $3(4) + 1 = 13$. ■

EJEMPLO 2 Obtenga $\partial f/\partial y$ como una función, si $f(x, y) = y \operatorname{sen} xy$.

Solución Consideramos a x como constante y a f como un producto de y y de $\operatorname{sen} xy$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(y \operatorname{sen} xy) = y \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{sen} xy + (\operatorname{sen} xy) \frac{\partial}{\partial y}(y) \\ &= (y \cos xy) \frac{\partial}{\partial y}(xy) + \operatorname{sen} xy = xy \cos xy + \operatorname{sen} xy.\end{aligned}$$
 ■

EJEMPLO 3 Obtenga f_x y f_y como funciones si

$$f(x, y) = \frac{2y}{y + \cos x}.$$

Solución Tratamos a f como un cociente. Manteniendo a y constante, tenemos

$$\begin{aligned}f_x &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2y}{y + \cos x} \right) = \frac{(y + \cos x) \frac{\partial}{\partial x}(2y) - 2y \frac{\partial}{\partial x}(y + \cos x)}{(y + \cos x)^2} \\ &= \frac{(y + \cos x)(0) - 2y(-\operatorname{sen} x)}{(y + \cos x)^2} = \frac{2y \operatorname{sen} x}{(y + \cos x)^2}.\end{aligned}$$

Si mantenemos a x constante, tenemos

$$\begin{aligned}f_y &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{2y}{y + \cos x} \right) = \frac{(y + \cos x) \frac{\partial}{\partial y}(2y) - 2y \frac{\partial}{\partial y}(y + \cos x)}{(y + \cos x)^2} \\ &= \frac{(y + \cos x)(2) - 2y(1)}{(y + \cos x)^2} = \frac{2 \cos x}{(y + \cos x)^2}.\end{aligned}$$
 ■

La derivación implícita funciona para las derivadas parciales de la misma manera que para las derivadas ordinarias, como lo ilustra el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 4 Obtenga $\partial z/\partial x$ si la ecuación

$$yz - \ln z = x + y$$

define a z como una función de dos variables independientes x y y , y la derivada parcial existe.

Solución Derivamos ambos lados de la ecuación con respecto a x , manteniendo a y constante y tratando a z como función derivable de x :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}(yz) - \frac{\partial}{\partial x} \ln z &= \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x} \\ y \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial x} &= 1 + 0 \\ \left(y - \frac{1}{z} \right) \frac{\partial z}{\partial x} &= 1 \\ \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{z}{yz - 1}.\end{aligned}$$

Con y constante
 $\frac{\partial}{\partial x}(yz) = y \frac{\partial z}{\partial x}$.

■

EJEMPLO 5 El plano $x = 1$ corta al paraboloido $z = x^2 + y^2$ en una parábola. Determine la pendiente de la tangente a la parábola en $(1, 2, 5)$ (figura 14.18).

Solución La pendiente es el valor de la derivada parcial $\partial z/\partial y$ en $(1, 2)$:

$$\frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{(1,2)} = \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2) \Big|_{(1,2)} = 2y \Big|_{(1,2)} = 2(2) = 4.$$

Para verificar, podemos considerar a la parábola como la gráfica de una función de una sola variable $z = (1)^2 + y^2 = 1 + y^2$ en el plano $x = 1$ y calcular la pendiente en $y = 2$. La pendiente, calculada ahora como una derivada ordinaria, es

$$\frac{dz}{dy} \Big|_{y=2} = \frac{d}{dy} (1 + y^2) \Big|_{y=2} = 2y \Big|_{y=2} = 4. \quad \blacksquare$$

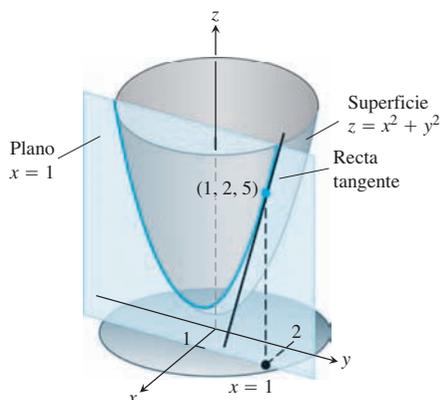


FIGURA 14.18 La tangente a la curva de intersección del plano $x = 1$ y la superficie $z = x^2 + y^2$ en el punto $(1, 2, 5)$ (ejemplo 5).

Funciones de más de dos variables

Las definiciones de las derivadas parciales de funciones de más de dos variables independientes son similares a las definiciones para funciones de dos variables. Son derivadas ordinarias con respecto a una variable, la cual se calcula mientras las demás variables independientes se mantienen constantes.

EJEMPLO 6 Si x, y y z son variables independientes y

$$f(x, y, z) = x \operatorname{sen}(y + 3z),$$

entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} [x \operatorname{sen}(y + 3z)] = x \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{sen}(y + 3z) \\ &= x \cos(y + 3z) \frac{\partial}{\partial z} (y + 3z) = 3x \cos(y + 3z). \end{aligned} \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 7 Si tres resistencias de R_1, R_2 y R_3 ohms se conectan en paralelo para obtener una resistencia de R ohms, se puede obtener el valor de R con la ecuación

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

(figura 14.19). Determine el valor de $\partial R/\partial R_2$ cuando $R_1 = 30, R_2 = 45$ y $R_3 = 90$ ohms.

Solución Para obtener $\partial R/\partial R_2$, consideramos a R_1 y R_3 como constantes y, usando la derivación implícita, derivamos ambos lados de la ecuación con respecto a R_2 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial R_2} \left(\frac{1}{R} \right) &= \frac{\partial}{\partial R_2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) \\ -\frac{1}{R^2} \frac{\partial R}{\partial R_2} &= 0 - \frac{1}{R_2^2} + 0 \\ \frac{\partial R}{\partial R_2} &= \frac{R^2}{R_2^2} = \left(\frac{R}{R_2} \right)^2. \end{aligned}$$

Cuando $R_1 = 30, R_2 = 45$ y $R_3 = 90$,

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{30} + \frac{1}{45} + \frac{1}{90} = \frac{3 + 2 + 1}{90} = \frac{6}{90} = \frac{1}{15},$$

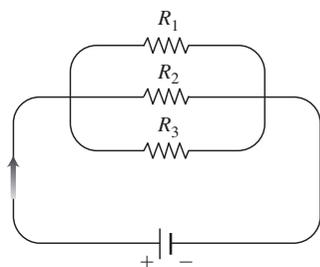


FIGURA 14.19 Se dice que las resistencias ordenadas de esta manera están conectadas en paralelo (ejemplo 7). Cada resistencia deja pasar una parte de la corriente. Su resistencia equivalente R se calcula con la fórmula

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}.$$

de manera que $R = 15$ y

$$\frac{\partial R}{\partial R_2} = \left(\frac{15}{45}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}.$$

Por lo tanto, en los valores dados, un pequeño cambio en la resistencia R_2 trae consigo un cambio en R con un tamaño cercano a $1/9$. ■

Derivadas parciales y continuidad

Una función $f(x, y)$ puede tener derivadas parciales con respecto tanto a x como a y en un punto donde la función no sea continua. Esto es diferente de las funciones con una sola variable, donde la existencia de una derivada implica la continuidad. Sin embargo, si las derivadas parciales de $f(x, y)$ existen y son continuas en todo un disco con centro en (x_0, y_0) , entonces f es continua en (x_0, y_0) , como veremos al final de esta sección.

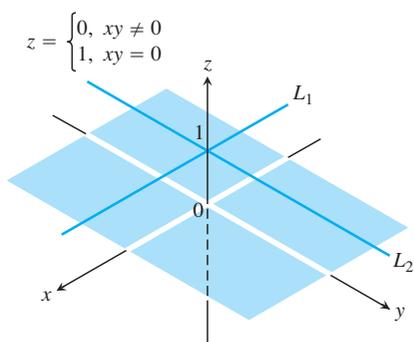


FIGURA 14.20 La gráfica de

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & xy \neq 0 \\ 1, & xy = 0 \end{cases}$$

consta de las rectas L_1 y L_2 y los cuatro cuadrantes abiertos del plano xy . La función tiene derivadas parciales en el origen, pero no es continua allí (ejemplo 8).

EJEMPLO 8 Sea

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & xy \neq 0 \\ 1, & xy = 0 \end{cases}$$

(figura 14.20).

- Encuentre el límite de f cuando (x, y) tiende a $(0, 0)$ a lo largo de la recta $y = x$.
- Pruebe que f no es continua en el origen.
- Demuestre que las derivadas parciales $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ existen en el origen.

Solución

- Puesto que $f(x, y)$ es igual a cero a lo largo de la recta $y = x$ (excepto en el origen), tenemos

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) \Big|_{y=x} = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0 = 0.$$

- Puesto que $f(0, 0) = 1$, el límite del inciso (a) prueba que f no es continua en $(0, 0)$.
- Para calcular $\partial f/\partial x$ en $(0, 0)$, mantenemos fija a y en $y = 0$. Entonces $f(x, y) = 1$ para toda x , y la gráfica de f es la recta L_1 en la figura 14.20. La pendiente de esta recta para cualquier x es $\partial f/\partial x = 0$. En particular, $\partial f/\partial x = 0$ en $(0, 0)$. De manera análoga, $\partial f/\partial y$ es la pendiente de la recta L_2 en cualquier y , de manera que $\partial f/\partial y = 0$ en $(0, 0)$. ■

A pesar del ejemplo 8, sigue siendo cierto que en dimensiones superiores la *derivabilidad* en un punto implica la continuidad. Lo que el ejemplo 8 sugiere es que necesitamos un requisito más fuerte para la derivabilidad en dimensiones superiores que la simple existencia de las derivadas parciales. Al final de esta sección definimos la derivabilidad para funciones de dos variables (la cual es ligeramente más complicada que la de las funciones de una sola variable), y luego regresaremos con la continuidad.

Derivadas parciales de segundo orden

Al derivar dos veces una función $f(x, y)$, generamos sus derivadas de segundo orden. Estas derivadas se representan por lo regular como

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \text{ o } f_{xx}, & \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \text{ o } f_{yy}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \text{ o } f_{yx}, & \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \text{ o } f_{xy}. \end{aligned}$$

Las ecuaciones de la definición son

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right),$$

etcétera. Observe el orden en el cual se toman las derivadas parciales:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad \text{Derivar primero con respecto a } y, \text{ y luego con respecto a } x.$$

$$f_{yx} = (f_y)_x \quad \text{Significa lo mismo.}$$

BIOGRAFÍA HISTÓRICA

Pierre-Simon Laplace
(1749–1827)

EJEMPLO 9 Si $f(x, y) = x \cos y + ye^x$, obtenga las derivadas de segundo orden

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

Solución El primer paso es calcular las primeras derivadas parciales.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} (x \cos y + ye^x) & \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} (x \cos y + ye^x) \\ &= \cos y + ye^x & &= -x \sin y + e^x \end{aligned}$$

Ahora obtenemos ambas derivadas parciales de cada primera derivada parcial:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = -\sin y + e^x & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = -\sin y + e^x \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = ye^x & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = -x \cos y. \end{aligned}$$

Teorema de la derivada mixta

Tal vez habrá notado que las derivadas parciales “mixtas” de segundo orden

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

del ejemplo 9 son iguales. Esto no es una coincidencia. Deben ser iguales siempre que f, f_x, f_y, f_{xy} y f_{yx} sean continuas, como se establece en el siguiente teorema.

TEOREMA 2: Teorema de la derivada mixta Si $f(x, y)$ y sus derivadas parciales f_x, f_y, f_{xy} y f_{yx} están definidas en una región abierta que contiene a un punto (a, b) , y todas son continuas en (a, b) , entonces

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b).$$

BIOGRAFÍA HISTÓRICA

Alexis Clairaut
(1713–1765)

El teorema 2 también se conoce como teorema de Clairaut, en honor del matemático francés Alexis Clairaut, quien lo descubrió. En el apéndice 9 se presenta una demostración. El teorema 2 dice que para calcular una derivada mixta de segundo orden podemos derivar en cualquier orden, siempre que las condiciones de continuidad se satisfagan. Esta habilidad para proceder en orden diferente algunas veces simplifica nuestros cálculos.

EJEMPLO 10 Obtenga $\partial^2 w / \partial x \partial y$ si

$$w = xy + \frac{e^y}{y^2 + 1}.$$

Solución El símbolo $\partial^2 w / \partial x \partial y$ nos dice que derivemos primero con respecto a y y luego con respecto a x ; sin embargo, si intercambiamos el orden de la derivación y derivamos primero con respecto a x , obtenemos la respuesta más rápidamente. En dos pasos,

$$\frac{\partial w}{\partial x} = y \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} = 1.$$

Si derivamos primero con respecto a y , obtenemos también $\partial^2 w / \partial x \partial y = 1$. Podemos derivar en otro orden porque las condiciones del teorema 2 se cumplen para w en todos los puntos (x_0, y_0) . ■

Derivadas parciales de orden superior

Si bien trataremos la mayoría de las veces con derivadas parciales de primero y de segundo orden, ya que son las que aparecen con más frecuencia en las aplicaciones, no hay un límite teórico para el número de veces que podemos derivar una función mientras sus derivadas existan. Por lo tanto, tenemos derivadas de tercero y de cuarto orden representadas por símbolos como

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = f_{yyx},$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} = f_{yyxx},$$

y así sucesivamente. Como en las derivadas de segundo orden, el orden de la derivación es irrelevante en vista de que todas las derivadas a través del orden en cuestión son continuas.

EJEMPLO 11 Obtenga f_{yxy} si $f(x, y, z) = 1 - 2xy^2z + x^2y$.

Solución Primero derivamos con respecto a la variable y , luego con respecto a x , luego otra vez y , y finalmente con respecto a z :

$$f_y = -4xyz + x^2$$

$$f_{yx} = -4yz + 2x$$

$$f_{yxy} = -4z$$

$$f_{yxyz} = -4$$

Diferenciabilidad

El punto de partida para la diferenciabilidad no es el cociente de diferencias que vimos al estudiar funciones de una variable, sino la idea de incremento. Recordemos de nuestro estudio de funciones con una sola variable en la sección 3.9 que si $y = f(x)$ es derivable en $x = x_0$, entonces el cambio en el valor de f que resulta del cambio en x de x_0 a $x_0 + \Delta x$ está dado por una ecuación de la forma

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \epsilon \Delta x$$

en la cual $\epsilon \rightarrow 0$ cuando $\Delta x \rightarrow 0$. Para funciones de dos variables, la propiedad análoga se convierte en la definición de diferenciabilidad. El teorema del incremento (que se comprueba en el apéndice 9) nos dice cuándo debemos esperar que la propiedad se cumpla.

TEOREMA 3: Teorema del incremento para funciones de dos variables

Suponga que las primeras derivadas parciales de $f(x, y)$ están definidas en una región abierta R que contiene el punto (x_0, y_0) , y que f_x y f_y son continuas en (x_0, y_0) . Entonces, el cambio

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

en el valor de f que resulta del movimiento de (x_0, y_0) a otro punto $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ en R satisface la ecuación de la forma

$$\Delta z = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \epsilon_1\Delta x + \epsilon_2\Delta y$$

en la cual cada $\epsilon_1, \epsilon_2 \rightarrow 0$ cuando Δx y $\Delta y \rightarrow 0$.

En la demostración realizada en el apéndice 9 usted puede ver de dónde provienen las ϵ . También podrá ver que se cumplen resultados similares para funciones de más de dos variables independientes.

DEFINICIÓN Una función $z = f(x, y)$ es **diferenciable en** (x_0, y_0) si $f_x(x_0, y_0)$ y $f_y(x_0, y_0)$ existen y si Δz satisface la ecuación de la forma

$$\Delta z = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \epsilon_1\Delta x + \epsilon_2\Delta y$$

en la cual cada $\epsilon_1, \epsilon_2 \rightarrow 0$ cuando Δx y $\Delta y \rightarrow 0$. Decimos que f es **diferenciable** si es derivable en todos los puntos de su dominio, y decimos que su gráfica es una **superficie suave**.

Por su definición, un corolario inmediato del teorema 3 es que una función es diferenciable en (x_0, y_0) si sus primeras derivadas parciales son *continuas*.

COROLARIO DEL TEOREMA 3 Si las derivadas parciales f_x y f_y de una función $f(x, y)$ son continuas en una región abierta R , entonces f es diferenciable en cada punto de R .

Si $z = f(x, y)$ es diferenciable, entonces la definición de diferenciability asegura que $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ tiende a 0 cuando Δx y Δy tiende a cero. Esto nos dice que una función de dos variables es continua en todos los puntos donde es derivable.

TEOREMA 4: La diferenciability implica continuidad Si una función $f(x, y)$ es diferenciable en (x_0, y_0) , entonces f es continua en (x_0, y_0) .

Como podemos ver en el corolario 3 y el teorema 4, una función $f(x, y)$ debe ser continua en un punto (x_0, y_0) si f_x y f_y son continuas en una región abierta que contiene a (x_0, y_0) . Recuerde, sin embargo, que aún es posible que una función de dos variables sea discontinua en un punto donde existen sus primeras derivadas parciales, como vimos en el ejemplo 8. La sola existencia de las derivadas parciales en un punto no es suficiente, pero la continuidad de las derivadas parciales garantiza la diferenciability.

Ejercicios 14.3

Cálculo de derivadas parciales de primer orden

En los ejercicios 1 a 22, obtenga $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$.

- $f(x, y) = 2x^2 - 3y - 4$
- $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$
- $f(x, y) = (x^2 - 1)(y + 2)$
- $f(x, y) = 5xy - 7x^2 - y^2 + 3x - 6y + 2$
- $f(x, y) = (xy - 1)^2$
- $f(x, y) = (2x - 3y)^3$
- $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
- $f(x, y) = (x^3 + (y/2))^{2/3}$
- $f(x, y) = 1/(x + y)$
- $f(x, y) = x/(x^2 + y^2)$
- $f(x, y) = (x + y)/(xy - 1)$
- $f(x, y) = \tan^{-1}(y/x)$
- $f(x, y) = e^{(x+y+1)}$
- $f(x, y) = e^{-x} \sin(x + y)$
- $f(x, y) = \ln(x + y)$
- $f(x, y) = e^{xy} \ln y$
- $f(x, y) = \sin^2(x - 3y)$
- $f(x, y) = \cos^2(3x - y^2)$

$$19. f(x, y) = x^y \qquad 20. f(x, y) = \log_y x$$

$$21. f(x, y) = \int_x^y g(t) dt \quad (g \text{ es continua para toda } t)$$

$$22. f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} (xy)^n \quad (|xy| < 1)$$

En los ejercicios 23 a 34, obtenga f_x, f_y y f_z .

$$23. f(x, y, z) = 1 + xy^2 - 2z^2 \qquad 24. f(x, y, z) = xy + yz + xz$$

$$25. f(x, y, z) = x - \sqrt{y^2 + z^2}$$

$$26. f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$$

$$27. f(x, y, z) = \sin^{-1}(xyz) \qquad 28. f(x, y, z) = \sec^{-1}(x + yz)$$

$$29. f(x, y, z) = \ln(x + 2y + 3z)$$

30. $f(x, y, z) = yz \ln(xy)$ 31. $f(x, y, z) = e^{-(x^2+y^2+z^2)}$
 32. $f(x, y, z) = e^{-xyz}$
 33. $f(x, y, z) = \tanh(x + 2y + 3z)$
 34. $f(x, y, z) = \sinh(xy - z^2)$

En los ejercicios 35 a 40, calcule la derivada parcial de la función con respecto a cada variable.

35. $f(t, \alpha) = \cos(2\pi t - \alpha)$ 36. $g(u, v) = v^2 e^{(2u/v)}$
 37. $h(\rho, \phi, \theta) = \rho \sin \phi \cos \theta$ 38. $g(r, \theta, z) = r(1 - \cos \theta) - z$
 39. **Trabajo realizado por el corazón** (sección 3.9, ejercicio 49)

$$W(P, V, \delta, v, g) = PV + \frac{V\delta v^2}{2g}$$

40. **Fórmula de Wilson para el tamaño de un lote** (sección 4.5, ejercicio 51)

$$A(c, h, k, m, q) = \frac{km}{q} + cm + \frac{hq}{2}$$

Cálculo de derivadas parciales de segundo orden

Encuentre todas las derivadas parciales de segundo orden de las funciones de los ejercicios 41 a 50.

41. $f(x, y) = x + y + xy$ 42. $f(x, y) = \sin xy$
 43. $g(x, y) = x^2 y + \cos y + y \sin x$
 44. $h(x, y) = xe^y + y + 1$ 45. $r(x, y) = \ln(x + y)$
 46. $s(x, y) = \tan^{-1}(y/x)$ 47. $w = x^2 \tan(xy)$
 48. $w = ye^{x^2 - y}$ 49. $w = x \sin(x^2 y)$
 50. $w = \frac{x - y}{x^2 + y}$

Derivadas parciales mixtas

En los ejercicios 51 a 54, verifique que $w_{xy} = w_{yx}$.

51. $w = \ln(2x + 3y)$ 52. $w = e^x + x \ln y + y \ln x$
 53. $w = xy^2 + x^2 y^3 + x^3 y^4$ 54. $w = x \sin y + y \sin x + xy$
 55. ¿Cuál orden de derivación calculará f_{xy} más rápido: primero x o primero y ? Trate de contestar sin escribir.
 a. $f(x, y) = x \sin y + e^y$
 b. $f(x, y) = 1/x$
 c. $f(x, y) = y + (x/y)$
 d. $f(x, y) = y + x^2 y + 4y^3 - \ln(y^2 + 1)$
 e. $f(x, y) = x^2 + 5xy + \sin x + 7e^x$
 f. $f(x, y) = x \ln xy$
 56. La derivada parcial de quinto orden $\partial^5 f / \partial x^2 \partial y^3$ se anula para todas las siguientes funciones. Para demostrarlo rápidamente, ¿cuál variable derivaría primero con respecto a x o y ? Trate de contestar sin escribir.
 a. $f(x, y) = y^2 x^4 e^x + 2$
 b. $f(x, y) = y^2 + y(\sin x - x^4)$
 c. $f(x, y) = x^2 + 5xy + \sin x + 7e^x$
 d. $f(x, y) = xe^{y^2/2}$

Uso de la definición de derivada parcial

En los ejercicios 57 a 60, utilice la definición de derivada parcial mediante límites para calcular las derivadas parciales de las funciones en los puntos especificados.

57. $f(x, y) = 1 - x + y - 3x^2 y$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $(1, 2)$

58. $f(x, y) = 4 + 2x - 3y - xy^2$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $(-2, 1)$

59. $f(x, y) = \sqrt{2x + 3y - 1}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $(-2, 3)$

60. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^3 + y^4)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $(0, 0)$

61. Sea $f(x, y) = 2x + 3y - 4$. Encuentre la pendiente de la recta tangente a esta superficie en el punto $(2, -1)$ y que se encuentra en **a.** el plano $x = 2$; **b.** el plano $y = -1$.
 62. Sea $f(x, y) = x^2 + y^3$. Determine la pendiente de la recta tangente a esta superficie en el punto $(-1, 1)$ y que se encuentra en **a.** el plano $x = -1$; **b.** el plano $y = 1$.
 63. **Tres variables** Sea $w = f(x, y, z)$ una función de tres variables independientes. Escriba la definición formal de la derivada parcial $\partial f / \partial z$ en (x_0, y_0, z_0) . Use esta definición para obtener $\partial f / \partial z$ en $(1, 2, 3)$ para $f(x, y, z) = x^2 y z^2$.
 64. **Tres variables** Sea $w = f(x, y, z)$ una función de tres variables independientes; escriba la definición formal de la derivada parcial $\partial f / \partial y$ en (x_0, y_0, z_0) . Use esta definición para obtener $\partial f / \partial y$ en $(-1, 0, 3)$ para $f(x, y, z) = -2xy^2 + yz^2$.

Derivación implícita

65. Determine el valor de $\partial z / \partial x$ en el punto $(1, 1, 1)$ si la ecuación

$$xy + z^3 x - 2yz = 0$$

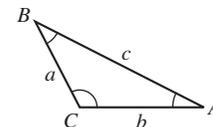
define a z como una función de dos variables independientes x y y , y la derivada parcial existe.

66. Obtenga el valor de $\partial x / \partial z$ en el punto $(1, -1, -3)$ si la ecuación

$$xz + y \ln x - x^2 + 4 = 0$$

define a x como una función de las variables independientes y y z , y la derivada parcial existe.

Los ejercicios 67 y 68 se refieren al triángulo aquí mostrado.



67. Expresar A implícitamente como función de a , b y c y calcule $\partial A / \partial a$ y $\partial A / \partial b$.
 68. Expresar a en forma implícita como función de A , b y B y calcule $\partial a / \partial A$ y $\partial a / \partial B$.
 69. **Dos variables dependientes** Expresar v_x en términos de u y y si las ecuaciones $x = v \ln u$ y $y = u \ln v$ definen a u y v como funciones de variables independientes x y y , y si v_x existe. (Sugerencia: Aplique la derivación en ambas ecuaciones con respecto a x y resuelva para v_x por eliminación de u_x .)

70. Dos variables dependientes Obtenga $\partial x/\partial u$ y $\partial y/\partial u$ si las ecuaciones $u = x^2 - y^2$ y $v = x^2 + y^2$ definen a x y y como funciones de las variables independientes u y v , y las derivadas parciales existen. (Vea la sugerencia del ejercicio 69.) Luego, haga $s = x^2 + y^2$ y obtenga $\partial s/\partial u$.

71. Sea $f(x, y) = \begin{cases} y^3, & y \geq 0 \\ -y^2, & y < 0. \end{cases}$

Obtenga f_x, f_y, f_{xy} y f_{yx} y establezca el dominio de cada derivada parcial.

72. Sea $f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ x^2, & x < 0. \end{cases}$

Determine f_x, f_y, f_{xy} y f_{yx} y establezca el dominio de cada derivada parcial.

Teoría y ejemplos

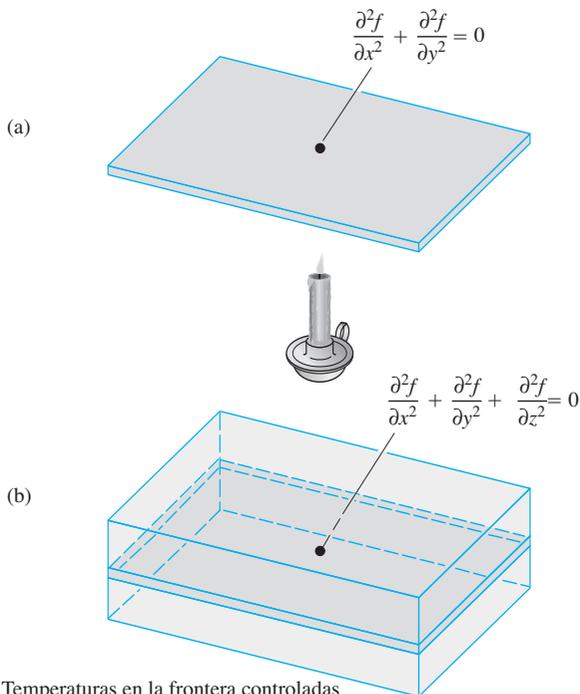
La ecuación de Laplace tridimensional

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

se satisface por las distribuciones de temperatura estacionarias $T = f(x, y, z)$ en el espacio, que se deben a los potenciales gravitatorios y los potenciales electrostáticos. La **ecuación de Laplace bidimensional**

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0,$$

obtenida por la eliminación del término $\partial^2 f/\partial z^2$ de la ecuación previa, describe potenciales y distribuciones de temperaturas estacionarias en un plano (véase la siguiente figura). El plano (a) puede considerarse como una rebanada delgada del sólido (b) perpendicular al eje z .



Temperaturas en la frontera controladas

Demuestre que cada función en los ejercicios 73 a 80 satisface una ecuación de Laplace.

73. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z^2$

74. $f(x, y, z) = 2z^3 - 3(x^2 + y^2)z$

75. $f(x, y) = e^{-2y} \cos 2x$

76. $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$

77. $f(x, y) = 3x + 2y - 4$

78. $f(x, y) = \tan^{-1} \frac{x}{y}$

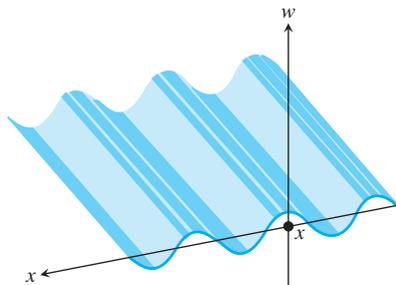
79. $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$

80. $f(x, y, z) = e^{3x+4y} \cos 5z$

La ecuación de onda Si tomamos una fotografía de las olas del mar desde la orilla de la playa, la foto muestra un patrón regular de picos y valles en un instante de tiempo. Vemos el movimiento vertical periódico en el espacio con respecto a la distancia. Si permanecemos en el agua, podemos sentir cómo sube y baja el agua con las olas. Vemos el movimiento vertical periódico en el tiempo. En física, esta hermosa simetría se expresa por la **ecuación de onda en una dimensión**

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

donde w es la altura de la onda, x es la variable de la distancia, t es la variable de tiempo y c es la velocidad con la cual se propagan las ondas.



En nuestro ejemplo, x es la distancia a través de la superficie del océano, pero en otras aplicaciones, x podría ser la posición a lo largo de una cuerda vibrante, la distancia en el aire (ondas sonoras) o la distancia a través del espacio (ondas de luz). El número c varía dependiendo del medio y del tipo de onda.

Demuestre que todas las funciones de los ejercicios 81 a 87 son soluciones de la ecuación de onda.

81. $w = \sin(x + ct)$

82. $w = \cos(2x + 2ct)$

83. $w = \sin(x + ct) + \cos(2x + 2ct)$

84. $w = \ln(2x + 2ct)$

85. $w = \tan(2x - 2ct)$

86. $w = 5 \cos(3x + 3ct) + e^{x+ct}$

87. $w = f(u)$, donde f es una función derivable de u , y $u = a(x + ct)$, donde a es una constante.

88. ¿Una función $f(x, y)$ que tiene sus primeras derivadas parciales continuas en una región abierta R tiene que ser continua en R ? Justifique su respuesta.

89. Si una función $f(x, y)$ tiene sus segundas derivadas parciales continuas en una región abierta R , ¿deben ser las derivadas parciales de primer orden de f continuas en R ? Justifique su respuesta.

90. Ecuación del calor Una ecuación diferencial parcial importante que describe la distribución del calor en una región en el tiempo t se puede representar por una *ecuación del calor en una dimensión*

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.$$

Demuestre que $u(x, t) = \sin(\alpha x) \cdot e^{-\beta t}$ satisface la ecuación del calor para las constantes α y β .

91. Sea $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

Demuestre que $f_x(0, 0)$ y $f_y(0, 0)$ existen, pero f no es derivable en $(0, 0)$. [Sugerencia: Use el teorema 4 y demuestre que f no es continua en $(0, 0)$].

92. Sea $f(x, y) = \begin{cases} 0, & x^2 < y < 2x^2 \\ 1, & \text{de otra forma.} \end{cases}$

Demuestre que $f_x(0, 0)$ y $f_y(0, 0)$ existen, pero f no es derivable en $(0, 0)$.

14.4 Regla de la cadena

La regla de la cadena para funciones de una variable, estudiada en la sección 3.6, dice que cuando $w = f(x)$ es una función derivable de x y $x = g(t)$ es una función derivable de t , w es una función derivable de t y dw/dt se puede calcular por la fórmula

$$\frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dx} \frac{dx}{dt}.$$

Para funciones de dos o más variables, la regla de la cadena tiene varias formas. La forma depende de cómo se relacionan las diferentes variables, pero una vez que esto se toma en cuenta, funciona como la regla de la cadena de la sección 3.6.

Funciones de dos variables

La fórmula de la regla de la cadena de una función derivable $w = f(x, y)$, cuando $x = x(t)$ y $y = y(t)$ son funciones derivables de t , está dada por el siguiente teorema.

Cada $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial x}$, f_x indica la derivada parcial de f con respecto a x .

TEOREMA 5: Regla de la cadena para funciones de dos variables independientes

Si $w = f(x, y)$ es derivable y si $x = x(t)$, $y = y(t)$ son funciones derivables de t , entonces la composición $w = f(x(t), y(t))$ es una función derivable de t y

$$\frac{dw}{dt} = f_x(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + f_y(x(t), y(t)) \cdot y'(t),$$

o bien,

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

Demostración La demostración consiste en mostrar que si x y y son derivables en $t = t_0$, entonces w es derivable en t_0 y

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)_{t_0} = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{P_0} \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t_0} + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{P_0} \left(\frac{dy}{dt}\right)_{t_0},$$

donde $P_0 = (x(t_0), y(t_0))$. Los subíndices indican dónde se calcula cada una de las derivadas.

Sean Δx , Δy y Δw los incrementos resultantes de variar t de t_0 a $t_0 + \Delta t$. Puesto que f es derivable (véase la definición en la sección 14.3),

$$\Delta w = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{P_0} \Delta x + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{P_0} \Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y,$$

donde $\epsilon_1, \epsilon_2 \rightarrow 0$ cuando $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$. Para obtener dw/dt , dividimos esta ecuación entre Δt y hacemos que Δt tienda a cero. De la división resulta

$$\frac{\Delta w}{\Delta t} = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{P_0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{P_0} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \epsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta t} + \epsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta t}.$$

Al hacer que Δt tienda a cero tenemos

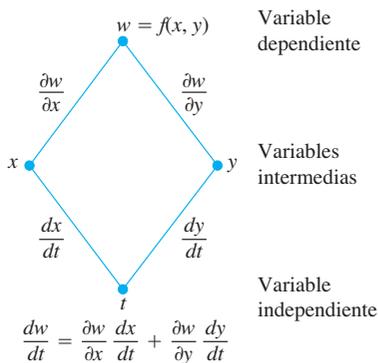
$$\begin{aligned} \left(\frac{dw}{dt}\right)_{t_0} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta t} \\ &= \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{P_0} \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t_0} + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{P_0} \left(\frac{dy}{dt}\right)_{t_0} + 0 \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t_0} + 0 \cdot \left(\frac{dy}{dt}\right)_{t_0}. \end{aligned}$$

Con frecuencia escribimos $\partial w/\partial x$ para representar la derivada parcial $\partial f/\partial x$, de manera que podemos replantear la regla de la cadena del teorema 5 en la forma

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

Para recordar la regla de la cadena, memorice el diagrama de abajo. Para calcular dw/dt , comience en w y lea hacia abajo cada ruta de t , multiplicando las derivadas a lo largo del camino. Luego sume los productos.

Regla de la cadena



Sin embargo, el significado de la variable dependiente w es diferente en cada lado de la ecuación precedente. En el lado izquierdo se refiere a la composición $w = f(x(t), y(t))$ como una función de una sola variable t . En el lado derecho se refiere a la función $w = f(x, y)$ como una función de dos variables x y y . Aún más, las derivadas individuales dw/dt , dx/dt y dy/dt se calculan en un punto t_0 , mientras que las derivadas parciales $\partial w/\partial x$ y $\partial w/\partial y$ se evalúan en el punto (x_0, y_0) , con $x_0 = x(t_0)$ y $y_0 = y(t_0)$. Una vez comprendido esto, usaremos ambas formas de manera indistinta a lo largo del texto, siempre que no haya el riesgo de alguna confusión.

El **diagrama de árbol** al margen representa una manera fácil de recordar la regla de la cadena. La “verdadera” variable independiente en la composición es t , mientras que x y y son *variables intermedias* (controladas por t), y w es la variable dependiente.

Una notación más precisa para la regla de la cadena muestra dónde se evalúan las diferentes derivadas del teorema 5:

$$\frac{dw}{dt}(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \frac{dx}{dt}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \frac{dy}{dt}(t_0).$$

EJEMPLO 1 Use la regla de la cadena para obtener la derivada de

$$w = xy$$

con respecto a t a lo largo de la trayectoria $x = \cos t, y = \sin t$. ¿Cuál es el valor de la derivada en $t = \pi/2$?

Solución Aplicamos la regla de la cadena para obtener dw/dt como sigue

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\ &= \frac{\partial(xy)}{\partial x} \cdot \frac{d}{dt}(\cos t) + \frac{\partial(xy)}{\partial y} \cdot \frac{d}{dt}(\sin t) \\ &= (y)(-\sin t) + (x)(\cos t) \\ &= (\sin t)(-\sin t) + (\cos t)(\cos t) \\ &= -\sin^2 t + \cos^2 t \\ &= \cos 2t. \end{aligned}$$

Podemos verificar el resultado de este ejemplo con un cálculo más directo. Como la función de t es

$$w = xy = \cos t \sen t = \frac{1}{2} \sen 2t,$$

entonces

$$\frac{dw}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \sen 2t \right) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cos 2t = \cos 2t.$$

En cualquier caso, en el valor dado de t ,

$$\left(\frac{dw}{dt} \right)_{t=\pi/2} = \cos \left(2 \cdot \frac{\pi}{2} \right) = \cos \pi = -1.$$

Funciones de tres variables

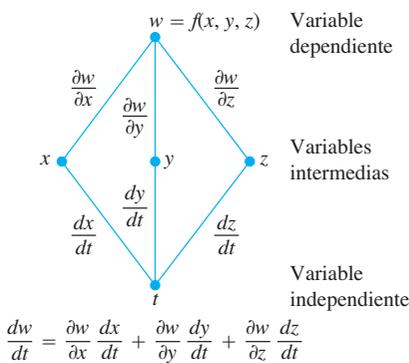
Tal vez se imagine la forma de la regla de la cadena para funciones de tres variables, ya que sólo requiere agregar el tercer término a la fórmula de dos variables.

TEOREMA 6: Regla de la cadena para funciones de tres variables Si $w = f(x, y, z)$ es derivable, y x, y y z son funciones derivables de t , entonces w es una función derivable de t y

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{dz}{dt}.$$

Aquí tenemos tres rutas de w a t en vez de dos, pero la obtención de dw/dt es la misma. Lea hacia abajo cada ruta, multiplicando las derivadas a lo largo del camino, luego sume.

Regla de la cadena



La comprobación es idéntica a la del teorema 5, excepto que ahora tenemos tres variables intermedias en vez de dos. El diagrama de árbol que usamos para recordar la nueva ecuación también es similar, con tres rutas de w a t .

EJEMPLO 2 Obtenga dw/dt si

$$w = xy + z, \quad x = \cos t, \quad y = \sen t, \quad z = t.$$

En este ejemplo los valores de $w(t)$ cambian a lo largo de la trayectoria de una hélice (sección 13.1) cuando t se modifica. ¿Cuál es el valor de la derivada en $t = 0$?

Solución De acuerdo con la regla de la cadena para tres variables independientes, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{dz}{dt} \\ &= (y)(-\sen t) + (x)(\cos t) + (1)(1) \\ &= (\sen t)(-\sen t) + (\cos t)(\cos t) + 1 \\ &= -\sen^2 t + \cos^2 t + 1 = 1 + \cos 2t, \end{aligned}$$

Se sustituyen las variables intermedias.

de manera que

$$\left(\frac{dw}{dt} \right)_{t=0} = 1 + \cos(0) = 2.$$

Para la interpretación física del cambio a lo largo de la curva, piense en un objeto cuya posición está cambiando con el tiempo t . Si $w = T(x, y, z)$ es la temperatura en cada punto (x, y, z) a lo largo de una curva C con ecuaciones paramétricas $x = x(t)$, $y = y(t)$ y $z = z(t)$, entonces la composición $w = T(x(t), y(t), z(t))$ representa la temperatura en relación con t a lo largo de la curva. La derivada dw/dt es entonces la tasa de cambio de la temperatura debido al movimiento a lo largo de la curva, como se calcula en el teorema 6.

Funciones definidas en superficies

Si estamos interesados en la temperatura $w = f(x, y, z)$ en los puntos (x, y, z) sobre la superficie de la Tierra, podríamos pensar en x, y y z como funciones de las variables r y s que proporcio-

nan las longitudes y latitudes de los puntos. Si $x = g(r, s)$, $y = h(r, s)$ y $z = k(r, s)$, podríamos expresar la temperatura como una función de r y s con la composición

$$w = f(g(r, s), h(r, s), k(r, s)).$$

En las condiciones establecidas abajo, w tiene derivadas parciales con respecto tanto a r como a s que se pueden calcular de la siguiente manera.

TEOREMA 7: Regla de la cadena para dos variables independientes y tres variables intermedias Suponga que $w = f(x, y, z)$, $x = g(r, s)$, $y = h(r, s)$ y $z = k(r, s)$. Si las cuatro funciones son derivables, entonces w tiene derivadas parciales con respecto a r y s , dadas por las fórmulas

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial r}$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s}.$$

La primera de estas ecuaciones puede deducirse de la regla de la cadena del teorema 6, manteniendo a s fija y tratando a r como t . Los diagramas de árbol para ambas ecuaciones se muestran en la figura 14.21.

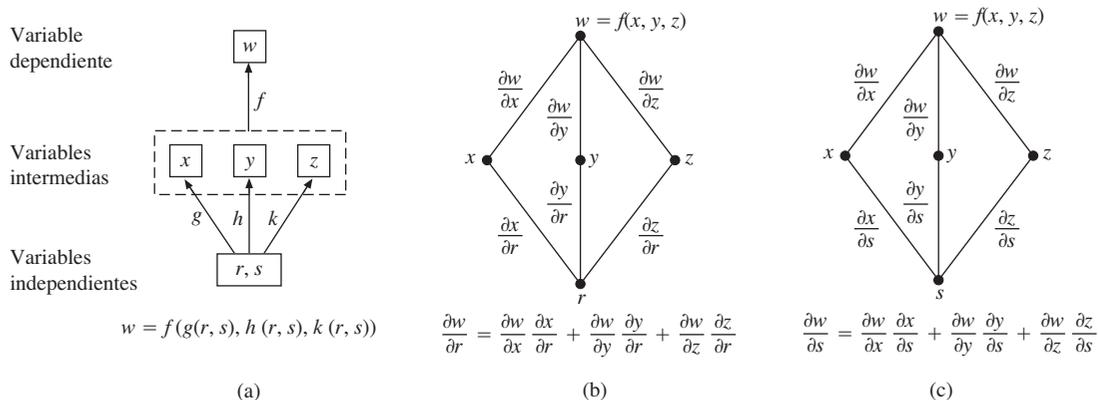


FIGURA 14.21 Función constante y diagrama de árbol para el teorema 7.

EJEMPLO 3 Exprese $\partial w/\partial r$ y $\partial w/\partial s$ en términos de r y s si

$$w = x + 2y + z^2, \quad x = \frac{r}{s}, \quad y = r^2 + \ln s, \quad z = 2r.$$

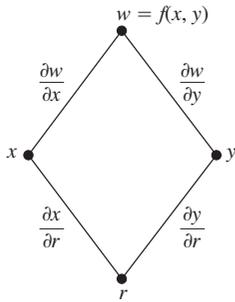
Solución Con base en las fórmulas del teorema 7, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial r} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial r} \\ &= (1) \left(\frac{1}{s} \right) + (2)(2r) + (2z)(2) \\ &= \frac{1}{s} + 4r + (4r)(2) = \frac{1}{s} + 12r \end{aligned}$$

Sustituimos en la variable intermedia z .

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial s} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s} \\ &= (1) \left(-\frac{r}{s^2} \right) + (2) \left(\frac{1}{s} \right) + (2z)(0) = \frac{2}{s} - \frac{r}{s^2} \end{aligned}$$

Regla de la cadena



$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r}$$

FIGURA 14.22 Diagrama de árbol para la ecuación

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r}$$

Si f es una función de dos variables en vez de tres, cada ecuación del teorema 7 se convierte en una correspondiente con un término menos.

Si $w = f(x, y)$, $x = g(r, s)$, y $y = h(r, s)$, entonces

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \quad \text{y} \quad \frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}$$

La figura 14.22 muestra el diagrama de árbol de la primera de estas ecuaciones. El diagrama de la segunda ecuación es similar; sólo se sustituye r por s .

EJEMPLO 4 Exprese $\partial w/\partial r$ y $\partial w/\partial s$ en términos de r y s si

$$w = x^2 + y^2, \quad x = r - s, \quad y = r + s.$$

Solución La discusión anterior nos lleva a lo siguiente.

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial r} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial w}{\partial s} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \\ &= (2x)(1) + (2y)(1) & &= (2x)(-1) + (2y)(1) \\ &= 2(r - s) + 2(r + s) & &= -2(r - s) + 2(r + s) \\ &= 4r & &= 4s \end{aligned}$$

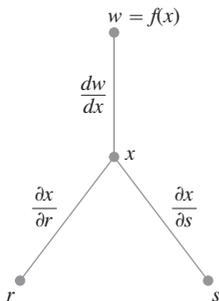
Sustituimos las variables intermedias. ■

Si f es sólo función de x , nuestras ecuaciones son incluso más simples.

Si $w = f(x)$ y $x = g(r, s)$, entonces

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{dw}{dx} \frac{\partial x}{\partial r} \quad \text{y} \quad \frac{\partial w}{\partial s} = \frac{dw}{dx} \frac{\partial x}{\partial s}$$

Regla de la cadena



$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{dw}{dx} \frac{\partial x}{\partial r}$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{dw}{dx} \frac{\partial x}{\partial s}$$

FIGURA 14.23 Diagrama de árbol para derivar f como composición de r y s con una variable intermedia.

En este caso, usamos la derivada ordinaria (de una variable) dw/dx . El diagrama de árbol es el que se muestra en la figura 14.23.

Revisión de la derivación implícita

La regla de la cadena para dos variables en el teorema 5 conduce a una fórmula que toma algo de álgebra de la derivación implícita. Suponga que

1. La función $F(x, y)$ es derivable y
2. La ecuación $F(x, y) = 0$ define a y de manera implícita como una función derivable de x , digamos, $y = h(x)$.

Puesto que $w = F(x, y) = 0$, la derivada dw/dx debe anularse. Al calcular la derivada a partir de la regla de la cadena (diagrama de árbol de la figura 14.24), obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{dw}{dx} = F_x \frac{dx}{dx} + F_y \frac{dy}{dx} && \text{Teorema 5, con } t = x \\ & && \text{y } f = F. \\ &= F_x \cdot 1 + F_y \cdot \frac{dy}{dx}. \end{aligned}$$

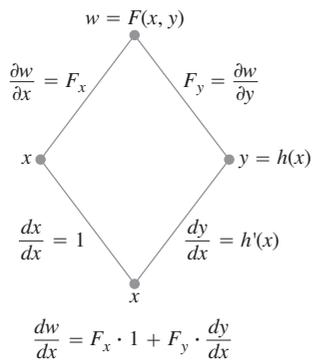


FIGURA 14.24 El diagrama de árbol de la derivación $w = F(x, y)$ con respecto a x . Establecer que $dw/dx = 0$ nos lleva a una fórmula de cálculo simple para la derivada implícita (teorema 8).

Si $F_y = \partial w/\partial y \neq 0$, podemos despejar dy/dx de esta ecuación para obtener

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}.$$

Definimos formalmente este resultado.

TEOREMA 8: Una fórmula para la derivación implícita Suponga que $F(x, y)$ es derivable y que la ecuación $F(x, y) = 0$ define a y como una función derivable de x . Entonces en cualquier punto donde $F_y \neq 0$,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}. \tag{1}$$

EJEMPLO 5 Use el teorema 8 para encontrar dy/dx si $y^2 - x^2 - \text{sen } xy = 0$.

Solución Si se toma $F(x, y) = y^2 - x^2 - \text{sen } xy$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{-2x - y \cos xy}{2y - x \cos xy} \\ &= \frac{2x + y \cos xy}{2y - x \cos xy}. \end{aligned}$$

Este cálculo es significativamente más corto que el cálculo para la derivación implícita con una variable. ■

El resultado del teorema 8 se extiende fácilmente a tres variables. Suponga que la ecuación $F(x, y, z) = 0$ define implícitamente la variable z como una función $z = f(x, y)$. Entonces, para cada (x, y) en el dominio de f tenemos que $F(x, y, f(x, y)) = 0$. Suponiendo que F y f son funciones derivables, podemos usar la regla de la cadena para derivar la ecuación $F(x, y, z) = 0$ con respecto a la variable independiente x :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \\ &= F_x \cdot 1 + F_y \cdot 0 + F_z \cdot \frac{\partial z}{\partial x}, \end{aligned}$$

y es constante cuando se hace la derivación con respecto a x.

entonces

$$F_x + F_z \frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

Un cálculo similar de derivación con respecto a la variable independiente y da como resultado

$$F_y + F_z \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Siempre que $F_z \neq 0$, podemos resolver estas dos últimas ecuaciones para las derivadas parciales de $z = f(x, y)$ para obtener

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}. \tag{2}$$

Un resultado importante de cálculo avanzado, llamado **teorema de la función implícita**, establece las condiciones para las cuales los resultados de la ecuación (2) son válidos. Si las derivadas parciales F_x , F_y y F_z son continuas en una región abierta R en el espacio que contiene el punto (x_0, y_0, z_0) , y si para alguna constante c , $F(x_0, y_0, z_0) = c$ y $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, entonces la ecuación $F(x, y, z) = c$ define a z implícitamente como una función derivable de x y y cerca de (x_0, y_0, z_0) , y las derivadas parciales de z están dadas por las ecuaciones (2).

EJEMPLO 6 Obtenga $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ en $(0, 0, 0)$ si $x^3 + z^2 + ye^{xz} + z \cos y = 0$.

Solución Sea $F(x, y, z) = x^3 + z^2 + ye^{xz} + z \cos y$. Entonces,

$$F_x = 3x^2 + zye^{xz}, \quad F_y = e^{xz} - z \operatorname{sen} y, \quad \text{y} \quad F_z = 2z + xye^{xz} + \cos y.$$

Puesto que $F(0, 0, 0) = 0$, $F_z(0, 0, 0) = 1 \neq 0$, y todas las primeras derivadas parciales son continuas, el teorema de la función implícita dice que $F(x, y, z) = 0$ define a z como una función derivable de x y y cerca del punto $(0, 0, 0)$. Partiendo de la ecuación (2),

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{3x^2 + zye^{xz}}{2z + xye^{xz} + \cos y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{e^{xz} - z \operatorname{sen} y}{2z + xye^{xz} + \cos y}.$$

En $(0, 0, 0)$ obtenemos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{0}{1} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{1} = -1. \quad \blacksquare$$

Funciones de varias variables

En esta sección hemos visto varias formas de la regla de la cadena, pero cada una de ellas es justamente un caso especial de una fórmula general. Cuando se resuelven problemas específicos, suele ser útil trazar el diagrama de árbol apropiado colocando la variable dependiente en la parte superior, las variables intermedias en la parte media, y la variable independiente seleccionada en la parte inferior. Para calcular la derivada de la variable dependiente con respecto a la variable independiente seleccionada, inicie en la variable dependiente y lea hacia abajo por cada ruta del árbol hacia la variable independiente, calculando y multiplicando las derivadas a lo largo de cada ruta. Luego sume los productos encontrados en las diferentes rutas.

En general, suponga que $w = f(x, y, \dots, v)$ es una función derivable de las variables x, y, \dots, v (un conjunto finito) y las x, y, \dots, v son funciones derivables de p, q, \dots, t (otro conjunto finito). Entonces w es una función derivable de las variables p hasta t , y las derivadas parciales de w con respecto a estas variables están dadas por ecuaciones de la forma

$$\frac{\partial w}{\partial p} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial p} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial p} + \dots + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial p}.$$

Las otras ecuaciones se obtienen sustituyendo p por q, \dots, t , una por una.

Un modo de recordar esta ecuación es visualizar el lado derecho como el producto punto de dos vectores con componentes

$$\underbrace{\left(\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \dots, \frac{\partial w}{\partial v} \right)}_{\substack{\text{Derivadas de } w \text{ con} \\ \text{respecto a las} \\ \text{variables intermedias}}} \quad \text{y} \quad \underbrace{\left(\frac{\partial x}{\partial p}, \frac{\partial y}{\partial p}, \dots, \frac{\partial v}{\partial p} \right)}_{\substack{\text{Derivadas de las variables intermedias} \\ \text{con respecto a la variable} \\ \text{independiente seleccionada}}}.$$

Ejercicios 14.4

Regla de la cadena: una variable independiente

En los ejercicios 1 a 6, **(a)** exprese dw/dt como una función de t usando la regla de la cadena y expresando w en términos de t , derivando directamente con respecto a t . Luego **(b)** evalúe dw/dt en el valor dado de t .

- $w = x^2 + y^2$, $x = \cos t$, $y = \sin t$; $t = \pi$
- $w = x^2 + y^2$, $x = \cos t + \sin t$, $y = \cos t - \sin t$; $t = 0$
- $w = \frac{x}{z} + \frac{y}{z}$, $x = \cos^2 t$, $y = \sin^2 t$, $z = 1/t$; $t = 3$
- $w = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$, $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 4\sqrt{t}$; $t = 3$
- $w = 2ye^x - \ln z$, $x = \ln(t^2 + 1)$, $y = \tan^{-1} t$, $z = e^t$; $t = 1$
- $w = z - \sin xy$, $x = t$, $y = \ln t$, $z = e^{t-1}$; $t = 1$

Regla de la cadena: dos y tres variables independientes

En los ejercicios 7 y 8, **(a)** exprese $\partial z/\partial u$ y $\partial z/\partial v$ como funciones de u y v , usando la regla de la cadena y expresando z directamente en términos de u y v antes de derivar. Luego, **(b)** evalúe $\partial z/\partial u$ y $\partial z/\partial v$ en el punto dado (u, v) .

- $z = 4e^x \ln y$, $x = \ln(u \cos v)$, $y = u \sin v$;
 $(u, v) = (2, \pi/4)$
- $z = \tan^{-1}(x/y)$, $x = u \cos v$, $y = u \sin v$;
 $(u, v) = (1.3, \pi/6)$

En los ejercicios 9 y 10, **(a)** exprese $\partial w/\partial u$ y $\partial w/\partial v$ como funciones de u y v , usando la regla de la cadena y expresando w directamente en términos de u y v antes de derivar. Luego, **(b)** evalúe $\partial w/\partial u$ y $\partial w/\partial v$ en el punto dado (u, v) .

- $w = xy + yz + xz$, $x = u + v$, $y = u - v$, $z = uv$;
 $(u, v) = (1/2, 1)$
- $w = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$, $x = ue^v \sin u$, $y = ue^v \cos u$,
 $z = ue^v$; $(u, v) = (-2, 0)$

En los ejercicios 11 y 12, **(a)** exprese $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$ y $\partial u/\partial z$ como funciones de x, y y z , usando la regla de la cadena y expresando u directamente en términos de x, y y z antes de derivar. Luego, **(b)** evalúe $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$ y $\partial u/\partial z$ en el punto dado (x, y, z) .

- $u = \frac{p - q}{q - r}$, $p = x + y + z$, $q = x - y + z$,
 $r = x + y - z$; $(x, y, z) = (\sqrt{3}, 2, 1)$
- $u = e^{qr} \sin^{-1} p$, $p = \sin x$, $q = z^2 \ln y$, $r = 1/z$;
 $(x, y, z) = (\pi/4, 1/2, -1/2)$

Uso del diagrama de árbol

En los ejercicios 13 a 24, dibuje un diagrama de árbol y escriba una fórmula de la regla de la cadena para cada derivada.

- $\frac{dz}{dt}$ para $z = f(x, y)$, $x = g(t)$, $y = h(t)$
- $\frac{dz}{dt}$ para $z = f(u, v, w)$, $u = g(t)$, $v = h(t)$, $w = k(t)$
- $\frac{\partial w}{\partial u}$ y $\frac{\partial w}{\partial v}$ para $w = h(x, y, z)$, $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$,
 $z = k(u, v)$

- $\frac{\partial w}{\partial x}$ y $\frac{\partial w}{\partial y}$ para $w = f(r, s, t)$, $r = g(x, y)$, $s = h(x, y)$,
 $t = k(x, y)$
- $\frac{\partial w}{\partial u}$ y $\frac{\partial w}{\partial v}$ para $w = g(x, y)$, $x = h(u, v)$, $y = k(u, v)$
- $\frac{\partial w}{\partial x}$ y $\frac{\partial w}{\partial y}$ para $w = g(u, v)$, $u = h(x, y)$, $v = k(x, y)$
- $\frac{\partial z}{\partial t}$ y $\frac{\partial z}{\partial s}$ para $z = f(x, y)$, $x = g(t, s)$, $y = h(t, s)$
- $\frac{\partial y}{\partial r}$ para $y = f(u)$, $u = g(r, s)$
- $\frac{\partial w}{\partial s}$ y $\frac{\partial w}{\partial t}$ para $w = g(u)$, $u = h(s, t)$
- $\frac{\partial w}{\partial p}$ para $w = f(x, y, z, v)$, $x = g(p, q)$, $y = h(p, q)$,
 $z = j(p, q)$, $v = k(p, q)$
- $\frac{\partial w}{\partial r}$ y $\frac{\partial w}{\partial s}$ para $w = f(x, y)$, $x = g(r)$, $y = h(s)$
- $\frac{\partial w}{\partial s}$ para $w = g(x, y)$, $x = h(r, s, t)$, $y = k(r, s, t)$

Derivación implícita

Suponiendo que las ecuaciones de los ejercicios 25 a 28 definen a y como una función derivable de x , use el teorema 8 para obtener el valor de dy/dx en el punto dado.

- $x^3 - 2y^2 + xy = 0$, $(1, 1)$
- $xy + y^2 - 3x - 3 = 0$, $(-1, 1)$
- $x^2 + xy + y^2 - 7 = 0$, $(1, 2)$
- $xe^y + \sin xy + y - \ln 2 = 0$, $(0, \ln 2)$

Obtenga los valores de $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ en los puntos indicados en los ejercicios 29 a 32.

- $z^3 - xy + yz + y^3 - 2 = 0$, $(1, 1, 1)$
- $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - 1 = 0$, $(2, 3, 6)$
- $\sin(x + y) + \sin(y + z) + \sin(x + z) = 0$, (π, π, π)
- $xe^y + ye^z + 2 \ln x - 2 - 3 \ln 2 = 0$, $(1, \ln 2, \ln 3)$

Cálculo de derivadas parciales en puntos especificadas

- Determine $\partial w/\partial r$ cuando $r = 1, s = -1$ si $w = (x + y + z)^2$,
 $x = r - s, y = \cos(r + s), z = \sin(r + s)$.
- Determine $\partial w/\partial v$ cuando $u = -1, v = 2$ si $w = xy + \ln z$,
 $x = v^2/u, y = u + v, z = \cos u$.
- Determine $\partial w/\partial v$ cuando $u = 0, v = 0$ si $w = x^2 + (y/x)$,
 $x = u - 2v + 1, y = 2u + v - 2$.
- Determine $\partial z/\partial u$ cuando $u = 0, v = 1$ si $z = \sin xy + x \sin y$,
 $x = u^2 + v^2, y = uv$.
- Determine $\partial z/\partial u$ y $\partial z/\partial v$ cuando $u = \ln 2, v = 1$ si $z = 5 \tan^{-1} x$ y $x = e^u + \ln v$.
- Determine $\partial z/\partial u$ y $\partial z/\partial v$ cuando $u = 1, v = -2$ si $z = \ln q$ y $q = \sqrt{v + 3} \tan^{-1} u$.

Teoría y ejemplos

39. Suponga que $w = f(s^3 + t^2)$ y $f'(x)$. Encuentre $\frac{\partial w}{\partial t}$ y $\frac{\partial w}{\partial s}$.

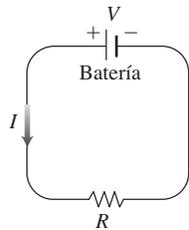
40. Suponga que $w = f\left(\frac{s}{t}, \frac{s}{t}\right)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = xy$, y $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x^2}{2}$.

Encuentre $\frac{\partial w}{\partial t}$ y $\frac{\partial w}{\partial s}$.

41. **Cambio de voltaje en un circuito** El voltaje V en un circuito que satisface la ley $V = IR$ cae lentamente cuando la batería se acaba. Al mismo tiempo, la resistencia R aumenta cuando el resistor se calienta. Use la ecuación

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial I} \frac{dI}{dt} + \frac{\partial V}{\partial R} \frac{dR}{dt}$$

para saber cómo cambia la corriente en el instante en que $R = 600$ ohms, $I = 0.04$ amp, $dR/dt = 0.5$ ohms/segundo, y $dV/dt = -0.01$ volt/segundo.



42. **Cambio de dimensiones en una caja** Las longitudes a , b y c de las aristas de una caja rectangular cambian con el tiempo. En un instante en cuestión, $a = 1$ m, $b = 2$ m, $c = 3$ m, $da/dt = db/dt = 1$ m/s, y $dc/dt = -3$ m/s. ¿Qué valores tienen las tasas de cambio instantáneas del volumen V y del área S en ese instante? ¿La longitud de las diagonales interiores de la caja crece o decrece?

43. Si $f(u, v, w)$ es derivable y $u = x - y$, $v = y - z$, y $w = z - x$, demuestre que

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

44. **Coordenadas polares** Suponga que en una función derivable $w = f(x, y)$ sustituimos las coordenadas polares $x = r \cos \theta$ y $y = r \sin \theta$.

a. Demuestre que

$$\frac{\partial w}{\partial r} = f_x \cos \theta + f_y \sin \theta$$

y

$$\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} = -f_x \sin \theta + f_y \cos \theta.$$

b. Resuelva las ecuaciones del inciso (a) para expresar f_x y f_y en términos de $\partial w/\partial r$ y $\partial w/\partial \theta$.

c. Demuestre que

$$(f_x)^2 + (f_y)^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2.$$

45. **Ecuaciones de Laplace** Demuestre que si $w = f(u, v)$ satisface la ecuación de Laplace $f_{uu} + f_{vv} = 0$ y si $u = (x^2 - y^2)/2$ y $v = xy$, entonces w satisface la ecuación de Laplace $w_{xx} + w_{yy} = 0$.

46. **Ecuaciones de Laplace** Sea $w = f(u) + g(v)$, donde $u = x + iy$, $v = x - iy$, e $i = \sqrt{-1}$. Demuestre que w satisface la ecuación de Laplace $w_{xx} + w_{yy} = 0$ si todas las funciones necesarias son derivables.

47. **Valores extremos en una hélice** Suponga que las derivadas parciales de una función $f(x, y, z)$ en los puntos de la hélice $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$ son

$$f_x = \cos t, \quad f_y = \sin t, \quad f_z = t^2 + t - 2.$$

¿En cuáles puntos de la curva, si existen, puede f tener valores extremos?

48. **Curva en el espacio** Sea $w = x^2 e^{2y} \cos 3z$. Obtenga el valor de dw/dt en el punto $(1, \ln 2, 0)$ en la curva $x = \cos t$, $y = \ln(t + 2)$, $z = t$.

49. **Temperatura dentro de una circunferencia** Sea $T = f(x, y)$ la temperatura en el punto (x, y) en la circunferencia $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$ y suponga que

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 8x - 4y, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 8y - 4x.$$

a. Encuentre dónde ocurren las temperaturas máxima y mínima en la circunferencia, examinando las derivadas dT/dt y d^2T/dt^2 .

b. Suponga que $T = 4x^2 - 4xy + 4y^2$. Obtenga los valores máximo y mínimo de T dentro de la circunferencia.

50. **Temperatura en una elipse** Sea $T = g(x, y)$ la temperatura en el punto (x, y) sobre la elipse

$$x = 2\sqrt{2} \cos t, \quad y = \sqrt{2} \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

y suponga que

$$\frac{\partial T}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = x.$$

a. Localice las temperaturas máxima y mínima sobre la elipse examinando dT/dt y d^2T/dt^2 .

b. Suponga que $T = xy - 2$. Obtenga los valores máximo y mínimo de T sobre la elipse.

Derivación de integrales Bajo restricciones mínimas de continuidad, es verdad que si

$$F(x) = \int_a^b g(t, x) dt,$$

entonces $F'(x) = \int_a^b g_x(t, x) dt$. Con base en este hecho y de acuerdo con la regla de la cadena, podemos determinar la derivada de

$$F(x) = \int_a^{f(x)} g(t, x) dt$$

dejando que

$$G(u, x) = \int_a^u g(t, x) dt,$$

donde $u = f(x)$. Determine las derivadas de las funciones en los ejercicios 51 y 52.

$$51. F(x) = \int_0^{x^2} \sqrt{t^4 + x^3} dt \quad 52. F(x) = \int_{x^2}^1 \sqrt{t^3 + x^2} dt$$

14.5 Derivadas direccionales y vectores gradiente

Si observa el mapa (figura 14.25) que muestra los contornos a lo largo del río Hudson en Nueva York, observará que las corrientes afluentes son perpendiculares a los contornos. Los afluentes siguen las trayectorias descendentes más pronunciadas, de manera que el agua llega al Hudson rápidamente. Por lo tanto, la tasa o razón de cambio instantánea más rápida en la altura del flujo sobre el nivel del mar tiene una dirección particular. En esta sección verá por qué esta dirección, llamada dirección “colina abajo”, es perpendicular a los contornos.

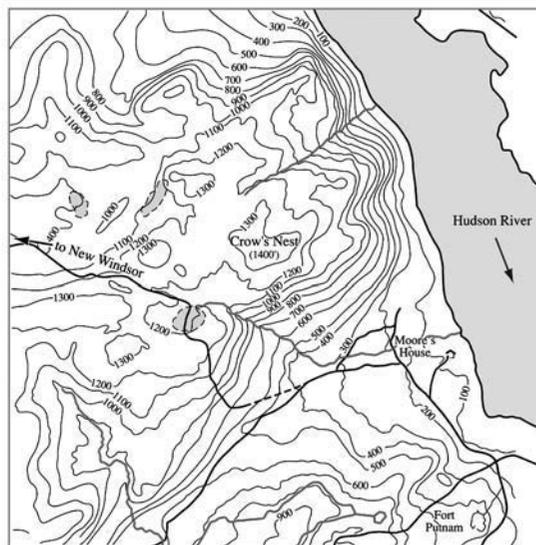


FIGURA 14.25 Contornos a lo largo del río Hudson, en Nueva York, y sus afluentes con trayectorias de descenso pronunciado que fluyen en forma perpendicular a los contornos.

Derivadas direccionales en el plano

Sabemos por la sección 14.4 que si $f(x, y)$ es derivable, entonces la razón de cambio de f con respecto a t a lo largo de una curva derivable $x = g(t)$, $y = h(t)$ es

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

En cualquier punto $P_0(x_0, y_0) = P_0(g(t_0), h(t_0))$, esta ecuación proporciona la tasa de cambio de f con respecto a t creciente y, por lo tanto, depende —entre otras cosas— de la dirección de movimiento a lo largo de la curva. Si la curva es una línea recta y t es el parámetro de la longitud de arco a lo largo de la recta, medida desde P_0 en la dirección de un vector unitario dado \mathbf{u} , entonces df/dt es la tasa de cambio de f con respecto a la distancia en su dominio en la dirección de \mathbf{u} . Al variar \mathbf{u} , obtenemos las razones a las cuales cambia f con respecto a la distancia cuando nos movemos a través de P_0 en diferentes direcciones. Definiremos esta idea con mayor precisión.

Suponga que la función $f(x, y)$ está definida en una región R del plano xy , que $P_0(x_0, y_0)$ es un punto de R y que $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$ es un vector unitario. Entonces las ecuaciones

$$x = x_0 + su_1, \quad y = y_0 + su_2$$

parametrizan la recta que pasa por P_0 paralela a \mathbf{u} . Si el parámetro s mide la longitud de arco desde P_0 en dirección de \mathbf{u} , encontramos la tasa de cambio de f en P_0 en la dirección de \mathbf{u} , calculando df/ds en P_0 (figura 14.26).

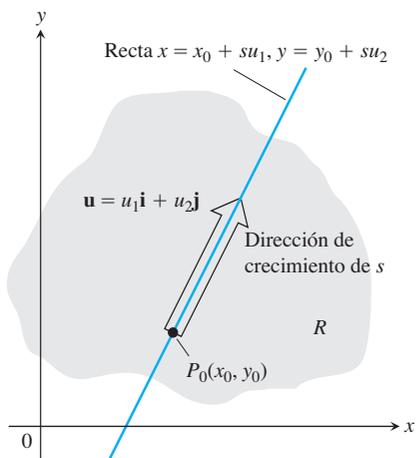


FIGURA 14.26 La tasa de cambio de f en la dirección de \mathbf{u} en el punto P_0 es la razón a la cual f cambia a lo largo de esta recta en P_0 .

DEFINICIÓN La derivada de f en $P_0(x_0, y_0)$ en la dirección del vector unitario $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$ es el número

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\mathbf{u}, P_0} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + su_1, y_0 + su_2) - f(x_0, y_0)}{s}, \quad (1)$$

siempre que el límite exista.

La **derivada direccional** definida por la ecuación 1 también se representa como

$$(D_{\mathbf{u}}f)_{P_0} \quad \text{“Derivada de } f \text{ en } P_0 \text{ en la dirección de } \mathbf{u}\text{”}$$

Las derivadas parciales $f_x(x_0, y_0)$ y $f_y(x_0, y_0)$ son las derivadas direccionales de f en el punto P_0 en las direcciones \mathbf{i} y \mathbf{j} . Esta observación es evidente al comparar la ecuación (1) de las definiciones de las dos derivadas parciales dadas en la sección 14.3.

EJEMPLO 1 Empleando la definición, obtenga la derivada de

$$f(x, y) = x^2 + xy$$

en $P_0(1, 2)$ en la dirección del vector unitario $\mathbf{u} = (1/\sqrt{2})\mathbf{i} + (1/\sqrt{2})\mathbf{j}$.

Solución Al aplicar la definición de la ecuación (1) obtenemos

$$\begin{aligned} \left(\frac{df}{ds}\right)_{\mathbf{u}, P_0} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + su_1, y_0 + su_2) - f(x_0, y_0)}{s} && \text{Ecuación (1)} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f\left(1 + s \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}, 2 + s \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - f(1, 2)}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\left(1 + \frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(1 + \frac{s}{\sqrt{2}}\right)\left(2 + \frac{s}{\sqrt{2}}\right) - (1^2 + 1 \cdot 2)}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\left(1 + \frac{2s}{\sqrt{2}} + \frac{s^2}{2}\right) + \left(2 + \frac{3s}{\sqrt{2}} + \frac{s^2}{2}\right) - 3}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\frac{5s}{\sqrt{2}} + s^2}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{5}{\sqrt{2}} + s\right) = \frac{5}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

La tasa de cambio de $f(x, y) = x^2 + xy$ en $P_0(1, 2)$ en la dirección de \mathbf{u} es $5/\sqrt{2}$. ■

Interpretación de la derivada direccional

La ecuación $z = f(x, y)$ representa la superficie S en el espacio. Si $z_0 = f(x_0, y_0)$, entonces el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ está en S . El plano vertical que pasa por P y $P_0(x_0, y_0)$ paralelo a \mathbf{u} interseca a S en la curva C (figura 14.27). La tasa de cambio de f en la dirección de \mathbf{u} es la pendiente de la tangente de C en P de acuerdo con el sistema de mano derecha formado por los vectores \mathbf{u} y \mathbf{k} .

Cuando $\mathbf{u} = \mathbf{i}$, la derivada direccional en P_0 es $\partial f/\partial x$ evaluada en (x_0, y_0) . La derivada direccional generaliza las dos derivadas parciales. Ahora podemos preguntar por la tasa de cambio de f en cualquier dirección \mathbf{u} , y no sólo en las direcciones \mathbf{i} y \mathbf{j} .

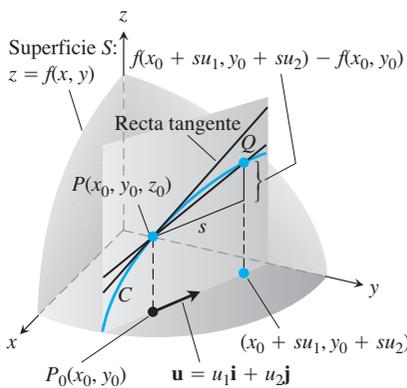


FIGURA 14.27 La pendiente de la curva C en P_0 es $\lim_{Q \rightarrow P} \text{pendiente}(PQ)$; ésta es la derivada direccional

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\mathbf{u}, P_0} = (D_{\mathbf{u}}f)_{P_0}$$

Para una interpretación física de la derivada direccional, suponga que $T = f(x, y)$ es la temperatura en cada punto (x, y) de una región en el plano. Entonces $f(x_0, y_0)$ es la temperatura en el punto $P(x_0, y_0)$ y $(D_{\mathbf{u}}f)_{P_0}$ es la tasa de cambio instantánea de la temperatura en P_0 al avanzar en la dirección de \mathbf{u} .

Cálculos y gradientes

Desarrollaremos ahora una fórmula eficiente para calcular la derivada direccional de una función derivable f . Empezamos con la recta

$$x = x_0 + su_1, \quad y = y_0 + su_2, \quad (2)$$

que pasa por $P_0(x_0, y_0)$, parametrizada con el parámetro de longitud de arco s que crece en la dirección del vector unitario $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$. Luego, por la regla de la cadena obtenemos

$$\begin{aligned} \left(\frac{df}{ds}\right)_{\mathbf{u}, P_0} &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0} \frac{dx}{ds} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_0} \frac{dy}{ds} && \text{Regla de la cadena para una } f \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0} u_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_0} u_2 && \text{De las ecuaciones (2),} \\ &= \underbrace{\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0} \mathbf{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_0} \mathbf{j}\right]}_{\text{Gradiente de } f \text{ en } P_0} \cdot \underbrace{\left[u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}\right]}_{\text{Dirección } \mathbf{u}}. && (3) \end{aligned}$$

La ecuación (3) dice que la derivada de una función derivable f en la dirección de \mathbf{u} en P_0 es el producto punto de \mathbf{u} por el vector especial llamado *gradiente* de f en P_0 .

DEFINICIÓN El **vector gradiente (gradiente)** de $f(x, y)$ en un punto $P(x_0, y_0)$ es el vector

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j}$$

que se obtiene al calcular las derivadas parciales de f en el punto P_0 .

La notación ∇f se lee “grad de f ”, “gradiente de f ” o “nabla de f ”. El símbolo ∇ se lee “nabla”. Otra notación para el gradiente es $\text{grad } f$.

TEOREMA 9: La derivada direccional es un producto punto Si $f(x, y)$ es derivable en una región abierta que contiene a $P(x_0, y_0)$, entonces

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\mathbf{u}, P_0} = (\nabla f)_{P_0} \cdot \mathbf{u}, \quad (4)$$

es el producto punto del gradiente ∇f en P_0 con \mathbf{u} .

EJEMPLO 2 Obtenga la derivada de $f(x, y) = xe^y + \cos(xy)$ en el punto $(2, 0)$ en la dirección de $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$.

Solución La dirección de \mathbf{v} es el vector unitario que se obtiene dividiendo \mathbf{v} entre su longitud:

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{\mathbf{v}}{5} = \frac{3}{5}\mathbf{i} - \frac{4}{5}\mathbf{j}.$$

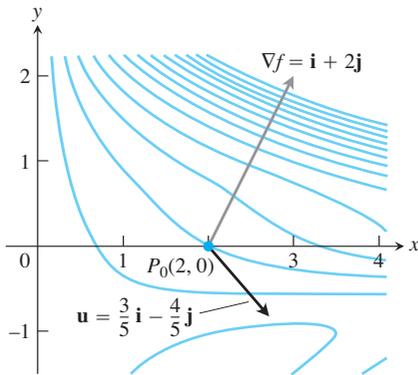


FIGURA 14.28 Gráfica de ∇f como un vector en el dominio de f . La figura muestra varias curvas de nivel de f . La tasa de cambio de f en $(2, 0)$ en la dirección de $\mathbf{u} = (3/5)\mathbf{i} - (4/5)\mathbf{j}$ es $\nabla f \cdot \mathbf{u} = -1$ (ejemplo 2).

Las derivadas parciales de f son continuas en todas partes y en $(2, 0)$ están dadas por

$$f_x(2, 0) = (e^y - y \operatorname{sen}(xy))_{(2,0)} = e^0 - 0 = 1$$

$$f_y(2, 0) = (xe^y - x \operatorname{sen}(xy))_{(2,0)} = 2e^0 - 2 \cdot 0 = 2.$$

El gradiente de f en $(2, 0)$ es

$$\nabla f|_{(2,0)} = f_x(2, 0)\mathbf{i} + f_y(2, 0)\mathbf{j} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$$

(figura 14.28) La derivada de f en $(2, 0)$ en la dirección de \mathbf{v} es

$$(D_{\mathbf{u}}f)|_{(2,0)} = \nabla f|_{(2,0)} \cdot \mathbf{u} \quad \text{Ecuación (4)}$$

$$= (\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) \cdot \left(\frac{3}{5}\mathbf{i} - \frac{4}{5}\mathbf{j}\right) = \frac{3}{5} - \frac{8}{5} = -1.$$

Al evaluar el producto punto de la fórmula

$$D_{\mathbf{u}}f = \nabla f \cdot \mathbf{u} = |\nabla f| |\mathbf{u}| \cos \theta = |\nabla f| \cos \theta,$$

donde θ es el ángulo entre los vectores \mathbf{u} y ∇f , se revelan las siguientes propiedades.

Propiedades de la derivada direccional $D_{\mathbf{u}}f = \nabla f \cdot \mathbf{u} = |\nabla f| \cos \theta$

1. La función f crece más rápidamente cuando $\cos \theta = 1$ o cuando $\theta = 0$ y \mathbf{u} es en la dirección de ∇f . Es decir, en cada punto P de su dominio, f crece más rápidamente en la dirección del vector gradiente ∇f en P . La derivada en esta dirección es

$$D_{\mathbf{u}}f = |\nabla f| \cos(0) = |\nabla f|.$$

2. De manera similar, f decrece más rápidamente en la dirección de $-\nabla f$. La derivada en esta dirección es $D_{\mathbf{u}}f = |\nabla f| \cos(\pi) = -|\nabla f|$.
3. Cualquier dirección de \mathbf{u} ortogonal a un gradiente de $\nabla f \neq 0$ es una dirección de cambio nulo en f porque en este caso θ es igual a $\pi/2$ y

$$D_{\mathbf{u}}f = |\nabla f| \cos(\pi/2) = |\nabla f| \cdot 0 = 0.$$

Como veremos más tarde, estas propiedades son válidas tanto en tres dimensiones como en dos.

EJEMPLO 3 Encuentre las direcciones en las cuales $f(x, y) = (x^2/2) + (y^2/2)$

- (a) crece más rápidamente en el punto $(1, 1)$.
- (b) decrece más rápidamente en el punto $(1, 1)$.
- (c) ¿Cuáles son las direcciones de cambio nulo de f en $(1, 1)$?

Solución

- (a) La función crece más rápidamente en la dirección de ∇f en $(1, 1)$. El gradiente en ese punto es

$$(\nabla f)_{(1,1)} = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j})_{(1,1)} = \mathbf{i} + \mathbf{j}.$$

Su dirección es

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{i} + \mathbf{j}}{|\mathbf{i} + \mathbf{j}|} = \frac{\mathbf{i} + \mathbf{j}}{\sqrt{(1)^2 + (1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}.$$

- (b) La función decrece más rápidamente en la dirección de $-\nabla f$ en $(1, 1)$, la cual es

$$-\mathbf{u} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}.$$

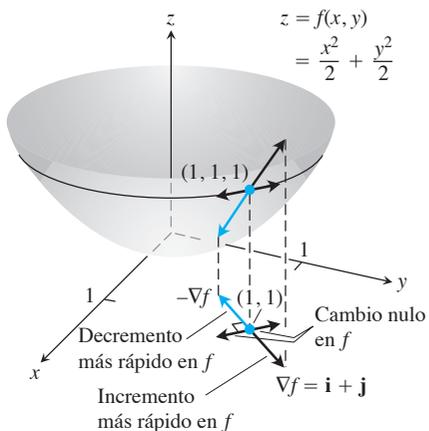


FIGURA 14.29 La dirección en la cual $f(x, y)$ crece más rápidamente en $(1, 1)$ es la dirección de $\nabla f|_{(1,1)} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$. Corresponde a la dirección de máximo ascenso sobre la superficie $(1, 1, 1)$ (ejemplo 3).

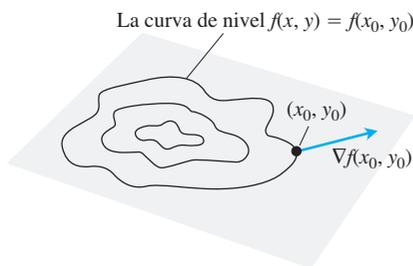


FIGURA 14.30 El gradiente de una función derivable de dos variables en un punto siempre es normal a la curva de nivel de la función que pasa por ese punto.

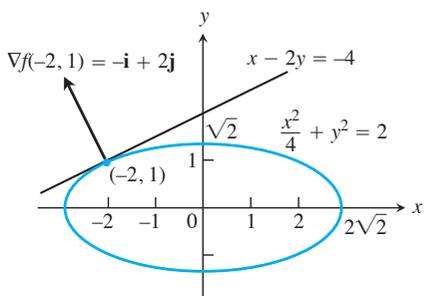


FIGURA 14.31 Podemos encontrar la tangente a la elipse $(x^2/4) + y^2 = 2$ tratando a la elipse como una curva de nivel de la función $f(x, y) = (x^2/4) + y^2$ (ejemplo 4).

(c) Las direcciones de cambio nulo en $(1, 1)$ son las direcciones ortogonales a ∇f :

$$\mathbf{n} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j} \quad \text{y} \quad -\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}.$$

Observe la figura 14.29.

Gradientes y tangentes a curvas de nivel

Si una función derivable $f(x, y)$ tiene un valor constante c a lo largo de una curva suave $\mathbf{r} = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j}$ (haciendo a la curva una curva de nivel de f), entonces $f(g(t), h(t)) = c$. Al derivar ambos lados de esta ecuación con respecto a t obtenemos las ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(g(t), h(t)) &= \frac{d}{dt} (c) \\ \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dg}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dh}{dt} &= 0 && \text{Regla de la cadena} \\ \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} \right)}_{\nabla f} \cdot \underbrace{\left(\frac{dg}{dt} \mathbf{i} + \frac{dh}{dt} \mathbf{j} \right)}_{\frac{d\mathbf{r}}{dt}} &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

La ecuación (5) indica que ∇f es normal al vector tangente $d\mathbf{r}/dt$, de manera que es normal a la curva.

En todos los puntos (x_0, y_0) del dominio de una función derivable $f(x, y)$, el gradiente de f es normal a la curva de nivel que pasa por (x_0, y_0) (figura 14.30).

La ecuación (5) valida nuestra observación de que las corrientes fluyen perpendicularmente a los contornos en los mapas topográficos (véase la figura 14.25). Puesto que el flujo del río alcanzará su destino de la forma más rápida, éste debe fluir en la dirección negativa del vector gradiente, por la propiedad 2 de la derivada direccional. La ecuación (5) nos dice que estas direcciones son perpendiculares a las curvas de nivel.

Esta observación también nos facilita obtener las ecuaciones de las rectas tangentes a las curvas de nivel. Son rectas normales a los gradientes. La recta que pasa por un punto $P_0(x_0, y_0)$ normal a un vector $\mathbf{N} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j}$ tiene la ecuación

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

(ejercicio 39). Si \mathbf{N} es el gradiente $(\nabla f)_{(x_0, y_0)} = f_x(x_0, y_0)\mathbf{i} + f_y(x_0, y_0)\mathbf{j}$, la ecuación de la recta tangente es

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0. \tag{6}$$

EJEMPLO 4 Obtenga una ecuación para la tangente a la elipse

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 2$$

(figura 14.31) en el punto $(-2, 1)$.

Solución La elipse es una curva de nivel de la función

$$f(x, y) = \frac{x^2}{4} + y^2.$$

El gradiente de f en $(-2, 1)$ es

$$\nabla f|_{(-2,1)} = \left(\frac{x}{2} \mathbf{i} + 2y \mathbf{j} \right)_{(-2,1)} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j}.$$

La tangente es la recta

$$\begin{aligned}(-1)(x + 2) + (2)(y - 1) &= 0 && \text{Ecuación (6)} \\ x - 2y &= -4.\end{aligned}$$

Si conocemos los gradientes de dos funciones f y g , automáticamente conocemos los gradientes de su suma, su resta, sus múltiplos constantes, su producto y su cociente. En el ejercicio 40 se le pedirá establecer las siguientes reglas. Observe que estas reglas tienen la misma forma que las reglas correspondientes de las derivadas de funciones de una variable.

Reglas algebraicas para gradientes

1. *Regla de la suma:* $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$
2. *Regla de la resta:* $\nabla(f - g) = \nabla f - \nabla g$
3. *Regla del múltiplo constante:* $\nabla(kf) = k\nabla f$ (cualquier número k)
4. *Regla del producto:* $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$
5. *Regla del cociente:* $\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$

EJEMPLO 5 A continuación ilustramos dos de las reglas

$$\begin{aligned}f(x, y) &= x - y & g(x, y) &= 3y \\ \nabla f &= \mathbf{i} - \mathbf{j} & \nabla g &= 3\mathbf{j}.\end{aligned}$$

Tenemos

1. $\nabla(f - g) = \nabla(x - 4y) = \mathbf{i} - 4\mathbf{j} = \nabla f - \nabla g$ Regla 2
2. $\begin{aligned}\nabla(fg) &= \nabla(3xy - 3y^2) = 3y\mathbf{i} + (3x - 6y)\mathbf{j} \\ &= 3y(\mathbf{i} - \mathbf{j}) + 3y\mathbf{j} + (3x - 6y)\mathbf{j} \\ &= 3y(\mathbf{i} - \mathbf{j}) + (3x - 3y)\mathbf{j} \\ &= 3y(\mathbf{i} - \mathbf{j}) + (x - y)3\mathbf{j} = g\nabla f + f\nabla g\end{aligned}$ Regla 4

Funciones de tres variables

Para una función derivable $f(x, y, z)$ y un vector unitario $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ en el espacio, tenemos

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

y

$$D_{\mathbf{u}}f = \nabla f \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial f}{\partial x}u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}u_2 + \frac{\partial f}{\partial z}u_3.$$

La derivada direccional puede escribirse otra vez en la forma

$$D_{\mathbf{u}}f = \nabla f \cdot \mathbf{u} = |\nabla f| |\mathbf{u}| \cos \theta = |\nabla f| \cos \theta,$$

de manera que las propiedades listadas anteriormente para funciones de dos variables se aplican también a las de tres variables. En cualquier punto dado, f crece más rápidamente en la dirección de ∇f y decrece más rápidamente en la dirección de $-\nabla f$. En cualquier dirección ortogonal a ∇f , la derivada se anula.

EJEMPLO 6

- (a) Calcule la derivada de $f(x, y, z) = x^3 - xy^2 - z$ en $P_0(1, 1, 0)$ en la dirección de $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$.
- (b) ¿En cuáles direcciones cambia f más rápidamente en P_0 , y cuáles son las tasas de cambio en estas direcciones?

Solución

- (a) La dirección de \mathbf{v} se obtiene dividiendo \mathbf{v} entre su longitud:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(2)^2 + (-3)^2 + (6)^2} = \sqrt{49} = 7$$

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{2}{7}\mathbf{i} - \frac{3}{7}\mathbf{j} + \frac{6}{7}\mathbf{k}.$$

Las derivadas parciales de f en P_0 son

$$f_x = (3x^2 - y^2)|_{(1,1,0)} = 2, \quad f_y = -2xy|_{(1,1,0)} = -2, \quad f_z = -1|_{(1,1,0)} = -1.$$

El gradiente de f en P_0 es

$$\nabla f|_{(1,1,0)} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

Por lo tanto, la derivada de f en P_0 en la dirección de \mathbf{v} es

$$\begin{aligned} (D_{\mathbf{u}}f)|_{(1,1,0)} &= \nabla f|_{(1,1,0)} \cdot \mathbf{u} = (2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}) \cdot \left(\frac{2}{7}\mathbf{i} - \frac{3}{7}\mathbf{j} + \frac{6}{7}\mathbf{k}\right) \\ &= \frac{4}{7} + \frac{6}{7} - \frac{6}{7} = \frac{4}{7}. \end{aligned}$$

- (b) La función crece más rápidamente en la dirección de $\nabla f = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ y decrece más rápidamente en la dirección $-\nabla f$. Las tasas de cambio son, respectivamente,

$$|\nabla f| = \sqrt{(2)^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{9} = 3 \quad \text{y} \quad -|\nabla f| = -3. \quad \blacksquare$$

Ejercicios 14.5

Cálculo de gradientes

En los ejercicios 1 a 6, determine el gradiente de la función en el punto dado. Luego dibuje el gradiente junto con la curva de nivel que pasa por el punto.

- $f(x, y) = y - x$, $(2, 1)$
- $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$, $(1, 1)$
- $g(x, y) = xy^2$, $(2, -1)$
- $g(x, y) = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}$, $(\sqrt{2}, 1)$
- $f(x, y) = \sqrt{2x + 3y}$, $(-1, 2)$
- $f(x, y) = \tan^{-1} \frac{\sqrt{x}}{y}$, $(4, -2)$

En los ejercicios 7 a 10, obtenga ∇f en el punto dado.

- $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z^2 + z \ln x$, $(1, 1, 1)$
- $f(x, y, z) = 2z^3 - 3(x^2 + y^2)z + \tan^{-1} xz$, $(1, 1, 1)$
- $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} + \ln(xyz)$, $(-1, 2, -2)$
- $f(x, y, z) = e^{x+y} \cos z + (y + 1) \sin^{-1} x$, $(0, 0, \pi/6)$

Cálculo de derivadas direccionales

En los ejercicios 11 a 18, encuentre la derivada de la función en P_0 en la dirección de \mathbf{u} .

- $f(x, y) = 2xy - 3y^2$, $P_0(5, 5)$, $\mathbf{u} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$
- $f(x, y) = 2x^2 + y^2$, $P_0(-1, 1)$, $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$
- $g(x, y) = \frac{x - y}{xy + 2}$, $P_0(1, -1)$, $\mathbf{u} = 12\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$
- $h(x, y) = \tan^{-1}(y/x) + \sqrt{3} \sin^{-1}(xy/2)$, $P_0(1, 1)$, $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$
- $f(x, y, z) = xy + yz + zx$, $P_0(1, -1, 2)$, $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$
- $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - 3z^2$, $P_0(1, 1, 1)$, $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$
- $g(x, y, z) = 3e^x \cos yz$, $P_0(0, 0, 0)$, $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$
- $h(x, y, z) = \cos xy + e^{yz} + \ln xz$, $P_0(1, 0, 1/2)$, $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

En los ejercicios 19 a 24 obtenga las direcciones en las cuales las funciones crecen y decrecen más rápidamente en P_0 . Luego obtenga las derivadas de las funciones en estas direcciones.

19. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$, $P_0(-1, 1)$
20. $f(x, y) = x^2y + e^{xy} \sin y$, $P_0(1, 0)$
21. $f(x, y, z) = (x/y) - yz$, $P_0(4, 1, 1)$
22. $g(x, y, z) = xe^y + z^2$, $P_0(1, \ln 2, 1/2)$
23. $f(x, y, z) = \ln xy + \ln yz + \ln xz$, $P_0(1, 1, 1)$
24. $h(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 - 1) + y + 6z$, $P_0(1, 1, 0)$

Rectas tangentes a curvas de nivel

En los ejercicios 25 a 28 grafique la curva $f(x, y) = c$ junto con ∇f y la recta tangente al punto dado. Luego escriba la ecuación para la recta tangente.

25. $x^2 + y^2 = 4$, $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$
26. $x^2 - y = 1$, $(\sqrt{2}, 1)$
27. $xy = -4$, $(2, -2)$
28. $x^2 - xy + y^2 = 7$, $(-1, 2)$

Teoría y ejemplos

29. Sea $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - y$. Obtenga las direcciones \mathbf{u} y los valores de $D_{\mathbf{u}}f(1, -1)$ para los cuales
 - a. $D_{\mathbf{u}}f(1, -1)$ es el más grande
 - b. $D_{\mathbf{u}}f(1, -1)$ es el más pequeño
 - c. $D_{\mathbf{u}}f(1, -1) = 0$
 - d. $D_{\mathbf{u}}f(1, -1) = 4$
 - e. $D_{\mathbf{u}}f(1, -1) = -3$
30. Sea $f(x, y) = \frac{(x-y)}{(x+y)}$. Encuentre la dirección \mathbf{u} y los valores de $D_{\mathbf{u}}f\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ para los cuales
 - a. $D_{\mathbf{u}}f\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ es el más grande
 - b. $D_{\mathbf{u}}f\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ es el más pequeño
 - c. $D_{\mathbf{u}}f\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) = 0$
 - d. $D_{\mathbf{u}}f\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) = -2$
 - e. $D_{\mathbf{u}}f\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) = 1$

31. **Derivada direccional nula** ¿En qué dirección se anula la derivada de $f(x, y) = xy + y^2$ en $P(3, 2)$?
32. **Derivada direccional nula** ¿En qué dirección se anula la derivada de $f(x, y) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$ en $P(1, 1)$?
33. ¿Existe una dirección \mathbf{u} en la que la tasa de cambio de $f(x, y) = x^2 - 3xy + 4y^2$ en $P(1, 2)$ sea igual a 14? Justifique su respuesta.
34. **Cambio de temperatura a lo largo de una circunferencia** ¿Existe una dirección \mathbf{u} en la que la tasa de cambio de la función temperatura $T(x, y, z) = 2xy - yz$ (temperatura en grados Celsius, distancia en ft) en $P(1, -1, 1)$ sea igual a $-3^\circ\text{C}/\text{ft}$? Justifique su respuesta.
35. La derivada de $f(x, y)$ en $P_0(1, 2)$ en la dirección de $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ es $2\sqrt{2}$ y en la dirección de $-2\mathbf{j}$ es -3 . ¿Cuál es la derivada de f en la dirección de $-\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$? Justifique su respuesta.
36. La derivada de $f(x, y, z)$ en el punto P alcanza su máximo en la dirección de $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$. En esta dirección, el valor de la derivada es $2\sqrt{3}$.
 - a. ¿Cómo es ∇f en P ? Justifique su respuesta.
 - b. ¿Cuál es la derivada de f en P en la dirección de $\mathbf{i} + \mathbf{j}$?
37. **Derivadas direccionales y componentes escalares** ¿Cuál es la relación entre la derivada de una función derivable $f(x, y, z)$ en un punto P_0 en la dirección de un vector unitario \mathbf{u} y el componente escalar de $(\nabla f)_{P_0}$ en la dirección de \mathbf{u} ? Justifique su respuesta.
38. **Derivadas direccionales y derivadas parciales** Suponiendo que las derivadas necesarias de $f(x, y, z)$ están definidas, ¿cuál es la relación de $D_{\mathbf{i}}f$, $D_{\mathbf{j}}f$ y $D_{\mathbf{k}}f$ con respecto a f_x , f_y y f_z ? Justifique su respuesta.
39. **Rectas en el plano xy** Demuestre que $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ es una ecuación para la recta en el plano xy que pasa por el punto (x_0, y_0) normal al vector $\mathbf{N} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j}$.
40. **Reglas algebraicas para los gradientes** Dada una constante k y los gradientes

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}, \quad \nabla g = \frac{\partial g}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial g}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial g}{\partial z}\mathbf{k},$$
 establezca las reglas algebraicas para gradientes.

14.6 Planos tangentes y diferenciales

En esta sección definiremos el plano tangente a un punto sobre una superficie regular en el espacio. Luego mostraremos cómo calcular la ecuación para el plano tangente a partir de las derivadas parciales de la función que define a la superficie. Esta idea es similar a la definición de la recta tangente en un punto sobre una curva en el plano de coordenadas para funciones de una sola variable (sección 3.1). Luego estudiaremos la diferencial total y la linealización de funciones de varias variables.

Planos tangentes y rectas normales

Si $\mathbf{r} = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j} + k(t)\mathbf{k}$ es una curva suave sobre una superficie de nivel $f(x, y, z) = c$ de una función derivable f , entonces $f(g(t), h(t), k(t)) = c$. Al derivar ambos lados de esta

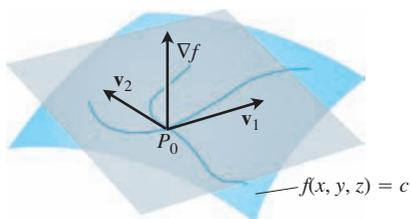


FIGURA 14.32 El gradiente ∇f es ortogonal al vector velocidad de todas las curvas suaves en la superficie que pasan por P_0 . Por lo tanto, los vectores velocidad en P_0 están en un plano común, al cual llamamos plano tangente en P_0 .

ecuación con respecto a t llegamos a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(g(t), h(t), k(t)) &= \frac{d}{dt}(c) \\ \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dg}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dh}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dk}{dt} &= 0 \quad \text{Regla de la cadena} \\ \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k} \right)}_{\nabla f} \cdot \underbrace{\left(\frac{dg}{dt} \mathbf{i} + \frac{dh}{dt} \mathbf{j} + \frac{dk}{dt} \mathbf{k} \right)}_{dx/dt} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

En todos los puntos a lo largo de la curva, ∇f es ortogonal al vector velocidad de la curva.

Ahora vamos a poner atención a las curvas que pasan por el punto P_0 (figura 14.32). Todos los vectores de velocidad en P_0 son ortogonales a ∇f en P_0 , de manera que todas las rectas tangentes a las curvas están en el plano que pasa por P_0 normal a ∇f . En seguida definiremos este plano.

DEFINICIONES El **plano tangente** en el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ en la superficie de nivel $f(x, y, z) = c$ de una función derivable f es el plano que pasa por P_0 normal a $\nabla f|_{P_0}$.

La **recta normal** a la superficie en P_0 es la recta que pasa por P_0 paralela a $\nabla f|_{P_0}$.

De la sección 12.5, el plano tangente y la recta normal tienen las siguientes ecuaciones:

Plano tangente a $f(x, y, z) = c$ en $P_0(x_0, y_0, z_0)$

$$f_x(P_0)(x - x_0) + f_y(P_0)(y - y_0) + f_z(P_0)(z - z_0) = 0 \quad (2)$$

Recta normal a $f(x, y, z) = c$ en $P_0(x_0, y_0, z_0)$

$$x = x_0 + f_x(P_0)t, \quad y = y_0 + f_y(P_0)t, \quad z = z_0 + f_z(P_0)t \quad (3)$$

EJEMPLO 1 Obtenga el plano tangente y la recta normal a la superficie

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z - 9 = 0 \quad \text{Un paraboloides circular}$$

en el punto $P_0(1, 2, 4)$.

Solución La superficie se muestra en la figura 14.33.

El plano tangente es el plano que pasa por P_0 perpendicular al gradiente de f en P_0 . El gradiente es

$$\nabla f|_{P_0} = (2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + \mathbf{k})_{(1,2,4)} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Por lo tanto, el plano tangente es el plano

$$2(x - 1) + 4(y - 2) + (z - 4) = 0, \quad \text{o} \quad 2x + 4y + z = 14.$$

La recta normal a la superficie en P_0 es

$$x = 1 + 2t, \quad y = 2 + 4t, \quad z = 4 + t. \quad \blacksquare$$

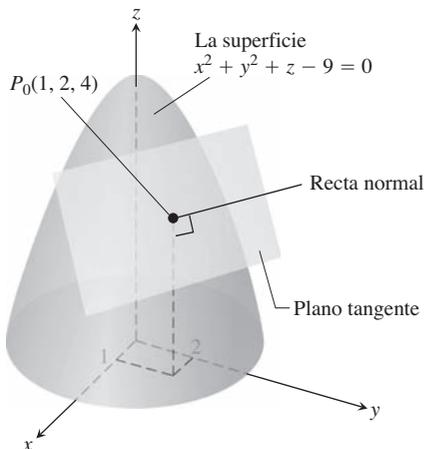


FIGURA 14.33 El plano tangente y la recta normal a la superficie en P_0 (ejemplo 1).

Para determinar una ecuación para el plano tangente a la superficie suave $z = f(x, y)$ en el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ donde $z_0 = f(x_0, y_0)$, primero observamos que la ecuación $z = f(x, y)$

es equivalente a $f(x, y) - z = 0$. Por lo tanto, la superficie $z = f(x, y)$ es la superficie de nivel cero de la función $F(x, y, z) = -(f(x, y) - z)$. Las derivadas parciales de F son

$$F_x = \frac{\partial}{\partial x}(f(x, y) - z) = f_x - 0 = f_x$$

$$F_y = \frac{\partial}{\partial y}(f(x, y) - z) = f_y - 0 = f_y$$

$$F_z = \frac{\partial}{\partial z}(f(x, y) - z) = 0 - 1 = -1.$$

La fórmula

$$F_x(P_0)(x - x_0) + F_y(P_0)(y - y_0) + F_z(P_0)(z - z_0) = 0$$

para el plano tangente a la superficie de nivel en P_0 se reduce por lo tanto a

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0.$$

Plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

El plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ de una función derivable f en el punto $P_0(x_0, y_0, z_0) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ es

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0. \quad (4)$$

EJEMPLO 2 Encuentre el plano tangente a la superficie $z = x \cos y - ye^x$ en el punto $(0, 0, 0)$.

Solución Calculamos las derivadas parciales de $f(x, y) = x \cos y - ye^x$ y usamos la ecuación (4):

$$f_x(0, 0) = (\cos y - ye^x)_{(0,0)} = 1 - 0 \cdot 1 = 1$$

$$f_y(0, 0) = (-x \operatorname{sen} y - e^x)_{(0,0)} = 0 - 1 = -1.$$

Por lo tanto, el plano tangente es

$$1 \cdot (x - 0) - 1 \cdot (y - 0) - (z - 0) = 0, \quad \text{Ecuación (4)}$$

o

$$x - y - z = 0. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 3 Las superficies

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2 = 0 \quad \text{Un cilindro}$$

y

$$g(x, y, z) = x + z - 4 = 0 \quad \text{Un plano}$$

se cortan formando una elipse E (figura 14.34). Obtenga ecuaciones paramétricas de la recta tangente a E en el punto $P_0(1, 1, 3)$.

Solución La recta tangente es ortogonal a ∇f y a ∇g en P_0 , y por lo tanto paralela a $\mathbf{v} = \nabla f - \nabla g$. Los componentes de \mathbf{v} y las coordenadas de P_0 nos proporcionan las ecuaciones para la recta. Tenemos

$$\nabla f|_{(1,1,3)} = (2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j})_{(1,1,3)} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$$

$$\nabla g|_{(1,1,3)} = (\mathbf{i} + \mathbf{k})_{(1,1,3)} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$$

$$\mathbf{v} = (2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) \times (\mathbf{i} + \mathbf{k}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}.$$

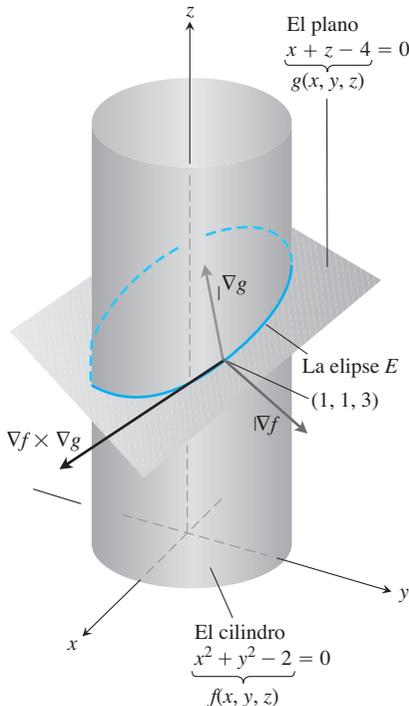


FIGURA 14.34 El cilindro y el plano se intersectan en una elipse E (ejemplo 3).

La recta tangente es

$$x = 1 + 2t, \quad y = 1 - 2t, \quad z = 3 - 2t. \quad \blacksquare$$

Estimación del cambio en una dirección específica

La derivada direccional desempeña el papel de una derivada ordinaria cuando queremos calcular el cambio del valor de una función f si nos movemos una pequeña distancia ds de un punto P_0 a otro punto cercano. Si f fuera una función de una variable, tendríamos

$$df = f'(P_0) ds. \quad \text{Derivada ordinaria} \times \text{incremento}$$

Para una función de dos o más variables, usamos la fórmula

$$df = (\nabla f|_{P_0} \cdot \mathbf{u}) ds, \quad \text{Derivada direccional} \times \text{incremento}$$

donde \mathbf{u} es la dirección del movimiento conforme nos alejamos de P_0 .

Estimación del cambio de f en la dirección de \mathbf{u}

Para calcular el cambio en el valor de una función derivable f cuando nos movemos una pequeña distancia ds desde un punto P_0 en una dirección particular \mathbf{u} , usamos la fórmula

$$df = \underbrace{(\nabla f|_{P_0} \cdot \mathbf{u})}_{\text{Derivada direccional}} \underbrace{ds}_{\text{Incremento en la distancia}}$$

EJEMPLO 4 Estime cuánto cambiará el valor de

$$f(x, y, z) = y \sen x + 2yz$$

si el punto $P(x, y, z)$ se mueve 0.1 unidades en línea recta de $P_0(0, 1, 0)$ a $P_1(2, 2, -2)$.

Solución Primero obtenemos la derivada de f en P_0 en la dirección del vector $\vec{P_0P_1} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$. La dirección de este vector es

$$\mathbf{u} = \frac{\vec{P_0P_1}}{|\vec{P_0P_1}|} = \frac{P_0\vec{P_1}}{3} = \frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{1}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k}.$$

El gradiente de f en P_0 es

$$\nabla f|_{(0,1,0)} = ((y \cos x)\mathbf{i} + (\sen x + 2z)\mathbf{j} + 2y\mathbf{k})_{(0,1,0)} = \mathbf{i} + 2\mathbf{k}.$$

Por lo tanto,

$$\nabla f|_{P_0} \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{i} + 2\mathbf{k}) \cdot \left(\frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{1}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k} \right) = \frac{2}{3} - \frac{4}{3} = -\frac{2}{3}.$$

El cambio df en f que resulta del movimiento $ds = 0.1$ unidades desde P_0 en la dirección de \mathbf{u} es aproximadamente

$$df = (\nabla f|_{P_0} \cdot \mathbf{u})(ds) = \left(-\frac{2}{3} \right)(0.1) \approx -0.067 \text{ unidades.} \quad \blacksquare$$

Cómo linealizar una función de dos variables

Las funciones de dos variables pueden ser complicadas y algunas veces necesitamos reemplazarlas por unas más simples que den la precisión requerida para aplicaciones específicas sin que sea difícil trabajar con ellas. Hacemos esto de manera similar a la forma en que hallamos sustituciones lineales para funciones de una sola variable (sección 3.9).

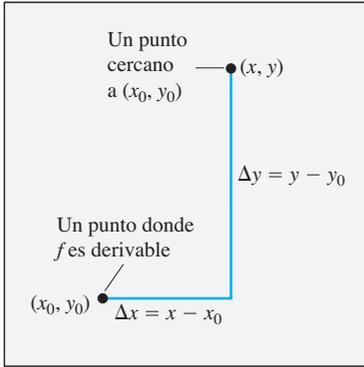


FIGURA 14.35 Si f es derivable en (x_0, y_0) , entonces el valor de f en cualquier punto cercano (x, y) es aproximadamente $f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y$.

Suponga que la función que deseamos reemplazar es $z = f(x, y)$ cerca de un punto (x_0, y_0) en el cual conocemos los valores de f , f_x y f_y , y en el que f es derivable. Si nos movemos de (x_0, y_0) a cualquier punto cercano (x, y) con incrementos de $\Delta x = x - x_0$ y $\Delta y = y - y_0$ (véase la figura 14.35), entonces la definición de diferenciabilidad de la sección 14.3 nos da el cambio

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \epsilon_1\Delta x + \epsilon_2\Delta y,$$

donde $\epsilon_1, \epsilon_2 \rightarrow 0$ cuando $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$. Si los incrementos Δx y Δy son pequeños, los productos $\epsilon_1\Delta x$ y $\epsilon_2\Delta y$ serán menores y tendremos

$$f(x, y) \approx \underbrace{f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)}_{L(x, y)}.$$

En otras palabras, cuanto mayor sea Δx y menor sea Δy , f tendrá aproximadamente el mismo valor de la función lineal L .

DEFINICIONES La **linealización** de una función $f(x, y)$ en un punto (x_0, y_0) donde f es derivable es la función

$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0). \quad (5)$$

La aproximación

$$f(x, y) \approx L(x, y)$$

es la **aproximación lineal estándar** de f en (x_0, y_0) .

De la ecuación (4), encontramos que el plano $z = L(x, y)$ es tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto (x_0, y_0) . Por lo tanto, la linealización de una función de dos variables es una aproximación del *plano* tangente, del mismo modo que la linealización de una función de una variable es una aproximación de la *recta* tangente. (Véase el ejercicio 63).

EJEMPLO 5 Encuentre la aproximación lineal de

$$f(x, y) = x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2 + 3$$

en el punto $(3, 2)$.

Solución Primero evaluamos f , f_x y f_y en el punto $(x_0, y_0) = (3, 2)$:

$$f(3, 2) = \left(x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2 + 3\right)_{(3,2)} = 8$$

$$f_x(3, 2) = \frac{\partial}{\partial x} \left(x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2 + 3\right)_{(3,2)} = (2x - y)_{(3,2)} = 4$$

$$f_y(3, 2) = \frac{\partial}{\partial y} \left(x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2 + 3\right)_{(3,2)} = (-x + y)_{(3,2)} = -1,$$

lo que da

$$\begin{aligned} L(x, y) &= f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \\ &= 8 + (4)(x - 3) + (-1)(y - 2) = 4x - y - 2. \end{aligned}$$

La aproximación lineal de f en $(3, 2)$ es $L(x, y) = 4x - y - 2$. ■

Cuando se aproxima a una función derivable $f(x, y)$ por su aproximación lineal $L(x, y)$ en (x_0, y_0) , una pregunta importante es qué tan precisa puede ser la aproximación.

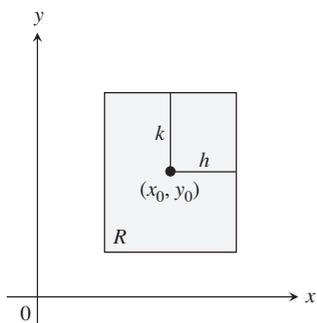


FIGURA 14.36 La región rectangular $R: |x - x_0| \leq h, |y - y_0| \leq k$ en el plano xy .

Si podemos determinar una cota superior común M para $|f_{xx}|, |f_{yy}|, |f_{xy}|$ en un rectángulo R con centro en (x_0, y_0) (figura 14.36), podemos entonces acotar el error E en todo R usando una fórmula simple (deducida en la sección 14.9). El **error** se define como $E(x, y) = f(x, y) - L(x, y)$.

El error en la aproximación lineal estándar

Si f tiene primeras y segundas derivadas parciales continuas en un conjunto abierto que contiene un rectángulo R con centro en (x_0, y_0) y si M es una cota superior para los valores de $|f_{xx}|, |f_{yy}|$ y $|f_{xy}|$ de R , entonces el error $E(x, y)$ en que se incurre al sustituir $f(x, y)$ en R para su linealización

$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

satisface la desigualdad

$$|E(x, y)| \leq \frac{1}{2} M(|x - x_0| + |y - y_0|)^2.$$

Para que $|E(x, y)|$ sea pequeño para una M determinada, sólo hacemos $|x - x_0|$ y $|y - y_0|$ más pequeños.

EJEMPLO 6 Obtenga una cota superior para el error en la aproximación $f(x, y) \approx L(x, y)$ del ejemplo 5 para el rectángulo

$$R: |x - 3| \leq 0.1, \quad |y - 2| \leq 0.1.$$

Expresé la cota superior como un porcentaje de $f(3, 2)$, que es el valor de f en el centro del rectángulo.

Solución Usamos la desigualdad

$$|E(x, y)| \leq \frac{1}{2} M(|x - x_0| + |y - y_0|)^2.$$

Para obtener un valor adecuado para M , calculamos f_{xx}, f_{xy} y f_{yy} , encontrando, después de una derivación ordinaria, que las tres derivadas son constantes, con valores

$$|f_{xx}| = |2| = 2, \quad |f_{xy}| = |-1| = 1, \quad |f_{yy}| = |1| = 1.$$

El valor máximo de éstos es 2, de manera que con toda seguridad podemos tomar M como 2. Como $(x_0, y_0) = (3, 2)$, sabemos que en R ,

$$|E(x, y)| \leq \frac{1}{2} (2)(|x - 3| + |y - 2|)^2 = (|x - 3| + |y - 2|)^2.$$

Finalmente, puesto que $|x - 3| \leq 0.1$ y $|y - 2| \leq 0.1$ en R , tenemos

$$|E(x, y)| \leq (0.1 + 0.1)^2 = 0.04.$$

Como porcentaje de $f(3, 2) = 8$, el error no es mayor que

$$\frac{0.04}{8} \times 100 = 0.5\%. \quad \blacksquare$$

Diferenciales

Recuerde de la sección 3.9 que para una función de una variable $y = f(x)$, definimos el cambio de f cuando x cambia de a a $a + \Delta x$ como

$$\Delta f = f(a + \Delta x) - f(a)$$

y la diferencial de f como

$$df = f'(a)\Delta x.$$

Consideremos ahora la diferencial de una función de dos variables.

Suponga que una función derivable $f(x, y)$ y sus derivadas parciales existen en un punto (x_0, y_0) . Si nos movemos a un punto cercano $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, el cambio en f es

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Un cálculo sencillo a partir de la definición de $L(x, y)$, usando la notación $x - x_0 = \Delta x$ y $y - y_0 = \Delta y$, indica que el cambio correspondiente en L es

$$\begin{aligned}\Delta L &= L(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - L(x_0, y_0) \\ &= f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y.\end{aligned}$$

Las **diferenciales** dx y dy son variables independientes, de manera que se les puede asignar valores arbitrarios. Con frecuencia tomamos $dx = \Delta x = x - x_0$ y $dy = \Delta y = y - y_0$. Tenemos entonces la siguiente definición para la diferencial o diferencial total de f .

DEFINICIÓN Si nos movemos de (x_0, y_0) a un punto cercano $(x_0 + dx, y_0 + dy)$, el cambio resultante

$$df = f_x(x_0, y_0) dx + f_y(x_0, y_0) dy$$

en la aproximación lineal de f se llama **diferencial total de f** .

EJEMPLO 7 Suponga que una lata cilíndrica se diseñó para tener un radio de 1 in y una altura de 5 in, pero que el radio y la altura tienen un error de $dr = +0.03$ y $dh = -0.1$. Calcule el cambio absoluto resultante en el volumen de la lata.

Solución Para estimar el cambio absoluto en $V = \pi r^2 h$, usamos

$$\Delta V \approx dV = V_r(r_0, h_0) dr + V_h(r_0, h_0) dh.$$

Con $V_r = 2\pi r h$ y $V_h = \pi r^2$, tenemos

$$\begin{aligned}dV &= 2\pi r_0 h_0 dr + \pi r_0^2 dh = 2\pi(1)(5)(0.03) + \pi(1)^2(-0.1) \\ &= 0.3\pi - 0.1\pi = 0.2\pi \approx 0.63 \text{ in}^3\end{aligned}$$

EJEMPLO 8 Suponga que su compañía fabrica tanques cilíndricos circulares rectos para almacenar melaza que miden 25 ft de altura y 5 ft de radio. ¿Qué tan sensibles son los volúmenes de los tanques a pequeñas variaciones en la altura y el radio?

Solución Con $V = \pi r^2 h$, la diferencial total da la aproximación del cambio en el volumen como

$$\begin{aligned}dV &= V_r(5, 25) dr + V_h(5, 25) dh \\ &= (2\pi r h)_{(5,25)} dr + (\pi r^2)_{(5,25)} dh \\ &= 250\pi dr + 25\pi dh.\end{aligned}$$

Por lo tanto, el cambio de una unidad en r modificará a V alrededor de 250π unidades. El cambio de una unidad en h cambia V alrededor de 25π unidades. El volumen del tanque es 10 veces más sensible a un cambio pequeño en r que a un pequeño cambio de igual tamaño en h . Como ingeniero de control de calidad, encargado de garantizar que los tanques tengan el volumen correcto, usted pondría especial atención a sus radios.

En contraste, si los valores de r y h se invierten para que $r = 25$ y $h = 5$, entonces la diferencial total en V es

$$dV = (2\pi r h)_{(25,5)} dr + (\pi r^2)_{(25,5)} dh = 250\pi dr + 625\pi dh.$$

Ahora, el volumen es más sensible a cambios en h que a cambios en r (figura 14.37).

La regla general es que las funciones son más sensibles a cambios pequeños en las variables que generan las derivadas parciales más grandes.

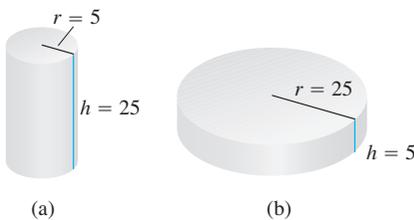


FIGURA 14.37 El volumen del cilindro (a) es más sensible a un pequeño cambio en r que a un cambio igual de pequeño en h . El volumen del cilindro (b) es más sensible a pequeños cambios de h que a los cambios pequeños en r (ejemplo 8).

EJEMPLO 9 El volumen $V = \pi r^2 h$ de un cilindro circular recto va a calcularse a partir de los valores de r y h . Suponga que r se mide con un error no mayor del 2% y h con un error no mayor del 0.5 por ciento. Calcule el error porcentual posible en el cálculo de V .

Solución Hemos dicho que

$$\left| \frac{dr}{r} \times 100 \right| \leq 2 \quad \text{y} \quad \left| \frac{dh}{h} \times 100 \right| \leq 0.5.$$

Puesto que

$$\frac{dV}{V} = \frac{2\pi r h dr + \pi r^2 dh}{\pi r^2 h} = \frac{2 dr}{r} + \frac{dh}{h},$$

tenemos

$$\begin{aligned} \left| \frac{dV}{V} \right| &= \left| 2 \frac{dr}{r} + \frac{dh}{h} \right| \\ &\leq \left| 2 \frac{dr}{r} \right| + \left| \frac{dh}{h} \right| \\ &\leq 2(0.02) + 0.005 = 0.045. \end{aligned}$$

Estimamos que el error en el cálculo del volumen será, cuando mucho, del 4.5 por ciento. ■

Funciones de más de dos variables

Resultados análogos se observan para funciones derivables de más de dos variables.

1. La **aproximación lineal** de $f(x, y, z)$ en un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ es

$$L(x, y, z) = f(P_0) + f_x(P_0)(x - x_0) + f_y(P_0)(y - y_0) + f_z(P_0)(z - z_0).$$

2. Suponga que R es un sólido rectangular cerrado centrado en P_0 y que se encuentra en una región abierta en la cual las segundas derivadas parciales de f son continuas. Suponga también que $|f_{xx}|, |f_{yy}|, |f_{zz}|, |f_{xy}|, |f_{xz}|$ y $|f_{yz}|$ son menores o iguales a M en R . Entonces, el **error** $E(x, y, z) = f(x, y, z) - L(x, y, z)$ en la aproximación de f por L está acotado en R por la desigualdad

$$|E| \leq \frac{1}{2} M (|x - x_0| + |y - y_0| + |z - z_0|)^2.$$

3. Si las segundas derivadas parciales de f son continuas y si x, y y z cambian desde x_0, y_0, z_0 en pequeñas cantidades dx, dy y dz , la **diferencial total**

$$df = f_x(P_0) dx + f_y(P_0) dy + f_z(P_0) dz$$

nos da una buena aproximación del cambio resultante en f .

EJEMPLO 10 Obtenga la aproximación lineal $L(x, y, z)$ de

$$f(x, y, z) = x^2 - xy + 3 \operatorname{sen} z$$

en el punto $(x_0, y_0, z_0) = (2, 1, 0)$. Obtenga una cota superior para el error en que se incurre al sustituir f por L en el rectángulo

$$R: |x - 2| \leq 0.01, \quad |y - 1| \leq 0.02, \quad |z| \leq 0.01.$$

Solución Una evaluación rutinaria implica

$$f(2, 1, 0) = 2, \quad f_x(2, 1, 0) = 3, \quad f_y(2, 1, 0) = -2, \quad f_z(2, 1, 0) = 3.$$

Por lo tanto,

$$L(x, y, z) = 2 + 3(x - 2) + (-2)(y - 1) + 3(z - 0) = 3x - 2y + 3z - 2.$$

Puesto que

$$f_{xx} = 2, \quad f_{yy} = 0, \quad f_{zz} = -3 \operatorname{sen} z, \quad f_{xy} = -1, \quad f_{xz} = 0, \quad f_{yz} = 0,$$

y $|-3 \operatorname{sen} z| \leq 3 \operatorname{sen} 0.01 \approx .03$, podemos tomar $M = 2$ como el límite de las segundas parciales. Por consiguiente, el error en que se incurre al sustituir f por L en R satisface

$$|E| \leq \frac{1}{2}(2)(0.01 + 0.02 + 0.01)^2 = 0.0016. \quad \blacksquare$$

Ejercicios 14.6

Planos tangentes y rectas normales a superficies

En los ejercicios 1 a 8, encuentre las ecuaciones para

- (a) el plano tangente y
 (b) la recta normal en el punto P_0 en la superficie dada.
- $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, $P_0(1, 1, 1)$
 - $x^2 + y^2 - z^2 = 18$, $P_0(3, 5, -4)$
 - $2z - x^2 = 0$, $P_0(2, 0, 2)$
 - $x^2 + 2xy - y^2 + z^2 = 7$, $P_0(1, -1, 3)$
 - $\cos \pi x - x^2 y + e^{xz} + yz = 4$, $P_0(0, 1, 2)$
 - $x^2 - xy - y^2 - z = 0$, $P_0(1, 1, -1)$
 - $x + y + z = 1$, $P_0(0, 1, 0)$
 - $x^2 + y^2 - 2xy - x + 3y - z = -4$, $P_0(2, -3, 18)$

En los ejercicios 9 a 12, obtenga una ecuación para el plano tangente a la superficie dada en el punto especificado.

9. $z = \ln(x^2 + y^2)$, $(1, 0, 0)$ 10. $z = e^{-(x^2+y^2)}$, $(0, 0, 1)$
 11. $z = \sqrt{y - x}$, $(1, 2, 1)$ 12. $z = 4x^2 + y^2$, $(1, 1, 5)$

Rectas tangentes a curvas en el espacio

En los ejercicios 13 a 18, encuentre ecuaciones paramétricas para la recta tangente a la curva de intersección de las superficies en el punto dado.

- Superficies: $x + y^2 + 2z = 4$, $x = 1$
Punto: $(1, 1, 1)$
- Superficies: $xyz = 1$, $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$
Punto: $(1, 1, 1)$
- Superficies: $x^2 + 2y + 2z = 4$, $y = 1$
Punto: $(1, 1, 1/2)$
- Superficies: $x + y^2 + z = 2$, $y = 1$
Punto: $(1/2, 1, 1/2)$
- Superficies: $x^3 + 3x^2y^2 + y^3 + 4xy - z^2 = 0$,
 $x^2 + y^2 + z^2 = 11$
Punto: $(1, 1, 3)$
- Superficies: $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 - z = 0$
Punto: $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 4)$

Estimación del cambio

19. ¿Alrededor de cuánto cambiará

$$f(x, y, z) = \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

si el punto $P(x, y, z)$ se mueve desde $P_0(3, 4, 12)$ una distancia $ds = 0.1$ unidades en la dirección de $3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$?

20. ¿Alrededor de cuánto cambiará

$$f(x, y, z) = e^x \cos yz$$

si el punto $P(x, y, z)$ se mueve desde el origen a una distancia de $ds = 0.1$ unidades en la dirección de $2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$?

21. ¿Alrededor de cuánto cambiará

$$g(x, y, z) = x + x \cos z - y \operatorname{sen} z + y$$

si el punto $P(x, y, z)$ se mueve desde $P_0(2, -1, 0)$ una distancia de $ds = 0.2$ unidades hacia el punto $P_1(0, 1, 2)$?

22. ¿Alrededor de cuánto cambiará

$$h(x, y, z) = \cos(\pi xy) + xz^2$$

si el punto $P(x, y, z)$ se mueve desde $P_0(-1, -1, -1)$ una distancia de $ds = 0.1$ unidades hacia el origen?

23. Cambio de temperatura a lo largo de una circunferencia

Suponga que la temperatura Celsius en el punto (x, y) en el plano xy es $T(x, y) = x \operatorname{sen} 2y$ y que la distancia en el plano xy se mide en metros. Una partícula se mueve *en sentido contrario a las manecillas del reloj* alrededor de un círculo con radio de 1 m y centro en el origen a la razón constante de 2 m/seg.

- ¿Con qué rapidez cambia la temperatura experimentada por la partícula en grados Celsius por metro cuando la partícula está en el punto $P(1/2, \sqrt{3}/2)$?
 - ¿Con qué rapidez cambia la temperatura experimentada por la partícula en grados Celsius por segundo en P ?
24. Cambio de temperatura a lo largo de una curva en el espacio
 La temperatura Celsius en una región en el espacio está dada por $T(x, y, z) = 2x^2 - xyz$. Una partícula se mueve en esta región y su posición en el tiempo t está dada por $x = 2t^2$, $y = 3t$, $z = -t^2$, donde el tiempo se mide en segundos y la distancia en metros.
- ¿Con qué rapidez cambia la temperatura experimentada por la partícula en grados Celsius por metro cuando la partícula está en el punto $P(8, 6, -4)$?
 - ¿Con qué rapidez cambia temperatura experimentada por la partícula en grados Celsius por segundo en P ?

Determinación de la aproximación lineal

En los ejercicios 25 a 30, obtenga la aproximación lineal $L(x, y)$ de la función en cada punto.

- 25. $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$ en a. (0, 0), b. (1, 1)
- 26. $f(x, y) = (x + y + 2)^2$ en a. (0, 0), b. (1, 2)
- 27. $f(x, y) = 3x - 4y + 5$ en a. (0, 0), b. (1, 1)
- 28. $f(x, y) = x^3y^4$ en a. (1, 1), b. (0, 0)
- 29. $f(x, y) = e^x \cos y$ en a. (0, 0), b. (0, $\pi/2$)
- 30. $f(x, y) = e^{2y-x}$ en a. (0, 0), b. (1, 2)

31. Factor de sensación térmica La sensación térmica es una medida de la temperatura aparente que se percibe sobre la piel expuesta; es una función de la temperatura del aire y la rapidez del viento. La fórmula precisa, actualizada por el Servicio Meteorológico Nacional en 2001 y con base en la teoría moderna de transferencia de calor, un modelo que toma en cuenta la resistencia del tejido de la piel, es

$$W = W(v, T) = 35.74 + 0.6215 T - 35.75 v^{0.16} + 0.4275 T \cdot v^{0.16},$$

donde T es la temperatura del aire en $^{\circ}\text{F}$ y v es la rapidez del viento en mph. Se presenta un cuadro parcial de sensación térmica.

| | | $T(^{\circ}\text{F})$ | | | | | | | | |
|--------------|----|-----------------------|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| | | 30 | 25 | 20 | 15 | 10 | 5 | 0 | -5 | -10 |
| v (mph) | 5 | 25 | 19 | 13 | 7 | 1 | -5 | -11 | -16 | -22 |
| | 10 | 21 | 15 | 9 | 3 | -4 | -10 | -16 | -22 | -28 |
| | 15 | 19 | 13 | 6 | 0 | -7 | -13 | -19 | -26 | -32 |
| | 20 | 17 | 11 | 4 | -2 | -9 | -15 | -22 | -29 | -35 |
| | 25 | 16 | 9 | 3 | -4 | -11 | -17 | -24 | -31 | -37 |
| | 30 | 15 | 8 | 1 | -5 | -12 | -19 | -26 | -33 | -39 |
| 35 | 14 | 7 | 0 | -7 | -14 | -21 | -27 | -34 | -41 | |

- a. Use la tabla para obtener $W(20, 25)$, $W(30, -10)$ y $W(15, 15)$.
 - b. Use la fórmula para encontrar $W(10, -40)$, $W(50, -40)$ y $W(60, 30)$.
 - c. Obtenga la aproximación lineal $L(v, T)$ de la función $W(v, T)$ en el punto (25, 5).
 - d. Use $L(v, T)$ del inciso (c) para calcular los siguientes valores de sensación térmica.
 - i) $W(24, 6)$ ii) $W(27, 2)$
 - iii) $W(5, -10)$ (Explique por qué este valor es muy diferente del valor que se encuentra en la tabla).
- 32.** Obtenga la aproximación lineal de $L(v, T)$ de la función $W(v, T)$ del ejercicio 31 en el punto (50, -20). Úsela para estimar los siguientes valores de sensación térmica.
- a. $W(49, -22)$ b. $W(53, -19)$ c. $W(60, -30)$

Cotas para error en las aproximaciones lineales

En los ejercicios 33 a 38, obtenga la aproximación lineal $L(x, y)$ de la función $f(x, y)$ en P_0 . Luego determine una cota superior para la magnitud $|E|$ del error en la aproximación $f(x, y) \approx L(x, y)$ en el rectángulo R .

- 33. $f(x, y) = x^2 - 3xy + 5$ en $P_0(2, 1)$,
 $R: |x - 2| \leq 0.1, |y - 1| \leq 0.1$

- 34. $f(x, y) = (1/2)x^2 + xy + (1/4)y^2 + 3x - 3y + 4$ en $P_0(2, 2)$,
 $R: |x - 2| \leq 0.1, |y - 2| \leq 0.1$
- 35. $f(x, y) = 1 + y + x \cos y$ en $P_0(0, 0)$,
 $R: |x| \leq 0.2, |y| \leq 0.2$
 (Use $|\cos y| \leq 1$ y $|\sin y| \leq 1$ al estimar E .)
- 36. $f(x, y) = xy^2 + y \cos(x - 1)$ en $P_0(1, 2)$,
 $R: |x - 1| \leq 0.1, |y - 2| \leq 0.1$
- 37. $f(x, y) = e^x \cos y$ en $P_0(0, 0)$,
 $R: |x| \leq 0.1, |y| \leq 0.1$
 (Use $e^x \leq 1.11$ y $|\cos y| \leq 1$ al estimar E .)
- 38. $f(x, y) = \ln x + \ln y$ en $P_0(1, 1)$,
 $R: |x - 1| \leq 0.2, |y - 1| \leq 0.2$

Aproximación lineal de tres variables

Obtenga las aproximaciones lineales $L(x, y, z)$ de las funciones en los ejercicios 39 a 44 en los puntos dados.

- 39. $f(x, y, z) = xy + yz + xz$ en
 a. (1, 1, 1) b. (1, 0, 0) c. (0, 0, 0)
- 40. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ en
 a. (1, 1, 1) b. (0, 1, 0) c. (1, 0, 0)
- 41. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ en
 a. (1, 0, 0) b. (1, 1, 0) c. (1, 2, 2)
- 42. $f(x, y, z) = (\sin xy)/z$ en
 a. ($\pi/2, 1, 1$) b. (2, 0, 1)
- 43. $f(x, y, z) = e^x + \cos(y + z)$ en
 a. (0, 0, 0) b. $(0, \frac{\pi}{2}, 0)$ c. $(0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$
- 44. $f(x, y, z) = \tan^{-1}(xyz)$ en
 a. (1, 0, 0) b. (1, 1, 0) c. (1, 1, 1)

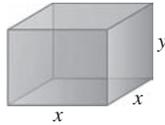
En los ejercicios 45 a 48, determine la aproximación lineal $L(x, y, z)$ de la función $f(x, y, z)$ en P_0 . Luego encuentre una cota superior para la magnitud del error E en la aproximación $f(x, y, z) - L(x, y, z)$ en la región R .

- 45. $f(x, y, z) = xz - 3yz + 2$ en $P_0(1, 1, 2)$,
 $R: |x - 1| \leq 0.01, |y - 1| \leq 0.01, |z - 2| \leq 0.02$
- 46. $f(x, y, z) = x^2 + xy + yz + (1/4)z^2$ en $P_0(1, 1, 2)$,
 $R: |x - 1| \leq 0.01, |y - 1| \leq 0.01, |z - 2| \leq 0.08$
- 47. $f(x, y, z) = xy + 2yz - 3xz$ en $P_0(1, 1, 0)$,
 $R: |x - 1| \leq 0.01, |y - 1| \leq 0.01, |z| \leq 0.01$
- 48. $f(x, y, z) = \sqrt{2} \cos x \sin(y + z)$ en $P_0(0, 0, \pi/4)$,
 $R: |x| \leq 0.01, |y| \leq 0.01, |z - \pi/4| \leq 0.01$

Estimación del error; sensibilidad al cambio

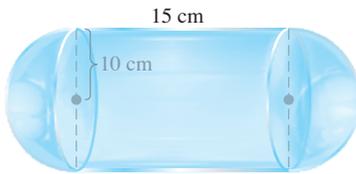
- 49. **Estimación del error máximo** Estimación del error máximo
- 50. **Cálculo del volumen de un cilindro** ¿Con qué precisión puede calcularse $V = \pi r^2 h$ a partir de mediciones de r y h que tienen un error del 1%?

51. Considere una caja rectangular cerrada con base cuadrada como la que se ilustra en la siguiente figura. Si x se mide con un error máximo del 2% y y se mide con un error máximo del 3%, use una diferencial para calcular el porcentaje de error correspondiente en el cálculo de



- la superficie de la caja.
- el volumen de la caja.

52. Considere un contenedor cerrado con forma de un cilindro de radio de 10 cm y 15 cm de altura con una semiesfera en cada extremo, como se muestra en la siguiente figura.



El contenedor está cubierto con una capa de hielo de 1/2 cm de grueso. Use una diferencial para calcular el volumen total de hielo. (Sugerencia: Suponga que r es el radio con $dr = 1/2$ y h es la altura con $dh = 0$).

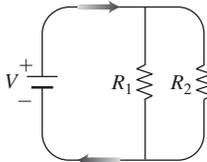
53. **Error porcentual máximo** Si $r = 5.0$ cm y $h = 12.0$ cm con una precisión milimétrica, ¿cuál será el error porcentual máximo esperado al calcular $V = \pi r^2 h$?
54. **Variación en la resistencia eléctrica** La resistencia eléctrica producida por alambres de R_1 y R_2 ohms en paralelo (véase la siguiente figura) se puede calcular mediante la fórmula

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

- a. Demuestre que

$$dR = \left(\frac{R}{R_1}\right)^2 dR_1 + \left(\frac{R}{R_2}\right)^2 dR_2$$

- b. Usted ha diseñado un circuito de dos resistencias como el que se ilustra en la figura, que tiene una resistencia $R_1 = 100$ ohms y $R_2 = 400$ ohms, pero siempre hay alguna variación en la fabricación y es probable que las resistencias recibidas por su empresa no tengan los valores exactos. ¿El valor de R será más sensible a la variación de R_1 o a la variación de R_2 ? Justifique su respuesta.

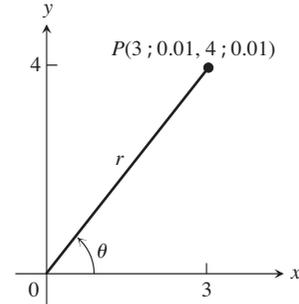


- c. En otro circuito como el que se representa, usted planea cambiar R_1 de 20 a 20.1 ohms y R_2 de 25 a 24.9 ohms. ¿Alrededor de qué porcentaje cambiará R ?

55. Usted planea calcular el área de un rectángulo grande y delgado, a partir de mediciones de su largo y ancho. ¿Cuál dimensión debe usted medir más cuidadosamente? Justifique su respuesta.

56. a. ¿Alrededor del punto $(1, 0)$, es más sensible $f(x, y) = x^2(y + 1)$ a los cambios de x o a los cambios de y ? Justifique su respuesta.
 b. ¿Cuál razón entre dx a dy hará a $df = 0$ en el punto $(1, 0)$?

57. **Acarreo del error en los cambios de coordenadas**



- a. Si $x = 3 \pm 0.01$ y $y = 4 \pm 0.01$, como se muestra, ¿aproximadamente con qué precisión puede calcular las coordenadas polares r y θ del punto $P(x, y)$ a partir de las fórmulas $r^2 = x^2 + y^2$ y $\theta = \tan^{-1}(y/x)$? Exprese su cálculo como cambios porcentuales de los valores que r y θ tienen en el punto $(x_0, y_0) = (3, 4)$.
 b. En el punto $(x_0, y_0) = (3, 4)$, ¿son más sensibles los valores de r y θ a los cambios en x o a los cambios en y ? Justifique su respuesta.

58. **Diseño de una lata de bebida gaseosa** Una lata normal de bebida gaseosa de 12 onzas líquidas es esencialmente un cilindro de radio $r = 1$ in y una altura $h = 5$ in.

- a. Con estas dimensiones, ¿qué tan sensible es el volumen de la lata a un pequeño cambio en el radio en oposición a un cambio pequeño en la altura?
 b. ¿Podría diseñar una lata de bebida gaseosa que *parezca* contener más soda, pero que de hecho contenga las mismas 12 onzas líquidas? ¿Cuáles serían sus dimensiones? (Hay más de una respuesta correcta).

59. **Valor de un determinante 2×2** Si $|a|$ es mucho mayor que $|b|$, $|c|$ y $|d|$, ¿para cuál de las variables a, b, c y d es más sensible el valor del determinante?

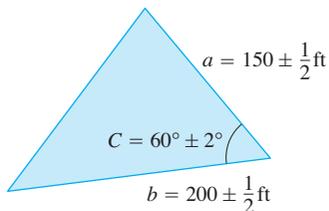
$$f(a, b, c, d) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Justifique su respuesta.

60. **Estimación del error máximo** Suponga que $u = xe^y + y \sin z$ y que x, y y z se pueden medir con errores máximos posibles de ± 0.2 , ± 0.6 y $\pm \pi/180$, respectivamente. Estime el error máximo posible en el cálculo de u a partir de los valores medidos de $x = 2, y = \ln 3, z = \pi/2$.

61. **La fórmula de Wilson para el tamaño de un lote** Esta fórmula de economía para determinar el tamaño de un lote de productos dice que la cantidad más económica Q de bienes (radios, zapatos, escobas, etcétera) para el pedido de una tienda está dada por la fórmula $Q = \sqrt{2KM/h}$, donde K es el costo de elaboración del pedido, M es el número de artículos vendidos por semana, y h es el costo de almacenamiento semanal para cada artículo (costo de espacio, instalaciones, seguridad, etcétera). ¿A cuál de las variables $K, M, y h$ es más sensible Q cerca del punto $(K_0, M_0, h_0) = (2, 20, 0.05)$? Justifique su respuesta.

62. Medición de un campo triangular El área de un triángulo es $(1/2)ab \sin C$, donde a y b son las longitudes de dos lados del triángulo, y C es la medida del ángulo entre ellos. Al medir un terreno triangular, las medidas obtenidas para a , b y C son 150 ft, 200 ft y 60° , respectivamente. ¿Aproximadamente cuál sería el error en el cálculo del área si los valores de a y b tienen un error de medio ft cada uno y el valor de C tiene un error de 2° ? Observe la figura anexa. Recuerde usar radianes.



Teoría y ejemplos

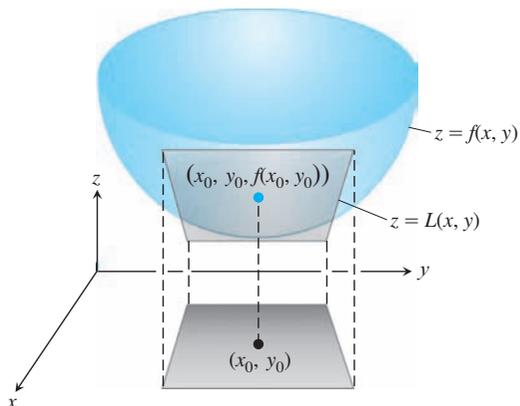
63. La aproximación lineal de $f(x, y)$ es una aproximación con un plano tangente Demuestre que el plano tangente en el punto $P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ en la superficie $z = f(x, y)$ definida mediante una función derivable f es el plano

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - f(x_0, y_0)) = 0$$

o bien,

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Por lo tanto, el plano tangente en P_0 es la gráfica de la linealización de f en P_0 (véase la figura).



64. Cambio a lo largo de la involuta de un círculo Obtenga la derivada de $f(x, y) = x^2 + y^2$ en la dirección del vector unitario tangente a la curva

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t + t \sin t)\mathbf{i} + (\sin t - t \cos t)\mathbf{j}, \quad t > 0.$$

65. Cambio a lo largo de una hélice Obtenga la derivada de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ en la dirección del vector unitario tangente a la hélice

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

en los puntos donde $t = -\pi/4, 0$ y $\pi/4$. La función f nos da el cuadrado de la distancia del punto $P(x, y, z)$ de la hélice al origen. Las derivadas calculadas aquí nos dan las tasas de cambio del cuadrado de la distancia con respecto a t cuando P pasa por los puntos donde $t = -\pi/4, 0$ y $\pi/4$.

66. Curvas normales Una curva suave es *normal* a una superficie $f(x, y, z) = c$ en un punto de intersección si el vector velocidad de la curva es un múltiplo escalar no nulo de ∇f .

Demuestre que la curva

$$\mathbf{r}(t) = \sqrt{t}\mathbf{i} + \sqrt{t}\mathbf{j} - \frac{1}{4}(t + 3)\mathbf{k}$$

es normal a la superficie $x^2 + y^2 - z = 3$ cuando $t = 1$.

67. Curvas tangentes Una curva regular es *tangente* a la superficie en un punto de intersección si el vector velocidad es ortogonal a ∇f en ese punto.

Demuestre que la curva

$$\mathbf{r}(t) = \sqrt{t}\mathbf{i} + \sqrt{t}\mathbf{j} + (2t - 1)\mathbf{k}$$

es tangente a la superficie $x^2 + y^2 - z = 1$ cuando $t = 1$.

14.7 | Valores extremos y puntos de silla

Las funciones continuas de dos variables asumen valores extremos en dominios cerrados y acotados (véase las figuras 14.38 y 14.39). En esta sección veremos que podemos reducir la búsqueda de estos valores extremos examinando las primeras derivadas parciales de las funciones. Una función de dos variables puede asumir valores extremos sólo en los puntos frontera del dominio o en los puntos interiores del dominio donde las primeras derivadas parciales se anulan, o donde una o ambas derivadas no existen. Sin embargo, la anulación de las derivadas en un punto interior (a, b) no siempre señala la presencia de un valor extremo. La superficie, que es la gráfica de la función, podría tener la forma de una silla de montar exactamente arriba de (a, b) y cruzar su plano tangente en ese punto.

BIOGRAFÍA HISTÓRICA

Siméon-Denis Poisson
(1781–1840)

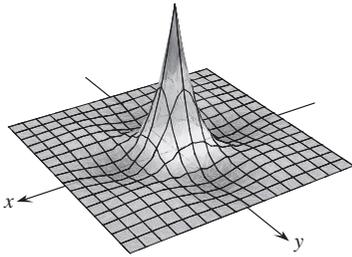


FIGURA 14.38 La función $z = (\cos x)(\cos y)e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$ tiene un valor máximo de 1 y un valor mínimo de alrededor de -0.067 sobre la región cuadrada $|x| \leq 3\pi/2, |y| \leq 3\pi/2$.

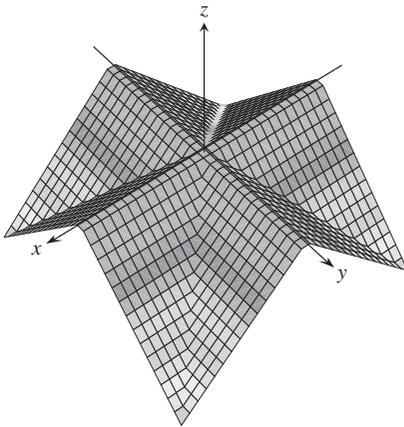


FIGURA 14.39 La “superficie del techo” $z = \frac{1}{2} (||x| - |y|| - |x| - |y|)$ tiene un valor máximo de 0 y un valor mínimo de $-a$ sobre la región cuadrada $|x| \leq a, |y| \leq a$.

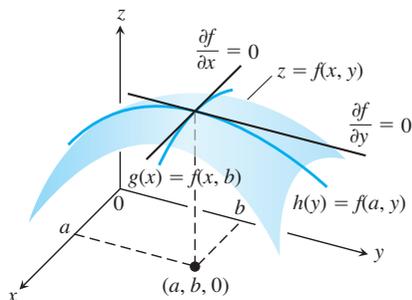


FIGURA 14.41 Si un máximo local de f ocurre en $x = a, y = b$, entonces, las primeras derivadas parciales $f_x(a, b)$ y $f_y(a, b)$ se anulan.

Criterios de las derivadas para los valores extremos locales

Para obtener los valores extremos locales de una función de una sola variable, buscamos los puntos donde la gráfica tiene una recta tangente horizontal. En esos puntos, buscamos puntos máximos locales, mínimos locales y los puntos de inflexión. Para una función $f(x, y)$ de dos variables, buscamos los puntos donde la superficie $z = f(x, y)$ tiene un *plano* tangente horizontal. En tales puntos, buscamos los máximos locales, los mínimos locales y los puntos de silla. Empezaremos por definir los puntos máximos y los puntos mínimos.

DEFINICIONES Sea que $f(x, y)$ esté definida en una región R que contiene el punto (a, b) . Entonces,

1. $f(a, b)$ es un valor **máximo local** de f si $f(a, b) \geq f(x, y)$ para todos los puntos (x, y) del dominio en un disco abierto con centro en (a, b) .
2. $f(a, b)$ es un valor **mínimo local** de f si $f(a, b) \leq f(x, y)$ para todos los puntos (x, y) del dominio en un disco abierto con centro en (a, b) .

Los máximos locales corresponden a los picos de montaña en la superficie $z = f(x, y)$ y los mínimos locales corresponden al fondo de los valles (figura 14.40). En esos puntos, los planos tangentes, cuando existen, son horizontales. Los extremos locales también se conocen como puntos **extremos relativos**.

Como en las funciones de una sola variable, la clave para identificar los puntos extremos locales es un criterio de la primera derivada.

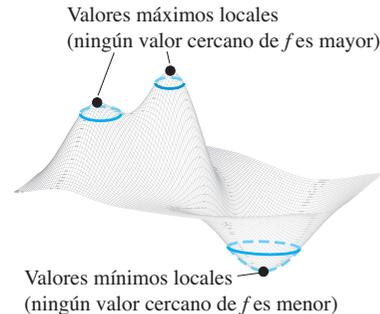


FIGURA 14.40 Un máximo local es un pico de montaña y un mínimo local es el fondo de un valle.

TEOREMA 10: Criterio de la primera derivada para valores extremos locales

Si $f(x, y)$ tiene un valor máximo o mínimo local en un punto interior (a, b) de su dominio, y si las primeras derivadas parciales existen allí, entonces $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$.

Comprobación Si f tiene extremo local en (a, b) , entonces la función $g(x) = f(x, b)$ tiene un extremo local en $x = a$ (figura 14.41). Por lo tanto, $g'(a) = 0$ (capítulo 4, teorema 2). Ahora $g'(a) = f_x(a, b)$, entonces $f_x(a, b) = 0$. Un argumento similar con la función $h(y) = f(a, y)$ demuestra que $f_y(a, b) = 0$. ■

Si sustituimos los valores $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$ en la ecuación

$$f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) - (z - f(a, b)) = 0$$

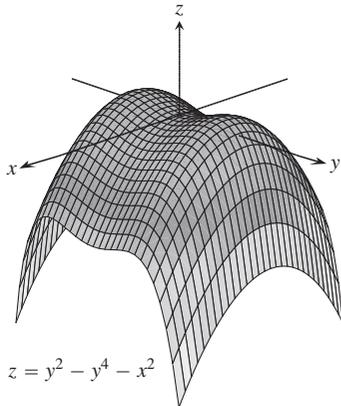
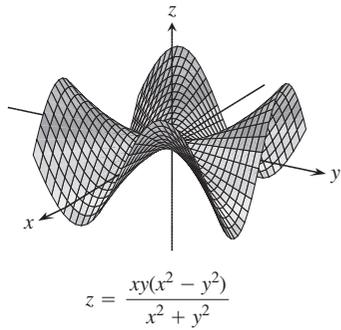


FIGURA 14.42 Puntos de silla en el origen.

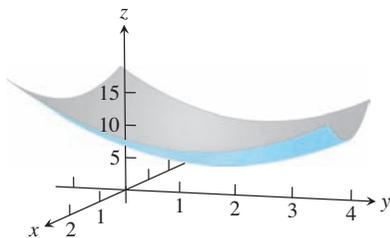


FIGURA 14.43 La gráfica de la función $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4y + 9$ es el paraboloide que tiene un valor mínimo local de 5 en el punto $(0, 2)$ (ejemplo 1).

del plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en (a, b) , la ecuación se reduce a

$$0 \cdot (x - a) + 0 \cdot (y - b) - z + f(a, b) = 0$$

o bien,

$$z = f(a, b).$$

Así, el teorema 10 dice que la superficie tiene un plano tangente horizontal en un extremo local, siempre que exista dicho plano.

DEFINICIÓN Un punto interior del dominio de una función $f(x, y)$ donde tanto f_x como f_y se anulan, o donde alguna de éstas no existe, es un **punto crítico** de f .

El teorema 10 dice que los únicos puntos donde una función $f(x, y)$ puede tener valores extremos son los puntos críticos y los puntos frontera. Como en las funciones derivables de una sola variable, no todos los puntos críticos dan origen a un extremo local. Una función derivable de una variable podría tener un punto de inflexión. Una función derivable de dos variables podría tener un *punto de silla*.

DEFINICIÓN Una función derivable $f(x, y)$ tiene un **punto de silla** en un punto crítico (a, b) si en cada disco abierto con centro en (a, b) existen puntos del dominio (x, y) donde $f(x, y) > f(a, b)$, y puntos del dominio (x, y) donde $f(x, y) < f(a, b)$. El punto correspondiente $(a, b, f(a, b))$ sobre la superficie $z = f(x, y)$ se llama punto de silla de la superficie (figura 14.42).

EJEMPLO 1 Obtenga los valores extremos locales de $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4y + 9$.

Solución El dominio de f es todo el plano (de manera que no hay puntos frontera) y las derivadas parciales $f_x = 2x$ y $f_y = 2y - 4$ existen en todas partes. Por lo tanto, los valores extremos locales pueden presentarse sólo cuando

$$f_x = 2x = 0 \quad y \quad f_y = 2y - 4 = 0.$$

La única posibilidad es el punto $(0, 2)$, donde el valor de f es 5. Como $f(x, y) = x^2 + (y - 2)^2 + 5$ nunca es menor de 5, vemos que el punto crítico $(0, 2)$ tiene un mínimo local (figura 14.43). ■

EJEMPLO 2 Determine (si existen) los valores extremos locales de $f(x, y) = y^2 - x^2$.

Solución El dominio de f es todo el plano (de manera que no hay puntos frontera), y las derivadas parciales $f_x = -2x$ y $f_y = 2y$ existen en todas partes. Por lo tanto, los valores extremos locales sólo pueden presentarse en el origen $(0, 0)$ donde $f_x = 0$ y $f_y = 0$. Sin embargo, a lo largo del eje x positivo, el valor $f(x, 0) = -x^2 < 0$; a lo largo del eje y positivo, f tiene el valor $f(0, y) = y^2 > 0$. Por lo tanto, todos los discos abiertos en el plano xy con centro en $(0, 0)$ contienen puntos donde la función es positiva y puntos donde es negativa. La función tiene un punto de silla en el origen y no tiene valores extremos locales (figura 14.44a). La figura 14.44b muestra las curvas de nivel (hipérbolas) de f y el decremento e incremento de la función de modo alternativo entre los cuatro agrupamientos de hipérbolas. ■

El hecho de que $f_x = f_y = 0$ en un punto interior (a, b) de R no garantiza que f tenga un valor extremo local. Sin embargo, si f y sus primeras y segundas derivadas parciales son continuas en R , podemos aprender más del siguiente teorema que se probará en la sección 14.9.

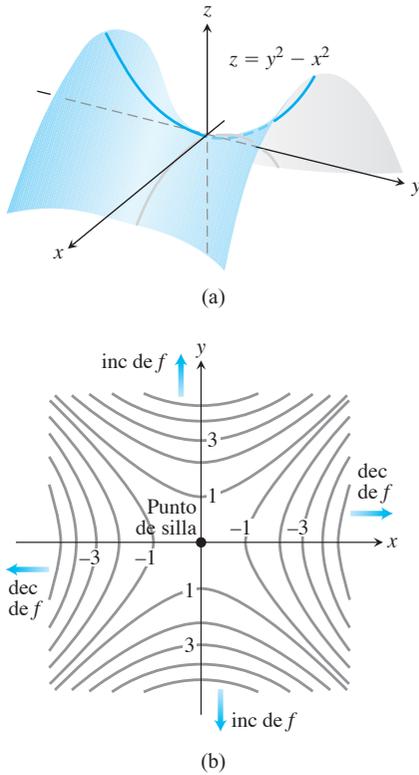


FIGURA 14.44 (a) El origen es un punto de silla de la función $f(x, y) = y^2 - x^2$. No hay valores extremos locales (ejemplo 2). (b) Curvas de nivel de la función f del ejemplo 2.

TEOREMA 11: Criterio de la segunda derivada para valores extremos locales

Suponga que $f(x, y)$ y sus primeras y segundas derivadas parciales son continuas en un disco con centro en (a, b) , y que $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$. Entonces,

- i) f tiene un **máximo local** en (a, b) , si $f_{xx} < 0$ y $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ en (a, b) .
- ii) f tiene un **mínimo local** en (a, b) , si $f_{xx} > 0$ y $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ en (a, b) .
- iii) f tiene un **punto de silla** en (a, b) , si $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$ en (a, b) .
- iv) **El criterio no es concluyente** en (a, b) , si $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 0$ en (a, b) . En este caso, debemos encontrar otra manera de determinar el comportamiento de f en (a, b) .

La expresión $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ se conoce como **discriminante** o **Hessiano** de f . Algunas veces es más fácil recordarlo como determinante,

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix}.$$

El teorema 11 dice que si el discriminante es positivo en el punto (a, b) , entonces la superficie se curva del mismo modo en todas direcciones: hacia abajo si $f_{xx} < 0$, dando origen a un máximo local, y hacia arriba si $f_{xx} > 0$, dando lugar a un mínimo local. Por otro lado, si el discriminante es negativo en (a, b) , entonces la superficie se curva hacia arriba en algunas direcciones y hacia abajo en otras, por lo que tenemos un punto de silla.

EJEMPLO 3 Determine los valores extremos locales de la función

$$f(x, y) = xy - x^2 - y^2 - 2x - 2y + 4.$$

Solución La función está definida y es derivable para todas las x y y , y su dominio no tiene puntos frontera. Por lo tanto, la función tiene valores extremos sólo en los puntos donde f_x y f_y se anula en forma simultánea. Esto da como resultado

$$f_x = y - 2x - 2 = 0, \quad f_y = x - 2y - 2 = 0,$$

o bien,

$$x = y = -2.$$

Por lo tanto, el punto $(-2, -2)$ es el único punto donde f puede asumir un valor extremo. Para ver si esto es así, calculamos

$$f_{xx} = -2, \quad f_{yy} = -2, \quad f_{xy} = 1.$$

El discriminante de f en $(a, b) = (-2, -2)$ es

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = (-2)(-2) - (1)^2 = 4 - 1 = 3.$$

La combinación

$$f_{xx} < 0 \quad \text{y} \quad f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$$

nos dice que f tiene un máximo local en $(-2, -2)$. El valor de f en este punto es $f(-2, -2) = 8$. ■

EJEMPLO 4 Obtenga los valores extremos locales de $f(x, y) = 3y^2 - 2y^3 - 3x^2 + 6xy$.

Solución Puesto que f es derivable en todos lados, puede asumir valores extremos sólo donde

$$f_x = 6y - 6x = 0 \quad \text{y} \quad f_y = 6y - 6y^2 + 6x = 0.$$

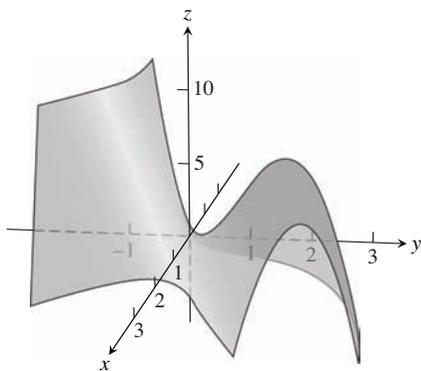


FIGURA 14.45 La superficie $z = 3y^2 - 2y^3 - 3x^2 + 6xy$ tiene un punto de silla en el origen y un máximo local en el punto $(2, 2)$ (ejemplo 4).

Partiendo de la primera de estas ecuaciones, encontramos que $x = y$, y al sustituir y en la segunda ecuación tenemos

$$6x - 6x^2 + 6x = 0 \quad \text{o} \quad 6x(2 - x) = 0.$$

Por lo tanto, los dos puntos críticos son $(0, 0)$ y $(2, 2)$.

Para clasificar los puntos críticos, calculamos las segundas derivadas:

$$f_{xx} = -6, \quad f_{yy} = 6 - 12y, \quad f_{xy} = 6.$$

El discriminante está dado por

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = (-36 + 72y) - 36 = 72(y - 1).$$

En el punto crítico $(0, 0)$ vemos que el valor del discriminante es el número negativo -72 , de manera que la función tiene un punto de silla en el origen. En el punto crítico $(2, 2)$ vemos que el discriminante tiene el valor positivo 72 . Al combinar este resultado con el valor negativo de la segunda parcial $f_{xx} = -6$, el teorema 11 dice que el punto crítico $(2, 2)$ tiene un valor máximo local de $f(2, 2) = 12 - 16 - 12 + 24 = 8$. La gráfica de la superficie se presenta en la figura 14.45. ■

Máximos y mínimos absolutos en regiones limitadas cerradas

Organizamos la búsqueda de los valores extremos absolutos de una función $f(x, y)$ en una región cerrada y acotada R en tres pasos.

1. *Elaborar una lista de los puntos interiores de R donde f puede tener valores máximos y mínimos locales, y evaluar f en estos puntos. Éstos son los puntos críticos de f .*
2. *Elaborar una lista de los puntos frontera de R donde f puede tener máximos y mínimos locales, y evaluar f en estos puntos. Mostraremos muy pronto cómo hacerlo.*
3. *Buscar en las listas los valores máximos y mínimos de f . Éstos serán los valores máximos y mínimos absolutos de f en R . Puesto que los máximos y mínimos absolutos son también máximos y mínimos locales, los valores máximos y mínimos absolutos de f aparecen en alguna de las listas elaboradas en los pasos 1 y 2.*

EJEMPLO 5 Obtenga los valores máximos y mínimos absolutos de

$$f(x, y) = 2 + 2x + 2y - x^2 - y^2$$

en la región triangular en el primer cuadrante acotada por las rectas $x = 0, y = 9 - x$.

Solución Puesto que f es derivable, los únicos lugares donde f puede asumir estos valores son los puntos interiores del triángulo (figura 14.46) donde $f_x = f_y = 0$ y los puntos frontera.

(a) Puntos interiores. Para éstos, tenemos

$$f_x = 2 - 2x = 0, \quad f_y = 2 - 2y = 0,$$

lo que da el único punto $(x, y) = (1, 1)$. El valor de f es

$$f(1, 1) = 4.$$

(b) Puntos frontera. Tomamos un lado del triángulo a la vez:

i) Sobre el segmento $OA, y = 0$. La función

$$f(x, y) = f(x, 0) = 2 + 2x - x^2$$

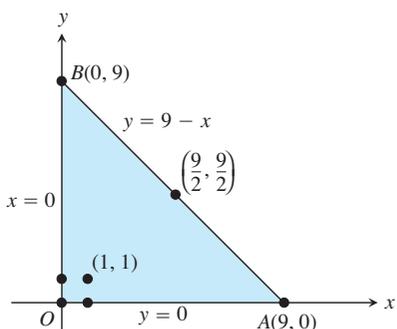


FIGURA 14.46 Esta región triangular es el dominio de la función del ejemplo 5.

puede ahora considerarse como una función de x definida en el intervalo cerrado $0 \leq x \leq 9$. Sus valores extremos (como sabemos por el capítulo 4) pueden presentarse en los puntos extremos

$$\begin{aligned} x = 0 & \quad \text{donde} \quad f(0, 0) = 2 \\ x = 9 & \quad \text{donde} \quad f(9, 0) = 2 + 18 - 81 = -61 \end{aligned}$$

y en los puntos interiores donde $f'(x, 0) = 2 - 2x = 0$. El único punto interior donde $f'(x, 0) = 0$ es $x = 1$, donde

$$f(x, 0) = f(1, 0) = 3.$$

ii) En el segmento OB , $x = 0$ y

$$f(x, y) = f(0, y) = 2 + 2y - y^2.$$

Sabemos por la simetría de f con respecto a x y y , así como por el análisis que hemos realizado, que los candidatos en este segmento son

$$f(0, 0) = 2, \quad f(0, 9) = -61, \quad f(0, 1) = 3.$$

iii) Ya tomamos en cuenta los valores de f en los extremos de AB , así que sólo necesitamos buscar en los puntos interiores de AB . Con $y = 9 - x$, tenemos

$$f(x, y) = 2 + 2x + 2(9 - x) - x^2 - (9 - x)^2 = -61 + 18x - 2x^2.$$

Al hacer $f'(x, 9 - x) = 18 - 4x = 0$ tenemos

$$x = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}.$$

En este valor de x ,

$$y = 9 - \frac{9}{2} = \frac{9}{2} \quad \text{y} \quad f(x, y) = f\left(\frac{9}{2}, \frac{9}{2}\right) = -\frac{41}{2}.$$

Resumen Hacemos una lista de todos los candidatos: 4, 2, -61, 3, $-(41/2)$. El máximo es 4, y f lo asume en (1, 1). El mínimo es -61, y f lo asume en (0, 9) y (9, 0). ■

Para resolver problemas de valores extremos con restricciones algebraicas sobre las variables se requiere por lo general del método de multiplicadores de Lagrange que se presenta en la siguiente sección. Pero algunas veces podemos resolver tales problemas de manera directa, como en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 6 Una compañía de mensajería sólo acepta cajas rectangulares en las que la suma de su largo y su circunferencia (perímetro de una sección transversal) no exceda 108 in. Determine las dimensiones de una caja aceptable con el volumen máximo.

Solución Sean x , y y z , respectivamente, el largo, ancho y la altura de la caja rectangular. Entonces, la circunferencia es $2y + 2z$. Queremos maximizar el volumen $V = xyz$ de la caja (figura 14.47) con la condición $x + 2y + 2z = 108$ (la caja más grande que acepta la compañía de mensajería). Así, podemos escribir el volumen de la caja como una función de dos variables:

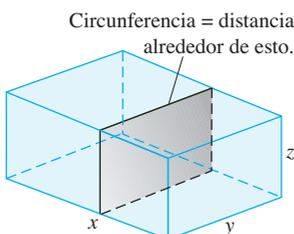


FIGURA 14.47 La caja del ejemplo 6.

$$\begin{aligned} V(y, z) &= (108 - 2y - 2z)yz & V &= xyz \\ & & x &= 108 - 2y - 2z \\ &= 108yz - 2y^2z - 2yz^2. \end{aligned}$$

Al igualar a cero las primeras derivadas parciales,

$$\begin{aligned} V_y(y, z) &= 108z - 4yz - 2z^2 = (108 - 4y - 2z)z = 0 \\ V_z(y, z) &= 108y - 2y^2 - 4yz = (108 - 2y - 4z)y = 0, \end{aligned}$$

obtenemos los puntos críticos $(0, 0)$, $(0, 54)$, $(54, 0)$ y $(18, 18)$. El volumen se anula en $(0, 0)$, $(0, 54)$, $(54, 0)$, por lo que en ninguno de éstos tenemos un volumen máximo. En el punto $(18, 18)$, aplicamos el criterio de la segunda derivada (teorema 11):

$$V_{yy} = -4z, \quad V_{zz} = -4y, \quad V_{yz} = 108 - 4y - 4z.$$

Así que

$$V_{yy}V_{zz} - V_{yz}^2 = 16yz - 16(27 - y - z)^2.$$

Por lo tanto,

$$V_{yy}(18, 18) = -4(18) < 0$$

y

$$[V_{yy}V_{zz} - V_{yz}^2]_{(18,18)} = 16(18)(18) - 16(-9)^2 > 0$$

implican que $(18, 18)$ da el volumen máximo. Las dimensiones del paquete son $x = 108 - 2(18) - 2(18) = 36$ in, $y = 18$ in y $z = 18$ in. El volumen máximo es $V = (36)(18)(18) = 11,664$ in³ o 6.75 ft³. ■

A pesar de la efectividad del teorema 11, le sugerimos recordar sus limitaciones. No se aplica a los puntos frontera del dominio de una función, donde es posible que una función tenga valores extremos y derivadas no nulas. Tampoco se aplica para puntos donde no existe f_x o f_y .

Resumen de criterios de máximos-mínimos

Los valores extremos de $f(x, y)$ pueden presentarse sólo en

- i) **puntos frontera** del dominio de f .
- ii) **puntos críticos** (puntos interiores donde $f_x = f_y = 0$ o puntos donde f_x o f_y no existen).

Si las derivadas parciales de primero y segundo orden de f son continuas en un disco con centro en el punto (a, b) y $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$, la naturaleza de $f(a, b)$ puede verificarse con el **criterio de la segunda derivada**:

- i) $f_{xx} < 0$ y $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ en $(a, b) \Rightarrow$ **tenemos un máximo local**
- ii) $f_{xx} > 0$ y $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ en $(a, b) \Rightarrow$ **tenemos un mínimo local**
- iii) $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$ en $(a, b) \Rightarrow$ **tenemos un punto de silla**
- iv) $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 0$ en $(a, b) \Rightarrow$ **el criterio no es concluyente**

Ejercicios 14.7

Determinación de extremos locales

Determine todos los máximos locales, los mínimos locales y los puntos de silla de las funciones de los ejercicios 1 a 30.

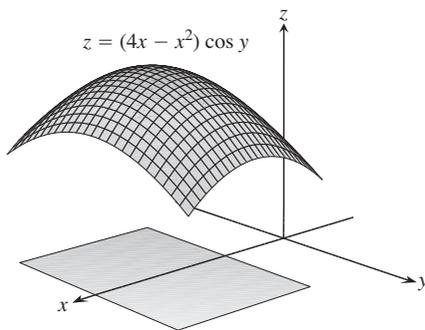
1. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 3x - 3y + 4$
2. $f(x, y) = 2xy - 5x^2 - 2y^2 + 4x + 4y - 4$
3. $f(x, y) = x^2 + xy + 3x + 2y + 5$
4. $f(x, y) = 5xy - 7x^2 + 3x - 6y + 2$
5. $f(x, y) = 2xy - x^2 - 2y^2 + 3x + 4$
6. $f(x, y) = x^2 - 4xy + y^2 + 6y + 2$
7. $f(x, y) = 2x^2 + 3xy + 4y^2 - 5x + 2y$
8. $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x + 2y + 1$
9. $f(x, y) = x^2 - y^2 - 2x + 4y + 6$
10. $f(x, y) = x^2 + 2xy$

11. $f(x, y) = \sqrt{56x^2 - 8y^2 - 16x - 31} + 1 - 8x$
12. $f(x, y) = 1 - \sqrt[3]{x^2 + y^2}$
13. $f(x, y) = x^3 - y^3 - 2xy + 6$
14. $f(x, y) = x^3 + 3xy + y^3$
15. $f(x, y) = 6x^2 - 2x^3 + 3y^2 + 6xy$
16. $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3x^2 - 3y^2 - 8$
17. $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x + y^3 - 15y$
18. $f(x, y) = 2x^3 + 2y^3 - 9x^2 + 3y^2 - 12y$
19. $f(x, y) = 4xy - x^4 - y^4$
20. $f(x, y) = x^4 + y^4 + 4xy$
21. $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2 - 1}$
22. $f(x, y) = \frac{1}{x} + xy + \frac{1}{y}$
23. $f(x, y) = y \operatorname{sen} x$
24. $f(x, y) = e^{2x} \cos y$
25. $f(x, y) = e^{x^2 + y^2 - 4x}$
26. $f(x, y) = e^y - ye^x$
27. $f(x, y) = e^{-y}(x^2 + y^2)$
28. $f(x, y) = e^x(x^2 - y^2)$
29. $f(x, y) = 2 \ln x + \ln y - 4x - y$
30. $f(x, y) = \ln(x + y) + x^2 - y$

Determinación de extremos absolutos

En los ejercicios 31 a 38, encuentre los máximos y mínimos absolutos de las funciones en los dominios dados.

31. $f(x, y) = 2x^2 - 4x + y^2 - 4y + 1$ en una placa triangular cerrada y acotada por las rectas $x = 0$, $y = 2$, $y = 2x$ en el primer cuadrante.
32. $D(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 1$ en una placa triangular cerrada y acotada por las rectas $x = 0$, $y = 4$, $y = x$ en el primer cuadrante.
33. $f(x, y) = x^2 + y^2$ en la placa triangular cerrada y acotada por las rectas $x = 0$, $y = 0$, $y + 2x = 2$ en el primer cuadrante.
34. $T(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 6x$ en la placa rectangular $0 \leq x \leq 5$, $-3 \leq y \leq 3$.
35. $T(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 6x + 2$ en la placa rectangular $0 \leq x \leq 5$, $-3 \leq y \leq 0$.
36. $f(x, y) = 48xy - 32x^3 - 24y^2$ en la placa rectangular $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.
37. $f(x, y) = (4x - x^2) \cos y$ en la placa rectangular $1 \leq x \leq 3$, $-\pi/4 \leq y \leq \pi/4$ (vea la figura anexa).



38. $f(x, y) = 4x - 8xy + 2y + 1$ en la placa triangular cerrada y acotada por las rectas $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$ en el primer cuadrante.

39. Obtenga dos números a y b para $a \leq b$, tales que

$$\int_a^b (6 - x - x^2) dx$$

tenga en ese punto su valor máximo.

40. Determine dos números a y b para $a \leq b$, tales que

$$\int_a^b (24 - 2x - x^2)^{1/3} dx$$

tenga en ese punto su valor máximo.

41. **Temperaturas** La placa circular plana tiene la forma de la región $x^2 + y^2 \leq 1$. La placa, incluyendo la frontera donde $x^2 + y^2 = 1$, se calienta de manera que la temperatura en el punto (x, y) es

$$T(x, y) = x^2 + 2y^2 - x.$$

Determine las temperaturas en los puntos más caliente y más frío de la placa.

42. Obtenga el punto crítico de

$$f(x, y) = xy + 2x - \ln x^2y$$

en el primer cuadrante abierto ($x > 0$, $y > 0$) y demuestre que f asume un mínimo en ese punto.

Teoría y ejemplos

43. Obtenga los máximos, mínimos y puntos de silla de $f(x, y)$, si existen, dado que

- a. $f_x = 2x - 4y$ y $f_y = 2y - 4x$

- b. $f_x = 2x - 2$ y $f_y = 2y - 4$

- c. $f_x = 9x^2 - 9$ y $f_y = 2y + 4$

Describa su razonamiento en cada caso.

44. El discriminante $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ se anula en el origen para cada una de las siguientes funciones, de manera que el criterio de la segunda derivada falla. Determine si la función tiene un máximo, un mínimo o ninguno de ambos en el origen, imaginando la apariencia de la superficie $z = f(x, y)$

- a. $f(x, y) = x^2y^2$

- b. $f(x, y) = 1 - x^2y^2$

- c. $f(x, y) = xy^2$

- d. $f(x, y) = x^3y^2$

- e. $f(x, y) = x^3y^3$

- f. $f(x, y) = x^4y^4$

45. Demuestre que $(0, 0)$ es un punto crítico de $f(x, y) = x^2 + kxy + y^2$ sin importar el valor que tenga la constante k . (*Sugerencia:* Considere dos casos: $k = 0$ y $k \neq 0$).

46. ¿Para cuáles valores de la constante k , el criterio de la segunda derivada garantiza que $f(x, y) = x^2 + kxy + y^2$ tendrá un punto de silla en $(0, 0)$? ¿Y un mínimo local en $(0, 0)$? ¿Para cuáles valores de k , el criterio de la segunda derivada no es concluyente? Justifique sus respuestas.

47. Si $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$, ¿debe f tener un valor máximo o mínimo local en (a, b) ? Justifique su respuesta.

48. ¿Puede concluir algo acerca de $f(a, b)$ si f y sus primeras y segundas derivadas parciales son continuas en un disco con centro en el punto crítico (a, b) , y $f_{xx}(a, b)$ y $f_{yy}(a, b)$ difieren en signo? Justifique su respuesta.

49. Entre todos los puntos de la gráfica de $z = 10 - x^2 - y^2$ que están arriba del plano $x + 2y + 3z = 0$, obtenga el punto más lejano del plano.

50. Determine el punto sobre la gráfica de $z = x^2 + y^2 + 10$ más cercano al plano $x + 2y - z = 0$.
51. Encuentre el punto en el plano $3x + 2y + z = 6$ más cercano al origen.
52. Obtenga la distancia mínima del punto $(2, -1, 1)$ al plano $x + y - z = 2$.
53. Determine tres números cuya suma sea 9 y cuya suma de cuadrados sea un mínimo.
54. Obtenga tres números positivos cuya suma sea 3 y cuyo producto de cuadrados sea un máximo.
55. Obtenga el valor máximo de $s = xy + yz + xz$ donde $x + y + z = 6$.
56. Encuentre la distancia mínima del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ al punto $(-6, 4, 0)$.
57. Obtenga las dimensiones de la caja rectangular de máximo volumen que puede inscribirse dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.
58. Entre todas las cajas rectangulares cerradas de volumen igual a 27 cm^3 , ¿cuál es la del área más pequeña?
59. Usted está construyendo una caja rectangular abierta con 12 ft^2 de material. ¿Qué dimensiones tendrá la caja de máximo volumen?
60. Considere la función $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2xy - x - y + 1$ en el cuadrado $0 \leq x \leq 1$ y $0 \leq y \leq 1$.
- Demuestre que f tiene un mínimo absoluto a lo largo del segmento de recta $2x + 2y = 1$ en este cuadrado. ¿Cuál es el valor mínimo absoluto?
 - Obtenga el valor máximo absoluto de f en el cuadrado.

Valores extremos en curvas parametrizadas Para determinar los valores extremos de una función $f(x, y)$ en una curva $x = x(t), y = y(t)$, consideramos a f como una función de una variable t y usamos la regla de la cadena para encontrar dónde se anula df/dt . Como en cualquier otro caso de una variable, los valores extremos de f se encuentran entre los valores en los

- puntos críticos (puntos donde df/dt se anula o no existe), y
- extremos del dominio del parámetro.

Obtenga los valores mínimos y máximos absolutos de las siguientes funciones de las curvas dadas.

61. Funciones:
- $f(x, y) = x + y$
 - $g(x, y) = xy$
 - $h(x, y) = 2x^2 + y^2$

Curvas:

- La semicircunferencia $x^2 + y^2 = 4, y \geq 0$
 - La cuarta parte de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4, x \geq 0, y \geq 0$
- Use las ecuaciones paramétricas $x = 2 \cos t, y = 2 \sin t$.

62. Funciones:
- $f(x, y) = 2x + 3y$
 - $g(x, y) = xy$
 - $h(x, y) = x^2 + 3y^2$

Curvas:

- La semielipse $(x^2/9) + (y^2/4) = 1, y \geq 0$
 - El cuarto de elipse $(x^2/9) + (y^2/4) = 1, x \geq 0, y \geq 0$
- Use las ecuaciones paramétricas $x = 3 \cos t, y = 2 \sin t$.

63. Función: $f(x, y) = xy$
- Curvas:
- La recta $x = 2t, y = t + 1$
 - El segmento de recta $x = 2t, y = t + 1, -1 \leq t \leq 0$
 - El segmento de recta $x = 2t, y = t + 1, 0 \leq t \leq 1$

64. Funciones:
- $f(x, y) = x^2 + y^2$
 - $g(x, y) = 1/(x^2 + y^2)$

Curvas:

- La recta $x = t, y = 2 - 2t$
- El segmento de recta $x = t, y = 2 - 2t, 0 \leq t \leq 1$

65. **Rectas de mínimos cuadrados y regresión lineal** Cuando tratamos de ajustar una recta $y = mx + b$ a un conjunto de datos numéricos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ (figura 14.48), por lo general seleccionamos la recta que minimiza la suma de los cuadrados de las distancias verticales de los puntos a la recta. En teoría, significa la obtención de valores de m y b que minimizan el valor de la función

$$w = (mx_1 + b - y_1)^2 + \dots + (mx_n + b - y_n)^2. \quad (1)$$

Demuestre que los valores de m y b que logran esto son:

$$m = \frac{\left(\sum x_k\right)\left(\sum y_k\right) - n \sum x_k y_k}{\left(\sum x_k\right)^2 - n \sum x_k^2}, \quad (2)$$

$$b = \frac{1}{n} \left(\sum y_k - m \sum x_k\right), \quad (3)$$

donde todas las sumas van desde $k = 1$ hasta $k = n$. Muchas calculadoras científicas tienen integrada esta fórmula, lo que facilita la obtención de m y b oprimiendo sólo unas cuantas teclas después de que ha introducido los datos.

La recta $y = mx + b$ determinada por estos valores de m y b se llama **recta de mínimos cuadrados**, **recta de regresión** o **recta de tendencia** para los datos en cuestión. Determinar una recta de mínimos cuadrados le permite

- Resumir los datos mediante una expresión sencilla,
- Predecir los valores de y para otros valores de x no estudiados experimentalmente,
- Manejar datos en forma analítica.

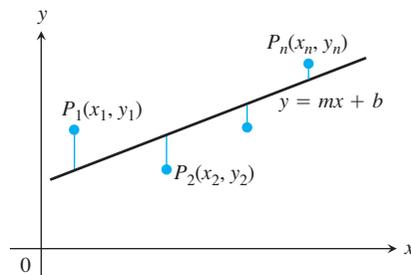


FIGURA 14.48 Para ajustar una recta a puntos no colineales, seleccionamos la recta que minimiza la suma de los cuadrados de las desviaciones.

En los ejercicios 66 a 68, use las ecuaciones (2) y (3) para obtener la recta de mínimos cuadrados para cada conjunto de puntos datos. Luego use la ecuación lineal que obtenga para predecir el valor de y que correspondería a $x = 4$.

66. $(-2, 0), (0, 2), (2, 3)$ 67. $(-1, 2), (0, 1), (3, -4)$

68. $(0, 0), (1, 2), (2, 3)$

EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

En los ejercicios 69 a 74, explorará funciones para identificar sus extremos locales. Use un SAC para ejecutar los siguientes pasos:

- Trace la función en el rectángulo dado.
- Trace algunas curvas de nivel en el rectángulo.
- Calcule las primeras derivadas parciales de la función y use la solución de la ecuación del SAC para determinar los puntos críticos. ¿Cómo se relacionan los puntos críticos con las curvas de nivel graficadas en el inciso (b)? ¿Cuáles puntos críticos, si existen, parecen tener un punto de silla? Justifique su respuesta.

- Calcule las segundas derivadas parciales de la función y obtenga el discriminante $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$.
 - Use los criterios de máximos y mínimos para clasificar los puntos críticos encontrados en el inciso (c). ¿Sus resultados son congruentes con el análisis del inciso (c)?
69. $f(x, y) = x^2 + y^3 - 3xy, -5 \leq x \leq 5, -5 \leq y \leq 5$
70. $f(x, y) = x^3 - 3xy^2 + y^2, -2 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 2$
71. $f(x, y) = x^4 + y^2 - 8x^2 - 6y + 16, -3 \leq x \leq 3, -6 \leq y \leq 6$
72. $f(x, y) = 2x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 3, -3/2 \leq x \leq 3/2, -3/2 \leq y \leq 3/2$
73. $f(x, y) = 5x^6 + 18x^5 - 30x^4 + 30xy^2 - 120x^3, -4 \leq x \leq 3, -2 \leq y \leq 2$
74. $f(x, y) = \begin{cases} x^5 \ln(x^2 + y^2), & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}, -2 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 2$

14.8 | Multiplicadores de Lagrange

BIOGRAFÍA HISTÓRICA

Joseph Louis Lagrange
(1736–1813)

Algunas veces necesitamos obtener los valores extremos de una función cuyo dominio está restringido a cierto subconjunto particular del plano (por ejemplo, un disco, una región triangular cerrada, o a lo largo de una curva). En esta sección, exploraremos un poderoso método para determinar los valores extremos de funciones restringidas: el método de *multiplicadores de Lagrange*.

Máximos y mínimos con restricciones

Primero consideraremos el problema donde un mínimo con restricciones se puede obtener eliminando una variable.

EJEMPLO 1 Encuentre el punto $P(x, y, z)$ del plano $2x + y - z - 5 = 0$ que esté más cercano al origen.

Solución El problema nos pide obtener el valor mínimo de la función

$$\begin{aligned} |\vec{OP}| &= \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} \\ &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \end{aligned}$$

sujeta a la restricción

$$2x + y - z - 5 = 0.$$

Puesto que $|\vec{OP}|$ tiene un valor mínimo siempre que la función

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

tenga un valor mínimo, podemos resolver el problema si encontramos el valor mínimo de $f(x, y, z)$ sujeto a la restricción $2x + y - z - 5 = 0$ (eliminando la raíz cuadrada). Si consideramos a x y y como las variables independientes en esta ecuación y escribimos z como

$$z = 2x + y - 5,$$

nuestro problema se reduce a la obtención de los puntos (x, y) en los cuales la función

$$h(x, y) = f(x, y, 2x + y - 5) = x^2 + y^2 + (2x + y - 5)^2$$

tiene sus valores mínimos. Puesto que el dominio de h es todo el plano xy , el criterio de la primera derivada de la sección 14.7 nos dice que cualquier mínimo que h pudiera tener debe estar en puntos donde

$$h_x = 2x + 2(2x + y - 5)(2) = 0, \quad h_y = 2y + 2(2x + y - 5) = 0.$$

Esto nos lleva a

$$10x + 4y = 20, \quad 4x + 4y = 10,$$

y la solución es

$$x = \frac{5}{3}, \quad y = \frac{5}{6}.$$

Podemos aplicar un argumento geométrico junto con el criterio de la segunda derivada para demostrar que estos valores minimizan h . La coordenada z del punto correspondiente en el plano $z = 2x + y - 5$ es

$$z = 2\left(\frac{5}{3}\right) + \frac{5}{6} - 5 = -\frac{5}{6}.$$

Por lo tanto, el punto que buscamos es

$$\text{Punto más cercano: } P\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{6}, -\frac{5}{6}\right).$$

La distancia de P al origen es $5/\sqrt{6} \approx 2.04$. ■

Intentar resolver un problema de máximos o mínimos con restricciones a través de una sustitución, como podríamos llamar al método del ejemplo 1, no siempre es sencillo. Ésta es una de las razones para aprender el nuevo método de esta sección.

EJEMPLO 2 Encuentre los puntos del cilindro hiperbólico $x^2 - z^2 - 1 = 0$ más cercanos al origen.

Solución 1 El cilindro se muestra en la figura 14.49. Buscamos los puntos sobre el cilindro que se encuentren más cercanos al origen. Éstos son los puntos cuyas coordenadas minimizan el valor de la función

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \quad \text{Cuadrado de la distancia}$$

sujeta a la restricción $x^2 - z^2 - 1 = 0$. Si consideramos x y y como variables independientes en la ecuación de la restricción, entonces

$$z^2 = x^2 - 1$$

y los valores de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ en el cilindro están dados por la función

$$h(x, y) = x^2 + y^2 + (x^2 - 1) = 2x^2 + y^2 - 1.$$

Para determinar los puntos sobre el cilindro cuyas coordenadas minimizan a f , buscamos los puntos en el plano xy cuyas coordenadas minimizan a h . El único valor extremo de h se presenta cuando

$$h_x = 4x = 0 \quad y \quad h_y = 2y = 0,$$

es decir, el punto $(0, 0)$. Pero no existen puntos sobre el cilindro donde tanto x como y se anulen. ¿Qué estuvo mal?

Lo que ocurre es que el criterio de la primera derivada obtuvo (como debe ser) el punto en el dominio de h donde h tiene un valor mínimo. Por otro lado, nosotros queremos los puntos del cilindro donde h tiene un valor mínimo. Si bien el dominio de h es todo el plano xy , el do-

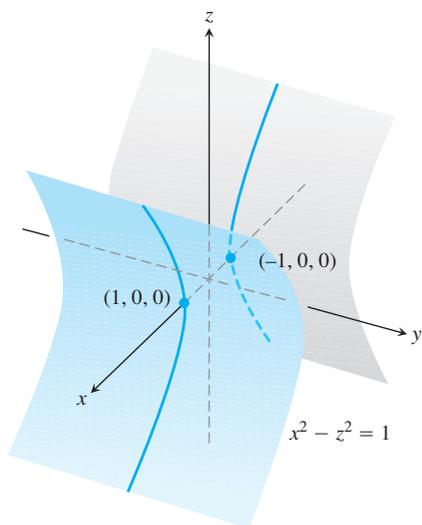


FIGURA 14.49 El cilindro hiperbólico $x^2 - z^2 - 1 = 0$ del ejemplo 2.

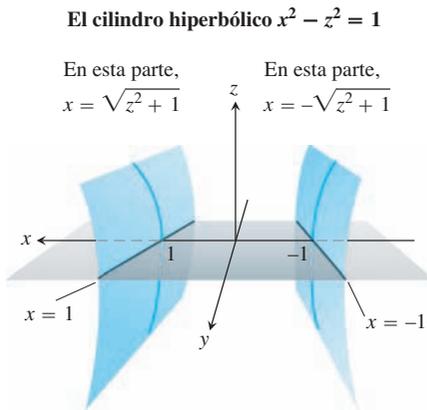


FIGURA 14.50 La región del plano xy a partir de la cual se seleccionan las primeras dos coordenadas de los puntos (x, y, z) del cilindro hiperbólico $x^2 - z^2 = 1$ excluye la banda $-1 < x < 1$ en el plano xy (ejemplo 2).

minio del cual podemos seleccionar las primeras dos coordenadas de los puntos (x, y, z) sobre el cilindro se restringe a la “sombra” del cilindro en el plano xy , la cual no incluye la banda entre las rectas $x = -1$ y $x = 1$ (figura 14.50).

Podemos evitar este problema si consideramos a y y z como variables independientes (en vez de x y y), expresando x en términos de y y z como

$$x^2 = z^2 + 1.$$

Con esta sustitución, $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ se convierte en

$$k(y, z) = (z^2 + 1) + y^2 + z^2 = 1 + y^2 + 2z^2$$

y buscamos los puntos donde k asume su valor mínimo. El dominio de k en el plano yz concuerda ahora con el dominio en el cual seleccionamos las coordenadas y y z de los puntos (x, y, z) sobre el cilindro. Por lo tanto, los puntos que minimizan k en el plano tendrán puntos correspondientes sobre el cilindro. Los valores menores de k se presentan cuando

$$k_y = 2y = 0 \quad \text{y} \quad k_z = 4z = 0,$$

o bien, $y = z = 0$. Esto nos lleva a

$$x^2 = z^2 + 1 = 1, \quad x = \pm 1.$$

Los puntos correspondientes sobre el cilindro son $(\pm 1, 0, 0)$. Podemos ver en la desigualdad

$$k(y, z) = 1 + y^2 + 2z^2 \geq 1$$

que los puntos $(\pm 1, 0, 0)$ dan un valor mínimo de k . También podemos ver que la distancia mínima del origen a un punto en el cilindro es una unidad.

Solución 2 Otra manera de encontrar los puntos sobre el cilindro más cercanos al origen es imaginar una pequeña esfera, con centro en el origen, que crece como una burbuja de jabón hasta tocar al cilindro (figura 14.5). En cada punto de contacto, el cilindro y la esfera tienen el mismo plano tangente y la misma recta normal. Por lo tanto, si la esfera y el cilindro se representan como las superficies de nivel que se obtienen igualando

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2 \quad \text{y} \quad g(x, y, z) = x^2 - z^2 - 1$$

a cero, entonces los gradientes ∇f y ∇g serán paralelos cuando las superficies se toquen. Por lo tanto, en cualquier punto de contacto debemos encontrar un escalar λ (“lambda”), tal que

$$\nabla f = \lambda \nabla g,$$

o bien,

$$2xi + 2yj + 2zk = \lambda(2xi - 2zk).$$

Así, las coordenadas x, y y z de cualquier punto de tangencia tendrán que satisfacer las tres ecuaciones escalares

$$2x = 2\lambda x, \quad 2y = 0, \quad 2z = -2\lambda z.$$

¿Para qué valores de λ ocurrirá que un punto (x, y, z) , cuyas coordenadas satisfacen estas ecuaciones escalares, se encuentre también sobre la superficie $x^2 - z^2 - 1 = 0$? Para contestar esta pregunta aplicamos nuestro conocimiento de que ningún punto sobre la superficie tiene una coordenada x nula para concluir que $x \neq 0$. Por lo tanto, $2x = 2\lambda x$ sólo si

$$2 = 2\lambda, \quad \text{o} \quad \lambda = 1.$$

Para $\lambda = 1$, la ecuación $2z = -2\lambda z$ se convierte en $2z = -2z$. Si esta ecuación se satisface también, z debe anularse. Puesto que $y = 0$ también (de la ecuación $2y = 0$), concluimos que todos los puntos que buscamos tienen coordenadas de la forma

$$(x, 0, 0).$$

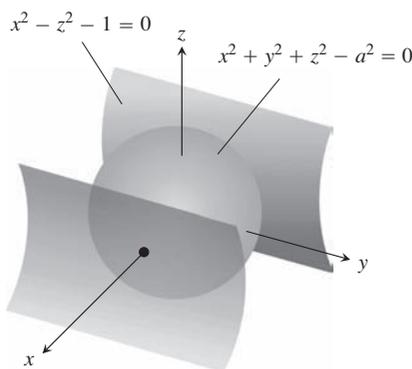


FIGURA 14.51 Una esfera con centro en el origen que crece como una burbuja de jabón hasta que toca justamente el cilindro hiperbólico $x^2 - z^2 - 1 = 0$ (ejemplo 2).

¿Cuáles puntos sobre la superficie $x^2 - z^2 = 1$ tienen coordenadas de esta forma? Los puntos $(x, 0, 0)$ para los cuales

$$x^2 - (0)^2 = 1, \quad x^2 = 1, \quad \text{o} \quad x = \pm 1.$$

Los puntos sobre el cilindro más cercanos al origen son los puntos $(\pm 1, 0, 0)$. ■

Método de multiplicadores de Lagrange

En la solución 2 del ejemplo 2, usamos el **método de multiplicadores de Lagrange**. El método dice que los valores extremos de una función $f(x, y, z)$, cuyas variables están sujetas a una restricción $g(x, y, z) = 0$, se encuentran sobre la superficie $g = 0$ en los puntos donde

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

para algún escalar λ (llamado **multiplicador de Lagrange**).

Para explorar el método y saber por qué funciona, haremos primero la siguiente observación, la cual establecemos como un teorema.

TEOREMA 12: Teorema del gradiente ortogonal Suponga que $f(x, y, z)$ es derivable en una región cuyo interior contiene una curva suave

$$C: \mathbf{r}(t) = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j} + k(t)\mathbf{k}.$$

Si P_0 es un punto de C donde f tiene un máximo o un mínimo local relativo a sus valores sobre C , entonces ∇f es ortogonal a C en P_0 .

Comprobación Demostraremos que ∇f es ortogonal al vector velocidad de la curva en P_0 . Los valores de f en C están dados por la composición $f(g(t), h(t), k(t))$, cuya derivada con respecto a t es

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dg}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dh}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dk}{dt} = \nabla f \cdot \mathbf{v}.$$

En cualquier punto P_0 donde f tiene un mínimo o un máximo local relativo a sus valores sobre la curva, $df/dt = 0$, entonces

$$\nabla f \cdot \mathbf{v} = 0. \quad \blacksquare$$

Al eliminar en el teorema 12 los términos en z , obtenemos un resultado similar para funciones de dos variables.

COROLARIO DEL TEOREMA 12 En los puntos de una curva suave $\mathbf{r}(t) = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j}$, donde una función derivable $f(x, y)$ asume sus máximos y mínimos locales en relación con sus valores en la curva, $\nabla f \cdot \mathbf{v} = 0$, donde $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$.

El teorema 12 es la clave del método de los multiplicadores de Lagrange. Suponga que $f(x, y, z)$ y $g(x, y, z)$ son derivables y que P_0 es un punto en la superficie de $g(x, y, z) = 0$, donde f tiene un valor máximo o mínimo local en relación con sus otros valores sobre la superficie. Suponemos también que $\nabla g \neq \mathbf{0}$ en los puntos sobre la superficie $g(x, y, z) = 0$. Así, f asume un máximo o un mínimo local en P_0 en relación con sus valores en todas las curvas derivables que pasan por P_0 sobre la superficie $g(x, y, z) = 0$. Por lo tanto, ∇f es ortogonal al vector velocidad de todas las curvas derivables que pasan por P_0 . Esto también ocurre con ∇g (ya que ∇g es ortogonal a la superficie de nivel $g = 0$, como vimos en la sección 14.5). Por lo tanto, en P_0 , ∇f es algún múltiplo escalar λ de ∇g .

El método de multiplicadores de Lagrange

Suponga que $f(x, y, z)$ y $g(x, y, z)$ son derivables y que $\nabla g \neq \mathbf{0}$ cuando $g(x, y, z) = 0$. Para determinar los valores máximos y mínimos locales de f sujeta a la restricción $g(x, y, z) = 0$ (si ésta existe), se obtienen los valores de x, y, z y λ que satisfacen en forma simultánea las ecuaciones

$$\nabla f = \lambda \nabla g \quad y \quad g(x, y, z) = 0. \tag{1}$$

Para funciones de dos variables independientes, la condición es similar, pero sin la variable z .

Se debe tener cuidado al aplicar este método. Es posible que un valor extremo no exista en realidad (ejercicio 41).

EJEMPLO 3 Obtenga los valores mayores y menores que toma la función

$$f(x, y) = xy$$

sobre la elipse (figura 14.52)

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1.$$

Solución Queremos encontrar los valores extremos de $f(x, y) = xy$ sujetos a la restricción

$$g(x, y) = \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0.$$

Para hacerlo, primero hallamos los valores de x, y y λ para los cuales

$$\nabla f = \lambda \nabla g \quad y \quad g(x, y) = 0.$$

La ecuación del gradiente en las ecuaciones (1) nos da

$$y\mathbf{i} + x\mathbf{j} = \frac{\lambda}{4}x\mathbf{i} + \lambda y\mathbf{j},$$

de donde tenemos

$$y = \frac{\lambda}{4}x, \quad x = \lambda y, \quad y = \frac{\lambda}{4}(\lambda y) = \frac{\lambda^2}{4}y,$$

de manera que $y = 0$ o $\lambda = \pm 2$. Ahora consideraremos estos dos casos.

Caso 1: Si $y = 0$, entonces $x = y = 0$. Pero $(0, 0)$ no está en la elipse. Por lo tanto, $y \neq 0$.

Caso 2: Si $y \neq 0$, entonces $\lambda = \pm 2$ y $x = \pm 2y$. Al sustituir esto en la ecuación $g(x, y) = 0$, tenemos

$$\frac{(\pm 2y)^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1, \quad 4y^2 + 4y^2 = 8 \quad y \quad y = \pm 1.$$

Por lo tanto, la función $f(x, y) = xy$ toma sus valores extremos sobre la elipse en los cuatro puntos $(\pm 2, 1), (\pm 2, -1)$. Los valores extremos son $xy = 2$ y $xy = -2$.

Geometría de la solución Las curvas de nivel de la función $f(x, y) = xy$ son las hipérbolas $xy = c$ (figura 14.53). Cuanto más lejos estén las hipérbolas del origen, mayor será el valor absoluto de f . Queremos obtener los valores extremos de $f(x, y)$, dado que el punto (x, y) también está en la elipse $x^2 + 4y^2 = 8$. ¿Cuáles hipérbolas cortan a la elipse que se encuentra más lejos del origen? Las hipérbolas que apenas rozan a la elipse, aquellas que son tangentes a ella, son las más lejanas. En estos puntos, cualquier vector normal a la hipérbola es normal a la

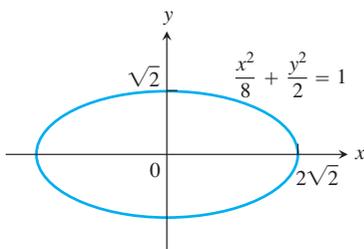


FIGURA 14.52 El ejemplo 3 muestra cómo obtener los valores mayores y menores del producto xy sobre esta elipse.

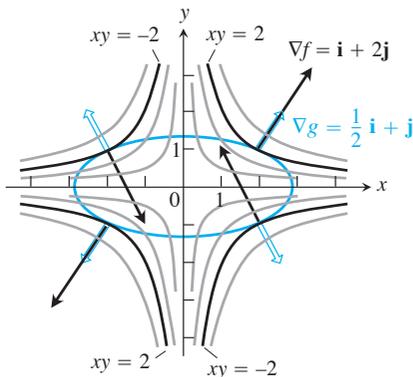


FIGURA 14.53 Cuando está sujeta a la restricción $g(x, y) = x^2/8 + y^2/2 - 1 = 0$, la función $f(x, y) = xy$ toma los valores extremos en los cuatro puntos $(\pm 2, \pm 1)$. Éstos son los puntos sobre la elipse cuando ∇f (en negro) es un múltiplo escalar de ∇g (en azul) (ejemplo 3).

elipse, así que $\nabla f = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ es un múltiplo ($\lambda = \pm 2$) de $g = (x/4)\mathbf{i} + y\mathbf{j}$. En el punto $(2, 1)$, por ejemplo,

$$\nabla f = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}, \quad \nabla g = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \mathbf{j}, \quad y \quad \nabla f = 2\nabla g.$$

En el punto $(-2, 1)$,

$$\nabla f = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}, \quad \nabla g = -\frac{1}{2}\mathbf{i} + \mathbf{j}, \quad y \quad \nabla f = -2\nabla g. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 4 Determine los valores máximos y mínimos de la función $f(x, y) = 3x + 4y$ sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$.

Solución Modelamos esto como un problema de multiplicadores de Lagrange con

$$f(x, y) = 3x + 4y, \quad g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

y buscamos los valores de x, y y λ que satisfacen las ecuaciones

$$\nabla f = \lambda \nabla g: \quad 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} = 2x\lambda\mathbf{i} + 2y\lambda\mathbf{j}$$

$$g(x, y) = 0: \quad x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

La ecuación gradientes en las ecuaciones (1) implica que $\lambda \neq 0$ y resulta

$$x = \frac{3}{2\lambda}, \quad y = \frac{2}{\lambda}.$$

Estas ecuaciones nos dicen, entre otras cosas, que x y y tienen el mismo signo. Con estos valores para x y y , la ecuación $g(x, y) = 0$ da

$$\left(\frac{3}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{2}{\lambda}\right)^2 - 1 = 0,$$

de manera que

$$\frac{9}{4\lambda^2} + \frac{4}{\lambda^2} = 1, \quad 9 + 16 = 4\lambda^2, \quad 4\lambda^2 = 25 \quad y \quad \lambda = \pm \frac{5}{2}.$$

Por lo tanto,

$$x = \frac{3}{2\lambda} = \pm \frac{3}{5}, \quad y = \frac{2}{\lambda} = \pm \frac{4}{5},$$

y $f(x, y) = 3x + 4y$ tiene valores extremos en $(x, y) = \pm(3/5, 4/5)$.

Al calcular el valor de $3x + 4y$ en los puntos $\pm(3/5, 4/5)$, vemos que sus valores máximos y mínimos sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ son

$$3\left(\frac{3}{5}\right) + 4\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{25}{5} = 5 \quad y \quad 3\left(-\frac{3}{5}\right) + 4\left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{25}{5} = -5.$$

La geometría de la solución Las curvas de nivel de $f(x, y) = 3x + 4y$ son las rectas $3x + 4y = c$ (figura 14.54). Cuanto más lejos se encuentran las rectas del origen, mayor será el valor absoluto de f . Queremos encontrar los valores extremos de $f(x, y)$, dado que el punto (x, y) también está sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. ¿Cuáles de las rectas que cortan la circunferencia se encuentran más lejos del origen? Las rectas tangentes a la circunferencia son las más lejanas. En los puntos de tangencia, cualquier vector normal a la recta es normal a la circunferencia, de manera que el gradiente $\nabla f = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ es un múltiplo ($\lambda = \pm 5/2$) del gradiente $\nabla g = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}$. En el punto $(3/5, 4/5)$, por ejemplo,

$$\nabla f = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}, \quad \nabla g = \frac{6}{5}\mathbf{i} + \frac{8}{5}\mathbf{j} \quad y \quad \nabla f = \frac{5}{2}\nabla g. \quad \blacksquare$$

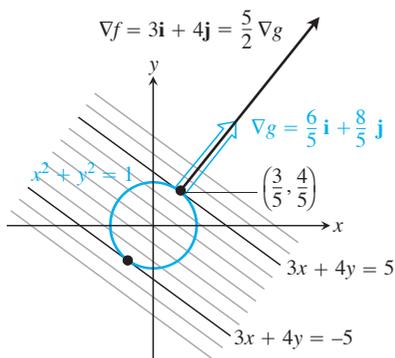


FIGURA 14.54 La función $f(x, y) = 3x + 4y$ asume su valor máximo sobre la circunferencia unitaria $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ en el punto $(3/5, 4/5)$, y su valor mínimo en el punto $(-3/5, -4/5)$ (ejemplo 4). En cada uno de estos puntos, ∇f es un múltiplo escalar de ∇g . La figura muestra los gradientes en el primer punto, pero no en el segundo.

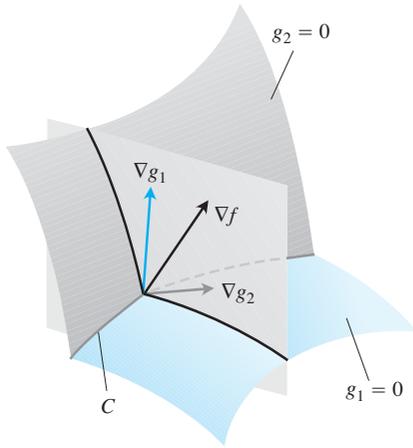


FIGURA 14.55 Los vectores ∇g_1 y ∇g_2 están en un plano perpendicular a la curva C porque ∇g_1 es normal a la superficie $g_1 = 0$, y ∇g_2 es normal a la superficie $g_2 = 0$.

Multiplicadores de Lagrange con dos restricciones

Muchos problemas nos exigen encontrar los valores extremos de una función derivable $f(x, y, z)$ cuyas variables están sujetas a dos restricciones. Si las restricciones son

$$g_1(x, y, z) = 0 \quad \text{y} \quad g_2(x, y, z) = 0$$

y g_1 y g_2 son derivables, y ∇g_1 no es paralela a ∇g_2 , obtenemos los mínimos y máximos locales con una restricción de f introduciendo dos multiplicadores de Lagrange λ y μ . Es decir, localizamos los puntos $P(x, y, z)$ donde f asume sus valores extremos con una restricción, obteniendo los valores de x, y, z, λ y μ que satisfacen simultáneamente las ecuaciones

$$\nabla f = \lambda \nabla g_1 + \mu \nabla g_2, \quad g_1(x, y, z) = 0, \quad g_2(x, y, z) = 0 \quad (2)$$

Las ecuaciones (2) tienen una agradable interpretación geométrica. Las superficies $g_1 = 0$ y $g_2 = 0$ (por lo general) se cortan en una curva suave, digamos C (figura 14.55). Buscamos a lo largo de esta curva los puntos donde f tiene valores máximos y mínimos locales en relación con sus otros valores sobre la curva. Éstos son los puntos donde ∇f es normal a C , como vimos en el teorema 12. Pero ∇g_1 y ∇g_2 también son normales a C en estos puntos porque C se encuentra en las superficies $g_1 = 0$ y $g_2 = 0$. Por lo tanto, ∇f está en el plano determinado por ∇g_1 y ∇g_2 , lo cual significa que $\nabla f = \lambda \nabla g_1 + \mu \nabla g_2$ para algunas λ y μ . Como los puntos que buscamos también están en ambas superficies, sus coordenadas deben satisfacer las ecuaciones $g_1(x, y, z) = 0$ y $g_2(x, y, z) = 0$, las cuales son los requisitos restantes de las ecuaciones (2).

EJEMPLO 5 El plano $x + y + z = 1$ corta al cilindro $x^2 + y^2 = 1$ en una elipse (figura 14.56). Encuentre los puntos sobre la elipse que se encuentran más cercanos y más lejanos del origen.

Solución Obtenemos los valores extremos de

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

[el cuadrado de la distancia de (x, y, z) al origen] sujeta a las restricciones

$$g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad (3)$$

$$g_2(x, y, z) = x + y + z - 1 = 0. \quad (4)$$

La ecuación de gradientes de las ecuaciones (2) nos da entonces

$$\begin{aligned} \nabla f &= \lambda \nabla g_1 + \mu \nabla g_2 \\ 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k} &= \lambda(2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}) + \mu(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) \\ 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k} &= (2\lambda x + \mu)\mathbf{i} + (2\lambda y + \mu)\mathbf{j} + \mu\mathbf{k} \end{aligned}$$

o bien,

$$2x = 2\lambda x + \mu, \quad 2y = 2\lambda y + \mu, \quad 2z = \mu. \quad (5)$$

Las ecuaciones escalares de la ecuación (5) generan

$$\begin{aligned} 2x = 2\lambda x + 2z &\Rightarrow (1 - \lambda)x = z, \\ 2y = 2\lambda y + 2z &\Rightarrow (1 - \lambda)y = z. \end{aligned} \quad (6)$$

Las ecuaciones (6) se satisfacen simultáneamente si $\lambda = 1$ y $z = 0$, o $\lambda \neq 1$ y $x = y = z/(1 - \lambda)$.

Si $z = 0$, al resolver las ecuaciones (3) y (4) en forma simultánea para obtener los puntos correspondientes sobre la elipse, obtenemos los dos puntos $(1, 0, 0)$ y $(0, 1, 0)$. Esto tiene sentido cuando observamos la figura 14.56.

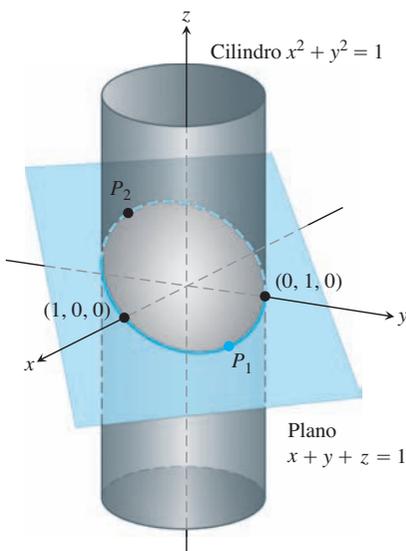


FIGURA 14.56 En la elipse donde el plano y el cilindro se encuentran, encontramos los puntos más cercanos y más lejanos al origen (ejemplo 5).

Si $x = y$, entonces las ecuaciones (3) y (4) nos dan

$$\begin{aligned}x^2 + x^2 - 1 &= 0 & x + x + z - 1 &= 0 \\2x^2 &= 1 & z &= 1 - 2x \\x &= \pm \frac{\sqrt{2}}{2} & z &= 1 \mp \sqrt{2}.\end{aligned}$$

Los puntos correspondientes sobre la elipse son

$$P_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 - \sqrt{2} \right) \quad \text{y} \quad P_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \sqrt{2} \right).$$

Sin embargo, debemos tener cuidado. Si bien P_1 y P_2 dan máximos locales de f sobre la elipse, P_2 está más alejado del origen que P_1 .

Los puntos sobre la elipse más cercanos al origen son $(1, 0, 0)$ y $(0, 1, 0)$. El punto sobre la elipse más lejano del origen es P_2 . ■

Ejercicios 14.8

Dos variables independientes con una restricción

- Extremos en una elipse** Determine los puntos sobre la elipse $x^2 + 2y^2 = 1$, donde $f(x, y) = xy$ asume valores extremos.
- Extremos en una circunferencia** Obtenga los valores extremos de $f(x, y) = xy$ sujeta a la restricción $g(x, y) = x^2 + y^2 - 10 = 0$.
- Máximo en una recta** Determine el valor máximo de $f(x, y) = 49 - x^2 - y^2$ sobre la recta $x + 3y = 10$.
- Extremos sobre una recta** Obtenga los valores extremos locales de $f(x, y) = x^2y$ sobre la recta $x + y = 3$.
- Mínimo con una restricción** Determine los puntos sobre la curva $xy^2 = 54$ más cercanos al origen.
- Mínimo con una restricción** Obtenga los puntos de la curva $x^2y = 2$ más próximos al origen.
- Use el método de multiplicadores de Lagrange para determinar
 - Mínimo en una hipérbola** El valor mínimo de $x + y$, sujeto a las restricciones $xy = 16$, $x > 0$, $y > 0$
 - Máximo sobre una recta** El valor máximo de xy , sujeto a la restricción $x + y = 16$.
 Comente acerca de la geometría de cada solución.
- Extremos en una curva** Determine los puntos de la curva $x^2 + xy + y^2 = 1$ en el plano xy más cercanos y más lejanos al origen.
- Área superficial mínima con volumen fijo** Obtenga las dimensiones de la lata cilíndrica circular recta y cerrada con menor área superficial cuyo volumen sea de $16\pi \text{ cm}^3$.
- Cilindro en una esfera** Determine el radio y la altura del cilindro circular recto y abierto de mayor área superficial que puede inscribirse en una esfera de radio a . ¿Cuál es la mayor área superficial?
- Rectángulo de mayor área en una elipse** Use el método de multiplicadores de Lagrange para encontrar las dimensiones del rectángulo de mayor área que se puede inscribir en la elipse $x^2/16 + y^2/9 = 1$ con lados paralelos a los ejes coordenados.
- Rectángulo del mayor perímetro en una elipse** Determine las dimensiones del rectángulo de mayor perímetro que puede inscribirse en la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ con lados paralelos a los ejes coordenados. ¿Cuál es el mayor perímetro?

- Extremos en una circunferencia** Obtenga los valores máximos y mínimos de $x^2 + y^2$, sujetos a la restricción $x^2 - 2x + y^2 - 4y = 0$.
- Extremos en una circunferencia** Determine los valores máximos y mínimos de $3x - y + 6$, sujetos a la restricción $x^2 + y^2 = 4$.
- Hormiga en una placa de metal** La temperatura en un punto (x, y) de una placa de metal es $T(x, y) = 4x^2 - 4xy + y^2$. Una hormiga camina sobre la placa alrededor de una circunferencia de radio 5 con centro en el origen. ¿Cuáles son las temperaturas máxima y mínima encontradas por la hormiga?
- Tanque de almacenamiento más económico** Se ha pedido a su empresa diseñar un tanque de almacenamiento para gas líquido. Las especificaciones del cliente demandan un tanque cilíndrico con extremos semiesféricos, y el tanque debe alojar 8000 m^3 de gas. El cliente también quiere usar la menor cantidad posible de material en la construcción del tanque. ¿Qué radio y altura recomendaría para la porción cilíndrica del tanque?

Tres variables independientes con una restricción

- Distancia mínima a un punto** Determine el punto sobre el plano $x + 2y + 3z = 13$ más cercano al punto $(1, 1, 1)$.
- Distancia máxima a un punto** Determine el punto sobre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ más lejano del punto $(1, -1, 1)$.
- Distancia mínima al origen** Obtenga la distancia mínima de la superficie $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ al origen.
- Distancia mínima al origen** Obtenga el punto sobre la superficie $z = xy + 1$ más cercano al origen.
- Distancia mínima al origen** Determine los puntos sobre la superficie $z^2 = xy + 4$ más cercanos al origen.
- Distancia mínima al origen** Obtenga el(los) punto(s) sobre la superficie $xyz = 1$ más cercano(s) al origen.
- Extremos en una esfera** Determine los valores máximos y mínimos de

$$f(x, y, z) = x - 2y + 5z$$
 sobre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 30$.

- 24. Extremos en una esfera** Obtenga los puntos sobre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, donde $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ tiene sus valores máximos y mínimos.
- 25. Minimizar una suma de cuadrados** Obtenga tres números reales cuya suma sea 9 y la suma de sus cuadrados sea lo más pequeña posible.
- 26. Maximizar un producto** Determine el mayor producto que pueden tener los números positivos x, y y z , si $x + y + z^2 = 16$.
- 27. Caja rectangular de mayor volumen en una esfera** Determine las dimensiones de la caja rectangular cerrada con mayor volumen que puede inscribirse en una esfera unitaria.
- 28. Caja con vértice en un plano** Determine el volumen de la mayor caja rectangular cerrada en el primer octante que tiene tres caras en los planos coordenados y un vértice en el plano $x/a + y/b + z/c = 1$, donde $a > 0, b > 0$ y $c > 0$.
- 29. Punto más caliente en una sonda espacial** Una sonda espacial en forma del elipsoide

$$4x^2 + y^2 + 4z^2 = 16$$

entra a la atmósfera de la Tierra y su superficie se empieza a calentar. Después de una hora, la temperatura en el punto (x, y, z) sobre la superficie de la sonda es

$$T(x, y, z) = 8x^2 + 4y - 16z + 600.$$

Encuentre el punto más caliente sobre la superficie de la sonda.

- 30. Temperaturas extremas en una esfera** Suponga que la temperatura Celsius en el punto (x, y, z) sobre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ es $T = 400xyz^2$. Localice las temperaturas máxima y mínima sobre la esfera.
- 31. Maximizar una función de utilidad: un ejemplo de economía** En economía, la utilidad de las cantidades x y y de dos bienes de capital G_1 y G_2 se mide algunas veces por una función $U(x, y)$. Por ejemplo, G_1 y G_2 podrían ser dos sustancias químicas requeridas por una compañía farmacéutica, y $U(x, y)$ la ganancia de fabricar un producto cuya síntesis requiere diferentes cantidades de las sustancias, dependiendo del proceso utilizado. Si G_1 cuesta a dólares el kilogramo, G_2 cuesta b dólares el kilogramo, y la cantidad total asignada para la compra de G_1 y G_2 combinada es de c dólares, entonces los gerentes de la compañía quieren maximizar $U(x, y)$, dado que $ax + by = c$. Por lo tanto, necesitan resolver un problema típico de multiplicadores de Lagrange.

Suponga que

$$U(x, y) = xy + 2x$$

y que la ecuación $ax + by = c$ se simplifica como

$$2x + y = 30.$$

Determine el valor máximo de U y los valores correspondientes de x y y sujetos a esta última restricción.

- 32. Localización de un radiotelescopio** Usted es el encargado de instalar un radiotelescopio en un planeta recién descubierto. Para minimizar la interferencia, quiere colocar el radiotelescopio donde el campo magnético del planeta sea más débil. El planeta es esférico, con un radio de 6 unidades. Con base en un sistema de coordenadas cuyo origen es el centro del planeta, la fuerza del campo magnético está dada por $M(x, y, z) = 6x - y^2 + xz + 60$. ¿Dónde debe ubicar el radiotelescopio?

Valores extremos sujetos a dos restricciones

- 33.** Maximice la función $f(x, y, z) = x^2 + 2y - z^2$ sujeta a las restricciones $2x - y = 0$ y $y + z = 0$.

- 34.** Minimice la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, sujeta a las restricciones $x + 2y + 3z = 6$ y $x + 3y + 9z = 9$.
- 35. Distancia mínima al origen** Determine el punto más cercano al origen sobre la recta de intersección de los planos $y + 2z = 12$ y $x + 6 = 6$.
- 36. Valor máximo en la recta de intersección** Encuentre el valor máximo de $f(x, y, z) = x^2 + 2y - z^2$ sobre la recta de intersección de los planos $2x - y = 0$ y $y + z = 0$.
- 37. Extremos en una curva de intersección** Determine los valores extremos de $f(x, y, z) = x^2yz + 1$ en la intersección del plano $z = 1$ con la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 10$.
- 38. a. Máximos en una recta de intersección** Obtenga el valor máximo de $w = xyz$ sobre la recta de intersección de los dos planos $x + y + z = 40$ y $x + y - z = 0$.
- b.** Exponga un argumento geométrico para apoyar su afirmación de que encontró un valor máximo de w y no un mínimo.
- 39. Extremos sobre una circunferencia de intersección** Determine los valores extremos de la función $f(x, y, z) = xy + z^2$ sobre la circunferencia donde el plano $y - x = 0$ corta a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.
- 40. Distancia mínima al origen** Obtenga el punto más cercano al origen sobre la curva de intersección del plano $2y + 4z = 5$ y el cono $z^2 = 4x^2 + 4y^2$.

Teoría y ejemplos

- 41. La condición $\nabla f = \lambda \nabla g$ no es suficiente** Si bien $\nabla f = \lambda \nabla g$ es una condición necesaria para la existencia de un valor extremo en $f(x, y)$ sujeta a las condiciones $g(x, y) = 0$ y $\nabla g \neq 0$, no es en sí una garantía para que exista. Como un buen ejemplo, intente usar el método de multiplicadores de Lagrange para obtener un valor máximo de $f(x, y) = x + y$ sujeta a la restricción $xy = 16$. El método identificará los dos puntos $(4, 4)$ y $(-4, -4)$ como candidatos para la localización de valores extremos. Hasta ahora, la suma $(x + y)$ no tiene valores máximos en la hipérbola $xy = 16$. Cuanto más lejos vaya del origen sobre esa hipérbola en el primer cuadrante, mayor será la suma $f(x, y, z) = x + y$.
- 42. Un plano de mínimos cuadrados** El plano $z = Ax + By + C$ se "ajusta" a los siguientes puntos (x_k, y_k, z_k) :

$$(0, 0, 0), \quad (0, 1, 1), \quad (1, 1, 1), \quad (1, 0, -1).$$

Determine los valores de A, B y C que minimizan

$$\sum_{k=1}^4 (Ax_k + By_k + C - z_k)^2,$$

la suma de los cuadrados de las desviaciones.

- 43. a. Máximo en una esfera** Demuestre que el valor máximo de $a^2b^2c^2$ en una esfera de radio r con centro en el origen de un sistema de coordenadas abc cartesianas es $(r^3/3)^3$.
- b. Medias geométrica y aritmética** Use el inciso (a) para demostrar que para números no negativos de a, b y c ,

$$(abc)^{1/3} \leq \frac{a + b + c}{3};$$

es decir, la *media geométrica* de tres números no negativos es menor que o igual a su *media aritmética*.

- 44. Suma de productos** Considere n números positivos a_1, a_2, \dots, a_n . Obtenga el máximo de $\sum_{i=1}^n a_i x_i$ sujeta a la restricción $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$.

EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

En los ejercicios 45 a 50 use un SAC para realizar los siguientes pasos de implementación del método de multiplicadores de Lagrange para encontrar extremos con restricciones:

- a. Establezca la función $h = f - \lambda_1 g_1 - \lambda_2 g_2$, donde f es la función por optimizar sujeta a las restricciones $g_1 = 0$ y $g_2 = 0$.
 - b. Determine todas las primeras derivadas parciales de h , incluyendo las parciales con respecto a λ_1 y λ_2 , e igualelas a cero.
 - c. Resuelva el sistema de ecuaciones planteado en el inciso (b) para todas las incógnitas, incluyendo λ_1 y λ_2 .
 - d. Evalúe f en cada uno de los puntos de la solución determinados en el inciso (c) y seleccione el valor extremo sujeta a las restricciones solicitadas en el ejercicio.
45. Minimice $f(x, y, z) = xy + yz$ sujeta a las restricciones $x^2 + y^2 - 2 = 0$ y $x^2 + z^2 - 2 = 0$.

46. Minimice $f(x, y, z) = xyz$ sujeta a las restricciones $x^2 + y^2 - 1 = 0$ y $x - z = 0$.
47. Maximice $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sujeta a las restricciones $2y + 4z - 5 = 0$ y $4x^2 + 4y^2 - z^2 = 0$.
48. Minimice $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sujeta a las restricciones $x^2 - xy + y^2 - z^2 - 1 = 0$ y $x^2 + y^2 - 1 = 0$.
49. Minimice $f(x, y, z, w) = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$ sujeta a las restricciones $2x - y + z - w - 1 = 0$ y $x + y - z + w - 1 = 0$.
50. Determine la distancia de la recta $y = x + 1$ a la parábola $y^2 = x$. [Sugerencia: Sea (x, y) un punto sobre la recta y sea (w, z) un punto sobre la parábola. Debe minimizar $(x - w)^2 + (y - z)^2$].

14.9 | Fórmula de Taylor para dos variables

En esta sección usaremos la fórmula de Taylor para deducir el criterio de la segunda derivada para valores extremos locales (sección 14.7) y la fórmula del error para linealizaciones de funciones de dos variables independientes (sección 14.6). El uso de la fórmula de Taylor en estas deducciones implica una extensión de la fórmula que brinda aproximaciones polinomiales de todos los órdenes para funciones de dos variables independientes.

Deducción del criterio de la segunda derivada

Sea $f(x, y)$ con derivadas parciales continuas en una región R que contiene un punto $P(a, b)$ donde $f_x = f_y = 0$ (figura 14.57). Sean h y k incrementos suficientemente pequeños para identificar el punto $S(a + h, b + k)$ y el segmento de recta que lo une con P dentro de R . Parametrizamos el segmento PS como

$$x = a + th, \quad y = b + tk, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Si $F(t) = f(a + th, b + tk)$, la regla de la cadena nos da

$$F'(t) = f_x \frac{dx}{dt} + f_y \frac{dy}{dt} = hf_x + kf_y.$$

Puesto que f_x y f_y son derivables (tienen derivadas parciales continuas), F' es una función derivable de t y

$$\begin{aligned} F'' &= \frac{\partial F'}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F'}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} (hf_x + kf_y) \cdot h + \frac{\partial}{\partial y} (hf_x + kf_y) \cdot k \\ &= h^2 f_{xx} + 2hkf_{xy} + k^2 f_{yy}. \quad f_{xy} = f_{yx} \end{aligned}$$

Puesto que F y F' son continuas en $[0, 1]$, y F' es derivable en $(0, 1)$, podemos aplicar la fórmula de Taylor con $n = 2$ y $a = 0$ para obtener

$$\begin{aligned} F(1) &= F(0) + F'(0)(1 - 0) + F''(c) \frac{(1 - 0)^2}{2} \\ F(1) &= F(0) + F'(0) + \frac{1}{2} F''(c) \end{aligned} \tag{1}$$

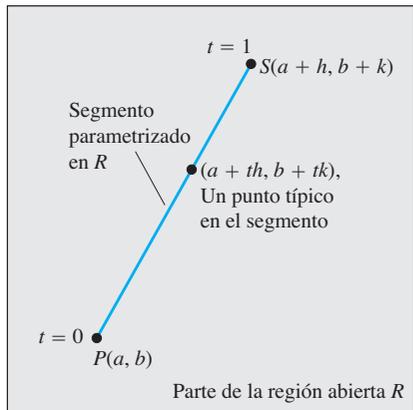


FIGURA 14.57 Iniciamos la deducción del criterio de la segunda derivada en $P(a, b)$ parametrizando un segmento típico de recta típico de P a un punto S cercano.

para algún c entre 0 y 1. Al escribir la ecuación (1) en términos de f nos da

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + hf_x(a, b) + kf_y(a, b) + \frac{1}{2} \left(h^2 f_{xx} + 2hkf_{xy} + k^2 f_{yy} \right) \Big|_{(a+ch, b+ck)}. \quad (2)$$

Puesto que $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$, esto se reduce a

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = \frac{1}{2} \left(h^2 f_{xx} + 2hkf_{xy} + k^2 f_{yy} \right) \Big|_{(a+ch, b+ck)}. \quad (3)$$

La presencia de un extremo de f en (a, b) queda determinada por el signo de $f(a+h, b+k) - f(a, b)$. Por la ecuación (3), éste es el mismo signo que el de

$$Q(c) = (h^2 f_{xx} + 2hkf_{xy} + k^2 f_{yy}) \Big|_{(a+ch, b+ck)}.$$

Ahora, si $Q(0) \neq 0$, el signo de $Q(c)$ será el mismo que el de $Q(0)$ para valores suficientemente pequeños de h y k . Podemos predecir el signo de

$$Q(0) = h^2 f_{xx}(a, b) + 2hkf_{xy}(a, b) + k^2 f_{yy}(a, b) \quad (4)$$

a partir de los signos de f_{xx} y $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ en (a, b) . Multiplique ambos lados de la ecuación (4) por f_{xx} y reagrupe el lado derecho para obtener

$$f_{xx}Q(0) = (hf_{xx} + kf_{xy})^2 + (f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)k^2. \quad (5)$$

De la ecuación (5) vemos que

1. Si $f_{xx} < 0$ y $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ en (a, b) , entonces $Q(0) < 0$ para todos los valores no nulos suficientemente pequeños de h y k , y f tiene un valor *máximo local* en (a, b) .
2. Si $f_{xx} < 0$ y $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ en (a, b) , entonces $Q(0) > 0$ para todos los valores no nulos suficientemente pequeños de h y k , y f tiene un valor *mínimo local* en (a, b) .
3. Si $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$ en (a, b) , existen combinaciones de valores no nulos suficientemente pequeños de h y k para los cuales $Q(0) > 0$, y otros valores para los cuales $Q(0) < 0$. Arbitrariamente, cerca del punto $P_0(a, b, f(a, b))$ sobre la superficie $z = f(x, y)$ existen puntos sobre P_0 y puntos por debajo de P_0 , de manera que f tiene un *punto de silla* en (a, b) .
4. Si $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 0$, se necesita otro criterio. La posibilidad de que $Q(0)$ se anule nos evita tener que sacar conclusiones acerca del signo de $Q(c)$.

Fórmula del error para aproximaciones lineales

Queremos demostrar que la diferencia $E(x, y)$ entre los valores de una función $f(x, y)$ y su aproximación lineal $L(x, y)$ en (x_0, y_0) satisface la desigualdad

$$|E(x, y)| \leq \frac{1}{2} M(|x - x_0| + |y - y_0|)^2.$$

Se supone que la función f tiene segundas derivadas parciales continuas de todo un conjunto abierto que contiene una región rectangular cerrada R con centro en (x_0, y_0) . El número M es una cota superior de $|f_{xx}|$, $|f_{yy}|$ y $|f_{xy}|$ en R .

La desigualdad que queremos proviene de la ecuación (2). Sustituimos x_0 y y_0 en vez de a y b , $x - x_0$, y $y - y_0$ en lugar de h y k , respectivamente; reordenamos el resultado como

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \underbrace{f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)}_{\text{Aproximación lineal } L(x, y)} \\ &+ \frac{1}{2} \underbrace{\left((x - x_0)^2 f_{xx} + 2(x - x_0)(y - y_0) f_{xy} + (y - y_0)^2 f_{yy} \right)}_{\text{error } E(x, y)} \Big|_{(x_0+c(x-x_0), y_0+c(y-y_0))}. \end{aligned}$$

Esta ecuación revela que

$$|E| \leq \frac{1}{2} (|x - x_0|^2 |f_{xx}| + 2|x - x_0||y - y_0| |f_{xy}| + |y - y_0|^2 |f_{yy}|).$$

Por lo tanto, si M es una cota superior para los valores de $|f_{xx}|$, $|f_{xy}|$ y $|f_{yy}|$ en R , entonces

$$\begin{aligned} |E| &\leq \frac{1}{2} (|x - x_0|^2 M + 2|x - x_0||y - y_0| M + |y - y_0|^2 M) \\ &= \frac{1}{2} M (|x - x_0| + |y - y_0|)^2. \end{aligned}$$

Fórmula de Taylor para funciones de dos variables

Las fórmulas deducidas anteriormente para F' y F'' pueden obtenerse aplicando a $f(x, y)$ los operadores

$$\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad \text{y} \quad \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 = h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2hk \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + k^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Éstas son las primeras dos instancias de una fórmula más general,

$$F^{(n)}(t) = \frac{d^n}{dt^n} F(t) = \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(x, y), \tag{6}$$

la cual dice que la aplicación de d^n/dt^n a $F(t)$ nos da el mismo resultado que si se aplica el operador

$$\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n$$

a $f(x, y)$ después de desarrollarlo por medio del teorema del binomio.

Si las derivadas parciales de f hasta de orden $n + 1$ son continuas en toda una región rectangular con centro en (a, b) , podemos extender la fórmula de Taylor para $F(t)$ a

$$F(t) = F(0) + F'(0)t + \frac{F''(0)}{2!} t^2 + \dots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!} t^n + \text{residuo},$$

y establecemos que $t = 1$ para obtener

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{F''(0)}{2!} + \dots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!} + \text{residuo}.$$

Al remplazar las primeras n derivadas de la derecha de esta última serie por sus expresiones equivalentes de la ecuación (6) evaluada en $t = 0$ y al agregar el término del residuo apropiado, obtenemos la siguiente fórmula.

Fórmula de Taylor para $f(x, y)$ en el punto (a, b)

Suponga que $f(x, y)$ y sus derivadas parciales hasta de orden $n + 1$ son continuas en una región rectangular abierta R , con centro en el punto (a, b) . Entonces, en R ,

$$\begin{aligned} f(a + h, b + k) &= f(a, b) + (hf_x + kf_y)|_{(a,b)} + \frac{1}{2!} (h^2 f_{xx} + 2hk f_{xy} + k^2 f_{yy})|_{(a,b)} \\ &\quad + \frac{1}{3!} (h^3 f_{xxx} + 3h^2 k f_{xxy} + 3hk^2 f_{xyy} + k^3 f_{yyy})|_{(a,b)} + \dots + \frac{1}{n!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f \Big|_{(a,b)} \\ &\quad + \frac{1}{(n + 1)!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^{n+1} f \Big|_{(a+ch, b+ck)}. \end{aligned} \tag{7}$$

Los términos de las primeras n derivadas se evalúan en (a, b) . El último término se evalúa en algún punto $(a + ch, b + ck)$ sobre el segmento de recta que une (a, b) y $(a + h, b + k)$.

Si $(a, b) = (0, 0)$ y consideramos a h y k como variables independientes (denotándolas ahora como x y y), entonces la ecuación (7) adopta la siguiente forma más simple.

Fórmula de Taylor para $f(x, y)$ en el origen

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(0, 0) + xf_x + yf_y + \frac{1}{2!}(x^2f_{xx} + 2xyf_{xy} + y^2f_{yy}) \\ &+ \frac{1}{3!}(x^3f_{xxx} + 3x^2yf_{xxy} + 3xy^2f_{xyy} + y^3f_{yyy}) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f \\ &+ \frac{1}{(n+1)!}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f \Big|_{(cx, cy)} \end{aligned} \quad (8)$$

Los términos de las primeras n derivadas se evalúan en $(0, 0)$. El último término se evalúa en un punto sobre el segmento de recta que une el origen con (x, y) .

La fórmula de Taylor brinda aproximaciones polinomiales para funciones de dos variables. Los términos de las primeras n derivadas nos dan el polinomio; el último término nos da el error de aproximación. Los primeros tres términos de la fórmula de Taylor nos dan la aproximación lineal de la función. Para mejorar esta aproximación lineal, agregamos términos con potencias más altas.

EJEMPLO 1 Obtenga una aproximación cuadrática de $f(x, y) = \sin x \sin y$ cerca del origen. ¿Qué tan precisa es la aproximación si $|x| \leq 0.1$ y $|y| \leq 0.1$?

Solución Consideramos $n = 2$ en la ecuación (8):

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(0, 0) + (xf_x + yf_y) + \frac{1}{2}(x^2f_{xx} + 2xyf_{xy} + y^2f_{yy}) \\ &+ \frac{1}{6}(x^3f_{xxx} + 3x^2yf_{xxy} + 3xy^2f_{xyy} + y^3f_{yyy}) \Big|_{(cx, cy)}. \end{aligned}$$

Calculando los valores de las derivadas parciales

$$\begin{aligned} f(0, 0) &= \sin x \sin y \Big|_{(0,0)} = 0, & f_{xx}(0, 0) &= -\sin x \sin y \Big|_{(0,0)} = 0, \\ f_x(0, 0) &= \cos x \sin y \Big|_{(0,0)} = 0, & f_{xy}(0, 0) &= \cos x \cos y \Big|_{(0,0)} = 1, \\ f_y(0, 0) &= \sin x \cos y \Big|_{(0,0)} = 0, & f_{yy}(0, 0) &= -\sin x \sin y \Big|_{(0,0)} = 0, \end{aligned}$$

tenemos el resultado

$$\sin x \sin y \approx 0 + 0 + 0 + \frac{1}{2}(x^2(0) + 2xy(1) + y^2(0)), \quad \text{o} \quad \sin x \sin y \approx xy.$$

El error en la aproximación es

$$E(x, y) = \frac{1}{6}(x^3f_{xxx} + 3x^2yf_{xxy} + 3xy^2f_{xyy} + y^3f_{yyy}) \Big|_{(cx, cy)}.$$

Las terceras derivadas nunca exceden de 1 en valor absoluto porque son productos de senos y cosenos. También $|x| \leq 0.1$ y $|y| \leq 0.1$. Por lo tanto,

$$|E(x, y)| \leq \frac{1}{6}((0.1)^3 + 3(0.1)^3 + 3(0.1)^3 + (0.1)^3) = \frac{8}{6}(0.1)^3 \leq 0.00134$$

(redondeado). El error no excederá a 0.00134 si $|x| \leq 0.1$ y $|y| \leq 0.1$. ■

Ejercicios 14.9

Determinación de aproximaciones cuadráticas y cúbicas

En los ejercicios 1 a 10, use la fórmula de Taylor para $f(x, y)$ en el origen para obtener aproximaciones cuadráticas y cúbicas cerca del origen.

1. $f(x, y) = xe^y$
2. $f(x, y) = e^x \cos y$
3. $f(x, y) = y \sin x$
4. $f(x, y) = \sin x \cos y$
5. $f(x, y) = e^x \ln(1 + y)$
6. $f(x, y) = \ln(2x + y + 1)$
7. $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$
8. $f(x, y) = \cos(x^2 + y^2)$

$$9. f(x, y) = \frac{1}{1 - x - y} \qquad 10. f(x, y) = \frac{1}{1 - x - y + xy}$$

11. Use la fórmula de Taylor para encontrar una aproximación cuadrática de $f(x, y) = \cos x \cos y$ en el origen. Calcule el error en la aproximación si $|x| \leq 0.1$ y $|y| \leq 0.1$.
12. Use la fórmula de Taylor para obtener una aproximación cuadrática de $e^x \sin y$ en el origen. Calcule el error en la aproximación si $|x| \leq 0.1$ y $|y| \leq 0.1$.

14.10 Derivadas parciales con variables restringidas

En la determinación de las derivadas parciales de funciones como $w = f(x, y)$, hemos supuesto que x y y son independientes. Sin embargo, en muchas aplicaciones no es el caso. Por ejemplo, la energía interna U de un gas se puede expresar como una función $U = f(P, V, T)$ de la presión P , el volumen V y la temperatura T . Si las moléculas individuales del gas no interactúan, P , V y T obedecen (y están restringidas por) la ley de los gases ideales

$$PV = nRT \quad (n \text{ y } R \text{ constantes}),$$

ya que x y y no son independientes. En esta sección aprenderemos cómo obtener las derivadas parciales en situaciones como ésta, las cuales se presentan a menudo en economía, ingeniería y física.*

Cómo decidir cuáles variables son dependientes y cuáles independientes

Si las variables de una función $w = f(x, y, z)$ están restringidas por una relación como la impuesta sobre x , y y z por la ecuación $z = x^2 + y^2$, los significados geométricos y los valores numéricos de las derivadas parciales de f dependerán de las variables elegidas como dependientes o como independientes. Para ver cómo afecta el resultado esta selección, consideremos el cálculo de $\partial w / \partial x$ cuando $w = x^2 + y^2 + z^2$ y $z = x^2 + y^2$.

EJEMPLO 1 Determine $\partial w / \partial x$ si $w = x^2 + y^2 + z^2$ y $z = x^2 + y^2$.

Solución Tenemos dos ecuaciones con cuatro incógnitas x , y , z y w . Como muchos de estos sistemas, podemos despejar dos incógnitas (las variables dependientes) en términos de las otras (las variables independientes). Al pedirnos $\partial w / \partial x$, nos están diciendo que w es una variable dependiente y x una variable independiente. Las opciones para las otras variables son

| <i>Dependiente</i> | <i>Independiente</i> |
|--------------------|----------------------|
| w, z | x, y |
| w, y | x, z |

En cualquier caso, podemos expresar w en forma explícita en términos de las variables independientes seleccionadas. Lo hacemos usando la segunda ecuación $z = x^2 + y^2$ para eliminar la variable dependiente restante en la primera ecuación.

*Esta sección se basa en notas escritas para el MIT por Arthur P. Mattuck.

En el primer caso, la otra variable dependiente es z . La eliminamos de la primera ecuación y la sustituimos por $x^2 + y^2$. La expresión resultante para w es

$$\begin{aligned} w &= x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + (x^2 + y^2)^2 \\ &= x^2 + y^2 + x^4 + 2x^2y^2 + y^4 \end{aligned}$$

y

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2x + 4x^3 + 4xy^2. \quad (1)$$

Ésta es la fórmula para $\partial w/\partial x$ cuando x y y son las variables independientes.

En el segundo caso, donde las variables independientes son x y z y la variable dependiente restante es y , eliminamos esta última de la expresión para w y sustituimos y^2 en la segunda ecuación por $z - x^2$. Esto nos da

$$w = x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + (z - x^2) + z^2 = z + z^2$$

y

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0. \quad (2)$$

Ésta es la fórmula para $\partial w/\partial x$ cuando x y z son las variables independientes.

Las fórmulas $\partial w/\partial x$ en las ecuaciones (1) y (2) son claramente diferentes. No podemos cambiar una fórmula por otra usando la relación $z = x^2 + y^2$. No existe sólo una $\partial w/\partial x$, sino dos, y vemos que la instrucción original de obtener $\partial w/\partial x$ era incompleta. ¿Cuál $\partial w/\partial x$?, preguntáramos.

Las interpretaciones geométricas de las ecuaciones (1) y (2) ayudan a explicar por qué difieren las ecuaciones. La función $w = x^2 + y^2 + z^2$ mide el cuadrado de la distancia del punto (x, y, z) al origen. La condición $z = x^2 + y^2$ dice que el punto (x, y, z) está en el paraboloide de revolución ilustrado en la figura 14.58. ¿Qué significa calcular $\partial w/\partial x$ en un punto $P(x, y, z)$ que sólo se mueve sobre esta superficie? ¿Cuál es el valor de $\partial w/\partial x$ cuando las coordenadas de P son, digamos $(1, 0, 1)$?

Si consideramos a x y y como independientes, entonces obtenemos $\partial w/\partial x$ al mantener fija a y (en este caso $y = 0$) y hacemos variar a x . Por lo tanto, P se desplaza a lo largo de la parábola $z = x^2$ en el plano xz . Cuando P se mueve sobre la parábola, w , que es el cuadrado de la distancia de P al origen, cambia. Calculamos $\partial w/\partial x$, que en este caso (nuestra primera solución de arriba) será

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2x + 4x^3 + 4xy^2.$$

En el punto $P(1, 0, 1)$, el valor de la derivada es

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2 + 4 + 0 = 6.$$

Si consideramos a x y z como independientes, entonces obtenemos $\partial w/\partial x$ al mantener fija a z mientras x varía. Puesto que la coordenada z de P es 1, al variar x tenemos que P se desplaza a lo largo de una circunferencia en el plano $z = 1$. Cuando P se mueve a lo largo de esta circunferencia, su distancia al origen es constante y w , al ser el cuadrado de esta distancia, no varía. Es decir,

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0,$$

como vimos en nuestra segunda solución. ■

Cómo encontrar $\partial w/\partial x$ cuando las variables de $w = f(x, y, z)$ están restringidas por otra ecuación

Como vimos en el ejemplo 1, una rutina para obtener $\partial w/\partial x$, cuando las variables de la función $w = f(x, y, z)$ están relacionados por otra ecuación, incluye tres pasos. Estos pasos también se aplican para obtener $\partial w/\partial y$ y $\partial w/\partial z$.

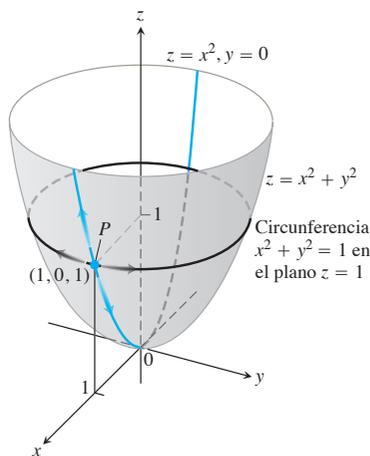


FIGURA 14.58 Si P está restringido al paraboloide $z = x^2 + y^2$, el valor de la derivada parcial de $w = x^2 + y^2 + z^2$ con respecto a x en P depende de la dirección del movimiento (ejemplo 1). (1) Cuando x varía, con $y = 0$, P se mueve hacia arriba o hacia abajo en la superficie de la parábola $z = x^2$ en el plano xz con $\partial w/\partial x = 2x + 4x^3$. (2) Cuando x cambia, con $z = 1$, P se mueve sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, $z = 1$ y $\partial w/\partial x = 0$.

1. *Decidir* cuáles variables serán dependientes y cuáles independientes. (En la práctica, la decisión se basa en el contexto físico o teórico de nuestro trabajo. En los ejercicios al final de esta sección, decimos cuáles variables son cuáles).
2. *Eliminar* la(s) otra(s) variable(s) dependiente(s) en la expresión para w .
3. *Derivar* en la forma habitual.

Si no podemos llevar a cabo el paso 2 después de decidir cuáles son las variables dependientes, derivamos las ecuaciones como están y después tratamos de despejar $\partial w/\partial x$. El siguiente ejemplo muestra cómo se hace.

EJEMPLO 2 Obtenga $\partial w/\partial x$ en el punto $(x, y, z) = (2, -1, 1)$ si

$$w = x^2 + y^2 + z^2, \quad z^3 - xy + yz + y^3 = 1,$$

y x y y son las variables independientes.

Solución No es conveniente eliminar z en la expresión de w . Por lo tanto, derivamos ambas ecuaciones en forma implícita con respecto a x , tratando a x y y como variables independientes, y a w y z como variables dependientes. Esto nos da

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2x + 2z \frac{\partial z}{\partial x} \quad (3)$$

y

$$3z^2 \frac{\partial z}{\partial x} - y + y \frac{\partial z}{\partial x} + 0 = 0. \quad (4)$$

Estas ecuaciones pueden combinarse para expresar $\partial w/\partial x$ en términos de x , y y z . Despejamos $\partial z/\partial x$ en la ecuación (4) para obtener

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{y + 3z^2}$$

y al sustituir en la ecuación (3) tenemos

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2x + \frac{2yz}{y + 3z^2}.$$

El valor de esta derivada en $(x, y, z) = (2, -1, 1)$ es

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{(2,-1,1)} = 2(2) + \frac{2(-1)(1)}{-1 + 3(1)^2} = 4 + \frac{-2}{2} = 3. \quad \blacksquare$$

BIOGRAFÍA HISTÓRICA

Sonya Kovalevsky
(1850–1891)

Notación

Para mostrar cuáles variables se consideran como independientes al calcular una derivada, podemos usar la siguiente notación:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_y \quad \partial w/\partial x \text{ con } x \text{ y } y \text{ independientes}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,t} \quad \partial f/\partial y \text{ con } y, x \text{ y } t \text{ independientes}$$

EJEMPLO 3 Obtenga $(\partial w/\partial x)_{y,z}$ si $w = x^2 + y - z + \text{sen } t$ y $x + y = t$.

Solución Con x, y y z independientes, tenemos

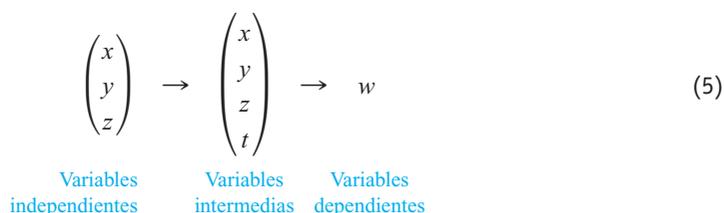
$$\begin{aligned} t &= x + y, & w &= x^2 + y - z + \text{sen}(x + y) \\ \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{y,z} &= 2x + 0 - 0 + \cos(x + y) \frac{\partial}{\partial x}(x + y) \\ &= 2x + \cos(x + y). \end{aligned}$$

Diagramas de flechas

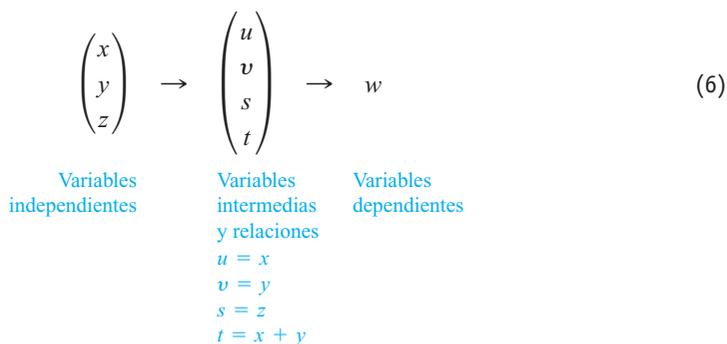
En la resolución de problemas como el del ejemplo 3, es útil iniciar con un diagrama de flechas que muestre la relación entre las variables y las funciones. Si

$$w = x^2 + y - z + \text{sen } t \quad y \quad x + y = t$$

y nos piden calcular $\partial w/\partial x$ cuando x, y y z son independientes, el diagrama adecuado es como el siguiente:



Para evitar confusión entre las variables independientes y las intermedias con los mismos nombres simbólicos en el diagrama, es útil renombrar las variables intermedias (de manera que se vean como funciones de las variables independientes). Así, $u = x$, $v = y$, y $s = z$ denotan las variables intermedias renombradas. Con esta notación, el diagrama de flechas queda como



El diagrama muestra las variables independientes a la izquierda, las variables intermedias y su relación con las variables independientes en la parte central, y las variables dependientes a la derecha. La función w queda entonces como

$$w = u^2 + v - s + \text{sen } t,$$

donde

$$u = x, \quad v = y, \quad s = z, \quad y \quad t = x + y.$$

Para calcular $\partial w/\partial x$, aplicamos a w la regla de la cadena para cuatro variables, auxiliados por el diagrama de flechas de la ecuación (6):

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} \\ &= (2u)(1) + (1)(0) + (-1)(0) + (\cos t)(1) \\ &= 2u + \cos t \\ &= 2x + \cos(x + y). \end{aligned}$$

Al sustituir las variables independientes originales $u = x$ y $t = x + y$

Ejercicios 14.10

Cálculo de derivadas parciales con variables restringidas

En los ejercicios 1 a 3, inicie trazando un diagrama que muestre las relaciones entre las variables.

1. Si $w = x^2 + y^2 + z^2$, $z = x^2 + y^2$, determine

a. $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_z$ b. $\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_x$ c. $\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_y$.

2. Si $w = x^2 + y - z + \sin t$ y $x + y = t$, determine

a. $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{x,z}$ b. $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{z,t}$ c. $\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_{x,y}$

d. $\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_{y,t}$ e. $\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_{x,z}$ f. $\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_{y,z}$.

3. Sea $U = f(P, V, T)$ la energía interna de un gas que obedece la ley del gas ideal $PV = nRT$ (n y R constantes). Determine

a. $\left(\frac{\partial U}{\partial P}\right)_V$ b. $\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$.

4. Calcule

a. $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_y$ b. $\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_y$

en el punto $(x, y, z) = (0, 1, \pi)$ si

$$w = x^2 + y^2 + z^2 \quad y \quad y \sin z + z \sin x = 0.$$

5. Calcule

a. $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_x$ b. $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_z$

en el punto $(w, x, y, z) = (4, 2, 1, -1)$ si

$$w = x^2y^2 + yz - z^3 \quad y \quad x^2 + y^2 + z^2 = 6.$$

6. Calcule $(\partial u/\partial y)_x$ en el punto $(u, v) = (\sqrt{2}, 1)$, si $x = u^2 + v^2$ y $y = uv$.

7. Suponga que $x^2 + y^2 = r^2$ y $x = r \cos \theta$, como en coordenadas polares. Obtenga

$$\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)_\theta \quad y \quad \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)_y.$$

8. Suponga que

$$w = x^2 - y^2 + 4z + t \quad y \quad x + 2z + t = 25.$$

Demuestre que las ecuaciones

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2x - 1 \quad y \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 2x - 2$$

cada una nos da $\partial w/\partial x$, dependiendo de las variables seleccionadas como dependientes y las seleccionadas como independientes. Identifique las variables independientes en cada caso.

Teoría y ejemplos

9. Compruebe el hecho, ampliamente usado en hidrodinámica, que si $f(x, y, z) = 0$, entonces

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1.$$

(Sugerencia: Expresé todas las derivadas en términos de las derivadas parciales formales $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ y $\partial f/\partial z$).

10. Si $z = x + f(u)$, donde $u = xy$, demuestre que

$$x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = x.$$

11. Suponga que la ecuación $g(x, y, z) = 0$ determina a z como una función derivable de variables independientes x y y y que $g \neq 0$. Demuestre que

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x = -\frac{\partial g/\partial y}{\partial g/\partial z}.$$

12. Suponga que $f(x, y, z, w) = 0$ y $g(x, y, z, w) = 0$ definen a z y w como funciones derivables de las variables independientes x y y , y suponga que

$$\frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial w} - \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial g}{\partial z} \neq 0.$$

Demuestre que

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial w} - \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial w} - \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial g}{\partial z}}$$

y

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_x = -\frac{\frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial z}}{\frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial w} - \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial g}{\partial z}}.$$

Capítulo 14 Preguntas de repaso

- ¿Qué es una función real de dos variables independientes? ¿De tres variables independientes? Dé ejemplos.
- ¿Qué significa que los conjuntos en el plano o el espacio sean abiertos? ¿Cerrados? Dé ejemplos. Dé ejemplos de conjuntos que no sean abiertos ni cerrados.
- ¿Cómo desplegaría gráficamente los valores de una función $f(x, y)$ de dos variables independientes? ¿Cómo lo haría para una función $f(x, y, z)$ de tres variables independientes?
- ¿Qué quiere decir que una función $f(x, y)$ tenga un límite L cuando $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$? ¿Cuáles son las propiedades básicas de los límites de funciones de dos variables independientes?
- ¿Cuándo ocurre que una función de dos (o tres) variables independientes es continua en un punto de su dominio? Dé ejemplos de funciones que sean continuas en algunos puntos pero no en otros.
- ¿Qué se puede decir acerca de las combinaciones algebraicas y composiciones de funciones continuas?
- Explique el criterio de dos trayectorias para la inexistencia de límites.
- ¿Cómo se definen las derivadas parciales $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ de una función $f(x, y)$? ¿Cómo se interpretan y se calculan?
- ¿Cómo difiere la relación entre las primeras derivadas parciales y la continuidad de las funciones de dos variables independientes, y la relación entre la primera derivada y la continuidad de las funciones reales de una variable independiente? Dé un ejemplo.
- ¿Cuál es el teorema de las derivadas mixtas para las derivadas parciales mixtas de segundo orden? ¿Cómo puede ayudar este teorema en el cálculo de las derivadas parciales de segundo orden y de orden superior? Dé ejemplos.
- ¿Qué significa que una función $f(x, y)$ sea diferenciable? ¿Qué dice el teorema del incremento acerca de la diferenciabilidad?
- ¿Cómo se deduce del examen de f_x y f_y que una función $f(x, y)$ es diferenciable? ¿Cuál es la relación entre la diferenciabilidad de f y la continuidad de f en un punto?
- ¿Qué es la regla general de la cadena? ¿Qué forma adopta para funciones de dos variables independientes? ¿Para tres variables independientes? ¿Para funciones definidas en superficies? ¿Cómo grafica estas diferentes formas? Dé ejemplos. ¿Qué patrón permite recordar las diversas formas?
- ¿Cuál es la derivada de una función $f(x, y)$ en un punto P_0 en la dirección de un vector unitario \mathbf{u} ? ¿Qué razón describe? ¿Qué interpretación geométrica tiene? Dé ejemplos.
- ¿Qué es el vector gradiente de una función derivable $f(x, y)$? ¿Cómo se relaciona con las derivadas direccionales de la función? Defina resultados análogos para funciones de tres variables independientes.
- ¿Cómo obtiene la recta tangente en un punto sobre una curva de nivel de una función derivable $f(x, y)$? ¿Cómo obtiene el plano tangente y la recta normal en un punto sobre una superficie de nivel de una función derivable $f(x, y, z)$? Dé ejemplos.
- ¿Cómo puede utilizar las derivadas direccionales para estimar el cambio?
- ¿Cómo se da una aproximación lineal de una función $f(x, y)$ de dos variables independientes en un punto (x_0, y_0) ? ¿Por qué haría esto? ¿Cómo se da una aproximación lineal de una función de tres variables independientes?
- ¿Qué puede decir acerca de la precisión de las aproximaciones lineales de las funciones de dos (tres) variables independientes?
- Si (x, y) se mueve de (x_0, y_0) a un punto $(x_0 + dx, y_0 + dy)$ cercano, ¿cómo podría estimar el cambio resultante en el valor de una función diferenciable $f(x, y)$? Dé un ejemplo.
- ¿Cómo define los máximos locales, los mínimos locales y puntos de silla para una función derivable $f(x, y)$? Dé ejemplos.
- ¿Cuáles criterios de derivadas están disponibles para determinar los valores extremos locales de una función $f(x, y)$? ¿De qué manera le simplifican la búsqueda de estos valores? Dé ejemplos.
- ¿Cómo encuentra los valores extremos de una función continua $f(x, y)$ en una región cerrada y acotada en el plano xy ? Dé un ejemplo.
- Describa el método de multiplicadores de Lagrange y dé ejemplos.
- ¿Cómo genera la fórmula de Taylor para una función $f(x, y)$ las aproximaciones polinomiales y las estimaciones de errores?
- Si $w = f(x, y, z)$ ¿dónde están restringidas las variables x, y y z por la ecuación $g(x, y, z) = 0$? ¿Cuál es el significado de la notación $(\partial w/\partial x)_y$? ¿Cómo puede ayudar un diagrama de flechas para calcular esta derivada parcial con variables restringidas? Dé ejemplos.

Capítulo 14 Ejercicios de práctica

Dominio, rango y curvas de nivel

En los ejercicios 1 a 4, determine el dominio y el rango de la función dada e identifique sus curvas de nivel. Trace una curva de nivel típica.

- $f(x, y) = 9x^2 + y^2$
- $f(x, y) = e^{x+y}$
- $g(x, y) = 1/xy$
- $g(x, y) = \sqrt{x^2 - y}$

En los ejercicios 5 a 8, obtenga el dominio y el rango de la función dada e identifique sus superficies de nivel. Trace una superficie de nivel típica.

- $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$
- $g(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + 9z^2$

$$7. h(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$8. k(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2 + 1}$$

Evaluación de límites

Calcule los límites en los ejercicios 9 a 14.

$$9. \lim_{(x,y) \rightarrow (\pi, \ln 2)} e^y \cos x \qquad 10. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2+y}{x + \cos y}$$

11. $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x-y}{x^2-y^2}$ 12. $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x^3y^3-1}{xy-1}$
 13. $\lim_{P \rightarrow (1,-1,e)} \ln|x+y+z|$ 14. $\lim_{P \rightarrow (1,-1,-1)} \tan^{-1}(x+y+z)$

Considere diferentes trayectorias de aproximación, demuestre que los límites de los ejercicios 15 y 16 no existen.

15. $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y \neq x^2}} \frac{y}{x^2-y}$ 16. $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ xy \neq 0}} \frac{x^2+y^2}{xy}$
 17. **Extensión continua** Sea $f(x,y) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$ para $(x,y) \neq 0$. ¿Es posible definir $f(0,0)$ de manera que f sea continua en el origen? ¿Por qué?
 18. **Extensión continua** Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sen(x-y)}{|x|+|y|}, & |x|+|y| \neq 0 \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

¿Es f continua en el origen? ¿Por qué?

Derivadas parciales

En los ejercicios 19 a 24, calcule la derivada parcial de la función con respecto a cada variable.

19. $g(r, \theta) = r \cos \theta + r \sen \theta$
 20. $f(x,y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + \tan^{-1} \frac{y}{x}$
 21. $f(R_1, R_2, R_3) = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$
 22. $h(x,y,z) = \sen(2\pi x + y - 3z)$
 23. $P(n, R, T, V) = \frac{nRT}{V}$ (ley del gas ideal)
 24. $f(r, l, T, w) = \frac{1}{2rl} \sqrt{\frac{T}{\pi w}}$

Derivadas parciales de segundo orden

Calcule las derivadas parciales de segundo orden de las funciones en los ejercicios 25 a 28.

25. $g(x,y) = y + \frac{x}{y}$ 26. $g(x,y) = e^x + y \sen x$
 27. $f(x,y) = x + xy - 5x^3 + \ln(x^2 + 1)$
 28. $f(x,y) = y^2 - 3xy + \cos y + 7e^y$

Cálculos con la regla de la cadena

29. Calcule $\partial w / \partial t$ en $t = 0$ si $w = \sen(xy + \pi)$, $x = e^t$, $y = \ln(t + 1)$.
 30. Calcule $\partial w / \partial t$ en $t = 1$ si $w = xe^y$ y $\sen z - \cos z$, $x = 2$, $y = t - 1 + \ln t$, $yz = \pi t$.
 31. Calcule $\partial w / \partial r$ y $\partial w / \partial s$ cuando $r = \pi$ y $s = 0$ si $w = \sen(2x - y)$, $x = r + \sen s$, $y = rs$.
 32. Determine $\partial w / \partial u$ y $\partial w / \partial v$ cuando $u = v = 0$ si $w = \ln - \tan^{-1}x$ y $x = 2e^u \cos v$.
 33. Obtenga el valor de la derivada $f(x,y,z) = xy + yz + xz$ con respecto a t sobre la curva $x = \cos t$, $y = \sen t$, $z = \cos 2t$ en $t = 1$.

34. Demuestre que si $w = f(s)$ es cualquier función derivable de s y si $s = y + 5x$, entonces

$$\frac{\partial w}{\partial x} - 5 \frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Derivación implícita

Suponga que las ecuaciones de los ejercicios 35 y 36 definen a y como una función derivable de x , calcule el valor dy/dx en el punto P .

35. $1 - x - y^2 - \sen xy = 0$, $P(0, 1)$
 36. $2xy + e^{x+y} - 2 = 0$, $P(0, \ln 2)$

Derivadas direccionales

En los ejercicios 37 a 40, determine las direcciones en las cuales f crece y decrece más rápidamente en P_0 , y calcule la derivada de f en cada dirección. Además, obtenga la derivada de f en P_0 en la dirección del vector \mathbf{v} .

37. $f(x,y) = \cos x \cos y$, $P_0(\pi/4, \pi/4)$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$
 38. $f(x,y) = x^2e^{-2y}$, $P_0(1, 0)$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$
 39. $f(x,y,z) = \ln(2x + 3y + 6z)$, $P_0(-1, -1, 1)$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$
 40. $f(x,y,z) = x^2 + 3xy - z^2 + 2y + z + 4$, $P_0(0, 0, 0)$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

41. **Derivada en dirección de la velocidad** Calcule la derivada de $f(x,y,z) = xyz$ en la dirección del vector velocidad de la hélice

$$\mathbf{r}(t) = (\cos 3t)\mathbf{i} + (\sen 3t)\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$$

en $t = \pi/3$.

42. **Máxima derivada direccional** ¿Cuál es el valor máximo que la derivada direccional de $f(x,y,z) = xyz$ puede tener en el punto $(1, 1, 1)$?
 43. **Derivadas direccionales con valores dados** En el punto $(1, 2)$, la función $f(x,y)$ tiene una derivada de 2 en dirección hacia $(2, 2)$ y una derivada de -2 en dirección hacia $(1, 1)$
 a. Obtenga $f_x(1, 2)$ y $f_y(1, 2)$.
 b. Obtenga la derivada de f en $(1, 2)$ en dirección hacia el punto $(4, 6)$.
 44. ¿Cuáles de los siguientes enunciados son verdaderos si $f(x,y)$ es derivable en (x_0, y_0) ? Justifique sus respuestas.
 a. Si \mathbf{u} es un vector unitario, la derivada de f en (x_0, y_0) en la dirección de \mathbf{u} es $(f_x(x_0, y_0)\mathbf{i} + f_y(x_0, y_0)\mathbf{j}) \cdot \mathbf{u}$.
 b. La derivada de f en (x_0, y_0) en la dirección de \mathbf{u} es un vector.
 c. La derivada direccional de f en (x_0, y_0) tiene su valor máximo en la dirección de ∇f .
 d. En (x_0, y_0) , el vector ∇f es normal a la curva $f(x,y) = (x_0, y_0)$.

Gradientes, planos tangentes y rectas normales

En los ejercicios 45 y 46, grafique la superficie $f(x,y,z) = c$ junto con ∇f en los puntos dados.

45. $x^2 + y + z^2 = 0$; $(0, -1, \pm 1)$, $(0, 0, 0)$
 46. $y^2 + z^2 = 4$; $(2, \pm 2, 0)$, $(2, 0, \pm 2)$

En los ejercicios 47 y 48, determine una ecuación para el plano tangente a la superficie de nivel $f(x, y, z) = c$ en el punto P_0 . También obtenga las ecuaciones paramétricas de la recta normal a la superficie en P_0 .

47. $x^2 - y - 5z = 0, \quad P_0(2, -1, 1)$

48. $x^2 + y^2 + z = 4, \quad P_0(1, 1, 2)$

En los ejercicios 49 y 50, obtenga la ecuación para el plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto dado.

49. $z = \ln(x^2 + y^2), \quad (0, 1, 0)$

50. $z = 1/(x^2 + y^2), \quad (1, 1, 1/2)$

En los ejercicios 51 y 52, determine las ecuaciones para las rectas tangentes y normales a la curva de nivel $f(x, y) = c$ en el punto P_0 . Luego trace las rectas y la curva de nivel junto con f en P_0 .

51. $y - \sin x = 1, \quad P_0(\pi, 1)$ 52. $\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} = \frac{3}{2}, \quad P_0(1, 2)$

Rectas tangentes a curvas

En los ejercicios 53 y 54, determine las ecuaciones paramétricas para la recta que es tangente a la curva de intersección de las superficies en el punto dado.

53. Superficies: $x^2 + 2y + 2z = 4, \quad y = 1$

Punto: $(1, 1, 1/2)$

54. Superficies: $x + y^2 + z = 2, \quad y = 1$

Punto: $(1/2, 1, 1/2)$

Aproximación lineal

En los ejercicios 55 y 56, determine la aproximación lineal $L(x, y)$ de la función $f(x, y)$ en el punto P_0 . Luego obtenga una cota superior para la magnitud del error E en la aproximación $f(x, y) \approx L(x, y)$ en el rectángulo R .

55. $f(x, y) = \sin x \cos y, \quad P_0(\pi/4, \pi/4)$

$R: \left| x - \frac{\pi}{4} \right| \leq 0.1, \quad \left| y - \frac{\pi}{4} \right| \leq 0.1$

56. $f(x, y) = xy - 3y^2 + 2, \quad P_0(1, 1)$

$R: |x - 1| \leq 0.1, \quad |y - 1| \leq 0.2$

Determine las aproximaciones lineales de las funciones en los ejercicios 57 y 58 en los puntos dados.

57. $f(x, y, z) = xy + 2yz - 3xz$ en $(1, 0, 0)$ y $(1, 1, 0)$

58. $f(x, y, z) = \sqrt{2} \cos x \sin(y + z)$ en $(0, 0, \pi/4)$ y $(\pi/4, \pi/4, 0)$

Estimación y sensibilidad a los cambios

59. **Medición del volumen de una tubería** Usted planea calcular el volumen dentro de un tramo de tubería de alrededor de 36 in de diámetro y 1 milla de largo. ¿Con cuál medición debe ser más cuidadoso, con el largo o con el diámetro? ¿Por qué?

60. **Sensibilidad al cambio** ¿Es $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 3$ más sensible a los cambios en x o a los cambios en y cuando está cerca del punto $(1, 2)$? ¿Cómo lo sabe?

61. **Cambio en un circuito eléctrico** Suponga que la corriente I (en amperes) en un circuito eléctrico se relaciona con el voltaje V (en volts) y la resistencia R (en ohms) mediante la ecuación $I = V/R$. Si el voltaje cae de 24 a 23 volts y la resistencia cae de 100 a 80 ohms, ¿ I crecerá o decrecerá? ¿Aproximadamente cuánto? ¿El cambio de I es más sensible al cambio del voltaje o al cambio en la resistencia? ¿Cómo lo sabe?

62. **Error máximo al estimar el área de una elipse** Si $a = 10$ cm y $b = 16$ cm con una aproximación milimétrica, ¿cuál es error porcentual máximo esperado en el cálculo del área $A = \pi ab$ de la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$?

63. **Error al estimar un producto** Sean $y = uv$ y $z = u + v$, donde u y v son variables independientes positivas.

a. Si u se mide con un error del 2% y v con un error del 3%, ¿aproximadamente cuál es el error porcentual en el valor calculado de y ?

b. Demuestre que el error porcentual del valor calculado de z es menor que el error porcentual del valor de y .

64. **Índice cardíaco** Para poder comparar a las personas en estudios cardiológicos, los investigadores dividen la salida cardíaca medida entre el área de la superficie corporal para obtener el *índice cardíaco* C :

$$C = \frac{\text{salida cardíaca}}{\text{área de la superficie sorporal}}$$

El área de la superficie corporal B de una persona con peso w y altura h se calcula mediante la fórmula

$$B = 71.84w^{0.425}h^{0.725},$$

la cual nos da B en centímetros cuadrados cuando w se mide en kilogramos y h en centímetros. Usted va a calcular el índice cardíaco de una persona de 180 cm de estatura, 70 kg de peso, con una salida cardíaca de 7 L/min. ¿Qué tendrá un mayor efecto sobre el cálculo: un error de 1 kg en la medición del peso o 1 cm de error en la medición de la altura?

Extremos locales

Verifique la existencia de máximos y mínimos locales, así como la de puntos de silla de las funciones en los ejercicios 65 a 70. Obtenga el valor de cada función en estos puntos.

65. $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 2x + 2y - 4$

66. $f(x, y) = 5x^2 + 4xy - 2y^2 + 4x - 4y$

67. $f(x, y) = 2x^3 + 3xy + 2y^3$

68. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 15$

69. $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3x^2 - 3y^2$

70. $f(x, y) = x^4 - 8x^2 + 3y^2 - 6y$

Extremos absolutos

En los ejercicios 71 a 78, determine los valores máximos y mínimos de f en la región R .

71. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x + 3y$

R : la región triangular determinada en el primer cuadrante por la recta $x + y = 4$.

72. $f(x, y) = x^2 - y^2 - 2x + 4y + 1$

R : la región rectangular en el primer cuadrante acotada por los ejes coordenados y las rectas $x = 4$ y $y = 2$.

73. $f(x, y) = y^2 - xy - 3y + 2x$

R : la región cuadrada encerrada por las rectas $x = \pm 2$ y $y = \pm 2$

74. $f(x, y) = 2x + 2y - x^2 - y^2$

R : la región cuadrada acotada por los ejes coordenados y las rectas $x = 2$ y $y = 2$ en el primer cuadrante.

75. $f(x, y) = x^2 - y^2 - 2x + 4y$

R : la región triangular acotada por abajo por el eje x , por arriba por la recta $y = x + 2$, y a la derecha por la recta $x = 2$.

76. $f(x, y) = 4xy - x^4 - y^4 + 16$
 R: la región triangular acotada por abajo por la recta $y = -2$, por arriba por la recta $y = x$, y a la derecha por la recta $x = 2$.
77. $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3x^2 - 3y^2$
 R: la región cuadrada encerrada por las rectas $x = \pm 1$ y $y = \pm 1$.
78. $f(x, y) = x^3 + 3xy + y^3 + 1$
 R: la región cuadrada encerrada por las rectas $x = \pm 1$ y $y = \pm 1$.

Multiplicadores de Lagrange

79. **Extremos en una circunferencia** Determine los valores extremos de $f(x, y) = x^2 + y^2$ en la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$.
80. **Extremos en una circunferencia** Determine los valores extremos de $f(x, y) = xy$ en la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$.
81. **Extremos en un disco** Calcule los valores extremos de $f(x, y) = x^2 + 3y^2 + 2y$ en el disco $x^2 + y^2 \leq 1$.
82. **Extremos en un disco** Determine los valores extremos de $f(x, y) = x^2 + y^2 - 3x - xy$ en un disco $x^2 + y^2 \leq 9$.
83. **Extremos en una esfera** Obtenga los valores extremos de $f(x, y, z) = x - y + z$ en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
84. **Distancia mínima al origen** Determine los puntos sobre la superficie $x^2 - zy = 4$ más cercanos al origen.
85. **Minimizar el costo de una caja** Una caja rectangular cerrada tiene un volumen de $V \text{ cm}^3$. El costo del material usado en la caja es a centavos/cm² para la tapa y el fondo, b centavos/cm² para el frente y la parte posterior, y c centavos/cm² para el resto de las caras. ¿Qué dimensiones minimizan el costo total de los materiales?
86. **Menor volumen** Encuentre el plano $x/a + y/b + z/c = 1$ que pasa por el punto $(2, 1, 2)$ y corta el menor volumen en el primer octante.
87. **Extremos en curvas de intersección de superficies** Determine los valores extremos de $f(x, y, z) = x(y + z)$ sobre la curva de intersección del cilindro circular recto $x^2 + y^2 = 1$ y el cilindro hiperbólico $xz = 1$.
88. **Distancia mínima al origen sobre una curva de intersección de un plano y un cono** Determine el punto más cercano al origen sobre la curva de intersección del plano $x + y + z = 1$ y el cono $z^2 = 2x^2 + 2y^2$.

Derivadas parciales con variables restringidas

En los ejercicios 89 y 90, primero trace un diagrama que muestre las relaciones entre las variables.

89. Si $w = x^2e^{yz}$ y $z = x^2 - y^2$ determine
- a. $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_z$ b. $\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_x$ c. $\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_y$.
90. Sea $U = f(P, V, T)$ la energía interna de un gas que obedece la ley de los gases ideales $PV = nRT$ (n y R constantes). Determine
- a. $\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_P$ b. $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T$.

Teoría y ejemplos

91. Sean $w = f(r, \theta)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, y $\theta = \tan^{-1}(y/x)$. Obtenga $0w/0x$ y $0w/0y$; exprese sus respuestas en términos de r y θ .
92. Sean $z = f(u, v)$, $u = ax + by$, y $v = ax - by$. Exprese zx y zy en términos de f_u, f_v y las constantes a y b .

93. Si a y b son constantes, $w = u^3 + \tanh u + \cos u$, y $u = ax + by$, demuestre que

$$a \frac{\partial w}{\partial y} = b \frac{\partial w}{\partial x}.$$

94. **Uso de la regla de la cadena** Si $w = \ln(x^2 + y^2 + 2z)$, $x = r + s$, $y = r - s$, $z = 2rs$, determine w_r y w_s mediante la regla de la cadena. Luego verifique su respuesta de otra manera.
95. **Ángulo entre vectores** Las ecuaciones $e^u \cos v - x = 0$ y $e^u \sin v - y = 0$ definen a u y v como funciones derivables de x y y . Demuestre que el ángulo entre los vectores

$$\frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} \quad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial v}{\partial y} \mathbf{j}$$

es constante.

96. **Coordenadas polares y segundas derivadas** La introducción de las coordenadas polares $x = r \cos \theta$ y $y = r \sin \theta$ cambia $f(x, y)$ a $g(r, \theta)$. Obtenga el valor de $\partial^2 g / \partial \theta^2$ en el punto $(r, \theta) = (2, \pi/2)$, dado que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 1$$

en ese punto.

97. **Recta normal paralela a un plano** Encuentre los puntos de la superficie

$$(y + z)^2 + (z - x)^2 = 16$$

donde la recta normal es paralela al plano yz .

98. **Plano tangente paralelo al plano xy** Encuentre los puntos sobre la superficie

$$xy + yz + zx - x - z^2 = 0$$

donde el plano tangente es paralelo al plano xy .

99. **Cuando el gradiente es paralelo al vector de posición** Suponga que $\nabla f(x, y, z)$ siempre es paralelo al vector de posición $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Demuestre que $f(0, 0, a) = f(0, 0, -a)$ para todas las a .

100. Derivación en todas direcciones, pero sin gradiente

La derivada direccional de un lado de f en $P(x_0, y_0, z_0)$ en la dirección $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ es el número

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + su_1, y_0 + su_2, z_0 + su_3) - f(x_0, y_0, z_0)}{s}.$$

demuestre que la derivada direccional de un lado de

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

en el origen es igual a 1 en cualquier dirección pero que f no tiene vector gradiente en el origen.

101. **Recta normal por el origen** Demuestre que la recta normal a la superficie $xy + z = 2$ en el punto $(1, 1, 1)$ pasa por el origen.

102. Plano tangente y recta normal

- a. Grafique la superficie $x^2 - y^2 + z^2 = 4$.
- b. Obtenga un vector normal a la superficie en $(2, -3, 3)$. Agregue el vector a su dibujo.
- c. Determine ecuaciones para el plano tangente y recta normal en $(2, -3, 3)$.

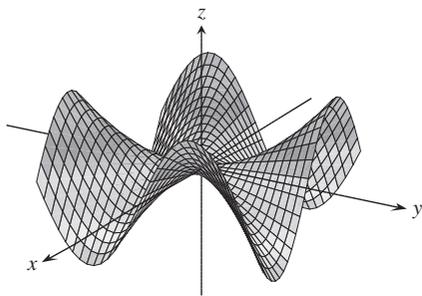
Capítulo 14 Ejercicios adicionales y avanzados

Derivadas parciales

1. **Función con punto de silla en el origen** Si resolvió el ejercicio 60 de la sección 14.2, sabe que la función

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(véase la siguiente figura) es continua en $(0, 0)$. Obtenga $f_{xy}(0, 0)$ y $f_{yx}(0, 0)$.



2. **Búsqueda de una función a partir de las segundas derivadas parciales** Obtenga una función $w = f(x, y)$ cuyas primeras derivadas parciales son $\partial w / \partial x = 1 + e^x \cos y$ y $\partial w / \partial y = 2y - e^x \sin y$, y cuyo valor en el punto $(\ln 2, 0)$ es $\ln 2$.

3. **Prueba de la regla de Leibniz** La regla de Leibniz dice que si f es continua en $[a, b]$ y si $u(x)$ y $v(x)$ son funciones derivables de x con valores en $[a, b]$, entonces

$$\frac{d}{dx} \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt = f(v(x)) \frac{dv}{dx} - f(u(x)) \frac{du}{dx}.$$

Pruebe la regla considerando

$$g(u, v) = \int_u^v f(t) dt, \quad u = u(x), \quad v = v(x)$$

y calculando dg/dx con la regla de la cadena.

4. **Determinación de una función con segundas parciales restringidas**

Suponga que f es una función dos veces derivable de r , que

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \text{ y que}$$

$$f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 0.$$

Demuestre que para algunas constantes a y b ,

$$f(r) = \frac{a}{r} + b.$$

5. **Funciones homogéneas** Una función $f(x, y)$ es *homogénea de grado n* (n es un entero no negativo) si $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$ para todas las t, x y y . Para tal función (suficientemente derivable), pruebe que

a. $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = n f(x, y)$

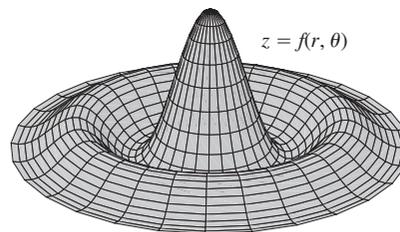
b. $x^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) + 2xy \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) + y^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) = n(n-1)f.$

6. **Superficie en coordenadas polares** Sea

$$f(r, \theta) = \begin{cases} \frac{\sin 6r}{6r}, & r \neq 0 \\ 1, & r = 0, \end{cases}$$

donde r y θ son coordenadas polares. Determine

- a. $\lim_{r \rightarrow 0} f(r, \theta)$ b. $f_r(0, 0)$ c. $f_\theta(r, \theta), \quad r \neq 0.$



Gradientes y tangentes

7. **Propiedades de los vectores de posición** Sean $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ y $r = |\mathbf{r}|$.

- a. Demuestre que $\nabla r = \mathbf{r}/r$.
 b. Demuestre que $\nabla(r^n) = nr^{n-2}\mathbf{r}$.
 c. Encuentre una función cuyo gradiente sea \mathbf{r} .
 d. Demuestre que $\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = r dr$.
 e. Demuestre que $\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{A}$ para cualquier vector constante \mathbf{A} .

8. **Gradiente ortogonal a una tangente** Suponga que una función derivable $f(x, y)$ tiene el valor constante c a lo largo de la curva derivable $x = g(t), y = h(t)$; es decir,

$$f(g(t), h(t)) = c$$

para todos los valores de t . Derive ambos lados de esta ecuación con respecto a t para demostrar que ∇f es ortogonal al vector tangente a la curva en todos los puntos de la curva.

9. **Curva tangente a una superficie** Demuestre que la curva

$$\mathbf{r}(t) = (\ln t)\mathbf{i} + (t \ln t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

es tangente a la superficie

$$xz^2 - yz + \cos xy = 1$$

en $(0, 0, 1)$.

10. **Curva tangente a una superficie** Demuestre que la curva

$$\mathbf{r}(t) = \left(\frac{t^3}{4} - 2 \right) \mathbf{i} + \left(\frac{4}{t} - 3 \right) \mathbf{j} + \cos(t - 2) \mathbf{k}$$

es tangente a la superficie

$$x^3 + y^3 + z^3 - xyz = 0$$

en $(0, -1, 1)$.

Valores extremos

- 11. Extremos en una superficie** Demuestre que los únicos máximos y mínimos posibles para z en la superficie $z = x^3 + y^3 - 9xy + 27$ ocurren en $(0, 0)$ y $(3, 3)$. Demuestre que no hay máximos ni mínimos en $(0, 0)$. Determine si z tiene un máximo o mínimo en $(3, 3)$.
- 12. Máximo en el primer cuadrante cerrado** Obtenga el valor máximo de $f(x, y) = 6xye^{-(2x+3y)}$ en el primer cuadrante cerrado (incluye los ejes no negativos).
- 13. Volumen mínimo recortado en el primer octante** Obtenga el volumen mínimo para una región acotada por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ y un plano tangente al elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

en un punto del primer octante.

- 14. Distancia mínima de una recta a una parábola en el plano xy** Minimice la función $f(x, y, u, v) = (x - u)^2 + (y - v)^2$ sujeta a las restricciones $y = x + 1$ y $u = v^2$, obtenga la distancia mínima en el plano xy de la recta $y = x + 1$ a la parábola $y^2 = x$.

Teoría y ejemplos

- 15. Primeras parciales acotadas implican continuidad** Pruebe el siguiente teorema: si $f(x, y)$ está definida en una región abierta R del plano xy y si f_x y f_y están acotadas en R , entonces $f(x, y)$ es continua en R . (El supuesto de estar acotada es esencial).
- 16.** Suponga que $\mathbf{r}(t) = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j} + k(t)\mathbf{k}$ es una curva suave en el dominio de una función derivable $f(x, y, z)$. Describa la relación entre df/dt , ∇f , y $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$. ¿Qué se puede decir acerca de ∇f y \mathbf{v} en los puntos interiores de la curva donde f tiene valores extremos en relación con sus otros valores sobre la curva? Justifique su respuesta.
- 17. Determinación de funciones a partir de derivadas parciales** Suponga que f y g son funciones de x y y tales que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x} \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y},$$

y suponga que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad f(1, 2) = g(1, 2) = 5 \quad \text{y} \quad f(0, 0) = 4.$$

Obtenga $f(x, y)$ y $g(x, y)$.

- 18. Tasa de cambio de la tasa de cambio** Sabemos que si $f(x, y)$ es una función de dos variables y si $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ es un vector unitario, entonces $D_{\mathbf{u}}f(x, y) = f_x(x, y)a + f_y(x, y)b$ es la tasa de cambio de $f(x, y)$ en (x, y) en la dirección de \mathbf{u} . Dé una fórmula similar para la tasa de cambio de $f(x, y)$ en (x, y) en la dirección de \mathbf{u} .

- 19. Trayectoria de una partícula en búsqueda de calor** Una partícula que requiere calor tiene la propiedad de que en cualquier punto (x, y) del plano se mueve en dirección del mayor incremento de temperatura. Si la temperatura en (x, y) es $T(x, y) = -e^{-2y} \cos x$, obtenga la ecuación $y = f(x)$ para la trayectoria de una partícula que busca calor en el punto $(\pi/4, 0)$.

- 20. Velocidad después de un rebote** Una partícula que viaja en línea recta a velocidad constante $\mathbf{i} + \mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ pasa por el punto $(0, 0, 30)$ y golpea la superficie $z = 2x^2 + 3y^2$. La partícula rebota en la superficie, de manera que el ángulo de reflexión es igual al ángulo de incidencia. Si no hay pérdida de rapidez, ¿cuál es la velocidad de la partícula después del rebote? Simplifique su respuesta.

- 21. Derivadas direccionales tangentes a una superficie** Sea S la superficie dada por la gráfica de $f(x, y) = 10 - x^2 - y^2$. Suponga que la temperatura de cada punto (x, y, z) en el espacio es $T(x, y, z) = x^2y + y^2z + 4x + 14y + z$.

- a. Entre todas las posibles direcciones direccionales a la superficie S en el punto $(0, 0, 10)$, ¿cuál de ellas hará que la tasa de cambio de temperatura en $(0, 0, 10)$ sea máxima?
- b. ¿Cuál de las direcciones tangentes a S en el punto $(1, 1, 8)$ hará que la tasa de cambio de la temperatura tenga un máximo?

- 22. Perforación** Sobre la superficie del suelo, unos geólogos taladraron un agujero recto y encontraron un depósito de mineral a 1000 ft de profundidad. Taladraron un segundo agujero a 100 ft al norte del primero y hallaron el mineral a 950 ft. Un tercer agujero a 100 ft al este del primero dio con el depósito de mineral a 1025 ft. Los geólogos tienen razones para creer que el depósito de mineral tiene la forma de un domo y, por razones de economía, les gustaría encontrar el lugar donde el depósito está más cerca de la superficie. Suponiendo que la superficie sea el plano xy , ¿en qué dirección del primer agujero sugiere que los geólogos taladren su cuarto agujero?

La ecuación unidimensional de calor Si $w(x, t)$ representa la temperatura en la posición x en el tiempo t en un alambre perfectamente aislado, entonces las derivadas parciales w_{xx} y w_t satisfacen la ecuación diferencial de la forma

$$w_{xx} = \frac{1}{c^2} w_t.$$

Esta ecuación se llama *ecuación unidimensional de calor*. El valor de la constante positiva c^2 se determina mediante el material del cual está hecho el alambre.

- 23.** Obtenga todas las soluciones de la ecuación unidimensional de calor de la forma $w = e^{rt} \sin \pi x$, donde r es una constante.
- 24.** Obtenga todas las soluciones de la ecuación unidimensional de calor de la forma $w = e^{rt} \sin kx$ y que satisfacen las condiciones $w(0, t) = 0$ y $w(L, t) = 0$. ¿Qué sucede con estas soluciones cuando $t \rightarrow \infty$?

Capítulo 14 Proyectos de aplicación tecnológica

Matemáticas/Módulo Maple:

Graficación de superficies

Genere de manera eficiente gráficas de superficies, contornos y curvas de nivel.

Análisis de las matemáticas tras un patinador: análisis de la derivada direccional

Se presenta la trayectoria de un patinador, primero en una superficie plana, luego sobre una rampa y, finalmente, en un paraboloides. Calcule, trace y analice la derivada direccional en términos del patinador.

Búsqueda de patrones y aplicación del método de mínimos cuadrados a datos reales

Ajuste una recta a un conjunto de datos numéricos puntuales seleccionando la recta que minimice la suma de los cuadrados de las distancias verticales de los puntos a la recta.

Lagrange patina: ¿a qué altura está?

Analice las aventuras de un patinador para alturas máximas y mínimas desde una perspectiva tanto gráfica como analítica usando los multiplicadores de Lagrange.



15

INTEGRALES MÚLTIPLES

INTRODUCCIÓN En este capítulo estudiaremos la integral de una función de dos variables $f(x, y)$ sobre una región en el plano y la integral de una función de tres variables $f(x, y, z)$ sobre una región en el espacio. Estas integrales se conocen como *integrales múltiples* y se definen como el límite de las sumas de Riemann, de manera similar al caso de las integrales de una variable que se presentaron en el capítulo 5. Presentaremos algunas aplicaciones de las integrales múltiples, incluyendo cálculo de volúmenes, áreas en el plano, momentos y centros de masa.

15.1 | Integrales dobles e iteradas sobre rectángulos

En el capítulo 5 definimos la integral definida de una función continua $f(x)$ en un intervalo $[a, b]$ como el límite de las sumas de Riemann. En esta sección ampliaremos esta idea para definir la *integral doble* de una función continua de dos variables $f(x, y)$ sobre un rectángulo R acotado en el plano. En ambos casos, las integrales son el límite de las sumas de Riemann. Las sumas de Riemann para la integral de una función $f(x)$ de una variable se obtiene particionando un intervalo finito en pequeños subintervalos, multiplicando el ancho de cada subintervalo por el valor de f en un punto c_k dentro del subintervalo, y luego sumando todos estos productos. Un método similar de particionar, multiplicar y sumar se usa para construir integrales dobles.

Integrales dobles

Iniciaremos nuestro estudio de las integrales dobles considerando el tipo más simple de regiones planas, un rectángulo. Consideremos una función $f(x, y)$ definida en una región rectangular R ,

$$R: a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d.$$

Subdividimos a R en pequeños rectángulos usando una red de rectas paralelas a los ejes x y y (figura 15.1). Las rectas dividen a R en n partes rectangulares, donde el número de partes n crece cuando el ancho y la altura de cada una de ellas se hacen más pequeños. Estos rectángulos forman una **partición** de R . Una pequeña parte rectangular de ancho Δx y de altura Δy tiene área $\Delta A = \Delta x \Delta y$. Si numeramos las pequeñas partes que dividen a R en cierto orden, entonces sus áreas están dadas por $\Delta A_1, \Delta A_2, \dots, \Delta A_n$, donde ΔA_k es el área del k -ésimo pequeño rectángulo.

Para formar una suma de Riemann sobre R , seleccionamos un punto (x_k, y_k) en el k -ésimo pequeño rectángulo, multiplicamos el valor de f en ese punto por el área ΔA_k , y sumamos todos los productos:

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta A_k.$$

Dependiendo de la elección de (x_k, y_k) en el k -ésimo pequeño rectángulo, obtenemos diferentes valores de S_n .

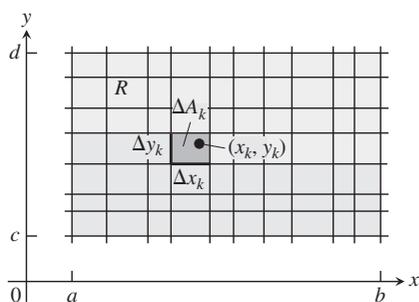


FIGURA 15.1 Cuadrícula rectangular que divide la región R en pequeños rectángulos de área $\Delta A_k = \Delta x_k \Delta y_k$.

Nos interesa saber qué ocurre con las sumas de Riemann cuando las anchuras y alturas de todos los pequeños rectángulos de la partición de R tienden a cero. La **norma** de una partición P , representada por $\|P\|$, es el mayor de los anchos o de las alturas de los rectángulos en la partición. Si $\|P\| = 0.1$, entonces todos los rectángulos de la partición de R tienen un ancho máximo de 0.1 y una altura máxima de 0.1. Algunas veces las sumas de Riemann convergen cuando la norma de P tiende a cero, lo que se escribe $\|P\| \rightarrow 0$. Entonces el límite resultante se escribe como

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta A_k.$$

Cuando $\|P\| \rightarrow 0$ y los rectángulos se vuelven más angostos y más cortos, y su número n aumenta, también escribimos este límite como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta A_k,$$

sin perder de vista que $\|P\| \rightarrow 0$, cuando $\Delta A_k \rightarrow 0$ y $n \rightarrow \infty$.

Hay muchas opciones de selección implicadas en un límite de este tipo. La colección de pequeños rectángulos queda determinada por la cuadrícula formada por las rectas verticales y horizontales que determinan una partición rectangular de R . En cada uno de los pequeños rectángulos resultantes se elige un punto arbitrario (x_k, y_k) donde se evalúa f . Estas elecciones determinan una sola suma de Riemann. Para formar un límite, repetimos el proceso completo una y otra vez, eligiendo particiones tales que los anchos y las alturas de los rectángulos tiendan a cero y cuyo número tienda a infinito.

Cuando existe el límite de las sumas S_n es porque se obtiene el mismo valor límite sin importar las elecciones que se hagan, y entonces la función f es **integrable**, mientras que al límite se le conoce como la **integral doble** de f sobre R , y se representa como

$$\iint_R f(x, y) \, dA \quad \text{o} \quad \iint_R f(x, y) \, dx \, dy.$$

Se puede demostrar que si $f(x, y)$ es una función continua en R , entonces f es integrable, como en el caso de una variable que estudiamos en el capítulo 5. Muchas funciones discontinuas también son integrables, incluyendo funciones que son discontinuas en sólo un número finito de puntos o curvas suaves. Dejaremos la prueba de estos hechos para textos más avanzados.

Integrales dobles como volúmenes

Cuando $f(x, y)$ es una función positiva sobre una región rectangular R del plano xy , podemos interpretar la integral doble de f sobre R como el volumen de la región sólida tridimensional en el plano xy acotada abajo por R y arriba por la superficie $z = f(x, y)$ (figura 15.2). Cada término $f(x_k, y_k)\Delta A_k$ en la suma $S_n = \sum f(x_k, y_k)\Delta A_k$ es el volumen de una caja rectangular vertical que se aproxima al volumen de la porción del sólido que está directamente sobre la base ΔA_k . De esta manera, la suma S_n se aproxima a lo que llamaremos el volumen total del sólido. Este volumen se *define* como

$$\text{Volumen} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \iint_R f(x, y) \, dA,$$

donde $\Delta A_k \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Como es de esperarse, este método general para calcular el volumen coincide con los métodos del capítulo 6, pero no lo probaremos aquí. La figura 15.3 muestra que las aproximaciones al volumen mediante sumas de Riemann son cada vez más precisas cuando el número n de cajas aumenta.

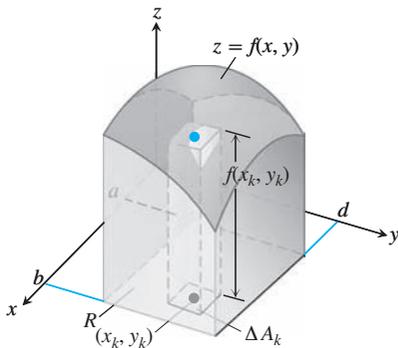


FIGURA 15.2 La aproximación de sólidos con cajas rectangulares nos lleva a definir los volúmenes de sólidos más generales como integrales dobles. El volumen del sólido aquí mostrado es la integral doble de $f(x, y)$ sobre la región base R .

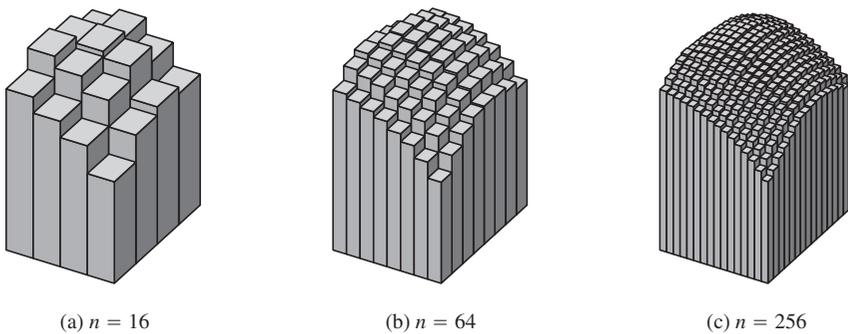


FIGURA 15.3 Cuando n crece, las aproximaciones mediante sumas de Riemann tienden al volumen total del sólido mostrado en la figura 15.2.

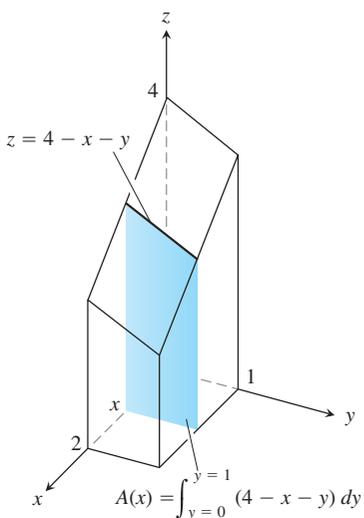


FIGURA 15.4 Para obtener el área de la sección transversal $A(x)$, mantenemos a x fija e integramos con respecto a y .

Teorema de Fubini para calcular integrales dobles

Suponga que deseamos calcular el volumen que existe bajo el plano $z = 4 - x - y$ sobre la región rectangular $R: 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1$ en el plano xy . Si aplicamos el método de rebanar en trozos de la sección 6.1, con rebanadas perpendiculares al eje x (figura 15.4), entonces el volumen será

$$\int_{x=0}^{x=2} A(x) \, dx, \tag{1}$$

donde $A(x)$ es el área de la sección transversal en x . Para cada valor de x calculamos $A(x)$ mediante la integral

$$A(x) = \int_{y=0}^{y=1} (4 - x - y) \, dy, \tag{2}$$

que es el área bajo la curva $z = 4 - x - y$ en el plano de la sección transversal en x . Al calcular $A(x)$, x se mantiene fija y se integra con respecto a y . Al combinar las ecuaciones (1) y (2), vemos que el volumen de todo el sólido es

$$\begin{aligned} \text{Volumen} &= \int_{x=0}^{x=2} A(x) \, dx = \int_{x=0}^{x=2} \left(\int_{y=0}^{y=1} (4 - x - y) \, dy \right) dx \\ &= \int_{x=0}^{x=2} \left[4y - xy - \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1} dx = \int_{x=0}^{x=2} \left(\frac{7}{2} - x \right) dx \\ &= \left[\frac{7}{2}x - \frac{x^2}{2} \right]_0^2 = 5. \end{aligned} \tag{3}$$

Si sólo queremos escribir una fórmula para el volumen, sin resolver las integraciones, podemos escribir

$$\text{Volumen} = \int_0^2 \int_0^1 (4 - x - y) \, dy \, dx.$$

La expresión de la derecha, llamada **integral iterada** o **repetida**, dice que el volumen se obtiene integrando $4 - x - y$ con respecto a y desde $y = 0$ a $y = 1$, x se mantiene fija, y luego integrando la expresión resultante en x con respecto a x desde $x = 0$ hasta $x = 2$. Los límites de integración 0 y 1 se asocian con y , de manera que se colocan en la integral más cercana de dy . Los otros límites de integración, 0 y 2, se asocian con la variable x , de forma que se colocan en el símbolo de la integral exterior que está vinculada con dx .

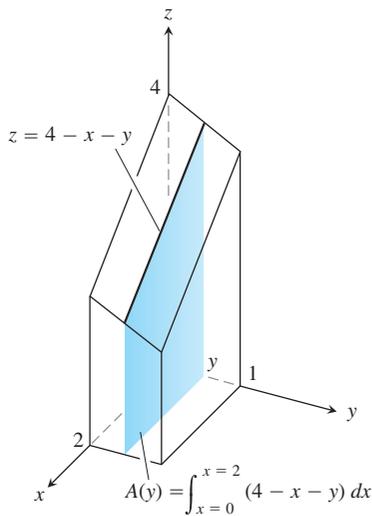


FIGURA 15.5 Para obtener el área de la sección transversal $A(x)$, mantenemos y fija e integramos con respecto a x .

¿Qué habría ocurrido si hubiéramos calculado el volumen rebanándolo en planos perpendiculares al eje y (figura 15.5)? Como una función de y , el área de la sección transversal típica es

$$A(y) = \int_{x=0}^{x=2} (4 - x - y) dx = \left[4x - \frac{x^2}{2} - xy \right]_{x=0}^{x=2} = 6 - 2y. \quad (4)$$

Por lo tanto, el volumen de todo sólido es

$$\text{Volumen} = \int_{y=0}^{y=1} A(y) dy = \int_{y=0}^{y=1} (6 - 2y) dy = [6y - y^2]_0^1 = 5,$$

lo que concuerda con nuestro cálculo anterior.

De nuevo, expresamos la fórmula del volumen como una integral iterada al escribir

$$\text{Volumen} = \int_0^1 \int_0^2 (4 - x - y) dx dy.$$

La expresión de la derecha dice que es posible obtener el volumen integrando $4 - x - y$ con respecto a x desde $x = 0$ hasta $x = 2$ como en la ecuación (4), e integrando el resultado con respecto a y desde $y = 0$ hasta $y = 1$. En esta integral iterada, el orden de integración es primero x y luego y , a la inversa del orden de la ecuación (3).

¿Qué tiene que ver el cálculo de estos volúmenes mediante integrales iteradas con la integral doble

$$\iint_R (4 - x - y) dA$$

sobre el rectángulo $R: 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1$? La respuesta es que ambas integrales iteradas dan el valor de la integral doble. Esto es lo que razonablemente esperaríamos, puesto que la integral doble mide el volumen de la misma región que las dos integrales iteradas. El teorema publicado en 1907 por Guido Fubini dice que la integral doble de cualquier función continua sobre un rectángulo se calcula como una integral iterada en cualquier orden de integración. (Fubini demostró su teorema de manera más general, pero en nuestro entorno esto es lo que dice).

BIOGRAFÍA HISTÓRICA

Guido Fubini
(1879–1943)

TEOREMA 1: Teorema de Fubini (primera forma) Si $f(x, y)$ es continua en la región rectangular $R: a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$, entonces

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx.$$

El teorema de Fubini dice que las integrales dobles sobre rectángulos se calculan mediante integrales iteradas. Por lo tanto, evaluamos una integral doble integrando con respecto a una variable a la vez.

El teorema de Fubini también dice que la integral doble se calcula integrando en *cualquier* orden, a nuestra conveniencia. Cuando calculamos un volumen rebanando, usamos planos perpendiculares al eje x o planos perpendiculares al eje y .

EJEMPLO 1 Calcule $\iint_R f(x, y) dA$ para

$$f(x, y) = 100 - 6x^2y \quad y \quad R: 0 \leq x \leq 2, \quad -1 \leq y \leq 1.$$

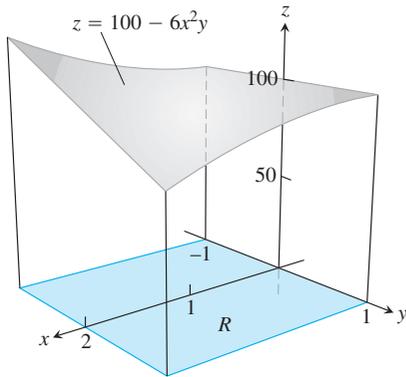


FIGURA 15.6 La integral doble $\iint_R f(x, y) dA$ nos da el volumen bajo esta superficie sobre la región rectangular R (ejemplo 1).

Solución La figura 15.6 muestra el volumen bajo la superficie. Por el teorema de Fubini,

$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y) dA &= \int_{-1}^1 \int_{-2}^1 (100 - 6x^2y) dx dy = \int_{-1}^1 [100x - 2x^3y]_{x=-2}^{x=1} dy \\ &= \int_{-1}^1 (200 - 16y) dy = [200y - 8y^2]_{-1}^1 = 400. \end{aligned}$$

Al invertir el orden de integración obtenemos la misma respuesta:

$$\begin{aligned} \int_0^2 \int_{-1}^1 (100 - 6x^2y) dy dx &= \int_0^2 [100y - 3x^2y^2]_{y=-1}^{y=1} dx \\ &= \int_0^2 [(100 - 3x^2) - (-100 - 3x^2)] dx \\ &= \int_0^2 200 dx = 400. \end{aligned}$$

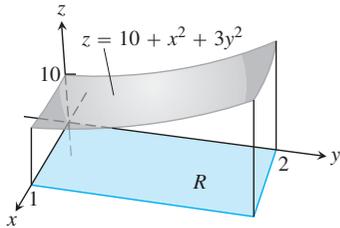


FIGURA 15.7 La integral doble $\iint_R f(x, y) dA$ nos da el volumen bajo esta superficie sobre la región rectangular R (ejemplo 2).

EJEMPLO 2 Determine el volumen de la región acotada arriba por el paraboloido elíptico $z = 10 + x^2 + 3y^2$ y abajo por el rectángulo $R: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$.

Solución La superficie y el volumen se representan en la figura 15.7. El volumen está dado por la integral doble

$$\begin{aligned} V &= \iint_R (10 + x^2 + 3y^2) dA = \int_0^1 \int_0^2 (10 + x^2 + 3y^2) dy dx \\ &= \int_0^1 [10y + x^2y + y^3]_{y=0}^{y=2} dx \\ &= \int_0^1 (20 + 2x^2 + 8) dx = \left[20x + \frac{2}{3}x^3 + 8x \right]_0^1 = \frac{86}{3}. \end{aligned}$$

Ejercicios 15.1

Evaluación de integrales iteradas

En los ejercicios 1 a 12, evalúe las integrales iteradas.

1. $\int_1^2 \int_0^4 2xy dy dx$
2. $\int_0^2 \int_{-1}^1 (x - y) dy dx$
3. $\int_{-1}^0 \int_{-1}^1 (x + y + 1) dx dy$
4. $\int_0^1 \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{2} \right) dx dy$
5. $\int_0^3 \int_0^2 (4 - y^2) dy dx$
6. $\int_0^3 \int_{-2}^0 (x^2y - 2xy) dy dx$
7. $\int_0^1 \int_0^1 \frac{y}{1 + xy} dx dy$
8. $\int_1^4 \int_0^4 \left(\frac{x}{2} + \sqrt{y} \right) dx dy$
9. $\int_0^{\ln 2} \int_1^{\ln 5} e^{2x+y} dy dx$
10. $\int_0^1 \int_1^2 xy e^x dy dx$

11. $\int_{-1}^2 \int_0^{\pi/2} y \sin x dx dy$
12. $\int_{\pi}^{2\pi} \int_0^{\pi} (\sin x + \cos y) dx dy$

Evaluación de integrales dobles sobre rectángulos

En los ejercicios 13 a 20, evalúe la integral doble sobre la región R especificada.

13. $\iint_R (6y^2 - 2x) dA$, $R: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$
14. $\iint_R \left(\frac{\sqrt{x}}{y^2} \right) dA$, $R: 0 \leq x \leq 4, 1 \leq y \leq 2$
15. $\iint_R xy \cos y dA$, $R: -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \pi$

16. $\iint_R y \operatorname{sen}(x+y) dA$, $R: -\pi \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq \pi$
17. $\iint_R e^{x-y} dA$, $R: 0 \leq x \leq \ln 2, 0 \leq y \leq \ln 2$
18. $\iint_R xy e^{xy^2} dA$, $R: 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1$
19. $\iint_R \frac{xy^3}{x^2+1} dA$, $R: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$
20. $\iint_R \frac{y}{x^2y^2+1} dA$, $R: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$

En los ejercicios 21 y 22, integre f sobre la región dada.

21. **Cuadrado** $f(x, y) = 1/(xy)$ sobre el cuadrado $1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2$.
22. **Rectángulo** $f(x, y) = y \cos xy$ sobre el rectángulo $0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq 1$.

Volumen debajo de una superficie $z = f(x, y)$

23. Determine el volumen de la región acotada arriba por el paraboloides $z = x^2 + y^2$, y abajo por el cuadrado $R: -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$.
24. Obtenga el volumen de la región acotada arriba por el paraboloides elíptico $z = 16 - x^2 - y^2$, y abajo por el cuadrado $R: 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2$.
25. Encuentre el volumen de la región acotada arriba por el plano $z = 2 - x - y$, y abajo por el cuadrado $R: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$.
26. Obtenga el volumen de la región acotada arriba por el plano $z = y/2$ y abajo por el rectángulo $R: 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 2$.
27. Determine el volumen de la región acotada arriba por la superficie $z = 2 \operatorname{sen} x \cos y$ y abajo por el rectángulo $R: 0 \leq x \leq \pi/2, 0 \leq y \leq \pi/4$.
28. Encuentre el volumen de la región acotada arriba por la superficie $z = 4 - y^2$ y abajo por el rectángulo $R: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$.

15.2 | Integrales dobles sobre regiones generales

En esta sección definiremos y evaluaremos integrales dobles sobre regiones acotadas en el plano, las cuales son más generales que los rectángulos. Estas integrales dobles también se evalúan como integrales iteradas, donde el mayor problema es la determinación de los límites de integración. Como la región de integración tiene límites diferentes de segmentos de recta paralelos a los ejes coordenados, los límites de integración implican con frecuencia variables, no sólo constantes.

Integrales dobles en regiones acotadas no rectangulares

Para definir la integral doble de una función $f(x, y)$ sobre una región acotada no rectangular R , como la de la figura 15.8, otra vez empezamos poniendo sobre R una rejilla de pequeñas celdas rectangulares, cuya unión contiene todos los puntos de R . Esta vez, sin embargo, puesto que su frontera es curva, no podemos llenar exactamente R con un número finito de rectángulos que se encuentren dentro de R , y algunos de los pequeños rectángulos de la cuadrícula están parcialmente fuera de R . Para formar una partición de R se consideran los rectángulos que están por completo dentro de R , sin tomar en cuenta aquellos que están parcial o totalmente afuera. En el caso de las regiones comunes, se cubre una porción cada vez mayor de R cuando la norma de la partición (el máximo ancho o altura de cualquier rectángulo usado) tiende a cero.

Una vez que tenemos la partición de R , numeramos los rectángulos en algún orden desde 1 hasta n , y dejando que ΔA_k sea el área del k -ésimo rectángulo. Luego elegimos un punto (x_k, y_k) en el k -ésimo rectángulo y formamos la suma de Riemann

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta A_k.$$

Cuando la norma de la partición de S_n tiende a cero, $\|P\| \rightarrow 0$, el ancho y la altura de cada rectángulo tiende a cero y su número tiende a infinito. Si $f(x, y)$ es una función continua, entonces estas sumas de Riemann tienden a un valor límite, que no depende de la selección que se haya hecho. Este límite se llama **integral doble** de $f(x, y)$ sobre R :

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta A_k = \iint_R f(x, y) dA.$$

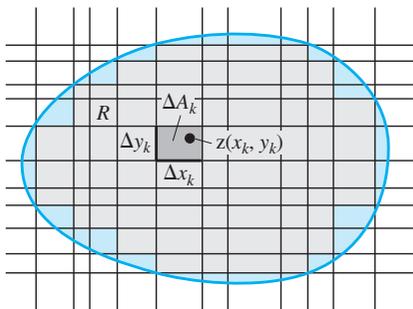


FIGURA 15.8 Una cuadrícula rectangular que divide una región acotada no rectangular en celdas rectangulares.

La naturaleza de la frontera de R introduce aspectos que no estaban presentes en las integrales sobre un intervalo. Cuando R tiene una frontera curva, los n rectángulos de una partición están dentro de R , pero no la cubren del todo. Para que una partición aproxime bien a R , las partes de R cubiertas por pequeños rectángulos que tienen una parte fuera de R deben ser despreciables conforme la norma de la partición tienda a cero. Esta propiedad de “casi ser cubierta completamente” por una partición de norma pequeña se satisface por todas las regiones que estudiaremos. No hay problema con las fronteras formadas por polígonos, circunferencias, elipses y gráficas continuas sobre un intervalo, unidas entre sí por los extremos. Una curva con forma “fractal” sería problemática, pero tales curvas rara vez se presentan en la mayoría de las aplicaciones. Un estudio detallado de los tipos de regiones R que se usan para el cálculo de integrales dobles se deja para textos más avanzados.

Volúmenes

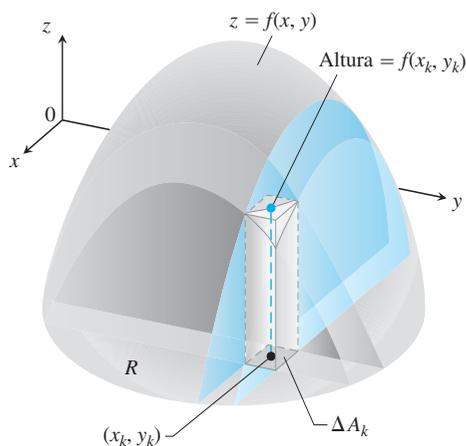
Si $f(x, y)$ es positiva y continua sobre R , se define el volumen de la región sólida entre R y la superficie $z = f(x, y)$ como $\iint_R f(x, y) dA$, como antes (figura 15.9).

Si R es una región como la que se muestra en el plano xy de la figura 15.10, acotada “por arriba” y “por abajo” por las curvas $y = g_2(x)$ y $y = g_1(x)$ y a los lados por las rectas $x = a$, $x = b$, de nuevo calculamos el volumen por el método de las rebanadas. Primero calculamos el área de la sección transversal

$$A(x) = \int_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} f(x, y) dy$$

y luego integramos $A(x)$ a partir de $x = a$ hasta $x = b$ para obtener el volumen como una integral iterada:

$$V = \int_a^b A(x) dx = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx. \tag{1}$$



$$\text{Volumen} = \lim \sum f(x_k, y_k) \Delta A_k = \iint_R f(x, y) dA$$

FIGURA 15.9 Se define el volumen de sólidos con bases curvas de la misma forma como se define el volumen de sólidos con bases rectangulares.

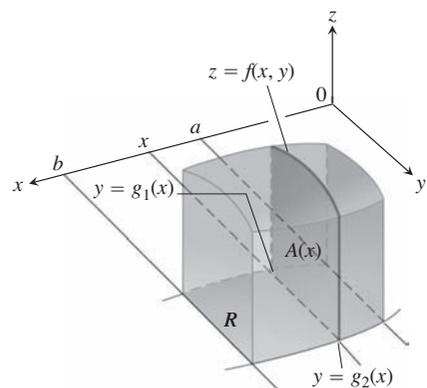


FIGURA 15.10 El área de la rebanada vertical mostrada aquí es $A(x)$. Para calcular el volumen del sólido, integramos esta área desde $x = a$ hasta $x = b$:

$$\int_a^b A(x) dx = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx.$$

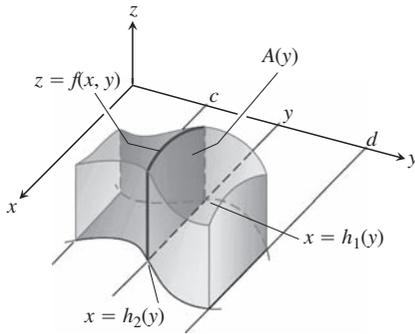


FIGURA 15.11 El volumen del sólido mostrado aquí es

$$\int_c^d A(y) dy = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy.$$

Para un sólido dado, el teorema 2 dice que calculamos el volumen como en la figura 15.10 o del modo aquí mostrado. Ambos cálculos tienen el mismo resultado.

De manera similar, si R es una región como la que se ilustra en la figura 15.11, acotada por las curvas $x = h_2(y)$ y $x = h_1(y)$ y las rectas $y = c$ y $y = d$, entonces el volumen calculado por rebanadas está dado por la integral iterada

$$\text{Volumen} = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy. \tag{2}$$

El hecho de que las integrales iteradas de las ecuaciones (1) y (2) den el volumen que definimos como una integral doble de f sobre R es una consecuencia de la forma más fuerte del teorema de Fubini.

TEOREMA 2: Teorema de Fubini (forma más fuerte) Sea $f(x, y)$ continua en una región R .

1. Si R está definida por $a \leq x \leq b$, y $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$, con g_1 y g_2 continuas en $[a, b]$, entonces

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx.$$

2. Si R está definida por $c \leq y \leq d$, y $h_1(y) \leq x \leq h_2(y)$, con h_1 y h_2 continuas en $[c, d]$, entonces

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy.$$

EJEMPLO 1 Determine el volumen del prisma cuya base es el triángulo en el plano xy acotado por el eje x y las rectas $y = x$ y $x = 1$, y cuya parte superior está en el plano

$$z = f(x, y) = 3 - x - y.$$

Solución Observe la figura 15.12. Para cualquier x entre 0 y 1, y puede variar desde $y = 0$ a $y = x$ (figura 15.12b). Por lo tanto,

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \int_0^x (3 - x - y) dy dx = \int_0^1 \left[3y - xy - \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=x} dx \\ &= \int_0^1 \left(3x - \frac{3x^2}{2} \right) dx = \left[\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{2} \right]_{x=0}^{x=1} = 1. \end{aligned}$$

Cuando se invierte el orden de integración (figura 15.12c), la integral del volumen es

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \int_y^1 (3 - x - y) dx dy = \int_0^1 \left[3x - \frac{x^2}{2} - xy \right]_{x=y}^{x=1} dy \\ &= \int_0^1 \left(3 - \frac{1}{2} - y - 3y + \frac{y^2}{2} + y^2 \right) dy \\ &= \int_0^1 \left(\frac{5}{2} - 4y + \frac{3}{2}y^2 \right) dy = \left[\frac{5}{2}y - 2y^2 + \frac{y^3}{2} \right]_{y=0}^{y=1} = 1. \end{aligned}$$

Las dos integrales son iguales, como debe ser. ■

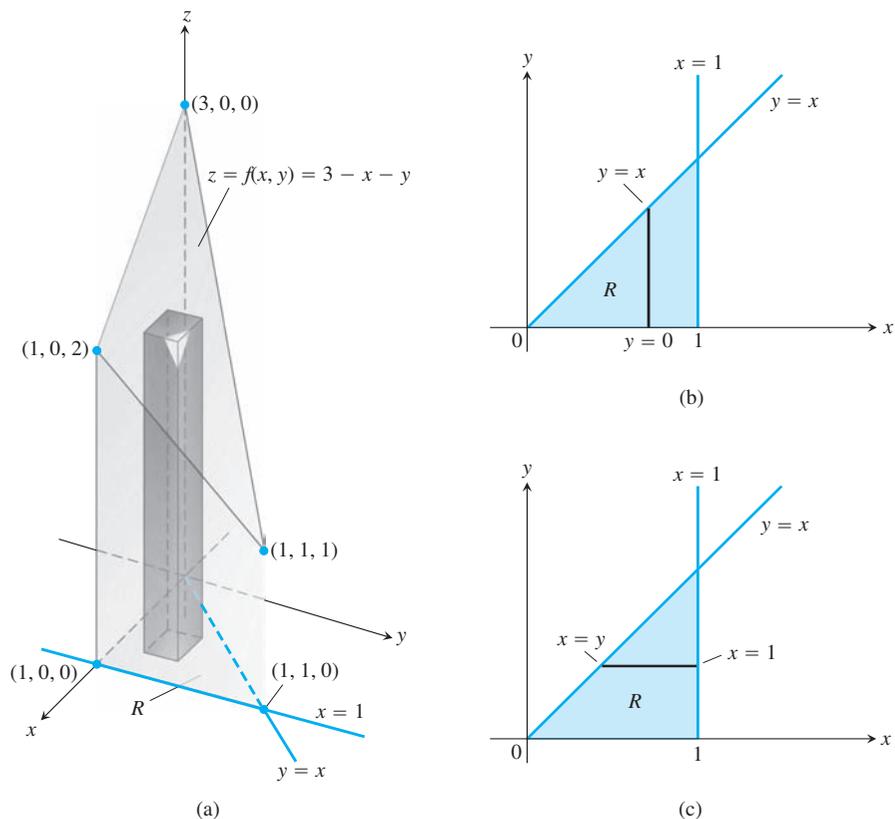


FIGURA 15.12 (a) Prisma con una base triangular en el plano xy . El volumen de este prisma se define como una integral doble sobre R . Para evaluarla como una integral iterada, integramos primero con respecto a y y luego con respecto a x , o bien, en el orden inverso (ejemplo 1). (b) Límites de integración de

$$\int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=x} f(x, y) \, dy \, dx.$$

Si integramos primero con respecto a y , integramos a lo largo de una recta vertical que pasa por R y luego integramos de izquierda a derecha para incluir todas las rectas verticales en R . (c) Límites de integración de

$$\int_{y=0}^{y=1} \int_{x=y}^{x=1} f(x, y) \, dx \, dy.$$

Si integramos primero con respecto a x , integramos a lo largo de una recta horizontal que pasa por R y luego integramos de abajo hacia arriba para incluir todas las rectas horizontales en R .

Si bien el teorema de Fubini nos garantiza que una integral doble se calcula como una integral iterada en cualquier orden de integración, tal vez sea más fácil calcular el valor de una de las integrales que la otra. El siguiente ejemplo ilustra cómo sucede.

EJEMPLO 2 Calcule

$$\iint_R \frac{\text{sen } x}{x} \, dA,$$

donde R es el triángulo en el plano xy acotado por el eje x , la recta $y = x$ y la recta $x = 1$.

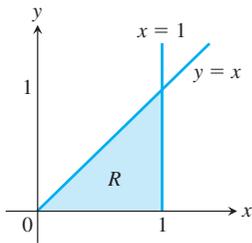


FIGURA 15.13 La región de integración del ejemplo 2.

Solución La región de integración se aprecia en la figura 15.13. Si primero integramos con respecto a y y luego con respecto a x , tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\int_0^x \frac{\operatorname{sen} x}{x} dy \right) dx &= \int_0^1 \left(y \frac{\operatorname{sen} x}{x} \Big|_{y=0}^{y=x} \right) dx = \int_0^1 \operatorname{sen} x dx \\ &= -\cos(1) + 1 \approx 0.46. \end{aligned}$$

Si invertimos el orden de integración e intentamos calcular

$$\int_0^1 \int_y^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx dy,$$

nos creamos un problema porque $\int ((\operatorname{sen} x)/x) dx$ no se expresa en términos de funciones elementales (no existe una antiderivada sencilla).

En circunstancias como ésta, no hay una regla general para predecir el orden de integración más adecuado. Si el orden elegido no funciona, intente el otro. Algunas veces ninguno funciona, y entonces necesitamos usar aproximaciones numéricas. ■

Determinar los límites de integración

Ahora veremos un procedimiento para determinar los límites de integración que se aplica para muchas regiones en el plano. Las regiones más complicadas, para las cuales no funciona este procedimiento, se pueden dividir en partes para que el procedimiento funcione.

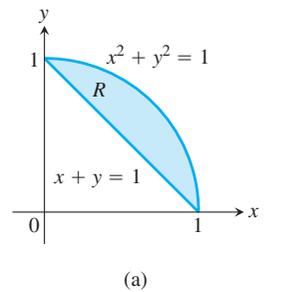
Uso de secciones transversales verticales Cuando tenga que evaluar $\iint_R f(x, y) dA$, integre primero con respecto a y y luego con respecto a x ; realice los siguientes pasos:

1. *Elabore un bosquejo.* Trace la región de integración y marque cada curva que determina la frontera (figura 15.14a).
2. *Determine los límites de integración en y .* Imagine una recta vertical L que atraviese a R en la dirección creciente de y . Marque los valores de y donde L entra y sale. Éstos son los límites de integración en y y, por lo general, son funciones de x (en vez de constantes) (figura 15.14b).
3. *Determine los límites de integración en x .* Elija los límites de x que incluyan todas las rectas verticales que atraviesen R . La integral mostrada aquí es (véase la figura 15.14c)

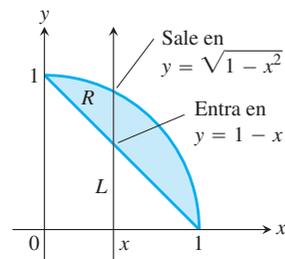
$$\iint_R f(x, y) dA = \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=1-x}^{y=\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy dx.$$

Uso de secciones transversales horizontales Para evaluar la misma integral doble como una integral iterada con el orden de integración inverso, usamos rectas horizontales en vez de verticales en los pasos 2 y 3 (véase la figura 15.15). La integral es

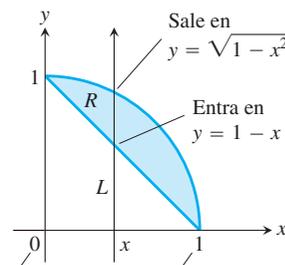
$$\iint_R f(x, y) dA = \int_0^1 \int_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx dy.$$



(a)



(b)



(c)

FIGURA 15.14 Determinación de los límites de integración cuando se integra primero con respecto a y y luego con respecto a x .

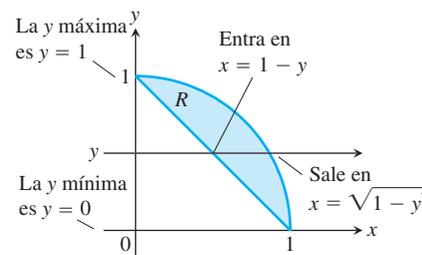


FIGURA 15.15 Determinación de los límites de integración cuando se integra primero con respecto a x y luego con respecto a y .

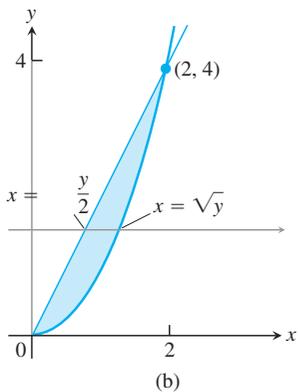
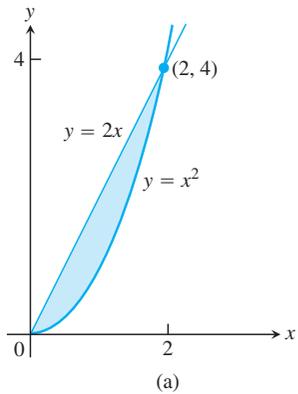


FIGURA 15.16 Región de integración para el ejemplo 3.

EJEMPLO 3 Trace la región de integración para la integral

$$\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (4x + 2) \, dy \, dx$$

y escriba una integral equivalente con el orden de integración inverso.

Solución La región de integración está dada por las desigualdades $x^2 \leq y \leq 2x$ y $0 \leq x \leq 2$. Por lo tanto, es la región acotada por las curvas $y = x^2$ y $y = 2x$ entre $x = 0$ y $x = 2$ (figura 15.16a).

Para obtener los límites de integración en orden inverso, imaginamos una recta horizontal que pase de izquierda a derecha por la región. Entra en $x = y/2$ y sale en $x = \sqrt{y}$. Para incluir todas estas rectas, hacemos que y varíe desde $y = 0$ a $y = 4$ (figura 15.16b). La integral es

$$\int_0^4 \int_{y/2}^{\sqrt{y}} (4x + 2) \, dx \, dy.$$

El valor común de estas integrales es 8. ■

Propiedades de las integrales dobles

Al igual que las integrales simples, las integrales dobles de funciones continuas tienen propiedades algebraicas que resultan útiles en cálculos y aplicaciones.

Si $f(x, y)$ y $g(x, y)$ son continuas en la frontera de la región R , entonces tienen las siguientes propiedades.

1. *Multiplo constante:*
$$\iint_R c f(x, y) \, dA = c \iint_R f(x, y) \, dA \quad (\text{para cualquier número } c)$$

2. *Suma y resta:*

$$\iint_R (f(x, y) \pm g(x, y)) \, dA = \iint_R f(x, y) \, dA \pm \iint_R g(x, y) \, dA$$

3. *Dominación:*

(a)
$$\iint_R f(x, y) \, dA \geq 0 \quad \text{si} \quad f(x, y) \geq 0 \text{ en } R$$

(b)
$$\iint_R f(x, y) \, dA \geq \iint_R g(x, y) \, dA \quad \text{si} \quad f(x, y) \geq g(x, y) \text{ en } R$$

4. *Aditividad:*
$$\iint_R f(x, y) \, dA = \iint_{R_1} f(x, y) \, dA + \iint_{R_2} f(x, y) \, dA$$

si R es la unión de dos regiones R_1 y R_2 que no se traslapan.

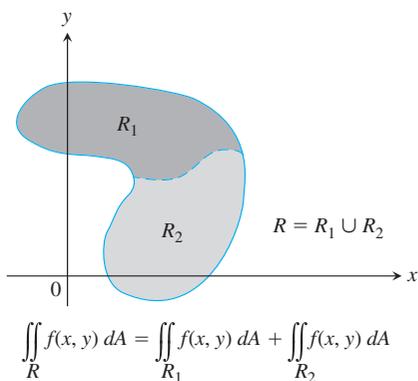


FIGURA 15.17 La propiedad de aditividad para regiones rectangulares se aplica también a regiones acotadas por curvas continuas.

La propiedad 4 supone que la región de integración R se descompone en regiones R_1 y R_2 que no se traslapan con fronteras consistentes en un número finito de segmentos de recta o curvas suaves. La figura 15.17 ilustra un ejemplo de esta propiedad.

La idea detrás de estas propiedades es que las integrales se comportan como sumas. Si la función $f(x, y)$ se sustituye por su múltiplo constante $cf(x, y)$, entonces una suma de Riemann para f

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta A_k$$

se sustituye por una suma de Riemann para cf

$$\sum_{k=1}^n cf(x_k, y_k) \Delta A_k = c \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta A_k = cS_n.$$

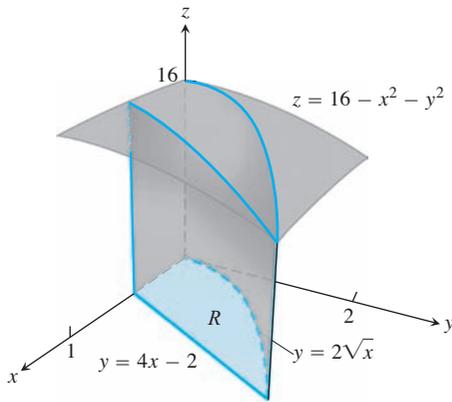
Al considerar los límites cuando $n \rightarrow \infty$, se muestra que $c \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = c \iint_R f \, dA$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} cS_n = \iint_R cf \, dA$ son iguales. Esto implica que la propiedad del múltiplo constante se traslada de las sumas a las integrales dobles.

Las demás propiedades también son fáciles de verificar para las sumas de Riemann, y son válidas para las integrales dobles por la misma razón. Aunque esta discusión da una idea, una demostración de la validez de estas propiedades requiere un análisis más detallado sobre la convergencia de las sumas de Riemann.

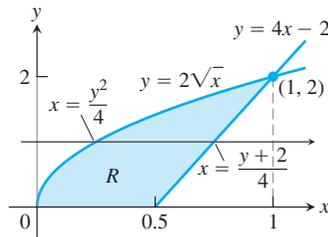
EJEMPLO 4 Determine el volumen de la cuña sólida que se encuentra bajo la superficie $z = 16 - x^2 - y^2$ y arriba de la región R acotada por la curva $y = 2$, la recta $y = 4x - 2$ y el eje x .

Solución La figura 15.18a muestra la superficie y la “cuña” sólida cuyo volumen queremos calcular. La figura 15.18b muestra la región de integración en el plano xy . Si integramos en el orden $dy \, dx$ (primero con respecto a y y luego con respecto a x), se requerirán dos integraciones porque y varía de $y = 0$ a $y = 2$ para $0 \leq x \leq 0.5$, y luego varía de $y = 4x - 2$ a $y = 2$ para $0.5 \leq x \leq 1$. Entonces elegimos integrar en el orden $dx \, dy$, lo cual requiere sólo una integral doble, cuyos límites de integración están indicados en la figura 15.18b. Entonces el volumen se calcula como la integral iterada:

$$\begin{aligned} & \iint_R (16 - x^2 - y^2) \, dA \\ &= \int_0^2 \int_{y^2/4}^{(y+2)/4} (16 - x^2 - y^2) \, dx \, dy \\ &= \int_0^2 \left[16x - \frac{x^3}{3} - xy^2 \right]_{x=y^2/4}^{x=(y+2)/4} \, dx \\ &= \int_0^2 \left[4(y+2) - \frac{(y+2)^3}{3 \cdot 64} - \frac{(y+2)y^2}{4} - 4y^2 + \frac{y^6}{3 \cdot 64} + \frac{y^4}{4} \right] \, dy \\ &= \left[\frac{191y}{24} + \frac{63y^2}{32} - \frac{145y^3}{96} - \frac{49y^4}{768} + \frac{y^5}{20} + \frac{y^7}{1344} \right]_0^2 = \frac{20803}{1680} \approx 12.4. \end{aligned}$$



(a)



(b)

FIGURA 15.18 (a) La región sólida “como cuña”, cuyo volumen se obtuvo en el ejemplo 4. (b) La región de integración R que muestra el orden $dx \, dy$.

Ejercicios 15.2

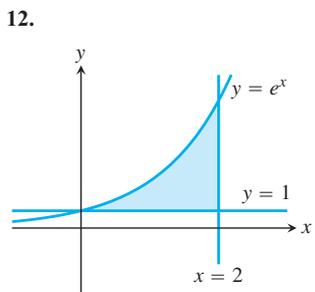
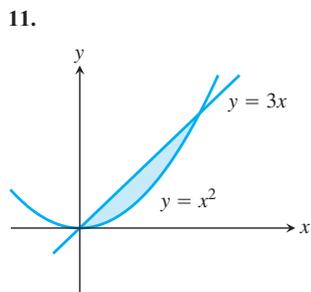
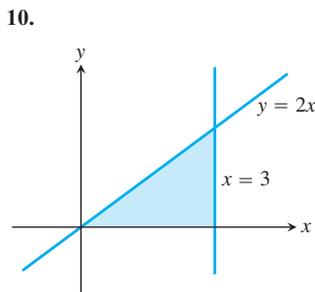
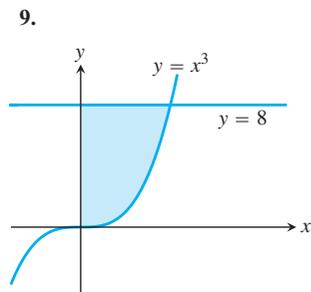
Determinación de regiones de integración

En los ejercicios 1 a 8, trace las regiones de integración descritas.

- $0 \leq x \leq 3, \quad 0 \leq y \leq 2x$
- $-1 \leq x \leq 2, \quad x - 1 \leq y \leq x^2$
- $-2 \leq y \leq 2, \quad y^2 \leq x \leq 4$
- $0 \leq y \leq 1, \quad y \leq x \leq 2y$
- $0 \leq x \leq 1, \quad e^x \leq y \leq e$
- $1 \leq x \leq e^2, \quad 0 \leq y \leq \ln x$
- $0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq x \leq \sin^{-1} y$
- $0 \leq y \leq 8, \quad \frac{1}{4}y \leq x \leq y^{1/3}$

Obtención de los límites de integración

En los ejercicios 9 a 18, escriba la integral iterada para $\iint_R dA$ sobre la región descrita usando (a) secciones transversales verticales, (b) secciones transversales horizontales.



- 13. Acotada por $y = \sqrt{x}, y = 0, y = 9$
- 14. Acotada por $y = \tan x, x = 0, y = 1$
- 15. Acotada por $y = e^{-x}, y = 1, x = \ln 3$
- 16. Acotada por $y = 0, x = 0, y = \ln x$
- 17. Acotada por $y = 3 - 2x, y = x, x = 0$
- 18. Acotada por $y = x^2, y = x + 2$

Determinación de regiones de integración e integrales dobles

En los ejercicios 19 a 24, trace la región de integración y evalúe la integral.

- 19. $\int_0^\pi \int_0^x x \sin y \, dy \, dx$
- 20. $\int_0^\pi \int_0^{\sin x} y \, dy \, dx$
- 21. $\int_1^{\ln 8} \int_0^{\ln y} e^{x+y} \, dx \, dy$
- 22. $\int_1^2 \int_y^{y^2} dx \, dy$
- 23. $\int_0^1 \int_0^{y^2} 3y^3 e^{xy} \, dx \, dy$
- 24. $\int_1^4 \int_0^{\sqrt{x}} \frac{3}{2} e^{y/\sqrt{x}} \, dy \, dx$

En los ejercicios 25 a 28, integre f sobre la región dada.

- 25. **Cuadrilátero** $f(x, y) = x/y$ sobre la región del primer cuadrante acotado por las rectas $y = x, y = 2x, x = 1, y = 2$.
- 26. **Triángulo** $f(x, y) = x^2 + y^2$ sobre la región triangular con vértices en $(0, 0), (1, 0)$ y $(0, 1)$.
- 27. **Triángulo** $f(u, v) = v - \sqrt{u}$ sobre la región triangular cortada en el primer cuadrante del plano uv por la recta $u + v = 1$.
- 28. **Región curvada** $f(s, t) = e^s \ln t$ sobre la región del primer cuadrante del plano st que está arriba de la curva $s = \ln t$ desde $t = 1$ hasta $t = 2$.

En cada uno de los ejercicios 29 a 32 se presenta una integral sobre una región en un plano con coordenadas cartesianas. Trace la región y evalúe la integral.

- 29. $\int_{-2}^0 \int_v^{-v} 2 \, dp \, dv$ (el plano pv)
- 30. $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-s^2}} 8t \, dt \, ds$ (el plano st)
- 31. $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \int_0^{\sec t} 3 \cos t \, du \, dt$ (el plano tu)
- 32. $\int_0^{3/2} \int_1^{4-2u} \frac{4-2u}{v^2} \, dv \, du$ (el plano uv)

Inversión en el orden de integración

En los ejercicios 33 a 46, trace la región de integración y escriba una integral doble equivalente, con el orden de integración inverso.

- 33. $\int_0^1 \int_2^{4-2x} dy \, dx$
- 34. $\int_0^2 \int_{y-2}^0 dx \, dy$
- 35. $\int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} dx \, dy$
- 36. $\int_0^1 \int_{1-x}^{1-x^2} dy \, dx$
- 37. $\int_0^1 \int_1^{e^x} dy \, dx$
- 38. $\int_0^{\ln 2} \int_{e^y}^2 dx \, dy$
- 39. $\int_0^{3/2} \int_0^{9-4x^2} 16x \, dy \, dx$
- 40. $\int_0^2 \int_0^{4-y^2} y \, dx \, dy$
- 41. $\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} 3y \, dx \, dy$
- 42. $\int_0^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} 6x \, dy \, dx$
- 43. $\int_1^e \int_0^{\ln x} xy \, dy \, dx$
- 44. $\int_0^{\pi/6} \int_{\sin x}^{1/2} xy^2 \, dy \, dx$
- 45. $\int_0^3 \int_1^{e^y} (x + y) \, dx \, dy$
- 46. $\int_0^{\sqrt{3}} \int_0^{\tan^{-1} y} \sqrt{xy} \, dx \, dy$

En los ejercicios 47 a 56, trace la región de integración, invierta el orden de integración y evalúe la integral.

- 47. $\int_0^\pi \int_x^\pi \frac{\sin y}{y} \, dy \, dx$
- 48. $\int_0^2 \int_x^2 2y^2 \sin xy \, dy \, dx$
- 49. $\int_0^1 \int_y^1 x^2 e^{-xy} \, dx \, dy$
- 50. $\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \frac{x e^{2y}}{4-y} \, dy \, dx$
- 51. $\int_0^{2\sqrt{\ln 3}} \int_{y/2}^{\sqrt{\ln 3}} e^{x^2} \, dx \, dy$
- 52. $\int_0^3 \int_{\sqrt{x/3}}^1 e^{y^3} \, dy \, dx$
- 53. $\int_0^{1/16} \int_{y^{1/4}}^{1/2} \cos(16\pi x^5) \, dx \, dy$
- 54. $\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{dy \, dx}{y^4 + 1}$

- 55. **Región cuadrada** $\iint_R (y - 2x^2) \, dA$ donde R es la región acotada por el cuadrado $|x| + |y| = 1$.
- 56. **Región triangular** $\iint_R xy \, dA$ donde R es la región acotada por las rectas $y = x, y = 2x, x + y = 2$.

Volumen debajo de una superficie $z = f(x, y)$

- 57. Determine el volumen de la región acotada por arriba por el paraboloides $z = x^2 + y^2$ y abajo por el triángulo encerrado por las rectas $y = x, x = 0, y + x = 2$ en el plano xy .
- 58. Determine el volumen del sólido acotado arriba por el cilindro $z = x^2$ y abajo por la región encerrada por la parábola $y = 2 - x^2$ y la recta $y = x$ en el plano xy .

59. Obtenga el volumen del sólido cuya base es la región del plano xy acotada por la parábola $y = 4 - x^2$ y la recta $y = 3x$, mientras que la parte superior del sólido está acotada por el plano $z = x + 4$.
60. Determine el volumen del sólido en el primer octante acotado por los planos coordenados, el cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y el plano $z + y = 3$.
61. Determine el volumen del sólido en el primer octante acotado por los planos coordenados, el plano $x = 3$ y el cilindro parabólico $z = 4 - y^2$.
62. Calcule el volumen del sólido cortado en el primer octante por la superficie $z = 4 - x^2 - y$.
63. Calcule el volumen de la cuña cortada en el primer octante por el cilindro $z = 12 - 3y^2$ y el plano $x + y = 2$.
64. Calcule el volumen del sólido cortado de la columna cuadrada $|x| + |y| \leq 1$ por los planos $z = 0$ y $3x + z = 3$.
65. Determine el volumen del sólido acotado por el frente y por la parte posterior por los planos $x = 2$ y $x = 1$, a los lados por los cilindros $y = \pm 1/x$, y por arriba y abajo por los planos $z = x + 1$ y $z = 0$.
66. Determine el volumen del sólido acotado por el frente y por la parte posterior por los planos $x = \pm \pi/3$, a los lados por los cilindros $y = \pm \sec x$, arriba por el cilindro $z = 1 + y^2$, y abajo por el plano xy .

En los ejercicios 67 y 68, trace la región de integración y el sólido cuyo volumen está dado por la integral doble.

67.
$$\int_0^3 \int_0^{2-2x/3} \left(1 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y\right) dy dx$$
68.
$$\int_0^4 \int_{-\sqrt{16-y^2}}^{\sqrt{16-y^2}} \sqrt{25 - x^2 - y^2} dx dy$$

Integrales sobre regiones no acotadas

Las integrales dobles impropias a menudo se calculan de manera similar a las integrales impropias de una variable. La primera iteración de las siguientes integrales impropias se realiza como si fueran integrales propias. Luego se evalúa una integral impropia de una sola variable tomando los límites apropiados, como en la sección 8.7. Evalúe las integrales impropias de los ejercicios 69 a 72 como integrales iteradas.

69.
$$\int_1^{\infty} \int_{e^{-x}}^1 \frac{1}{x^3 y} dy dx$$
70.
$$\int_{-1}^1 \int_{-1/\sqrt{1-x^2}}^{1/\sqrt{1-x^2}} (2y + 1) dy dx$$
71.
$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)(y^2 + 1)} dx dy$$
72.
$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} x e^{-(x+2y)} dx dy$$

Aproximación de integrales con sumas finitas

En los ejercicios 73 y 74, aproxime la integral doble de $f(x, y)$ sobre la región R dividida por las rectas verticales $x = a$ y las rectas horizontales $y = c$. En cada subrectángulo use (x_k, y_k) como se indica para su aproximación.

$$\iint_R f(x, y) dA \approx \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta A_k$$

73. $f(x, y) = x + y$ sobre la región R acotada arriba por la semicircunferencia $y = \sqrt{1 - x^2}$ y abajo por el eje x , usando la partición $x = -1, -1/2, 0, 1/4, 1/2, 1$ y $y = 0, 1/2, 1$ con (x_k, y_k) como la esquina inferior izquierda en el k -ésimo subrectángulo (siempre que el subrectángulo se encuentre dentro de R).
74. $f(x, y) = x + 2y$ sobre la región R dentro de la circunferencia $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$ usando la partición $x = 1, 3/2, 2, 5/2, 3$, $y = 2, 5/2, 3, 7/2, 4$ con (x_k, y_k) como el centro (centroide) en el k -ésimo subrectángulo (siempre que el subrectángulo se encuentre dentro de R).

Teoría y ejemplos

75. **Sector circular** Integre $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2}$ sobre el pequeño sector cortado del disco $x^2 + y^2 \leq 4$ por los rayos $\theta = \pi/6$ y $\theta = \pi/2$.
76. **Región no acotada** Integre $f(x, y) = 1/[(x^2 - x)(y - 1)^{2/3}]$ sobre el rectángulo infinito $2 \leq x < \infty, 0 \leq y < 2$.
77. **Cilindro no circular** Un cilindro sólido recto (no circular) tiene su base R sobre el plano xy y está acotado por arriba por el paraboloides $z = x^2 + y^2$. El volumen del cilindro es

$$V = \int_0^1 \int_0^y (x^2 + y^2) dx dy + \int_1^2 \int_0^{2-y} (x^2 + y^2) dx dy.$$

Grafique la región base R y exprese el volumen del cilindro como una integral iterada simple con el orden de integración invertido. Luego evalúe la integral para determinar el volumen.

78. **Conversión a una integral doble** Evalúe la integral

$$\int_0^2 (\tan^{-1} \pi x - \tan^{-1} x) dx.$$

(Sugerencia: Escriba el integrando como una integral).

79. **Maximizar una integral doble** ¿Qué región R en el plano xy maximiza el valor de

$$\iint_R (4 - x^2 - 2y^2) dA?$$

Justifique su respuesta.

80. **Minimizar una integral doble** ¿Qué región R en el plano xy minimiza el valor de

$$\iint_R (x^2 + y^2 - 9) dA?$$

Justifique su respuesta.

81. ¿Es posible evaluar la integral de una función continua $f(x, y)$ sobre una región rectangular en el plano xy y obtener respuestas diferentes dependiendo del orden de integración? Justifique su respuesta.
82. ¿Cómo evaluaría la integral doble de una función continua $f(x, y)$ sobre la región R en el plano xy encerrada por el triángulo con vértices $(0, 1)$, $(2, 0)$ y $(1, 2)$? Justifique su respuesta.
83. **Región no acotada** Pruebe que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} dx dy &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{-b}^b \int_{-b}^b e^{-x^2-y^2} dx dy \\ &= 4 \left(\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2. \end{aligned}$$

84. Integral doble impropia Evalúe la integral impropia

$$\int_0^1 \int_0^3 \frac{x^2}{(y-1)^{2/3}} dy dx.$$

EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

Use el evaluador de integrales de un SAC para calcular los valores de las integrales de los ejercicios 85 a 88.

85. $\int_1^3 \int_1^x \frac{1}{xy} dy dx$

86. $\int_0^1 \int_0^1 e^{-(x^2+y^2)} dy dx$

87. $\int_0^1 \int_0^1 \tan^{-1} xy dy dx$

88. $\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} 3\sqrt{1-x^2-y^2} dy dx$

Use el evaluador de integrales de un SAC para calcular los valores de las integrales de los ejercicios 89 a 94. Luego invierta el orden de integración y evalúe otra vez.

89. $\int_0^1 \int_{2y}^4 e^{x^2} dx dy$

90. $\int_0^3 \int_{x^2}^9 x \cos(y^2) dy dx$

91. $\int_0^2 \int_{y^3}^{4\sqrt{2y}} (x^2y - xy^2) dx dy$

92. $\int_0^2 \int_0^{4-y^2} e^{xy} dx dy$

93. $\int_1^2 \int_0^{x^2} \frac{1}{x+y} dy dx$

94. $\int_1^2 \int_{y^3}^8 \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy$

15.3 | Áreas por doble integración

En esta sección explicaremos cómo usar las integrales dobles para calcular el área de regiones acotadas en el plano y para determinar el valor promedio de una función de dos variables.

Área de regiones acotadas en el plano

Si consideramos la función $f(x, y) = 1$ en la definición de la integral doble sobre una región R de la sección precedente, las sumas de Riemann se reducen a

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta A_k = \sum_{k=1}^n \Delta A_k. \quad (1)$$

Esto es simplemente la suma de las áreas de los pequeños rectángulos de la partición de R , y aproxima lo que llamaríamos el área de R . Cuando la norma de una partición de R tiende a cero, la altura y el ancho de todos los rectángulos de la partición tienden a cero, y la cubierta de R es cada vez más fina (figura 15.8). Definimos el área de R como el límite

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \Delta A_k = \iint_R dA. \quad (2)$$

DEFINICIÓN El **área** de una región plana cerrada y acotada R es

$$A = \iint_R dA.$$

Como sucede con las demás definiciones de este capítulo, ésta se aplica a una mayor variedad de regiones que la definición anterior de área con una variable, pero coinciden en regiones en las cuales ambas se aplican. Para evaluar la integral en la definición de área, integramos la función constante $f(x, y) = 1$ sobre R .

EJEMPLO 1 Calcule el área de la región R acotada por $y = x$ y $y = x^2$ en el primer cuadrante.

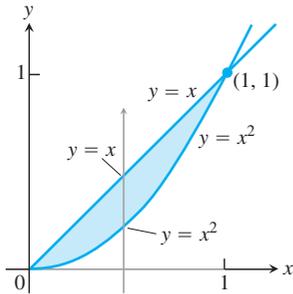


FIGURA 15.19 La región del ejemplo 1.

Solución Trazamos la región (figura 15.19), tomando en cuenta las intersecciones de las curvas en el origen y en $(1, 1)$, y calculamos el área como

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 \int_{x^2}^x dy \, dx = \int_0^1 \left[y \right]_{x^2}^x dx \\ &= \int_0^1 (x - x^2) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Observe que la integral simple $\int_0^1 (x - x^2) dx$, obtenida al evaluar la integral iterada interior, es la integral del área entre estas dos curvas utilizando el método de la sección 5.6. ■

EJEMPLO 2 Calcule el área de la región R encerrada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = x + 2$.

Solución Si dividimos R en las regiones R_1 y R_2 , como se muestra en la figura 15.20a, calculamos el área como

$$A = \iint_{R_1} dA + \iint_{R_2} dA = \int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx \, dy + \int_1^4 \int_{y-2}^{\sqrt{y}} dx \, dy.$$

Por otro lado, al invertir el orden de integración (figura 15.20b) tenemos

$$A = \int_{-1}^2 \int_{x^2}^{x+2} dy \, dx.$$

Este segundo resultado, el cual requiere sólo una integral, es más simple y es el que más aplicamos en la práctica. El área es

$$A = \int_{-1}^2 \left[y \right]_{x^2}^{x+2} dx = \int_{-1}^2 (x + 2 - x^2) dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^2 = \frac{9}{2}. \quad \blacksquare$$

Valor promedio

El valor promedio de una función integrable de una variable en un intervalo cerrado es la integral de la función en el intervalo dividida entre la longitud del intervalo. Para una función integrable de dos variables, definida en una región acotada en el plano, el valor promedio es la integral sobre la región dividida entre el área de la región. Esto se visualiza al pensar que la función proporciona la altura dada en un instante determinado del agua que chapotea en un tanque, cuyas paredes verticales se encuentran en la frontera de la región. La altura promedio del agua en el tanque se determina al dejar que el agua se asiente en una altura constante. Así, la altura es igual al volumen de agua en el tanque dividido entre el área de R . Ahora estamos listos para definir el valor promedio de una función integrable f sobre una región R como sigue:

$$\text{Valor promedio de } f \text{ sobre } R = \frac{1}{\text{área de } R} \iint_R f \, dA. \quad (3)$$

Si f es la temperatura de una placa delgada que cubre a R , entonces la integral doble de f sobre R dividida entre el área de R es la temperatura promedio de la placa. Si $f(x, y)$ es la distancia del punto (x, y) a un punto fijo P , entonces el valor promedio de f sobre R es la distancia promedio de los puntos de R hasta P .

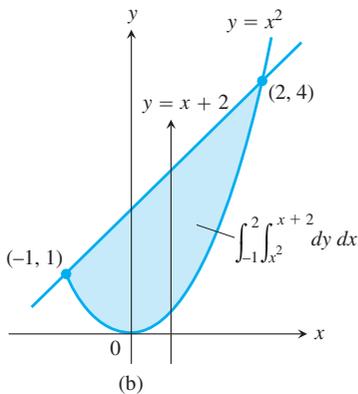
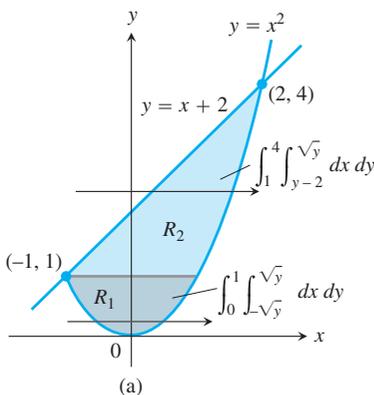


FIGURA 15.20 Calculamos esta área tomando (a) dos integrales dobles si la primera integración se hace con respecto a x , pero (b) sólo una si la primera integración se hace con respecto a y (ejemplo 2).

EJEMPLO 3 Calcule el valor promedio de $f(x, y) = x \cos xy$ sobre el rectángulo $R: 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq 1$.

Solución El valor de la integral de f sobre R es

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \int_0^1 x \cos xy \, dy \, dx &= \int_0^{\pi} \left[\operatorname{sen} xy \right]_{y=0}^{y=1} dx & \int x \cos xy \, dy &= \operatorname{sen} xy + C \\ &= \int_0^{\pi} (\operatorname{sen} x - 0) \, dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = 1 + 1 = 2. \end{aligned}$$

El área de R es π . El valor promedio de f sobre R es $2/\pi$. ■

Ejercicios 15.3

Área mediante la integración doble

En los ejercicios 1 a 12, trace la región acotada por las rectas y las curvas dadas. Luego exprese el área de la región como una integral doble iterada y evalúe la integral.

- Los ejes coordenados y la recta $x + y = 2$.
- Las rectas $x = 0, y = 2x, y = 4$.
- La parábola $x = -y^2$ y la recta $y = x + 2$.
- La parábola $x = y - y^2$ y la recta $y = -x$.
- La curva $y = e^x$ y las rectas $y = 0, x = 0, y = \ln 2$.
- Las curvas $y = \ln x$ y $y = 2 \ln x$ y la recta $x = e$, en el primer cuadrante.
- Las parábolas $x = y^2$ y $x = 2y - y^2$.
- Las parábolas $x = y^2 - 1$ y $x = 2y^2 - 2$.
- Las rectas $y = x, y = x/3$ y $y = 2$.
- Las rectas $y = 1 - x, y = 2$ y la curva $y = e^x$.
- Las rectas $y = 2x, y = x/2$ y $y = 3 - x$.
- Las rectas $y = x - 2$ y $y = -x$ y la curva $y = \sqrt{x}$.

Identificación de la región de integración

Las integrales y las sumas de integrales de los ejercicios 13 a 18 nos dan las áreas de regiones en el plano xy . Trace cada región, identifique cada curva de la frontera con su ecuación y obtenga las coordenadas de los puntos donde las curvas se cortan, luego calcule el área de la región.

- $\int_0^6 \int_{y^2/3}^{2y} dx \, dy$
- $\int_0^3 \int_{-x}^{x(2-x)} dy \, dx$
- $\int_0^{\pi/4} \int_{\operatorname{sen} x}^{\cos x} dy \, dx$
- $\int_{-1}^2 \int_{y^2}^{y+2} dx \, dy$
- $\int_{-1}^0 \int_{-2x}^{1-x} dy \, dx + \int_0^2 \int_{-x/2}^{1-x} dy \, dx$
- $\int_0^2 \int_{x^2-4}^0 dy \, dx + \int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} dy \, dx$

Determinación de valores promedio

- Calcule el valor promedio de $f(x, y) = \operatorname{sen}(x + y)$ sobre
 - el rectángulo $0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi$.
 - el rectángulo $0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi/2$.
- ¿Qué piensa que será mayor, el valor promedio de $f(x, y) = xy$ sobre el cuadrado $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$, o el valor promedio de f sobre el cuarto de círculo $x^2 + y^2 \leq 1$ en el primer cuadrante? Calcúlelos para responder.
- Encuentre la altura promedio del paraboloides $z = x^2 + y^2$ sobre el cuadrado $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2$.
- Determine el valor promedio de $f(x, y) = 1/(xy)$ sobre el cuadrado $\ln 2 \leq x \leq 2 \ln 2, \ln 2 \leq y \leq 2 \ln 2$.

Teoría y ejemplos

- Población de bacterias** Si $f(x, y) = (10,000e^y)/(1 + |x|/2)$ representa la “densidad de población” de cierta bacteria en el plano xy , donde x y y se miden en centímetros, calcule la población total de bacterias dentro del rectángulo $-5 \leq x \leq 5, -2 \leq y \leq 0$.
- Población de una región** Si $f(x, y) = 100(y + 1)$ representa la densidad de población de una región plana de la Tierra, donde x y y se miden en millas, obtenga el número de personas en la región acotada por las curvas $x = y^2$ y $x = 2y - y^2$.
- Temperatura promedio en Texas** De acuerdo con el *Almanaque de Texas*, ese estado tiene 254 condados y una estación del Servicio Nacional del Tiempo en cada condado. Suponga que en el tiempo t_0 , cada una de las 254 estaciones registró la temperatura local. Determine una fórmula que nos dé una aproximación razonable de la temperatura promedio en Texas en el instante t_0 . Su respuesta debe incluir información disponible en el *Almanaque de Texas*.
- Si $y = f(x)$ es una función continua no negativa sobre el intervalo cerrado $a \leq x \leq b$, demuestre que la definición de la integral doble del área en la región plana cerrada, acotada por la gráfica de f , las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ y el eje x , está de acuerdo con la definición del área debajo de la curva de la sección 5.3.

15.4 | Integrales dobles en forma polar

Algunas veces, las integrales son más fáciles de evaluar si cambiamos a coordenadas polares. Esta sección describe cómo realizar el cambio y cómo evaluar integrales sobre regiones cuyas fronteras están dadas por ecuaciones en coordenadas polares.

Integrales en coordenadas polares

Para definir la integral doble de una función sobre una región R en el plano xy , iniciamos dividiendo a R en rectángulos cuyos lados fueran paralelos a los ejes coordenados. Ésta era la forma natural para usarlos porque sus lados tenían valores constantes, ya sea de y o de x . En coordenadas polares, la forma natural es un “rectángulo polar”, cuyos lados tienen valores constantes de r y θ .

Suponga que una función $f(r, \theta)$ está definida sobre una región R acotada por los rayos $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$ y por las curvas continuas $r = g_1(\theta)$ y $r = g_2(\theta)$. Suponga también que $0 \leq g_1(\theta) \leq g_2(\theta) \leq a$ para cualquier valor de θ entre α y β . Entonces R está dentro de una región con forma de abanico Q , definida por las desigualdades $0 \leq r \leq a$ y $\alpha \leq \theta \leq \beta$. Observe la figura 15.21.

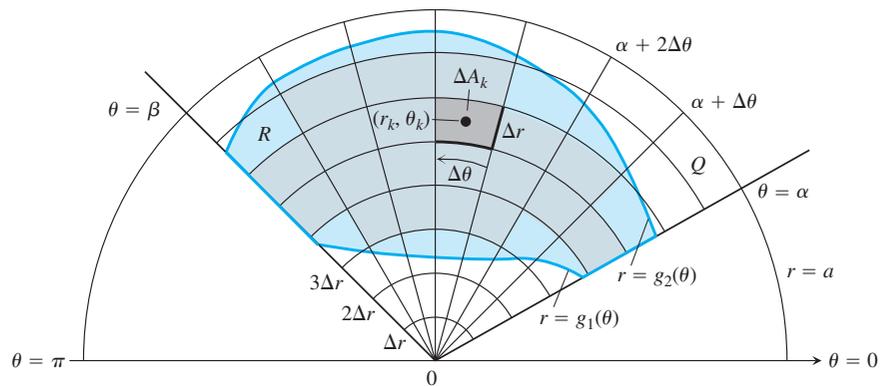


FIGURA 15.21 La región $R: g_1(\theta) \leq r \leq g_2(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta$, está contenida en la región con forma de abanico $Q: 0 \leq r \leq a, \alpha \leq \theta \leq \beta$. La partición de Q mediante arcos de circunferencia y rayos induce una partición de R .

Dividimos a Q con una rejilla de arcos y rayos. Los arcos se obtienen de circunferencias con centro en el origen, con radios $\Delta r, 2\Delta r, \dots, m\Delta r$, donde $\Delta r = a/m$, mientras que los rayos están dados por

$$\theta = \alpha, \quad \theta = \alpha + \Delta\theta, \quad \theta = \alpha + 2\Delta\theta, \quad \dots, \quad \theta = \alpha + m'\Delta\theta = \beta,$$

donde $\Delta\theta = (\beta - \alpha)/m'$. Los arcos y rayos dividen a Q en pequeños parches llamados “rectángulos polares”.

Numeramos los rectángulos polares que están dentro de R (sin importar el orden), llamando a sus áreas $\Delta A_1, \Delta A_2, \dots, \Delta A_n$. Sea (r_k, θ_k) cualquier punto en el rectángulo polar cuya área es ΔA_k . Luego formamos la suma

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(r_k, \theta_k) \Delta A_k.$$

Si f es continua en R , esta suma tiende a un límite cuando refinamos la rejilla para hacer que Δr y $\Delta\theta$ tiendan a cero. El límite se conoce como la integral doble de f sobre R . En símbolos tenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \iint_R f(r, \theta) dA.$$

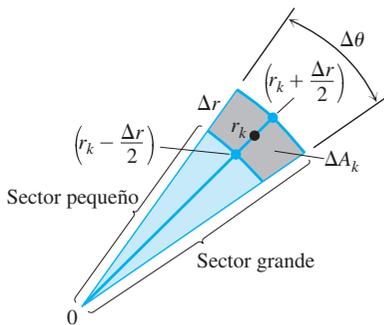


FIGURA 15.22 La observación de que

$$\Delta A_k = \left(\text{área del sector más grande} \right) - \left(\text{área del sector más pequeña} \right)$$

nos conduce a la fórmula $\Delta A_k = r_k \Delta r \Delta \theta$.

Para evaluar este límite, primero tenemos que escribir la suma S_n de forma que exprese a ΔA_k en términos de Δr y $\Delta \theta$. Por conveniencia, elegimos a r_k como el promedio de los radios de los arcos interno y externo que acotan al k -ésimo rectángulo polar ΔA_k . Así, el radio del arco interno que acota a ΔA_k es $r_k - (\Delta r/2)$ (figura 15.22) y el radio del arco externo es $r_k + (\Delta r/2)$.

El área de un sector en forma de cuña en un círculo que tiene radio r y ángulo θ es

$$A = \frac{1}{2} \theta \cdot r^2,$$

como se aprecia, si se multiplica el área del círculo πr^2 , por $\theta/2\pi$, es decir, la fracción del área del círculo contenido en la cuña. De esta forma, las áreas de los sectores circulares subtendidos por estos arcos en el origen son

$$\text{Radio interior: } \frac{1}{2} \left(r_k - \frac{\Delta r}{2} \right)^2 \Delta \theta$$

$$\text{Radio exterior: } \frac{1}{2} \left(r_k + \frac{\Delta r}{2} \right)^2 \Delta \theta.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \Delta A_k &= \text{área del sector grande} - \text{área del sector pequeño} \\ &= \frac{\Delta \theta}{2} \left[\left(r_k + \frac{\Delta r}{2} \right)^2 - \left(r_k - \frac{\Delta r}{2} \right)^2 \right] = \frac{\Delta \theta}{2} (2r_k \Delta r) = r_k \Delta r \Delta \theta. \end{aligned}$$

Al combinar este resultado con la suma que define a S_n nos da

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(r_k, \theta_k) r_k \Delta r \Delta \theta.$$

Cuando $n \rightarrow \infty$ y los valores de Δr y $\Delta \theta$ tienden a cero, estas sumas convergen a la integral doble

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \iint_R f(r, \theta) r \, dr \, d\theta.$$

Una versión del teorema de Fubini dice que el límite aproximado por estas sumas puede evaluarse por integraciones sencillas repetidas con respecto a r y θ como

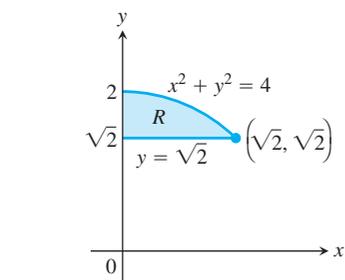
$$\iint_R f(r, \theta) \, dA = \int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta} \int_{r=g_1(\theta)}^{r=g_2(\theta)} f(r, \theta) r \, dr \, d\theta.$$

Determinación de los límites de integración

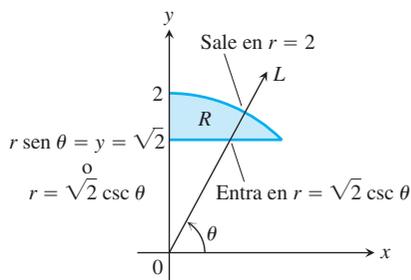
El procedimiento para calcular los límites de integración en coordenadas rectangulares funciona para las coordenadas polares. Para evaluar $\iint_R f(r, \theta) \, dA$ sobre una región R en coordenadas polares integrando primero con respecto a r y luego con respecto a θ , se realizan los siguientes pasos.

1. *Elabore un bosquejo.* Elabore un bosquejo de la región y marque las curvas de la frontera (figura 15.23a).
2. *Determine los límites de integración en r .* Imagine un rayo L que parte del origen y que corta a R en la dirección creciente de r . Marque los valores de r donde L entra y sale de R . Éstos son los límites de integración en r . Estos límites por lo general dependen del ángulo θ que forma L con el semieje positivo x (figura 15.23b).
3. *Determine los límites de integración en θ .* Obtenga los valores mínimo y máximo de θ que acotan a R . Éstos son los límites de integración en θ (figura 15.23c). La integral iterada polar es

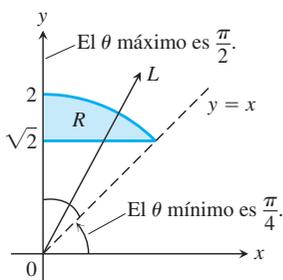
$$\iint_R f(r, \theta) \, dA = \int_{\theta=\pi/4}^{\theta=\pi/2} \int_{r=\sqrt{2} \csc \theta}^{r=2} f(r, \theta) r \, dr \, d\theta.$$



(a)



(b)



(c)

FIGURA 15.23 Determinación de los límites de integración en coordenadas polares.

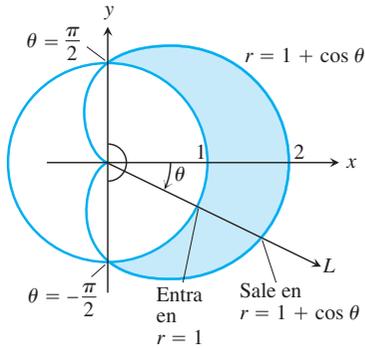


FIGURA 15.24 Determinación de los límites de integración en coordenadas polares para la región del ejemplo 1.

Área diferencial en coordenadas polares

$$dA = r \, dr \, d\theta$$

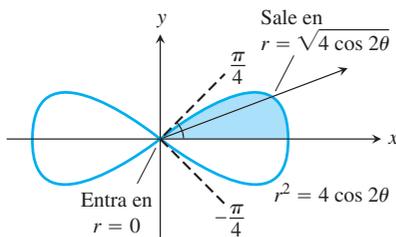


FIGURA 15.25 Para integrar sobre la región sombreada, variamos r de 0 a $\sqrt{4 \cos 2\theta}$ y θ de 0 a $\pi/4$ (ejemplo 2).

EJEMPLO 1 Determine los límites de integración para integrar $f(r, \theta)$ sobre la región R que está dentro de la cardioides $r = 1 + \cos \theta$ y fuera de la circunferencia $r = 1$.

Solución

1. Primero trazamos la región y marcamos las curvas frontera (figura 15.24).
2. En seguida obtenemos los *límites de integración en r* . Un rayo típico que sale del origen entra a R cuando $r = 1$ y sale cuando $r = 1 + \cos \theta$.
3. Al final, encontramos los *límites de integración en θ* . Los rayos desde el origen que cortan a R varían desde $\theta = -\pi/2$ hasta $\theta = \pi/2$. La integral es

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_1^{1+\cos \theta} f(r, \theta) r \, dr \, d\theta.$$

Si $f(r, \theta)$ es una función constante cuyo valor es 1, entonces la integral de f sobre R es el área de R .

Área en coordenadas polares

El área de una región cerrada y acotada R en el plano de coordenadas polares es

$$A = \iint_R r \, dr \, d\theta.$$

Esta fórmula del área es congruente con todas las fórmulas anteriores, no obstante, no lo demostraremos.

EJEMPLO 2 Obtenga el área encerrada en la lemniscata $r^2 = 4 \cos 2\theta$.

Solución Graficamos la lemniscata para determinar los límites de integración (figura 15.25) y vemos, a partir de la simetría de la región, que el área total es cuatro veces la porción del primer cuadrante.

$$\begin{aligned} A &= 4 \int_0^{\pi/4} \int_0^{\sqrt{4 \cos 2\theta}} r \, dr \, d\theta = 4 \int_0^{\pi/4} \left[\frac{r^2}{2} \right]_{r=0}^{r=\sqrt{4 \cos 2\theta}} d\theta \\ &= 4 \int_0^{\pi/4} 2 \cos 2\theta \, d\theta = 4 \sin 2\theta \Big|_0^{\pi/4} = 4. \end{aligned}$$

Cambio de integrales cartesianas a integrales polares

El procedimiento para cambiar una integral cartesiana $\iint_R f(x, y) \, dx \, dy$ a una integral polar implica dos pasos. Primero, en la integral cartesiana se sustituye $x = r \cos \theta$ y $y = r \sin \theta$, y reemplazamos $dx \, dy$ por $r \, dr \, d\theta$. Luego, obtenemos los límites de integración de ambas coordenadas polares para la frontera de R . La integral cartesiana se convierte entonces en

$$\iint_R f(x, y) \, dx \, dy = \iint_G f(r \cos \theta, r \sin \theta) r \, dr \, d\theta,$$

donde G representa la misma región de integración descrita ahora en coordenadas polares. Esto es como el método de sustitución del capítulo 5, excepto que ahora se sustituyen dos variables en vez de una. Observe que el área diferencial $dx \, dy$ no se sustituye por $dr \, d\theta$, sino por $r \, dr \, d\theta$. En la sección 15.8 estudiaremos de manera más general los cambios de variables (sustituciones) en integrales múltiples.

EJEMPLO 3 Evalúe

$$\iint_R e^{x^2+y^2} dy dx,$$

donde R es la región semicircular acotada por el eje x y la curva $y = \sqrt{1 - x^2}$ (figura 15.26).

Solución En coordenadas cartesianas, la integral en cuestión es una integral fácil no elemental y no existe un modo directo para integrar $e^{x^2+y^2}$ con respecto a x o a y . Sin embargo, esta integral y otras similares son importantes en matemáticas (en estadística, por ejemplo), así que necesitamos encontrar una manera de evaluarlas. Las coordenadas polares nos ayudan en este caso. Al sustituir $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, y reemplazar $dy dx$ por $r dr d\theta$, estamos en condiciones de evaluar la integral de la siguiente manera

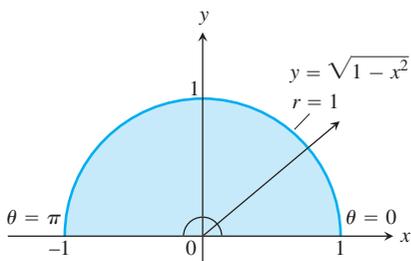


FIGURA 15.26 La región semicircular del ejemplo 3 es la región $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq \pi$.

$$\begin{aligned} \iint_R e^{x^2+y^2} dy dx &= \int_0^\pi \int_0^1 e^{r^2} r dr d\theta = \int_0^\pi \left[\frac{1}{2} e^{r^2} \right]_0^1 d\theta \\ &= \int_0^\pi \frac{1}{2} (e - 1) d\theta = \frac{\pi}{2} (e - 1). \end{aligned}$$

La r en $r dr d\theta$ era justo lo que necesitábamos para integrar e^{r^2} . Sin esto, no habríamos podido obtener con facilidad la antiderivada para la primera integral iterada (la más interna). ■

EJEMPLO 4 Evalúe la integral

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2) dy dx.$$

Solución La integración con respecto a y nos da

$$\int_0^1 \left(x^2 \sqrt{1-x^2} + \frac{(1-x^2)^{3/2}}{3} \right) dx,$$

una integral difícil de evaluar sin tablas.

Las cosas mejoran si cambiamos la integral original a coordenadas polares. La región de integración en coordenadas cartesianas está dada por las desigualdades $0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}$ y $0 \leq x \leq 1$, lo que corresponde al interior de un cuarto del círculo unitario $x^2 + y^2 = 1$ en el primer cuadrante. (Observe el primer cuadrante de la figura 15.26). Al sustituir las coordenadas polares $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$ y $0 \leq r \leq 1$, y reemplazar $dx dy$ por $r dr d\theta$ en la integral doble, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2) dy dx &= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 (r^2) r dr d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \left[\frac{r^4}{4} \right]_{r=0}^{r=1} d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4} d\theta = \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

¿Por qué la transformación a coordenadas polares es tan efectiva aquí? Una razón es que $x^2 + y^2$ se simplifica a r^2 . Otra es que los límites de integración se vuelven constantes. ■

EJEMPLO 5 Determine el volumen de la región sólida limitada arriba por el paraboloides $z = 9 - x^2 - y^2$ y abajo por el círculo unitario en el plano xy .

Solución La región de integración R es el círculo unitario $x^2 + y^2 = 1$, el cual se describe en coordenadas polares por $r = 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. La región sólida se representa en la figura 15.27. El volumen está dado por la integral doble

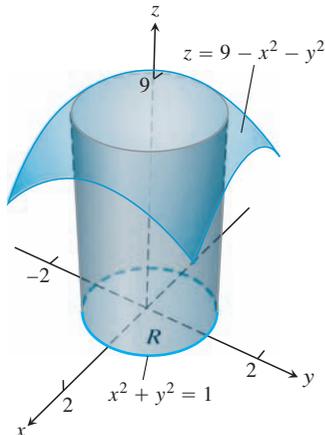


FIGURA 15.27 La región sólida del ejemplo 5.

$$\begin{aligned}
 \iint_R (9 - x^2 - y^2) dA &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (9 - r^2) r dr d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (9r - r^3) dr d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{9}{2} r^2 - \frac{1}{4} r^4 \right]_{r=0}^{r=1} d\theta \\
 &= \frac{17}{4} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{17\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

EJEMPLO 6 Usando integración polar, calcule el área de la región R en el plano xy encerrada en la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$, arriba de la recta $y = 1$, y abajo de la recta $y = \sqrt{3}x$.

Solución En la figura 15.28 se presenta una gráfica de la región R . Observe primero que la recta $y = \sqrt{3}x$ tiene una pendiente $\sqrt{3} = \tan \theta$, de manera que $\theta = \pi/3$. En seguida observe que la recta $y = 1$ interseca a la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ cuando $x^2 + 1 = 4$, o $x = \sqrt{3}$. Aún más, la recta radial desde el origen que pasa por el punto $(\sqrt{3}, 1)$ tiene una pendiente $1/\sqrt{3} = \tan \theta$ con un ángulo de inclinación $\theta = \pi/6$. Esta información se muestra en la figura 15.28.

Ahora, para la región R , cuando θ varía de $\pi/6$ a $\pi/3$, la coordenada polar r varía desde la recta horizontal $y = 1$ hasta el círculo $x^2 + y^2 = 4$. Al sustituir $r \sin \theta$ por y en la ecuación para la recta horizontal, tenemos que $r \sin \theta = 1$, o $r = \csc \theta$, la cual es la ecuación polar de la recta. La ecuación polar de la circunferencia es $r = 2$. De esta forma, en coordenadas polares, para $\pi/6 \leq \theta \leq \pi/3$, r varía de $r = \csc \theta$ a $r = 2$. Se deduce que la integral iterada del área nos da

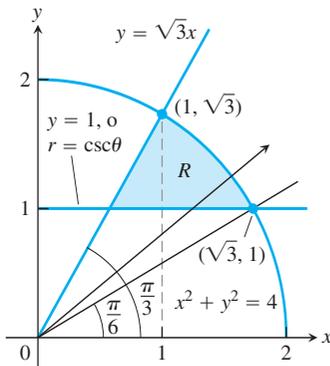


FIGURA 15.28 La región R en el ejemplo 6.

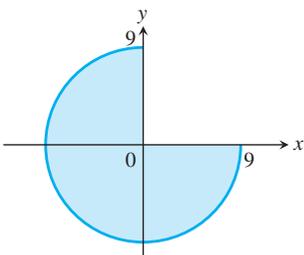
$$\begin{aligned}
 \iint_R dA &= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \int_{\csc \theta}^2 r dr d\theta \\
 &= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_{r=\csc \theta}^{r=2} d\theta \\
 &= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1}{2} [4 - \csc^2 \theta] d\theta \\
 &= \frac{1}{2} [4\theta + \cot \theta]_{\pi/6}^{\pi/3} \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{4\pi}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{4\pi}{6} + \sqrt{3} \right) = \frac{\pi - \sqrt{3}}{3}.
 \end{aligned}$$

Ejercicios 15.4

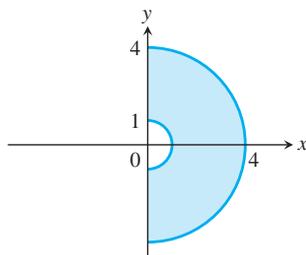
Regiones en coordenadas polares

En los ejercicios 1 a 8, describa, en coordenadas polares, la región dada.

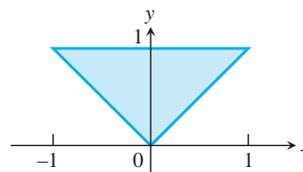
1.



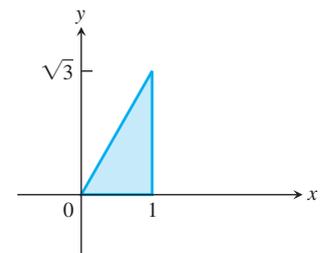
2.

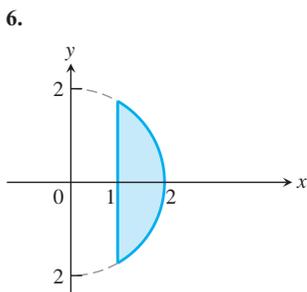
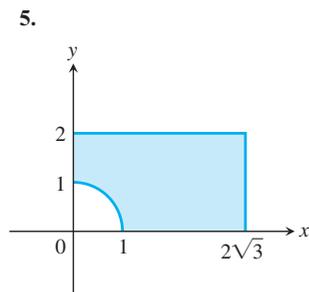


3.



4.





7. La región encerrada por el círculo $x^2 + y^2 = 2x$.
 8. La región encerrada por el semicírculo $x^2 + y^2 = 2y, y \geq 0$.

Evaluación de integrales polares

En los ejercicios 9 a 22, cambie la integral cartesiana por una integral polar equivalente. Luego evalúe la integral polar.

9. $\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy dx$ 10. $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} (x^2 + y^2) dx dy$
 11. $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} (x^2 + y^2) dx dy$ 12. $\int_{-a}^a \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy dx$
 13. $\int_0^6 \int_0^y x dx dy$ 14. $\int_0^2 \int_0^x y dy dx$
 15. $\int_1^{\sqrt{3}} \int_1^x dy dx$ 16. $\int_{\sqrt{2}}^2 \int_{\sqrt{4-y^2}}^y dx dy$
 17. $\int_{-1}^0 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 \frac{2}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}} dy dx$
 18. $\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2}{(1 + x^2 + y^2)^2} dy dx$
 19. $\int_0^{\ln 2} \int_0^{\sqrt{(\ln 2)^2 - y^2}} e^{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$
 20. $\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \ln(x^2 + y^2 + 1) dx dy$
 21. $\int_0^1 \int_x^{\sqrt{2-x^2}} (x + 2y) dy dx$
 22. $\int_1^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} dy dx$

En los ejercicios 23 a 26, grafique la región de integración y convierta cada integral o suma de integrales a una integral o suma de integrales cartesianas. No evalúe las integrales.

23. $\int_0^{\pi/2} \int_0^1 r^3 \sin \theta \cos \theta dr d\theta$
 24. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \int_1^{\csc \theta} r^2 \cos \theta dr d\theta$
 25. $\int_0^{\pi/4} \int_0^{2 \sec \theta} r^5 \sin^2 \theta dr d\theta$
 26. $\int_0^{\tan^{-1} \frac{4}{3}} \int_0^{3 \sec \theta} r^7 dr d\theta + \int_{\tan^{-1} \frac{4}{3}}^{\pi/2} \int_0^{4 \csc \theta} r^7 dr d\theta$

Cálculo de áreas en coordenadas polares

27. Calcule el área de la región cortada en el primer cuadrante por la curva $r = 2(2 - \sin 2\theta)^{1/2}$.
 28. **Cardioides traslapada con una circunferencia** Obtenga el área de la región que se encuentra dentro de la cardioides $r = 1 + \cos \theta$ y fuera de la circunferencia $r = 1$.
 29. **El pétalo de una rosa** Obtenga el área encerrada en el pétalo de una rosa $r = 12 \cos 3\theta$.
 30. **Concha de caracol** Obtenga el área de la región encerrada por el eje positivo x y la espiral $r = 4\theta/3, 0 \leq \theta \leq 2\pi$. La región parece una concha de caracol.
 31. **Cardioides en el primer cuadrante** Encuentre el área de la región cortada en el primer cuadrante por la cardioides $r = 1 + \sin \theta$.
 32. **Cardioides traslapadas** Obtenga el área de la región común a los interiores de las cardioides $r = 1 + \cos \theta$ y $r = 1 - \cos \theta$.

Valores promedio

En coordenadas polares, el **valor promedio** de una función sobre una región R (sección 15.3) está dado por

$$\frac{1}{\text{Área}(R)} \iint_R f(r, \theta) r dr d\theta.$$

33. **Altura promedio de un hemisferio** Determine la altura promedio de la superficie hemisférica $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ sobre el disco $x^2 + y^2 \leq a^2$ en el plano xy .
 34. **Altura promedio de un cono** Encuentre la altura promedio del cono (sencillo) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ sobre el disco $x^2 + y^2 \leq a^2$ en el plano xy .
 35. **Distancia promedio del interior de un disco al centro** Obtenga la distancia promedio desde un punto $P(x, y)$ del disco $x^2 + y^2 \leq a^2$ hasta el origen.
 36. **Cuadrado de la distancia promedio de un punto en un disco a un punto en su frontera** Obtenga el valor promedio del **cuadrado** de la distancia de un punto $P(x, y)$ en el disco $x^2 + y^2 \leq 1$ hasta el punto frontera $A(1, 0)$.

Teoría y ejemplos

37. **Conversión a una integral polar** Integre $f(x, y) = [\ln(x^2 + y^2)]/\sqrt{x^2 + y^2}$ sobre la región $1 \leq x^2 + y^2 \leq e$.
 38. **Conversión a una integral polar** Integre $f(x, y) = [\ln(x^2 + y^2)]/(x^2 + y^2)$ sobre la región $1 \leq x^2 + y^2 \leq e^2$.
 39. **Volumen de un cilindro recto no circular** La región que se encuentra dentro de la cardioides $r = 1 + \cos \theta$ y afuera de la circunferencia $r = 1$ es la base de un cilindro recto sólido. La parte superior del cilindro está en el plano $z = x$. Determine el volumen del cilindro.
 40. **Volumen de un cilindro recto no circular** La región encerrada por la lemniscata $r^2 = 2 \cos 2\theta$ es la base de un cilindro recto sólido, cuya parte superior está acotada por la esfera $z = \sqrt{2 - r^2}$. Obtenga el volumen del cilindro.
 41. **Conversión a integrales polares**
 a. La manera usual de evaluar la integral impropia $I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$ es calcular primero su cuadrado:

$$I^2 = \left(\int_0^\infty e^{-x^2} dx \right) \left(\int_0^\infty e^{-y^2} dy \right) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

Evalúe la última integral usando coordenadas polares y despeje I de la ecuación resultante.

b. Evalúe

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{erf}(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x \frac{2e^{-t^2}}{\sqrt{\pi}} dt.$$

42. **Conversión a una integral polar** Evalúe la integral

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2} dx dy.$$

43. **Existencia** Integre la función $f(x, y) = 1/(1 - x^2 - y^2)$ sobre el disco $x^2 + y^2 \leq 3/4$. ¿Existe la integral de $f(x, y)$ sobre el disco $x^2 + y^2 \leq 1$? Justifique su respuesta.

44. **Fórmula del área en coordenadas polares** Use la integral doble en coordenadas polares para deducir la fórmula

$$A = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

para el área de la región en forma de abanico entre el origen y la curva polar $r = f(\theta)$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$.

45. **Distancia promedio a un punto dado dentro de un disco** Sea P_0 un punto dentro de un círculo de radio a , y sea h la distancia desde P_0 hasta el centro del círculo. Sea d la distancia desde un punto cualquiera P hasta P_0 . Obtenga el valor promedio de d_2 sobre la región encerrada en el círculo. (*Sugerencia:* Simplifique su trabajo colocando el centro del círculo en el origen y P_0 sobre el eje x).

46. **Área** Suponga que el área de una región en el plano con coordenadas polares es

$$A = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \int_{\csc \theta}^{2 \operatorname{sen} \theta} r dr d\theta.$$

Grafique la región y obtenga su área.

EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

En los ejercicios 47 a 50, use un SAC para cambiar las integrales cartesianas en una integral polar equivalente y evalúe la integral polar. Ejecute los siguientes pasos en cada ejercicio.

- Trace la región cartesiana de integración en el plano xy .
- Cambie cada curva de la frontera de la región cartesiana del inciso (a) por su representación polar, determinando r y θ a partir de la ecuación cartesiana.
- Use los resultados del inciso (b), para trazar la región polar de integración en el plano $r\theta$.
- Cambie el integrando de coordenadas cartesianas a polares. Determine los límites de integración a partir de su gráfica del inciso (c) y evalúe la integral polar usando la herramienta de integración del programa de álgebra por computadora.

47. $\int_0^1 \int_x^1 \frac{y}{x^2 + y^2} dy dx$

48. $\int_0^1 \int_0^{x/2} \frac{x}{x^2 + y^2} dy dx$

49. $\int_0^1 \int_{-y/3}^{y/3} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$

50. $\int_0^1 \int_y^{2-y} \sqrt{x + y} dx dy$

15.5

Integrales triples en coordenadas rectangulares

Así como las integrales dobles nos permiten tratar con situaciones más generales que las integrales simples, las integrales triples nos permiten resolver problemas aún más generales. Usamos las integrales triples para calcular los volúmenes de formas tridimensionales y el valor promedio de una función sobre una región tridimensional. Las integrales triples también se usan en el estudio de campos vectoriales y el flujo de fluidos en tres dimensiones, como veremos en el capítulo 16.

Integrales triples

Si $F(x, y, z)$ es una función definida en una región cerrada D y acotada en el espacio, como la región ocupada por una bola sólida o un montón de arcilla, entonces la integral de F sobre D se define de la siguiente manera. Partimos una región en forma de caja rectangular que contiene a D en celdas rectangulares mediante planos paralelos a los ejes coordenados (figura 15.29). Numeramos las celdas que están dentro de D desde 1 hasta n en algún orden, donde la k -ésima celda tiene las dimensiones Δx_k por Δy_k por Δz_k y un volumen $\Delta V_k = \Delta x_k \Delta y_k \Delta z_k$. Seleccionamos un punto (x_k, y_k, z_k) en cada celda y formamos la suma

$$S_n = \sum_{k=1}^n F(x_k, y_k, z_k) \Delta V_k. \tag{1}$$

Estamos interesados en lo que pasa cuando D se parte en celdas cada vez más pequeñas, de manera que $\Delta x_k, \Delta y_k, \Delta z_k$ y la norma de la partición $\|P\|$, el valor máximo entre $\Delta x_k, \Delta y_k, \Delta z_k$ tienden a cero. Cuando se obtiene un único valor límite, sin importar la forma de elegir las particiones y puntos (x_k, y_k, z_k) , decimos que F es **integrable** sobre D . Como antes, se demues-

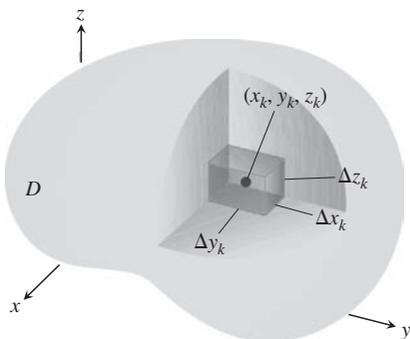


FIGURA 15.29 Partición de un sólido con celdas cúbicas de volumen ΔV_k .

tra que cuando F es continua y la superficie de la frontera de D está formada por un número finito de superficies regulares unidas a lo largo de un número finito de curvas regulares, entonces F es integrable. Cuando $\|P\| \rightarrow 0$ y el número de celdas n tiende a ∞ , las sumas S_n tienden a un límite. Llamamos a este límite la **integral triple de F sobre D** y la escribimos como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \iiint_D F(x, y, z) \, dV \quad \text{o} \quad \lim_{\|P\| \rightarrow 0} S_n = \iiint_D F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz.$$

Las regiones D sobre las que las funciones continuas son integrables, son aquellas que tienen fronteras “razonablemente suaves”.

Volumen de una región en el espacio

Si F es una función constante cuyo valor es 1, entonces las sumas de la ecuación (1) se reducen a

$$S_n = \sum F(x_k, y_k, z_k) \Delta V_k = \sum 1 \cdot \Delta V_k = \sum \Delta V_k.$$

Cuando Δx_k , Δy_k y Δz_k tienden a cero, las celdas ΔV_k se hacen cada vez más pequeñas y más numerosas, y cubren una parte cada vez mayor de D . Por lo tanto, definimos el volumen de D como la integral triple

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \Delta V_k = \iiint_D dV.$$

DEFINICIÓN El **volumen** de una región cerrada D y acotada en el espacio es

$$V = \iiint_D dV.$$

Esta definición concuerda con nuestras definiciones anteriores de volumen; no obstante, omitiremos la verificación de este hecho. Como veremos en un momento, esta integral nos facilita el cálculo de volúmenes de sólidos encerrados por superficies curvas.

Cálculo de límites de integración en el orden $dz \, dy \, dx$

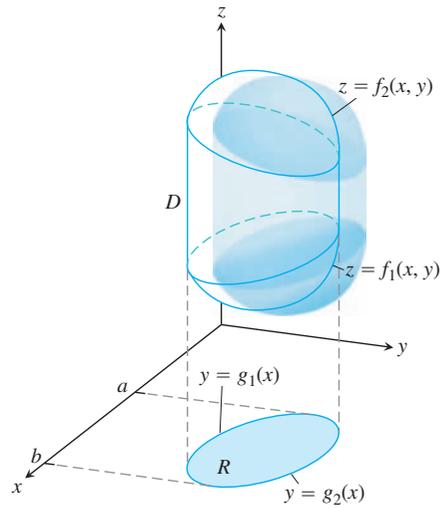
Para evaluar una integral triple aplicamos una versión tridimensional del teorema de Fubini (sección 15.2) para obtenerla por medio de tres iteraciones simples. Como en las integrales dobles, existe un procedimiento geométrico para calcular los límites de integración para estas integrales simples.

Para evaluar

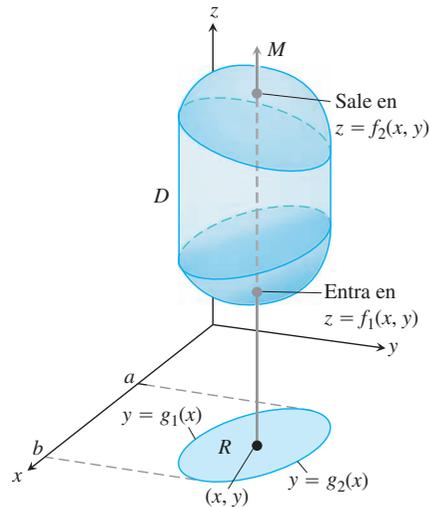
$$\iiint_D F(x, y, z) \, dV$$

sobre una región D , integramos primero con respecto a z , luego con respecto a y , y al final con respecto a x . (Usted podría elegir un orden diferente de integración, pero el procedimiento es similar, como se ilustra en el ejemplo 2).

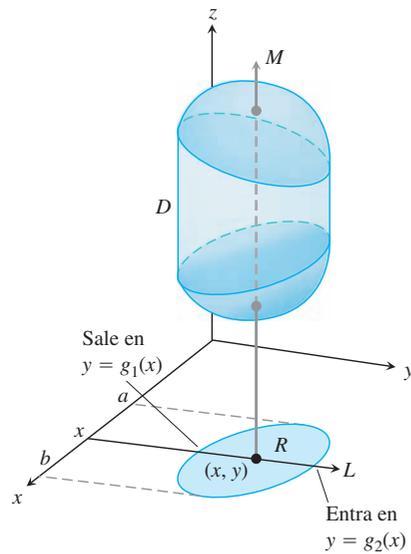
1. *Elabore un bosquejo.* Trace la región D junto con su “sombra” R (proyección vertical) sobre el plano xy . Marque las superficies de las fronteras superior e inferior de la región D y las curvas de las fronteras superior e inferior de R .



2. Determine los límites de integración en z . Trace una recta M , paralela al eje z , que pase por un punto típico (x, y) en R . Cuando z crece, M entra a D en $z = f_1(x, y)$ y sale en $z = f_2(x, y)$. Éstos son los límites de integración en z .



3. Determine los límites de integración en y . Dibuje una recta L paralela al eje y que pase por (x, y) . Cuando y crece, L entra a R en $y = g_1(x)$ y sale en $y = g_2(x)$. Éstos son los límites de integración en y .



4. *Determine los límites de integración en x .* Seleccione los límites en x que incluyan todas las rectas paralelas al eje y que pasen por R ($x = a$ y $x = b$ en la figura anterior). Éstos son los límites de integración en x . La integral es

$$\int_{x=a}^{x=b} \int_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} \int_{z=f_1(x,y)}^{z=f_2(x,y)} F(x, y, z) dz dy dx.$$

Siga procedimientos similares si cambia el orden de integración. La “sombra” de la región D se encuentra en el plano de las dos últimas variables con respecto a las que se realiza la integración iterada.

El procedimiento anterior se aplica siempre que una región sólida D esté acotada por arriba y por abajo por una superficie, y cuando la “sombra” de la región R esté acotada por una curva superior y una inferior. No se aplica para regiones con agujeros que las atraviesan, si bien algunas veces estas regiones se subdividen en regiones más simples para las cuales sí se aplica el procedimiento.

EJEMPLO 1 Calcule el volumen de la región D encerrada entre las superficies $z = x^2 + 3y^2$ y $z = 8 - x^2 - y^2$.

Solución El volumen es

$$V = \iiint_D dz dy dx,$$

la integral de $F(x, y, z) = 1$ sobre D . Para obtener los límites de integración y evaluar la integral, primero graficamos la región. Las superficies (figura 15.30) se cortan en el cilindro elíptico $x^2 + 3y^2 = 8 - x^2 - y^2$ o $x^2 + 2y^2 = 4, z > 0$. La frontera de la región R , la proyección de D sobre el plano xy , es una elipse con la misma ecuación: $x^2 + 2y^2 = 4$. La frontera “superior” de R es la curva $y = \sqrt{(4 - x^2)}/2$. La frontera inferior es la curva $y = -\sqrt{(4 - x^2)}/2$.

Ahora determinamos los límites de integración en z . La recta M , paralela al eje z , que pasa por un punto típico (x, y) en R , entra a D en $z = x^2 + 3y^2$ y sale en $z = 8 - x^2 - y^2$.

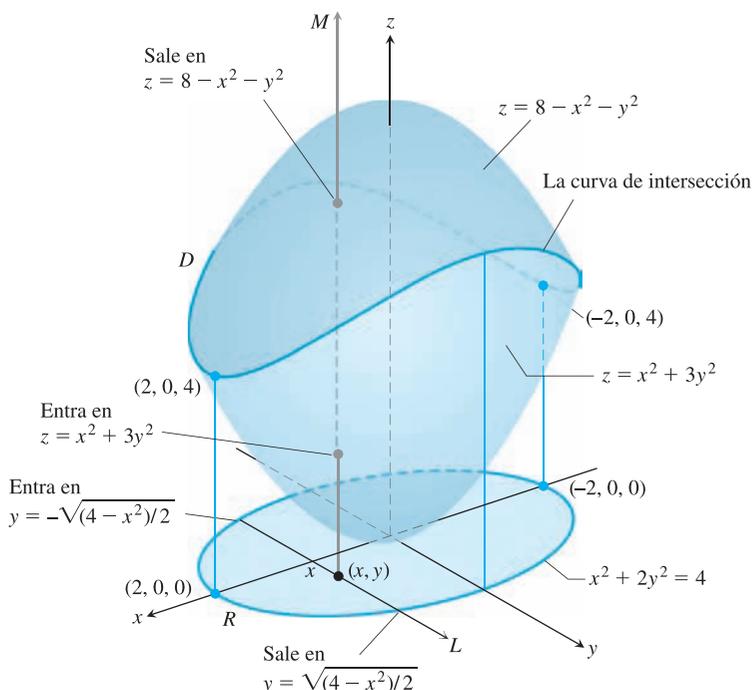


FIGURA 15.30 El volumen de la región encerrada por dos paraboloides, calculado en el ejemplo 1.

En seguida obtenemos los límites de integración en y . La recta L , paralela al eje y que pasa por (x, y) entra a R en $y = -\sqrt{4 - x^2}/2$ y sale en $y = \sqrt{4 - x^2}/2$.

Por último, hallamos los límites de integración en x . Cuando L barre R , el valor de x varía de $x = -2$ en $(-2, 0, 0)$ hasta $x = 2$ en $(2, 0, 0)$. El volumen de la región D es

$$\begin{aligned} V &= \iiint_D dz \, dy \, dx \\ &= \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}/2}^{\sqrt{4-x^2}/2} \int_{x^2+3y^2}^{8-x^2-y^2} dz \, dy \, dx \\ &= \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}/2}^{\sqrt{4-x^2}/2} (8 - 2x^2 - 4y^2) \, dy \, dx \\ &= \int_{-2}^2 \left[(8 - 2x^2)y - \frac{4}{3}y^3 \right]_{y=-\sqrt{4-x^2}/2}^{y=\sqrt{4-x^2}/2} dx \\ &= \int_{-2}^2 \left(2(8 - 2x^2)\sqrt{\frac{4-x^2}{2}} - \frac{8}{3} \left(\frac{4-x^2}{2}\right)^{3/2} \right) dx \\ &= \int_{-2}^2 \left[8\left(\frac{4-x^2}{2}\right)^{3/2} - \frac{8}{3} \left(\frac{4-x^2}{2}\right)^{3/2} \right] dx = \frac{4\sqrt{2}}{3} \int_{-2}^2 (4-x^2)^{3/2} dx \\ &= 8\pi\sqrt{2}. \quad \text{Después de integrar con la sustitución } x = 2 \text{ sen } u \end{aligned}$$

En el siguiente ejemplo proyectamos D sobre el plano xz , en vez de hacerlo sobre el plano xy , para mostrar cómo usar un orden distinto de integración.

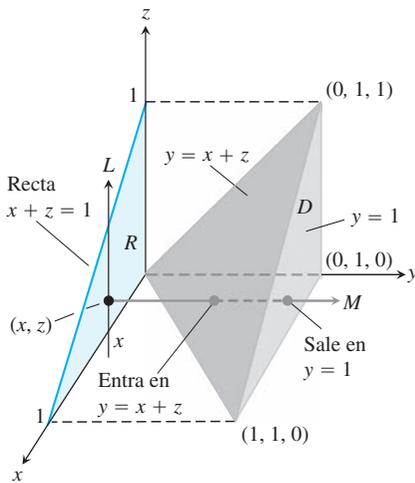


FIGURA 15.31 Determinación de los límites de integración para la evaluación de la integral triple de una función definida sobre el tetraedro D (ejemplos 2 y 3).

EJEMPLO 2 Establezca los límites de integración para la evaluación de la integral triple de la función $F(x, y, z)$ sobre el tetraedro D con vértices en $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 1, 1)$. Aplique el orden de integración $dy \, dz \, dx$.

Solución Trazamos D junto con su “sombra” R en el plano xz (figura 15.31). La frontera superior (a la derecha) de D se encuentra en el plano $y = 1$. La frontera inferior (a la izquierda) se encuentra en el plano $y = x + z$. La frontera superior de R es la recta $z = 1 - x$ y la frontera inferior es la recta $z = 0$.

Primero obtenemos los límites de integración en y . La recta paralela al eje y que pasa por un punto típico (x, z) en R entra a D en $y = x + z$ y sale en $y = 1$.

Luego, obtenemos los límites de integración en z . La recta L paralela al eje z que pasa por (x, z) entra a R en $z = 0$ y sale en $z = 1 - x$.

Finalmente, encontramos los límites de integración en x . Cuando L barre R , el valor de x varía desde $x = 0$ hasta $x = 1$. La integral es

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_{x+z}^1 F(x, y, z) \, dy \, dz \, dx.$$

EJEMPLO 3 Integre $F(x, y, z) = 1$ sobre el tetraedro D del ejemplo 2 en el orden $dz \, dy \, dx$, y luego integre en el orden $dy \, dz \, dx$.

Solución Primero hallamos los límites de integración en z . Una recta paralela al eje z que pasa por un punto típico (x, y) en la sombra del plano xy entra al tetraedro en $z = 0$ y sale por el plano superior donde $z = y - x$ (figura 15.32).

Después, obtenemos los límites de integración en y . En el plano xy donde $z = 0$, el lado inclinado del tetraedro cruza el plano a lo largo de la recta $y = x$. Una recta L paralela al eje y que pasa por (x, y) entra a la sombra en el plano xy en $y = x$ y sale en $y = 1$ (figura 15.32).

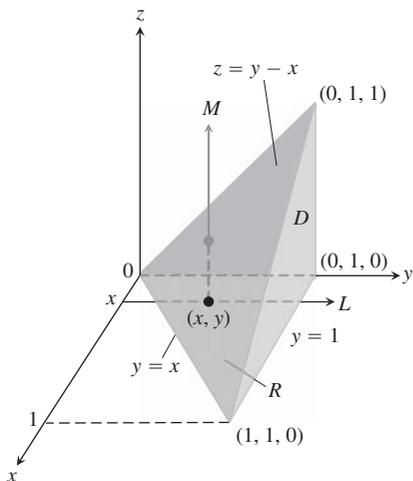


FIGURA 15.32 El tetraedro del ejemplo 3 muestra cómo se obtienen los límites de integración en el orden $dz\,dy\,dx$.

Por último, determinamos los límites de integración en x . Cuando la recta L paralela al eje y del paso anterior barre la sombra, el valor de x varía desde $x = 0$ hasta $x = 1$ en el punto $(1, 1, 0)$. (Véase la figura 15.32). La integral es

$$\int_0^1 \int_x^1 \int_0^{y-x} F(x, y, z) \, dz \, dy \, dx.$$

Por ejemplo, si $F(x, y, z) = 1$, hallaríamos que el volumen del tetraedro es

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \int_x^1 \int_0^{y-x} dz \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 \int_x^1 (y - x) \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}y^2 - xy \right]_{y=x}^{y=1} dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - x + \frac{1}{2}x^2 \right) dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Obtenemos el mismo resultado integrando en el orden $dy\,dz\,dx$. A partir del ejemplo 2,

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_{x+z}^1 dy \, dz \, dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} (1 - x - z) \, dz \, dx \\ &= \int_0^1 \left[(1 - x)z - \frac{1}{2}z^2 \right]_{z=0}^{z=1-x} dx \\ &= \int_0^1 \left[(1 - x)^2 - \frac{1}{2}(1 - x)^2 \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - x)^2 dx \\ &= -\frac{1}{6}(1 - x)^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Valor promedio de una función en el espacio

El valor promedio de una función F sobre una región D en el espacio se define por la fórmula

$$\text{Valor promedio de } F \text{ sobre } D = \frac{1}{\text{volumen de } D} \iiint_D F \, dV. \tag{2}$$

Por ejemplo, si $F(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, entonces el valor promedio de F sobre D es la distancia promedio de los puntos en D desde el origen. Si $F(x, y, z)$ es la temperatura en (x, y, z) sobre un sólido que ocupa una región D en el espacio, entonces el valor promedio de F sobre D es la temperatura promedio del sólido.

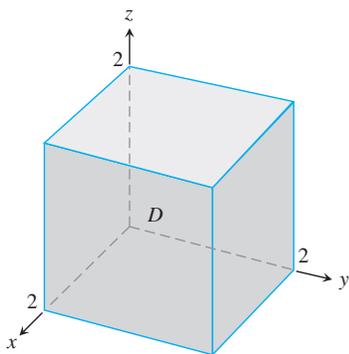


FIGURA 15.33 La región de integración del ejemplo 4.

EJEMPLO 4 Determine el valor promedio de $F(x, y, z) = xyz$ sobre la región cúbica D acotada por los planos coordenados y los planos $x = 2$, $y = 2$ y $z = 2$ en el primer octante.

Solución Trazamos el cubo con suficiente detalle para mostrar los límites de integración (figura 15.33). Luego, usamos la ecuación 2 para calcular el valor promedio de F sobre el cubo.

El volumen de la región D es $(2)(2)(2) = 8$. El valor de la integral de F sobre el cubo es

$$\begin{aligned} \int_0^2 \int_0^2 \int_0^2 xyz \, dx \, dy \, dz &= \int_0^2 \int_0^2 \left[\frac{x^2}{2} yz \right]_{x=0}^{x=2} dy \, dz = \int_0^2 \int_0^2 2yz \, dy \, dz \\ &= \int_0^2 \left[y^2 z \right]_{y=0}^{y=2} dz = \int_0^2 4z \, dz = \left[2z^2 \right]_0^2 = 8. \end{aligned}$$

Con estos valores, la ecuación (2) nos da

$$\text{Valor promedio de } xyz \text{ sobre el cubo} = \frac{1}{\text{volumen}} \iiint_{\text{cubo}} xyz \, dV = \left(\frac{1}{8} \right) (8) = 1.$$

En la evaluación de la integral, seleccionamos el orden $dx \, dy \, dz$, pero cualquiera de otros cinco órdenes posibles servirían también. ■

Propiedades de las integrales triples

Las integrales triples tienen las mismas propiedades algebraicas que las integrales dobles y simples. Sólo se sustituyen las integrales dobles de las cuatro propiedades dadas en la sección 15.2, página 846, por las integrales triples.

Ejercicios 15.5

Evaluación de integrales triples con diferentes órdenes de iteración

1. Evalúe la integral del ejemplo 2 tomando $F(x, y, z) = 1$ para calcular el volumen del tetraedro en el orden $dz \, dx \, dy$.
2. **Volumen de un sólido rectangular** Escriba seis diferentes integrales triples iteradas para el volumen del sólido rectangular en el primer octante acotado por los planos coordenados y los planos $x = 1$, $y = 2$ y $z = 3$. Evalúe una de las integrales.
3. **Volumen de un tetraedro** Escriba seis diferentes integrales triples iteradas para el volumen del tetraedro determinado en el primer octante por el plano $6x + 3y + 2z = 6$. Evalúe una de las integrales.
4. **Volumen de un sólido** Escriba seis diferentes integrales triples iteradas para el volumen de la región en el primer octante acotada por el cilindro $x^2 + z^2 = 4$ y el plano $y = 3$. Evalúe una de las integrales.
5. **Volumen encerrado por paraboloides** Sea D la región acotada por los paraboloides $z = 8 - x^2 - y^2$ y $z = x^2 + y^2$. Escriba seis diferentes integrales triples iteradas para el volumen de D . Evalúe una de las integrales.
6. **Volumen dentro de un paraboloides debajo de un plano** Sea D la región acotada por el paraboloides $z = 8 - x^2 - y^2$ y el plano $z = 2y$. Escriba integrales triples iteradas en el orden $dz \, dx \, dy$ y $dz \, dy \, dx$ que nos den el volumen de la región D . No evalúe las integrales.

Evaluación de integrales triples iteradas

Evalúe las integrales de los ejercicios 7 a 20.

7. $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (x^2 + y^2 + z^2) \, dz \, dy \, dx$
8. $\int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{3y} \int_{x^2+3y^2}^{8-x^2-y^2} dz \, dx \, dy$
9. $\int_1^e \int_1^e \int_1^e \frac{1}{xyz} \, dx \, dy \, dz$
10. $\int_0^1 \int_0^{3-3x} \int_0^{3-3x-y} dz \, dy \, dx$
11. $\int_0^{\pi/6} \int_0^1 \int_{-2}^3 y \, \text{sen } z \, dx \, dy \, dz$
12. $\int_{-1}^1 \int_0^1 \int_0^2 (x + y + z) \, dy \, dx \, dz$
13. $\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^{\sqrt{9-x^2}} dz \, dy \, dx$
14. $\int_0^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \int_0^{2x+y} dz \, dx \, dy$
15. $\int_0^1 \int_0^{2-x} \int_0^{2-x-y} dz \, dy \, dx$
16. $\int_0^1 \int_0^{1-x^2} \int_3^{4-x^2-y} x \, dz \, dy \, dx$
17. $\int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi \cos(u + v + w) \, du \, dv \, dw$ (espacio uvw)
18. $\int_0^1 \int_1^{\sqrt{e}} \int_1^e se^s \ln r \frac{(\ln t)^2}{t} \, dt \, dr \, ds$ (espacio rst)

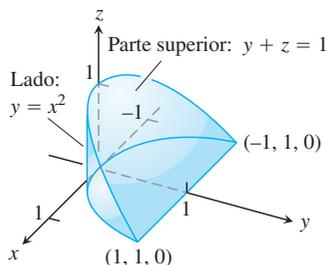
19. $\int_0^{\pi/4} \int_0^{\ln \sec v} \int_{-\infty}^{2t} e^x dx dt dv$ (espacio txv)

20. $\int_0^7 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-q^2}} \frac{q}{r+1} dp dq dr$ (espacio pqr)

Determinación de integrales iteradas equivalentes

21. La siguiente es la región de integración de la integral

$$\int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 \int_0^{1-y} dz dy dx.$$

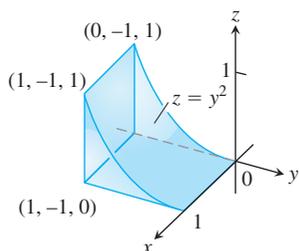


Replantee la integral como una integral iterada equivalente en el orden:

- a. $dy dz dx$
- b. $dy dx dz$
- c. $dx dy dz$
- d. $dx dz dy$
- e. $dz dx dy$.

22. La siguiente es la región de integración de la integral

$$\int_0^1 \int_{-1}^0 \int_0^{y^2} dz dy dx.$$



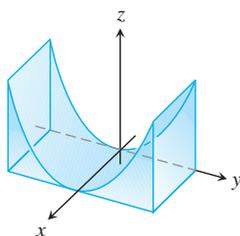
Replantee la integral como una integral iterada equivalente en el orden

- a. $dy dz dx$
- b. $dy dx dz$
- c. $dx dy dz$
- d. $dx dz dy$
- e. $dz dx dy$.

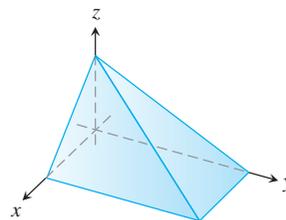
Cálculo de volúmenes usando integrales triples

Calcule los volúmenes de las regiones de los ejercicios 23 a 36.

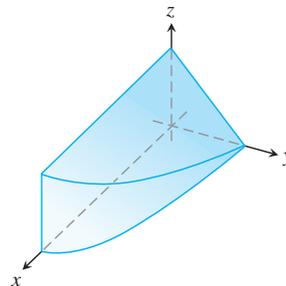
23. La región entre el cilindro $z = y^2$ y el plano xy que está acotada por los planos $x = 0, x = 1, y = -1, y = 1$.



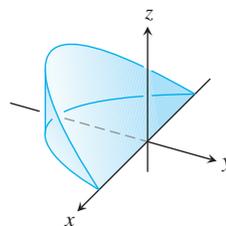
24. La región del primer octante acotada por los planos coordenados y los planos $x + z = 1, y + 2z = 2$.



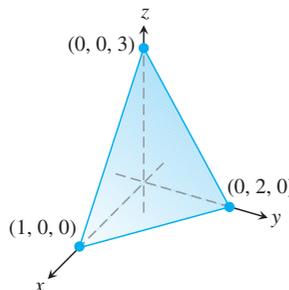
25. La región del primer octante acotada por los planos coordenados, el plano $y + z = 2$ y el cilindro $x = 4 - y^2$.



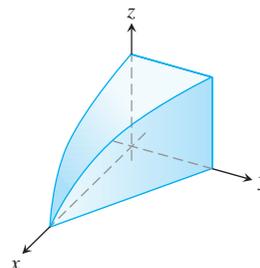
26. La cuña definida en el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ por los planos $z = -y$ y $z = 0$.



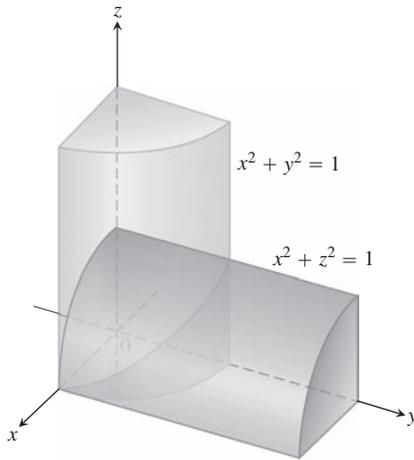
27. El tetraedro del primer octante acotado por los planos coordenados y el plano que pasa por $(1, 0, 0), (0, 2, 0)$ y $(0, 0, 3)$.



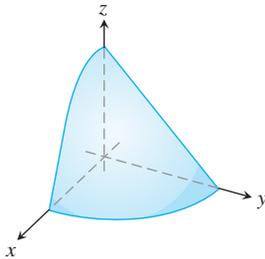
28. La región del primer octante acotada por los planos coordenados, el plano $y = 1 - x$ y la superficie $z = \cos(\pi x/2), 0 \leq x \leq 1$.



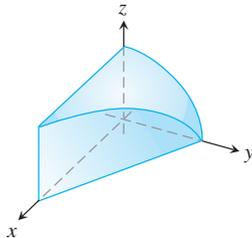
29. La región común a los interiores de los cilindros $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + z^2 = 1$, cuya octava parte se muestra en la siguiente figura.



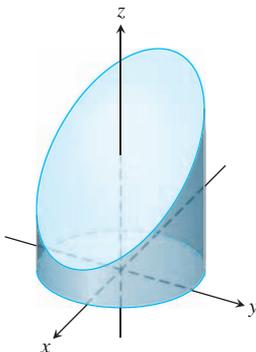
30. La región del primer octante acotada por los planos coordenados y la superficie $z = 4 - x^2 - y^2$.



31. La región del primer octante acotada por los planos coordenados, el plano $x + y = 4$ y el cilindro $y^2 + 4z^2 = 16$.



32. La región cortada en el cilindro $x^2 + y^2 = 4$ por el plano $z = 0$ y el plano $x + z = 3$.



33. La región del primer octante entre los planos $x + y + 2z = 2$ y $2x + 2y + z = 4$.
34. La región finita acotada por los planos $z = x$, $x + z = 8$, $z = y$, $y = 8$ y $z = 0$.
35. La región cortada en el cilindro elíptico sólido $x^2 + 4y^2 \leq 4$ por el plano xy y el plano $z = x + 2$.
36. La región acotada por atrás por el plano $x = 0$, al frente y a los lados por el cilindro parabólico $x = 1 - y^2$, arriba por el paraboloido $z = x^2 + y^2$, y abajo por el plano xy .

Valores promedio

En los ejercicios 37 a 40, calcule el valor promedio de $F(x, y, z)$ sobre la región dada.

37. $F(x, y, z) = x^2 + 9$ sobre un cubo en el primer octante acotado por los planos coordenados y los planos $x = 2$, $y = 2$ y $z = 2$.
38. $F(x, y, z) = x + y - z$ sobre un sólido rectangular en el primer octante acotado por los planos coordenados y los planos $x = 1$, $y = 1$ y $z = 2$.
39. $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sobre el cubo en el primer octante acotado por los planos coordenados y los planos $x = 1$, $y = 1$ y $z = 1$.
40. $F(x, y, z) = xyz$ sobre el cubo en el primer octante acotado por los planos coordenados y los planos $x = 2$, $y = 2$ y $z = 2$.

Cambio del orden de integración

Evalúe las integrales de los ejercicios 41 a 44, cambiando el orden de integración de manera adecuada.

41. $\int_0^4 \int_0^1 \int_{2y}^2 \frac{4 \cos(x^2)}{2\sqrt{z}} dx dy dz$
42. $\int_0^1 \int_0^1 \int_{x^2}^1 12xze^{zy^2} dy dx dz$
43. $\int_0^1 \int_{\sqrt{z}}^1 \int_0^{\ln 3} \frac{\pi e^{2x} \sin \pi y^2}{y^2} dx dy dz$
44. $\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \int_0^x \frac{\sin 2z}{4-z} dy dz dx$

Teoría y ejemplos

45. **Obtención de un límite superior de una integral iterada**

Despeje a :

$$\int_0^1 \int_0^{4-a-x^2} \int_a^{4-x^2-y} dz dy dx = \frac{4}{15}.$$

46. **Elipsoide** ¿Para qué valor de c ocurre que el volumen del elipsoide $x^2 + (y/2)^2 + (z/c)^2 = 1$ es igual a 8π ?
47. **Minimización de una integral triple** ¿Cuál dominio D en el espacio minimiza el valor de la integral

$$\iiint_D (4x^2 + 4y^2 + z^2 - 4) dV?$$

Justifique su respuesta.

48. **Maximización de una integral triple** ¿Cuál dominio D en el espacio maximiza el valor de la integral

$$\iiint_D (1 - x^2 - y^2 - z^2) dV?$$

Justifique su respuesta.

EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

En los ejercicios 49 a 52, emplee una herramienta de integración de un SAC para evaluar la integral triple de la función dada sobre la región sólida especificada.

- 49. $F(x, y, z) = x^2y^2z$ sobre el cilindro sólido acotado por $x^2 + y^2 = 1$ y los planos $z = 0$ y $z = 1$.
- 50. $F(x, y, z) = |xyz|$ sobre el sólido acotado abajo por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y arriba por el plano $z = 1$.

51. $F(x, y, z) = \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$ sobre el sólido acotado abajo por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y arriba por el plano $z = 1$.

52. $F(x, y, z) = x^4 + y^2 + z^2$ sobre la esfera sólida $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

15.6 Momentos y centros de masa

Esta sección describe cómo calcular las masas y los momentos de objetos bidimensionales y tridimensionales en coordenadas cartesianas. En la sección 15.7 estudiaremos los cálculos en coordenadas cilíndricas y esféricas. Las definiciones e ideas son similares al caso de la variable única que estudiamos en la sección 6.6, pero ahora consideramos situaciones más reales.

Masas y primeros momentos

Si $\delta(x, y, z)$ es la densidad (masa por unidad de volumen) de un objeto que ocupa una región D en el espacio, la integral de δ sobre D nos proporciona la **masa** del objeto. Para ver por qué, imagine que el objeto se divide en n elementos de masa como el de la figura 15.34. La masa del objeto es el límite

$$M = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \Delta m_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \delta(x_k, y_k, z_k) \Delta V_k = \iiint_D \delta(x, y, z) dV.$$

El *primer momento* de una región sólida D con respecto a un plano coordenado se define como la integral triple sobre D de la distancia de un punto (x, y, z) en D al plano multiplicada por la densidad del sólido en ese punto. Por ejemplo, el primer momento con respecto al plano yz es la integral

$$M_{yz} = \iiint_D x \delta(x, y, z) dV.$$

El *centro de masa* se obtiene a partir de los primeros momentos. Por ejemplo, la coordenada x del centro de masa es $\bar{x} = M_{yz}/M$.

Para un objeto bidimensional, como una placa plana y delgada, calculamos los primeros momentos con respecto a los ejes coordenados eliminando simplemente la coordenada z . De esta forma, el primer momento con respecto al eje y es la integral doble sobre la región R de la distancia al eje multiplicada por la densidad, es decir,

$$M_y = \iint_R x \delta(x, y) dA.$$

La tabla 15.1 resume las fórmulas.

EJEMPLO 1 Calcule el centro de masa de un sólido de densidad constante δ acotado abajo por el disco $R: x^2 + y^2 \leq 4$ en el plano $z = 0$ y arriba por el paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ (figura 15.35).

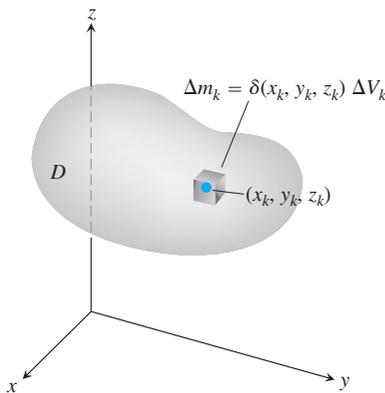


FIGURA 15.34 Para definir la masa de un objeto, primero imaginamos que está dividido en un número finito de elementos de masa Δm_k .

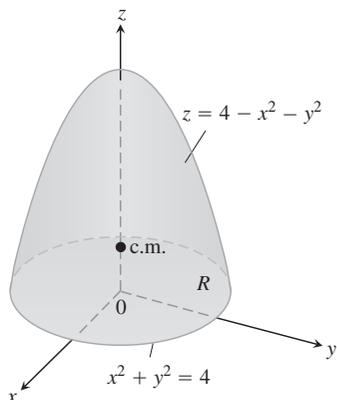


FIGURA 15.35 Determinación del centro de masa de un sólido (ejemplo 1).

TABLA 15.1 Fórmulas para la masa y primer momento

SÓLIDO TRIDIMENSIONAL

Masa: $M = \iiint_D \delta \, dV$ $\delta = \delta(x, y, z)$ es la densidad en (x, y, z) .

Primeros momentos con respecto a los planos coordenados:

$$M_{yz} = \iiint_D x \delta \, dV, \quad M_{xz} = \iiint_D y \delta \, dV, \quad M_{xy} = \iiint_D z \delta \, dV$$

Centro de masa:

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{M}, \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M}$$

LACA DE DOS DIMENSIONES

Masa: $M = \iint_R \delta \, dA$ $\delta = \delta(x, y)$ es la densidad en (x, y) .

Primeros momentos: $M_y = \iint_R x \delta \, dA, \quad M_x = \iint_R y \delta \, dA$

Centro de masa: $\bar{x} = \frac{M_y}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M}$

Solución Por simetría, $\bar{x} = \bar{y} = 0$. Para obtener \bar{z} , calculamos primero

$$\begin{aligned} M_{xy} &= \iiint_R \int_{z=0}^{z=4-x^2-y^2} z \delta \, dz \, dy \, dx = \iint_R \left[\frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{z=4-x^2-y^2} \delta \, dy \, dx \\ &= \frac{\delta}{2} \iint_R (4 - x^2 - y^2)^2 \, dy \, dx \\ &= \frac{\delta}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 - r^2)^2 r \, dr \, d\theta \quad \text{Coordenadas polares simplifican la integración.} \\ &= \frac{\delta}{2} \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{6} (4 - r^2)^3 \right]_{r=0}^{r=2} d\theta = \frac{16\delta}{3} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{32\pi\delta}{3}. \end{aligned}$$

Un cálculo similar nos proporciona la masa

$$M = \iiint_R \int_0^{4-x^2-y^2} \delta \, dz \, dy \, dx = 8\pi\delta.$$

Por lo tanto, $\bar{z} = (M_{xy}/M) = 4/3$ y el centro de masa es $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (0, 0, 4/3)$. ■

Cuando la densidad de un objeto sólido o placa es constante (como en el ejemplo 1), el centro de masa se conoce como el **centroide** del objeto. Para determinar el centroide, igualamos δ a 1 y procedemos a encontrar \bar{x} , \bar{y} y \bar{z} como antes, dividiendo los primeros momentos entre las masas. Estos cálculos también son válidos para objetos bidimensionales.

EJEMPLO 2 Encuentre el centroide de la región en el primer cuadrante que está acotada arriba por la recta $y = x$ y abajo por la parábola $y = x^2$.

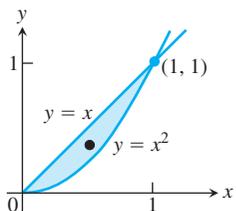


FIGURA 15.36 El centroide de esta región se calcula en el ejemplo 2.

Solución Trazamos la región e incluimos los detalles suficientes para determinar los límites de integración (figura 15.36). Luego igualamos δ a 1 y evaluamos las fórmulas adecuadas de la tabla 15.1:

$$M = \int_0^1 \int_{x^2}^x 1 \, dy \, dx = \int_0^1 \left[y \right]_{y=x^2}^{y=x} dx = \int_0^1 (x - x^2) \, dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{6}$$

$$\begin{aligned} M_x &= \int_0^1 \int_{x^2}^x y \, dy \, dx = \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=x^2}^{y=x} dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2} \right) dx = \left[\frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{10} \right]_0^1 = \frac{1}{15} \end{aligned}$$

$$M_y = \int_0^1 \int_{x^2}^x x \, dy \, dx = \int_0^1 \left[xy \right]_{y=x^2}^{y=x} dx = \int_0^1 (x^2 - x^3) \, dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{12}.$$

A partir de estos valores de M , M_x y M_y , obtenemos

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{1/12}{1/6} = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{1/15}{1/6} = \frac{2}{5}.$$

El centroide es el punto $(1/2, 2/5)$. ■

Momentos de inercia

Los primeros momentos de un cuerpo (tabla 15.1) nos hablan acerca del equilibrio y de la torca que un objeto experimenta con respecto a diferentes ejes en un campo gravitacional. Sin embargo, si el cuerpo es un eje en rotación, es más probable que estemos más interesados en conocer cuánta energía se almacena en el eje o cuánta energía genera este eje a una velocidad angular determinada. Aquí es donde el segundo momento o momento de inercia entra en escena.

Imagine que dividimos el eje en pequeños bloques de masa Δm_k y sea r_k la distancia desde el centro de masa k -ésimo bloque hasta el eje de rotación (figura 15.37). Si el eje gira a una velocidad angular constante $\omega = d\theta/dt$ radianes por segundo, el centro de masa del bloque recorrerá su órbita a una rapidez lineal de

$$v_k = \frac{d}{dt}(r_k\theta) = r_k \frac{d\theta}{dt} = r_k\omega.$$

La energía cinética del bloque será aproximadamente

$$\frac{1}{2}\Delta m_k v_k^2 = \frac{1}{2} \Delta m_k (r_k\omega)^2 = \frac{1}{2} \omega^2 r_k^2 \Delta m_k.$$

La energía cinética del eje será aproximadamente

$$\sum \frac{1}{2} \omega^2 r_k^2 \Delta m_k.$$

La integral aproximada por estas sumas cuando el eje se divide en bloques cada vez más pequeños nos da la energía cinética del eje:

$$EC_{\text{eje}} = \int \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \, dm = \frac{1}{2} \omega^2 \int r^2 \, dm. \tag{1}$$

El factor

$$I = \int r^2 \, dm$$

es el *momento de inercia* de la flecha con respecto a su eje de rotación, y a partir de la ecuación (1) vemos que la energía cinética del eje es

$$EC_{\text{eje}} = \frac{1}{2} I\omega^2.$$

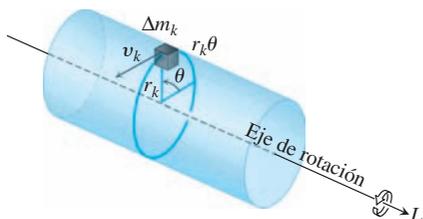


FIGURA 15.37 Para determinar una integral para la cantidad de energía almacenada en un eje de rotación, primero imaginamos al eje dividido en pequeños bloques. Cada bloque tiene su propia energía cinética. Sumamos las contribuciones de los bloques individuales para obtener la energía cinética del eje.

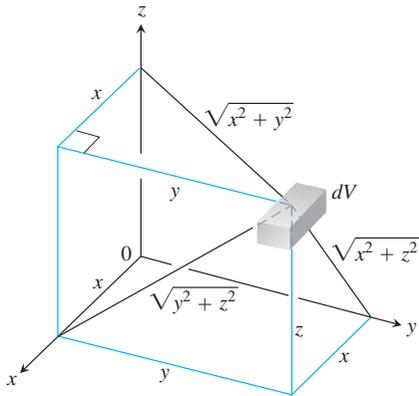


FIGURA 15.38 Distancias para dV a los planos y ejes coordenados.

El momento de inercia de un eje se parece de alguna manera a la masa inercial de una locomotora. Para arrancar una locomotora con masa m , que se desplaza a una velocidad lineal v , necesitamos suministrar una energía cinética de $EC = (1/2)mv^2$. Para detener la locomotora tenemos que eliminar esta cantidad de energía. Para que un eje con un momento de inercia I empiece a girar con una velocidad angular ω , necesitamos suministrar una energía cinética de $EC = (1/2)I\omega^2$. Para detener el eje, tenemos que retirar esta energía. El momento de inercia del eje es análogo a la masa de la locomotora. Lo que hace difícil el arranque o detención de una locomotora es su masa. Lo que dificulta el arranque o detención de un eje es su momento de inercia. El momento de inercia no sólo depende de la masa del eje, sino también de su distribución. La masa que está más lejos del eje de rotación contribuye más al momento de inercia.

Ahora derivaremos una fórmula para el momento de inercia de un sólido en el espacio. Si $r(x, y, z)$ es la distancia desde el punto (x, y, z) en D a una recta L , entonces el momento de inercia de la masa $\Delta m_k = \delta(x_k, y_k, z_k)\Delta V_k$ con respecto a la recta L (que se muestra en la figura 15.37) es aproximadamente $\Delta I_k = r^2(x_k, y_k, z_k)\Delta m_k$. **El momento de inercia con respecto a L** del objeto completo es

$$I_L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \Delta I_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n r^2(x_k, y_k, z_k) \delta(x_k, y_k, z_k) \Delta V_k = \iiint_D r^2 \delta \, dV.$$

Si L es el eje x , entonces $r^2 = y^2 + z^2$ (figura 15.38) y

$$I_x = \iiint_D (y^2 + z^2) \delta(x, y, z) \, dV.$$

De manera similar, si L es el eje y o el eje z , tenemos

$$I_y = \iiint_D (x^2 + z^2) \delta(x, y, z) \, dV \quad \text{y} \quad I_z = \iiint_D (x^2 + y^2) \delta(x, y, z) \, dV.$$

La tabla 15.2 resume las fórmulas de estos momentos de inercia (segundos momentos porque invocan los *cuadrados* de las distancias). También muestra la definición de *momento polar* con respecto al origen.

EJEMPLO 3 Calcule I_x , I_y e I_z del sólido rectangular de densidad constante δ que se ilustra en la figura 15.39.

Solución La fórmula para I_x nos da

$$I_x = \int_{-c/2}^{c/2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} (y^2 + z^2) \delta \, dx \, dy \, dz.$$

Nos ahorraremos algo de trabajo de integración al observar que $(y^2 + z^2)\delta$ es una función par de x , y y z , puesto que δ es constante. El sólido rectangular consta de ocho piezas simétricas, una en cada octante. Evaluamos la integral en una de estas piezas y luego multiplicamos por 8 para obtener el valor total.

$$\begin{aligned} I_x &= 8 \int_0^{c/2} \int_0^{b/2} \int_0^{a/2} (y^2 + z^2) \delta \, dx \, dy \, dz = 4a\delta \int_0^{c/2} \int_0^{b/2} (y^2 + z^2) \, dy \, dz \\ &= 4a\delta \int_0^{c/2} \left[\frac{y^3}{3} + z^2 y \right]_{y=0}^{y=b/2} dz \\ &= 4a\delta \int_0^{c/2} \left(\frac{b^3}{24} + \frac{z^2 b}{2} \right) dz \\ &= 4a\delta \left(\frac{b^3 c}{48} + \frac{c^3 b}{48} \right) = \frac{abc\delta}{12} (b^2 + c^2) = \frac{M}{12} (b^2 + c^2). \end{aligned} \quad M = abc\delta$$

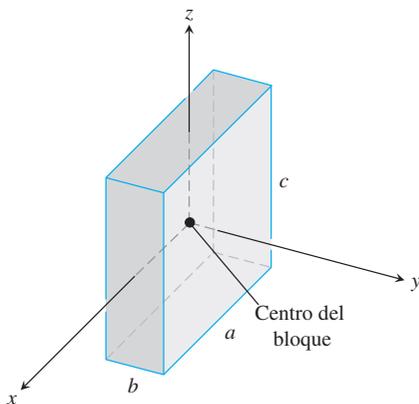


FIGURA 15.39 Cálculo de I_x , I_y e I_z para el bloque mostrado aquí. El origen está en el centro del bloque (ejemplo 3).

TABLA 15.2 Fórmulas de momentos de inercia (segundos momentos)

SÓLIDO DE TRES DIMENSIONES

Con respecto al eje x : $I_x = \iiint (y^2 + z^2) \delta \, dV$ $\delta = \delta(x, y, z)$

Con respecto al eje y : $I_y = \iiint (x^2 + z^2) \delta \, dV$

Con respecto al eje z : $I_z = \iiint (x^2 + y^2) \delta \, dV$

Con respecto a la recta L : $I_L = \iiint r^2 \delta \, dV$ $r(x, y, z) =$ distancia del punto (x, y, z) a la recta L

PLACA DE DOS DIMENSIONES

Con respecto al eje x : $I_x = \iint y^2 \delta \, dA$ $\delta = \delta(x, y)$

Con respecto al eje y : $I_y = \iint x^2 \delta \, dA$

Con respecto a la recta L : $I_L = \iint r^2(x, y) \delta \, dA$ $r(x, y) =$ distancia desde el punto (x, y) hasta la recta L

Con respecto al origen $I_0 = \iint (x^2 + y^2) \delta \, dA = I_x + I_y$
(momento polar):

De manera similar,

$$I_y = \frac{M}{12}(a^2 + c^2) \quad y \quad I_z = \frac{M}{12}(a^2 + b^2).$$

EJEMPLO 4 Una placa delgada cubre la región triangular acotada por el eje x y las rectas $x = 1$ y $y = 2x$ en el primer cuadrante. La densidad de la placa en el punto (x, y) es $\delta(x, y) = 6x + 6y + 6$. Obtenga los momentos de inercia de la placa con respecto a los ejes coordenados y el origen.

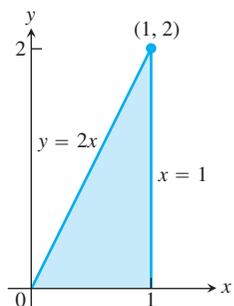


FIGURA 15.40 La región triangular cubierta por la placa del ejemplo 4.

Solución Trazamos la placa con suficiente detalle para determinar los límites de integración de las integrales que debemos evaluar (figura 15.40). El momento de inercia con respecto al eje x es

$$\begin{aligned} I_x &= \int_0^1 \int_0^{2x} y^2 \delta(x, y) \, dy \, dx = \int_0^1 \int_0^{2x} (6xy^2 + 6y^3 + 6y^2) \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 \left[2xy^3 + \frac{3}{2}y^4 + 2y^3 \right]_{y=0}^{y=2x} \, dx = \int_0^1 (40x^4 + 16x^3) \, dx \\ &= [8x^5 + 4x^4]_0^1 = 12. \end{aligned}$$

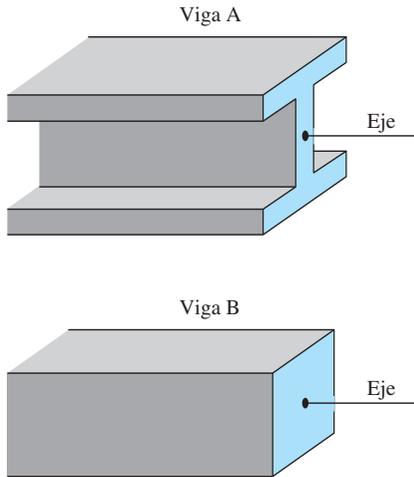


FIGURA 15.41 Cuanto mayor sea el momento polar de inercia de la sección transversal de una viga con respecto al eje longitudinal de la viga, más rígida será esta última. Las vigas A y B tienen igual área transversal, pero A es más rígida.

De manera similar, el momento de inercia con respecto al eje y es

$$I_y = \int_0^1 \int_0^{2x} x^2 \delta(x, y) dy dx = \frac{39}{5}.$$

Observe que integramos y^2 veces la densidad en el cálculo de I_x y x^2 veces la densidad para obtener I_y .

Puesto que conocemos I_x e I_y , no necesitamos evaluar una integral para obtener I_0 ; en vez de eso usamos la ecuación $I_0 = I_x + I_y$ de la tabla 15.2:

$$I_0 = 12 + \frac{39}{5} = \frac{60 + 39}{5} = \frac{99}{5}. \quad \blacksquare$$

El momento de inercia también desempeña un papel en la determinación de cuánto se doblará una viga metálica horizontal por efecto de una carga. La rigidez de la viga es una constante multiplicada por I , el momento de inercia de una sección transversal típica de la viga con respecto al eje longitudinal de la viga. Cuanto mayor sea el valor de I , más rígida será la viga y menor la flexión por efecto de una carga. Por esa razón se usan vigas en forma de I en vez de vigas cuya sección transversal es cuadrada. Las pestañas en la parte superior e inferior de la viga mantienen lejos la mayor parte de la masa del eje longitudinal para incrementar el valor de I (figura 15.41).

Ejercicios 15.6

Placas con densidad constante

- Cálculo del centro de masa** Determine el centro de masa de una placa delgada de densidad $\delta = 3$ acotada por las rectas $x = 0$, $y = x$ y la parábola $y = 2 - x^2$ en el primer cuadrante.
- Cálculo de momentos de inercia** Determine los momentos de inercia con respecto a los ejes coordenados de una placa rectangular delgada de densidad constante δ acotada por las rectas $x = 3$ y $y = 3$ en el primer cuadrante.
- Obtención del centroide** Determine el centroide de la región en el primer cuadrante acotada por el eje x , la parábola $y^2 = 2x$ y la recta $x + y = 4$.
- Determinación del centroide** Obtenga el centroide de la región triangular cortada en el primer cuadrante por la recta $x + y = 3$.
- Obtención del centroide** Obtenga el centroide de la región cortada en el primer cuadrante por la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$.
- Determinación del centroide** Obtenga el centroide de la región entre el eje x y el arco $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$.
- Cálculo de momentos de inercia** Obtenga el momento de inercia en relación con el eje x de una placa delgada de densidad $\delta = 1$ acotada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$. Luego, use su resultado para obtener I_x e I_0 de la placa.
- Cálculo del momento de inercia** Obtenga el momento de inercia, con respecto al eje y , de una hoja delgada de densidad constante $\delta = 1$, acotada por la curva $y = (\sin^2 x)/x^2$ y el intervalo $\pi \leq x \leq 2\pi$ del eje x .
- Centroide de una región infinita** Determine el centroide de la región infinita en el segundo cuadrante comprendida entre los ejes coordenados y la curva $y = e^x$. (Use integrales impropias en las fórmulas para la masa y el momento).

- Primer momento de una placa infinita** Calcule el primer momento con respecto al eje y de una placa delgada de densidad $\delta(x, y) = 1$ que cubre la región infinita bajo la curva $y = e^{-x^2/2}$ en el primer cuadrante.

Placas con densidad variable

- Cálculo de un momento de inercia** Obtenga el momento de inercia, con respecto al eje x , de una placa delgada acotada por la parábola $x = y - y^2$ y la recta $x + y = 0$ si $\delta(x, y) = x + y$.
- Determinación de la masa** Calcule la masa de una placa delgada que ocupa la pequeña región determinada por la elipse $x^2 + 4y^2 = 12$ y por la parábola $x = 4y^2$ si $\delta(x, y) = 5x$.
- Determinación del centro de masa** Calcule el centro de masa de una placa triangular delgada acotada por el eje y y por las rectas $y = x$ y $y = 2 - x$ si $\delta(x, y) = 6x + 3y + 3$.
- Cálculo del centro de masa y el momento de inercia** Obtenga el centro de masa y el momento de inercia, con respecto al eje x , de una placa delgada acotada por las curvas $x = y^2$ y $x = 2y - y^2$ si la densidad en el punto (x, y) es $\delta(x, y) = y + 1$.
- Centro de masa, momento de inercia** Calcule el centro de masa y el momento de inercia, con respecto al eje y , de una placa rectangular delgada cortada en el primer cuadrante por las rectas $x = 6$ y $y = 1$ si $\delta(x, y) = x + y + 1$.
- Centro de masa, momento de inercia** Encuentre el centro de masa y el momento de inercia, con respecto al eje y , de una placa delgada acotada por la recta $y = 1$ y la parábola $y = x^2$ si la densidad es $\delta(x, y) = y + 1$.
- Centro de masa, momento de inercia** Encuentre el centro de masa y el momento de inercia, con respecto al eje y , de una placa delgada acotada por el eje x , las rectas $x = \pm 1$ y la parábola $y = x^2$ si $\delta(x, y) = 7y + 1$.

En los ejercicios 31 y 32, obtenga

- a. la masa del sólido. b. el centro de masa.
 - c. los momentos de inercia con respecto a los ejes coordenados.
31. Un cubo sólido en el primer octante está acotado por los planos coordenados y los planos $x = 1$, $y = 1$ y $z = 1$. La densidad del cubo es $\delta(x, y, z) = x + y + z + 1$.
32. Una cuña como la del ejercicio 22 tiene las dimensiones $a = 2$, $b = 6$ y $c = 3$. La densidad es $\delta(x, y, z) = x + 1$. Observe que si la densidad es constante, el centro de masa será $(0, 0, 0)$.
33. **Masa** Determine la masa del sólido acotado por los planos $x + z = 1$, $x - z = -1$, $y = 0$ y la superficie $y = \sqrt{z}$. La densidad del sólido es $\delta(x, y, z) = 2y + 3$.
34. **Masa** Calcule la masa de la región sólida acotada por las superficies parabólicas $z = 16 - 2x^2 - 2y^2$ y $z = 2x^2 + 2y^2$ si la densidad del sólido es $\delta(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Teoría y ejemplos

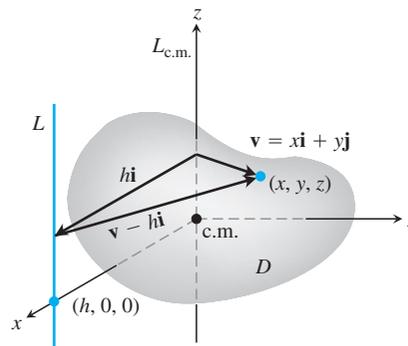
Teorema del eje paralelo Sea $L_{c.m.}$ una recta que pasa por el centro de masa de un cuerpo de masa m , y sea L una recta paralela a h unidades de distancia desde $L_{c.m.}$. El *teorema del eje paralelo* dice que los momentos de inercia $I_{c.m.}$ e I_L del cuerpo con respecto $L_{c.m.}$ satisfacen la ecuación

$$I_L = I_{c.m.} + mh^2. \tag{2}$$

Como en el caso bidimensional, el teorema ofrece una manera rápida de calcular un momento cuando se conocen el otro momento y la masa.

35. Demostración del teorema del eje paralelo

- a. Demuestre que el primer momento de un cuerpo en el espacio con respecto a cualquier plano que pase por el centro de masa del cuerpo es cero. (*Sugerencia:* Coloque el centro de masa del cuerpo en el origen y suponga que el plano es el plano yz . ¿Qué le dice entonces la fórmula $x = M_{yz}/M$?)



- b. Para demostrar el teorema del eje paralelo, coloque el cuerpo con su centro de masa en el origen, con la recta $L_{c.m.}$ a lo largo del eje z y la recta L perpendicular al plano xy en el punto $(h, 0, 0)$. Sea D la región del espacio ocupada por el cuerpo. Luego, con la notación de la figura,

$$I_L = \iiint_D |\mathbf{v} - h\mathbf{i}|^2 dm.$$

Desarrolle el integrando de esta integral y complete la demostración.

- 36. El momento de inercia con respecto a un diámetro de una esfera sólida de densidad constante y radio a es $(2/5)ma^2$, donde m es la masa de la esfera. Obtenga el momento de inercia con respecto a una recta tangente a la esfera.
- 37. El momento de inercia del sólido del ejercicio 21 con respecto al eje z es $I_z = abc(a^2 + b^2)/3$.
 - a. Use la ecuación (2) para determinar el momento de inercia del sólido con respecto a la recta paralela al eje z que pasa por el centro de masa del sólido.
 - b. Use la ecuación (2) y el resultado del inciso a) para obtener el momento de inercia del sólido con respecto a la recta $x = 0, y = 2b$.
- 38. Si $a = b = 6$ y $c = 4$, el momento de inercia de la cuña sólida del ejemplo 22 con respecto al eje x es $I_x = 208$. Calcule el momento de inercia de la cuña con respecto a la recta $y = 4, z = -4/3$ (la orilla del extremo de la cuña es angosta).

15.7 | Integrales triples en coordenadas cilíndricas y esféricas

Cuando un cálculo en física, ingeniería o geometría implica un cilindro, un cono o una esfera, con frecuencia simplificamos nuestro trabajo usando coordenadas cilíndricas o esféricas, las cuales se presentan en esta sección. El procedimiento para hacer la transformación a estas coordenadas y evaluar las integrales triples resultantes es similar a la transformación a coordenadas polares en el plano estudiada en la sección 15.4.

Integración en coordenadas cilíndricas

Para obtener las coordenadas cilíndricas en el espacio combinamos las coordenadas polares del plano xy con el eje z . Esto asigna a todos los puntos en el espacio una o más ternas de coordenadas de la forma (r, θ, z) , como se muestra en la figura 15.42.

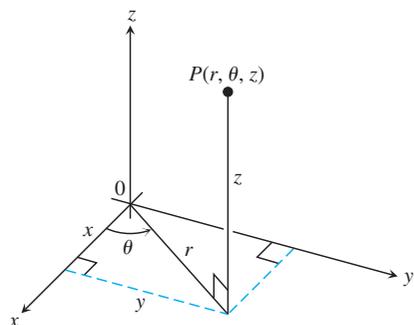


FIGURA 15.42 Las coordenadas cilíndricas de un punto en el espacio son r, θ y z .

DEFINICIÓN Las **coordenadas cilíndricas** representan un punto P en el espacio mediante ternas de coordenadas (r, θ, z) donde

- 1. r y θ son las coordenadas polares de la proyección vertical de P sobre el plano xy .
- 2. z es la coordenada vertical rectangular.

Los valores de x, y, r y θ en coordenadas rectangulares y cilíndricas están relacionados por las ecuaciones usuales.

Ecuaciones que relacionan las coordenadas rectangulares (x, y, z) y las cilíndricas (r, θ, z)

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \operatorname{sen} \theta, \quad z = z,$$

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \tan \theta = y/x$$

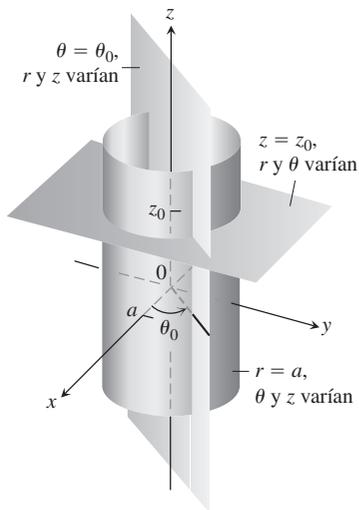


FIGURA 15.43 Ecuaciones con coordenadas constantes en coordenadas cilíndricas producen cilindros y planos.

En coordenadas cilíndricas, la ecuación $r = a$ describe no sólo una circunferencia en el plano xy , sino todo un cilindro alrededor del eje z (figura 15.43). El eje z está dado por $r = 0$. La ecuación $\theta = \theta_0$ describe al plano que contiene al eje z y forma un ángulo θ_0 con el semieje positivo x . Al igual que en las coordenadas rectangulares, la ecuación $z = z_0$ describe un plano perpendicular al eje z .

Las coordenadas cilíndricas son buenas para describir los cilindros cuyo eje corre a lo largo del eje z y a los planos que contienen al eje z o que son perpendiculares al mismo eje z . Superficies como ésta tienen ecuaciones con coordenadas cilíndricas constantes:

- $r = 4$ Cilindro, radio 4, su eje es el eje z
- $\theta = \frac{\pi}{3}$ Plano que contiene al eje z
- $z = 2.$ Plano perpendicular al eje z

Para calcular integrales triples sobre una región D en coordenadas cilíndricas, partimos la región en n pequeñas cuñas cilíndricas, y no en cajas rectangulares. En la k -ésima cuña cilíndrica, r, θ y z cambian por $\Delta r_k, \Delta \theta_k$ y Δz_k , y el mayor de estos números entre todas las cuñas cilíndricas se llama la **norma** de la partición. Definimos la integral triple como un límite de las sumas de Riemann aplicadas a estas cuñas. El volumen de una cuña cilíndrica ΔV_k se obtiene al multiplicar el área ΔA_k de su base en el plano $r\theta$ por la altura Δz (figura 15.44).

Para un punto (r_k, θ_k, z_k) en el centro de la k -ésima cuña, ya hemos calculado en coordenadas polares que $\Delta A_k = r_k \Delta r_k \Delta \theta_k$. Entonces $\Delta V_k = \Delta z_k r_k \Delta r_k \Delta \theta_k$ y una suma de Riemann para f sobre D tiene la forma

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(r_k, \theta_k, z_k) \Delta z_k r_k \Delta r_k \Delta \theta_k.$$

La integral triple de una función f sobre D se obtiene considerando el límite de las sumas de Riemann con particiones cuyas normas tienden a cero

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \iiint_D f \, dV = \iiint_D f \, dz \, r \, dr \, d\theta.$$

Las integrales triples en coordenadas cilíndricas se evalúan entonces con integrales iteradas, como en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1 Defina los límites de integración en coordenadas cilíndricas para integrar una función $f(r, \theta, z)$ sobre la región D acotada abajo por el plano $z = 0$, a los lados por el cilindro circular $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ y arriba por el paraboloides $z = x^2 + y^2$.

Solución La base de D también es la proyección R de la región sobre el plano xy . La frontera de R es la circunferencia $x^2 + (y - 1)^2 = 1$. Su ecuación en coordenadas polares es

$$x^2 + (y - 1)^2 = 1$$

$$x^2 + y^2 - 2y + 1 = 1$$

$$r^2 - 2r \operatorname{sen} \theta = 0$$

$$r = 2 \operatorname{sen} \theta.$$

Volumen diferencial en coordenadas cilíndricas

$$dV = dz \, r \, dr \, d\theta$$

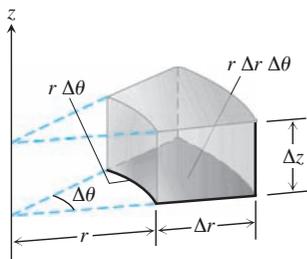


FIGURA 15.44 En coordenadas cilíndricas, el volumen de la cuña se aproxima mediante el producto $\Delta V = \Delta z \, r \, \Delta r \, \Delta \theta$.

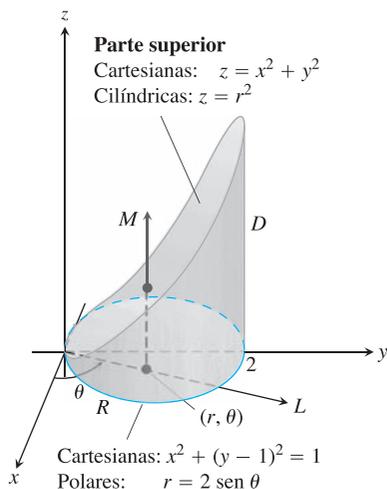


FIGURA 15.45 Determinación de los límites de integración para evaluar una integral en coordenadas cilíndricas (ejemplo 1).

La región aparece en la figura 15.45.

Determinamos los límites de integración comenzando con los límites en z . Una recta M paralela al eje z que pasa por un punto típico (r, θ) en R , entra a D en $z = 0$ y sale en $z = x^2 + y^2 = r^2$.

A continuación obtenemos los límites de integración en r . Un rayo L que pasa por (r, θ) partiendo del origen, entra a R en $r = 0$ y sale en $r = 2 \operatorname{sen} \theta$.

Por último, determinamos los límites de integración en θ . Cuando L barre R , el ángulo θ que forma con el semieje positivo x va desde $\theta = 0$ hasta $\theta = \pi$. La integral es

$$\iiint_D f(r, \theta, z) \, dV = \int_0^\pi \int_0^{2 \operatorname{sen} \theta} \int_0^{r^2} f(r, \theta, z) \, dz \, r \, dr \, d\theta. \quad \blacksquare$$

El ejemplo 1 ilustra un buen procedimiento para determinar los límites de integración en coordenadas cilíndricas. El procedimiento se resume como sigue.

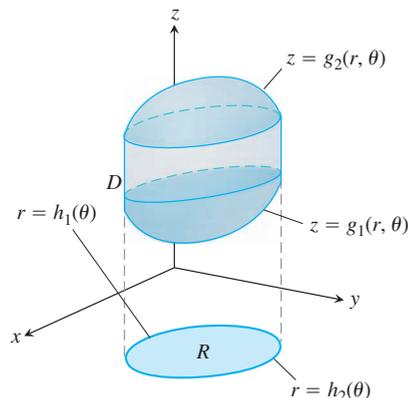
Cómo integrar en coordenadas cilíndricas

Para evaluar

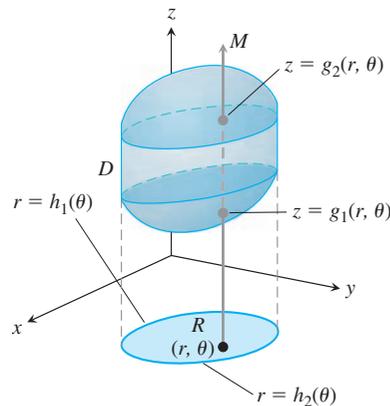
$$\iiint_D f(r, \theta, z) \, dV$$

sobre una región D en el espacio en coordenadas cilíndricas, integrando primero con respecto a z , luego con respecto a r y al final con respecto a θ , siga los pasos siguientes.

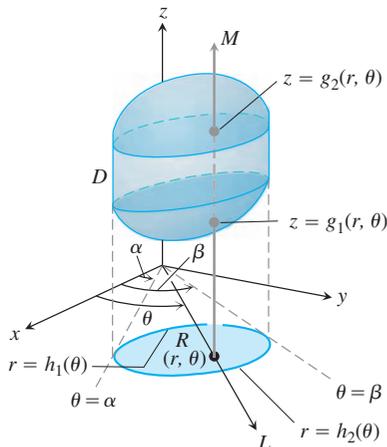
1. *Elabore un bosquejo.* Trace la región D junto con su proyección R sobre el plano xy . Marque las superficies y curvas que acotan a D y a R .



2. *Determine los límites de integración en z .* Trace una recta M paralela al eje z , que pase por un punto típico (r, θ) de R . Mientras z crece, M entra a D en $z = g_1(r, \theta)$ y sale en $g_2(r, \theta)$. Éstos son los límites de integración en z .



3. Determine los límites de integración en r . Trace un rayo L desde el origen que pase por (r, θ) . El rayo entra a R en $r = h_1(\theta)$ y sale en $r = h_2(\theta)$. Éstos son los límites de integración en r .



4. Determine los límites de integración en θ . Cuando L barre R , el ángulo θ que forma con el semieje positivo x va desde $\theta = \alpha$ hasta $\theta = \beta$. Éstos son los límites de integración en θ . La integral es

$$\iiint_D f(r, \theta, z) \, dV = \int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta} \int_{r=h_1(\theta)}^{r=h_2(\theta)} \int_{z=g_1(r, \theta)}^{z=g_2(r, \theta)} f(r, \theta, z) \, dz \, r \, dr \, d\theta.$$

EJEMPLO 2 Encuentre el centroide ($\delta = 1$) del sólido encerrado por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$, acotado arriba por el paraboloides $z = x^2 + y^2$, y abajo por el plano xy .

Solución Trazamos el sólido, acotado arriba por el paraboloides $z = r^2$ y abajo por el plano $z = 0$ (figura 15.46). Su base R es el disco $0 \leq r \leq 2$ en el plano xy .

El centroide del sólido $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ está en su eje de simetría, en este caso, el eje z . Esto hace que $\bar{x} = \bar{y} = 0$. Para hallar \bar{z} , dividimos el primer momento M_{xy} entre la masa M .

Para encontrar los límites de integración para las integrales de la masa y el momento, continuamos con los cuatro pasos básicos. Completamos nuestro bosquejo inicial. Los demás pasos dan los límites de integración.

Los límites en z . Una recta M paralela al eje z , que pasa por un punto típico (r, θ) en la base, entra al sólido en $z = 0$ y sale en $z = r^2$.

Los límites en r . Un rayo L que pasa por (r, θ) saliendo desde el origen, entra a R en $r = 0$ y sale en $r = 2$.

Los límites en θ . Cuando L barre sobre la base, como una manecilla de reloj, el ángulo θ que forma con el semieje positivo x va desde $\theta = 0$ hasta $\theta = 2\pi$. El valor de M_{xy} es

$$\begin{aligned} M_{xy} &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{r^2} z \, dz \, r \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^{r^2} r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \frac{r^5}{2} \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^6}{12} \right]_0^2 \, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{16}{3} \, d\theta = \frac{32\pi}{3}. \end{aligned}$$

El valor de M es

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{r^2} dz \, r \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \left[z \right]_0^{r^2} r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 r^3 \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^2 \, d\theta = \int_0^{2\pi} 4 \, d\theta = 8\pi. \end{aligned}$$

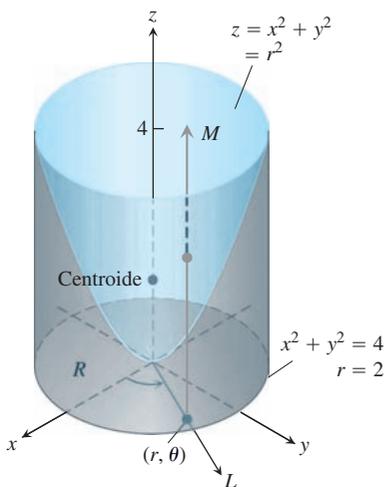


FIGURA 15.46 El ejemplo 2 muestra cómo encontrar el centroide de este sólido.

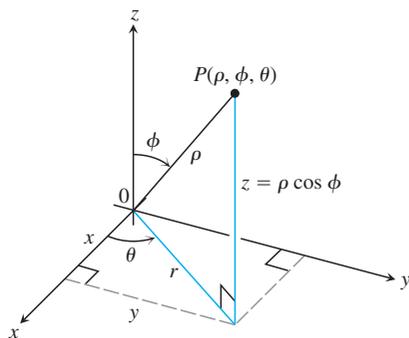


FIGURA 15.47 Las coordenadas esféricas ρ , ϕ y θ y su relación con x , y , z y r .

Por lo tanto,

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{32\pi}{3} \frac{1}{8\pi} = \frac{4}{3},$$

y el centroide es $(0, 0, 4/3)$. Observe que el centroide está fuera del sólido. ■

Coordenadas esféricas e integración

Las coordenadas esféricas ubican puntos en el espacio mediante dos ángulos y una distancia, como muestra la figura 15.47. La primera coordenada, $\rho = |\overline{OP}|$, es la distancia del punto al origen. A diferencia de r , la variable ρ nunca es negativa. La segunda coordenada, ϕ , es el ángulo que \overline{OP} forma con el semieje positivo z . Se requiere que esté en el intervalo $[0, \pi]$. La tercera coordenada es el ángulo θ medido en coordenadas cilíndricas.

DEFINICIÓN Las **coordenadas esféricas** representan un punto P en el espacio mediante la terna ordenada (ρ, ϕ, θ) en la que

1. ρ es la distancia de P al origen.
2. ϕ es el ángulo que \overline{OP} forma con el semieje positivo z ($0 \leq \phi \leq \pi$).
3. θ es el ángulo de las coordenadas cilíndricas ($0 \leq \theta \leq 2\pi$).

En los mapas de la Tierra, θ se relaciona con el meridiano de un punto sobre nuestro planeta y ϕ con su latitud, mientras que ρ se relaciona con la altitud sobre la superficie terrestre.

La ecuación $\rho = a$ describe la esfera de radio a con centro en el origen (figura 15.48). La ecuación $\phi = \phi_0$ describe un cono cuyo vértice está en el origen y cuyo eje está a lo largo del eje z . (Ampliamos nuestra interpretación para incluir el plano xy como el cono $\phi = \pi/2$). Si ϕ_0 es mayor que $\pi/2$, el cono $\phi = \phi_0$ se abre hacia abajo. La ecuación $\theta = \theta_0$ describe el semiplano que contiene al eje z y forma un ángulo θ_0 con el semieje positivo x .

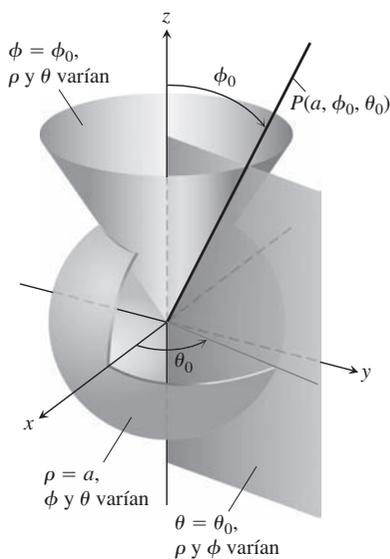


FIGURA 15.48 Las ecuaciones de coordenadas constantes en coordenadas esféricas dan esferas, conos y semiplanos.

Ecuaciones que relacionan las coordenadas esféricas con las coordenadas cartesianas y cilíndricas

$$\begin{aligned} r &= \rho \sin \phi, & x &= r \cos \theta = \rho \sin \phi \cos \theta, \\ z &= \rho \cos \phi, & y &= r \sin \theta = \rho \sin \phi \sin \theta, \\ \rho &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{r^2 + z^2}. \end{aligned} \tag{1}$$

EJEMPLO 3 Determine una ecuación en coordenadas esféricas para la esfera $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$.

Solución Usamos las ecuaciones (1) para sustituir x , y y z :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + (z - 1)^2 &= 1 \\ \rho^2 \sin^2 \phi \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \phi \sin^2 \theta + (\rho \cos \phi - 1)^2 &= 1 && \text{Ecuaciones (1)} \\ \rho^2 \sin^2 \phi (\underbrace{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}_1) + \rho^2 \cos^2 \phi - 2\rho \cos \phi + 1 &= 1 \\ \rho^2 (\underbrace{\sin^2 \phi + \cos^2 \phi}_1) &= 2\rho \cos \phi \\ \rho^2 &= 2\rho \cos \phi \\ \rho &= 2 \cos \phi. && \rho > 0 \end{aligned}$$

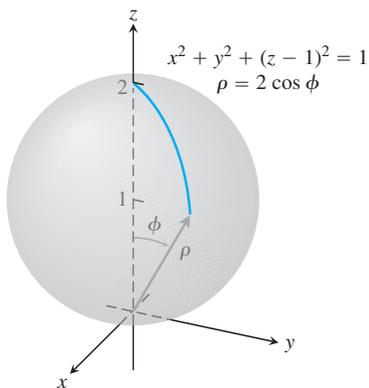


FIGURA 15.49 La esfera del ejemplo 3.

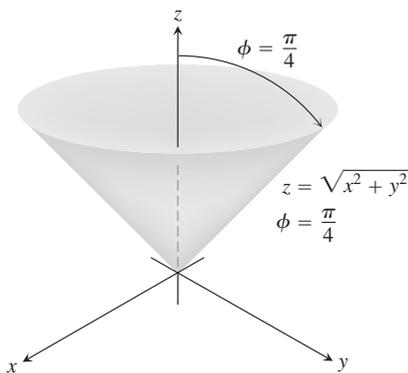


FIGURA 15.50 El cono del ejemplo 4.

Volumen diferencial en coordenadas esféricas

$$dV = \rho^2 \text{sen } \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

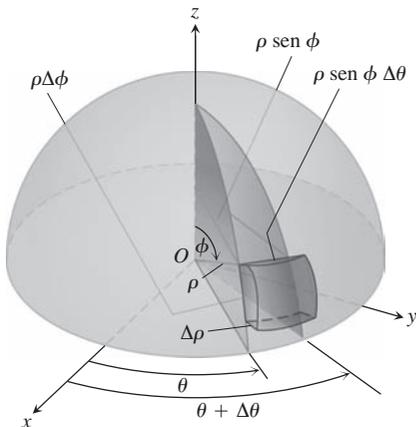


FIGURA 15.51 En coordenadas esféricas,

$$\begin{aligned} dV &= d\rho \cdot \rho \, d\phi \cdot \rho \text{sen } \phi \, d\theta \\ &= \rho^2 \text{sen } \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta. \end{aligned}$$

El ángulo ϕ varía desde 0 en el polo norte de la esfera hasta $\pi/2$ en el polo sur; el ángulo θ no aparece en la expresión de ρ , reflejando la simetría con respecto al semieje z (véase la figura 15.49).

EJEMPLO 4 Determine una ecuación en coordenadas esféricas para el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Solución 1 Use la geometría. El cono es simétrico con respecto al eje z y corta al primer cuadrante del plano yz a lo largo de la recta $z = y$. El ángulo entre el cono y el semieje positivo z es, por lo tanto, $\pi/4$ radianes. El cono consta de los puntos cuyas coordenadas esféricas tienen a ϕ igual a $\pi/4$, de manera que su ecuación es $\phi = \pi/4$. (Véase la figura 15.50).

Solución 2 Use álgebra. Si usamos las ecuaciones (1) para sustituir x , y y z obtenemos el mismo resultado:

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \rho \cos \phi &= \sqrt{\rho^2 \text{sen}^2 \phi} && \text{Ejemplo 3} \\ \rho \cos \phi &= \rho \text{sen } \phi && \rho > 0, \text{sen } \phi \geq 0 \\ \cos \phi &= \text{sen } \phi \\ \phi &= \frac{\pi}{4}. && 0 \leq \phi \leq \pi \end{aligned}$$

Las coordenadas esféricas son útiles para describir esferas con centro en el origen, semiplanos acoplados a lo largo del eje z y conos con vértice en el origen y eje a lo largo del eje z . Superficies como éstas tienen ecuaciones con valores constantes para las coordenadas:

- $\rho = 4$ Esfera de radio 4, centro en el origen
- $\phi = \frac{\pi}{3}$ Cono que abre hacia arriba desde el origen, formando un ángulo de $\pi/3$ radianes con el semieje positivo z
- $\theta = \frac{\pi}{3}$ Semiplano, acoplado con el eje z formando un ángulo de $\pi/3$ radianes con el semieje positivo x

Al calcular integrales triples sobre una región D en coordenadas esféricas, partimos la región en n cuñas esféricas. El tamaño de la k -ésima cuña esférica, que contiene a un punto $(\rho_k, \phi_k, \theta_k)$, está dado por los incrementos $\Delta\rho_k, \Delta\theta_k, \Delta\phi_k$, en ρ, θ y ϕ . Tal cuña esférica tiene como aristas un arco circular de longitud $\rho_k \Delta\phi_k$, y otro arco circular de longitud $\rho_k \text{sen } \phi_k \Delta\theta_k$; su espesor es $\Delta\rho_k$. La cuña esférica aproxima bien un cubo de las mismas dimensiones, cuando $\Delta\rho_k, \Delta\theta_k$ y $\Delta\phi_k$ son pequeños (figura 15.51). Se puede demostrar que el volumen de la cuña esférica ΔV_k es $\Delta V_k = \rho_k^2 \text{sen } \phi_k \Delta\rho_k \Delta\phi_k \Delta\theta_k$ para un punto $(\rho_k, \phi_k, \theta_k)$ elegido dentro de la cuña.

La suma de Riemann correspondiente para una función $f(\rho, \phi, \theta)$ es

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(\rho_k, \phi_k, \theta_k) \rho_k^2 \text{sen } \phi_k \Delta\rho_k \Delta\phi_k \Delta\theta_k.$$

Cuando la norma de la partición tiende a cero y las cuñas esféricas son cada vez más pequeñas, las sumas de Riemann tienen un límite si f es continua:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \iiint_D f(\rho, \phi, \theta) \, dV = \iiint_D f(\rho, \phi, \theta) \rho^2 \text{sen } \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta.$$

En coordenadas esféricas, tenemos

$$dV = \rho^2 \text{sen } \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta.$$

Para evaluar integrales en coordenadas esféricas, por lo general integramos primero con respecto a ρ . El procedimiento para encontrar los límites de integración es como sigue. Restringiremos nuestra atención a la integración sobre dominios dados por sólidos de revolución en torno del eje z (o partes de ellos), tales que los límites de θ y ϕ sean constantes.

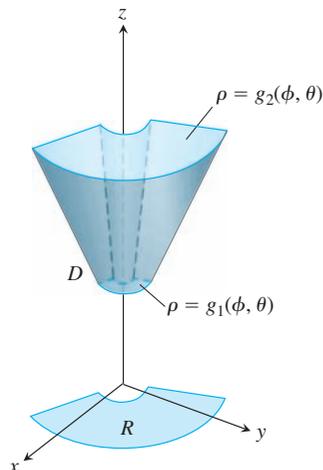
Cómo integrar en coordenadas esféricas

Para evaluar

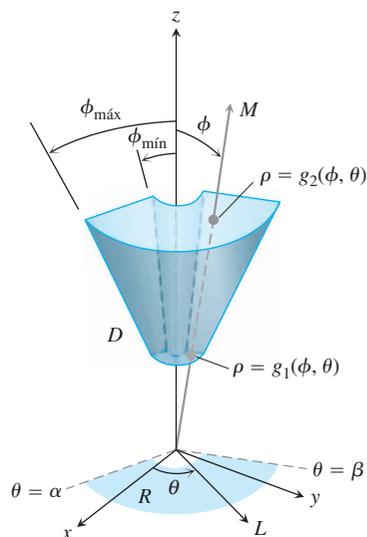
$$\iiint_D f(\rho, \phi, \theta) dV$$

sobre una región D en el espacio en coordenadas esféricas, integrando primero con respecto a ρ , luego con respecto a ϕ , y por último con respecto a θ , siga estos pasos.

1. *Elabore un bosquejo.* Trace la región D junto con su proyección R sobre el plano xy . Marque las superficies que acotan a D .



2. *Determine los límites de integración en ρ .* Trace un rayo M desde el origen hacia D formando un ángulo ϕ con el semieje positivo z . Trace además la proyección de M sobre el plano xy (llámela proyección L). El rayo L forma un ángulo θ con el semieje positivo x . Al crecer r , M entra a D en $r = g_1(\phi, \theta)$, y sale en $r = g_2(\phi, \theta)$. Éstos son los límites de integración en ρ .



3. *Determine los límites de integración en ϕ .* Para cualquier θ dado, el ángulo ϕ que M forma con el eje z va desde $\phi = \phi_{\text{mín}}$ hasta $\phi = \phi_{\text{máx}}$. Éstos son los límites de integración en ϕ .

4. Determine los límites de integración en θ . El rayo L barre R cuando θ va de α a β . Éstos son los límites de integración en θ . La integral es

$$\iiint_D f(\rho, \phi, \theta) dV = \int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta} \int_{\phi=\phi_{\min}}^{\phi=\phi_{\max}} \int_{\rho=g_1(\phi, \theta)}^{\rho=g_2(\phi, \theta)} f(\rho, \phi, \theta) \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta.$$

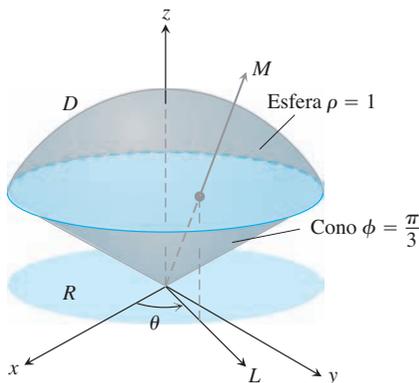


FIGURA 15.52 El cono de helado del ejemplo 5.

EJEMPLO 5 Calcule el volumen del “cono de helado” D cortado en la esfera sólida $\rho \leq 1$ por el cono $\phi = \pi/3$.

Solución El volumen es $V = \iiint_D \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$, la integral de $f(\rho, \phi, \theta) = 1$ sobre D .

Para determinar los límites de integración para evaluar la integral, comenzamos bosquejando D y su proyección R sobre el plano xy (figura 15.52).

Los límites de integración en ρ . Trazamos un rayo M desde el origen hacia D que forme un ángulo ϕ con el semieje positivo z . También trazamos L , la proyección de M sobre el plano xy , junto con el ángulo θ que forma L con el semieje positivo x . El rayo M entra a D en $\rho = 0$ y sale en $\rho = 1$.

Los límites de integración en ϕ . El cono $\phi = \pi/3$ forma un ángulo de $\pi/3$ con el semieje positivo z . Para cualquier θ , el ángulo ϕ puede variar desde $\phi = 0$ hasta $\phi = \pi/3$.

Los límites de integración en θ . El rayo L barre R cuando θ va de 0 a 2π . El volumen es

$$\begin{aligned} V &= \iiint_D \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \int_0^1 \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^1 \sin \phi d\phi d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \frac{1}{3} \sin \phi d\phi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{3} \cos \phi \right]_0^{\pi/3} d\theta = \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{3} \right) d\theta = \frac{1}{6} (2\pi) = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

EJEMPLO 6 En el ejemplo 5, un sólido de densidad constante $\delta = 1$ ocupa la región D . Determine el momento de inercia del sólido con respecto al eje z .

Solución En coordenadas rectangulares, el momento es

$$I_z = \iiint (x^2 + y^2) dV.$$

En coordenadas esféricas, $x^2 + y^2 = (\rho \sin \phi \cos \theta)^2 + (\rho \sin \phi \sin \theta)^2 = \rho^2 \sin^2 \phi$. Por lo tanto,

$$I_z = \iiint (\rho^2 \sin^2 \phi) \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta = \iiint \rho^4 \sin^3 \phi d\rho d\phi d\theta.$$

Para la región del ejemplo 5, esto se convierte en

$$\begin{aligned} I_z &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \int_0^1 \rho^4 \sin^3 \phi d\rho d\phi d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \left[\frac{\rho^5}{5} \right]_0^1 \sin^3 \phi d\phi d\theta \\ &= \frac{1}{5} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} (1 - \cos^2 \phi) \sin \phi d\phi d\theta = \frac{1}{5} \int_0^{2\pi} \left[-\cos \phi + \frac{\cos^3 \phi}{3} \right]_0^{\pi/3} d\theta \\ &= \frac{1}{5} \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{24} - \frac{1}{3} \right) d\theta = \frac{1}{5} \int_0^{2\pi} \frac{5}{24} d\theta = \frac{1}{24} (2\pi) = \frac{\pi}{12}. \end{aligned}$$

Fórmulas para conversión de coordenadas

CILÍNDRICAS A RECTANGULARES

$$\begin{aligned}x &= r \cos \theta \\y &= r \sin \theta \\z &= z\end{aligned}$$

ESFÉRICAS A RECTANGULARES

$$\begin{aligned}x &= \rho \sin \phi \cos \theta \\y &= \rho \sin \phi \sin \theta \\z &= \rho \cos \phi\end{aligned}$$

ESFÉRICAS A CILÍNDRICAS

$$\begin{aligned}r &= \rho \sin \phi \\z &= \rho \cos \phi \\\theta &= \theta\end{aligned}$$

Fórmulas correspondientes para dV en integrales triples:

$$\begin{aligned}dV &= dx \, dy \, dz \\&= dz \, r \, dr \, d\theta \\&= \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta\end{aligned}$$

En la siguiente sección ofrecemos un procedimiento más general para determinar dV en coordenadas cilíndricas y esféricas. Por supuesto, el resultado es el mismo.

Ejercicios 15.7

Evaluación de integrales en coordenadas cilíndricas

Evalúe las integrales en coordenadas cilíndricas de los ejercicios 1 a 6.

- $\int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_r^{\sqrt{2-r^2}} dz \, r \, dr \, d\theta$
- $\int_0^{2\pi} \int_0^3 \int_{r^2/3}^{\sqrt{18-r^2}} dz \, r \, dr \, d\theta$
- $\int_0^{2\pi} \int_0^{\theta/2\pi} \int_0^{3+24r^2} dz \, r \, dr \, d\theta$
- $\int_0^{\pi} \int_0^{\theta/\pi} \int_{-\sqrt{4-r^2}}^{3\sqrt{4-r^2}} z \, dz \, r \, dr \, d\theta$
- $\int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_r^{1/\sqrt{2-r^2}} 3 \, dz \, r \, dr \, d\theta$
- $\int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{-1/2}^{1/2} (r^2 \sin^2 \theta + z^2) \, dz \, r \, dr \, d\theta$

Cambio de orden de integración en coordenadas cilíndricas

Las integrales que hemos visto hasta ahora sugieren que hay órdenes de integración preferidos para las coordenadas cilíndricas, pero es usual que otros órdenes funcionen y que en ocasiones sean más fáciles de evaluar.

Evalúe las integrales de los ejercicios 7 a 10.

- $\int_0^{2\pi} \int_0^3 \int_0^{z/3} r^3 \, dr \, dz \, d\theta$
- $\int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{1+\cos \theta} 4r \, dr \, d\theta \, dz$
- $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{z}} \int_0^{2\pi} (r^2 \cos^2 \theta + z^2) r \, d\theta \, dr \, dz$
- $\int_0^2 \int_{r-2}^{\sqrt{4-r^2}} \int_0^{2\pi} (r \sin \theta + 1) r \, d\theta \, dz \, dr$

11. Sea D la región acotada abajo por el plano $z = 0$, arriba por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, y a los lados por el cilindro $x^2 + y^2 = 1$. Enuncie las integrales triples en coordenadas cilíndricas que dan el volumen de la región D , usando los siguientes órdenes de integración.

- a. $dz \, dr \, d\theta$ b. $dr \, dz \, d\theta$ c. $d\theta \, dz \, dr$

12. Sea D la región acotada abajo por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y arriba por el paraboloides $z = 2 - x^2 - y^2$. Enuncie las integrales triples en

coordenadas cilíndricas que dan el volumen de D usando los siguientes órdenes de integración.

- a. $dz \, dr \, d\theta$ b. $dr \, dz \, d\theta$ c. $d\theta \, dz \, dr$

Obtención de integrales iteradas en coordenadas cilíndricas

13. Dé los límites de integración para evaluar la integral

$$\iiint_D f(r, \theta, z) \, dz \, r \, dr \, d\theta$$

como una integral iterada sobre la región acotada abajo por el plano $z = 0$, a los lados por el cilindro $r = \cos \theta$ y arriba por el paraboloides $z = 3r^2$.

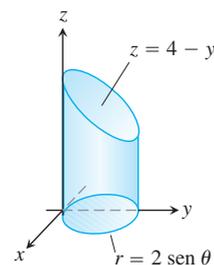
14. Convierta la integral

$$\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \int_0^x (x^2 + y^2) \, dz \, dx \, dy$$

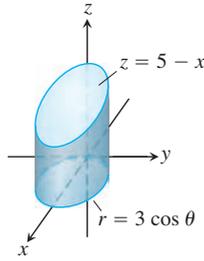
en una integral equivalente en coordenadas cilíndricas y evalúe el resultado.

En los ejercicios 15 a 20, enuncie la integral iterada para evaluar $\iiint_D f(r, \theta, z) \, dz \, r \, dr \, d\theta$ sobre la región D dada.

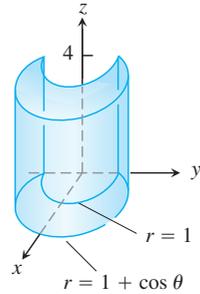
15. D es el cilindro circular recto cuya base es la circunferencia $r = 2 \sin \theta$ en el plano xy y cuya parte superior está en el plano $z = 4 - y$.



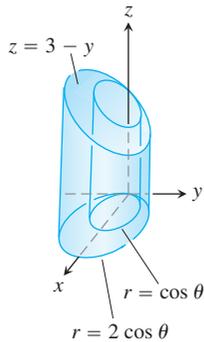
16. D es el cilindro circular recto cuya base es la circunferencia $r = 3 \cos \theta$ y cuya parte superior está en el plano $z = 5 - x$.



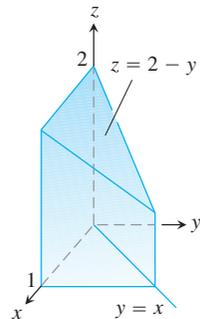
17. D es el cilindro recto sólido cuya base es la región del plano xy que está dentro de la cardioides $r = 1 + \cos \theta$ fuera de la circunferencia $r = 1$ y cuya parte superior está en el plano $z = 4$.



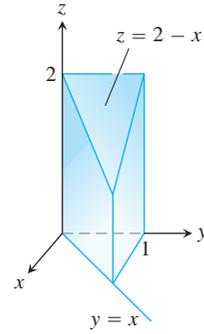
18. D es el cilindro recto sólido cuya base es la región entre las circunferencias $r = \cos \theta$ y $r = 2 \cos \theta$ y cuya parte superior está en el plano $z = 3 - y$.



19. D es el prisma cuya base es el triángulo en el plano xy acotado por el eje x y las rectas $y = x$ y $x = 1$ y cuya parte superior está en el plano $z = 2 - y$.



20. D es el prisma cuya base es el triángulo en el plano xy acotado por el eje y y las rectas $y = x$ y $y = 1$ y cuya parte superior está en el plano $z = 2 - x$.



Evaluación de integrales en coordenadas esféricas

Evalúe las integrales en coordenadas esféricas de los ejercicios 21 a 26.

21. $\int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^{2 \operatorname{sen} \phi} \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$
22. $\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^2 (\rho \cos \phi) \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$
23. $\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{(1-\cos \phi)/2} \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$
24. $\int_0^{3\pi/2} \int_0^\pi \int_0^1 5\rho^3 \operatorname{sen}^3 \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$
25. $\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \int_{\sec \phi}^2 3\rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$
26. $\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{\sec \phi} (\rho \cos \phi) \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$

Cambio del orden de integración en coordenadas esféricas

Las integrales anteriores sugieren que hay órdenes de integración preferidos para las coordenadas esféricas, pero existen otros órdenes que en ocasiones son más fáciles de evaluar. Evalúe las integrales de los ejercicios 27 a 30.

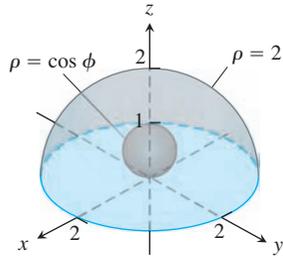
27. $\int_0^2 \int_{-\pi}^0 \int_{\pi/4}^{\pi/2} \rho^3 \operatorname{sen} 2\phi \, d\phi \, d\theta \, d\rho$
28. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \int_{\csc \phi}^2 \csc \phi \int_0^{2\pi} \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\theta \, d\rho \, d\phi$
29. $\int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{\pi/4} 12\rho \operatorname{sen}^3 \phi \, d\phi \, d\theta \, d\rho$
30. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{\csc \phi}^2 5\rho^4 \operatorname{sen}^3 \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi$
31. Sea D la región del ejercicio 11. Enuncie las integrales triples en coordenadas esféricas que dan el volumen de D , usando los siguientes órdenes de integración.
 - a. $d\rho \, d\phi \, d\theta$
 - b. $d\phi \, d\rho \, d\theta$

32. Sea D la región acotada abajo por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y arriba por el plano $z = 1$. Enuncie las integrales triples en coordenadas esféricas que determinan su volumen, usando los siguientes órdenes de integración.
 - a. $d\rho \, d\phi \, d\theta$
 - b. $d\phi \, d\rho \, d\theta$

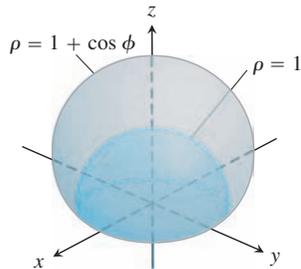
Cálculo de integrales iteradas en coordenadas esféricas

En los ejercicios 33 a 38, (a) determine los límites en coordenadas esféricas para la integral que da el volumen del sólido dado y (b) evalúe la integral.

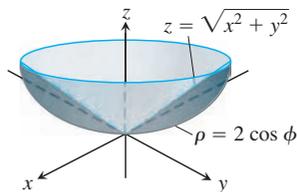
33. El sólido entre la esfera $\rho = \cos \phi$ y el hemisferio $\rho = 2, z \geq 0$



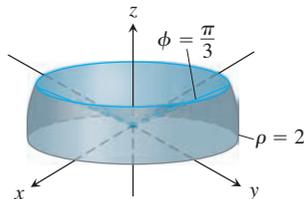
34. El sólido acotado abajo por el hemisferio $\rho = 1, z \geq 0$ y arriba por la cardioide de revolución $\rho = 1 + \cos \phi$



35. El sólido encerrado por la cardioide de revolución $\rho = 1 - \cos \phi$
 36. La parte superior del sólido del ejercicio 35, cortada por el plano xy
 37. El sólido acotado abajo por la esfera $\rho = 2 \cos \phi$ y arriba por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$



38. El sólido acotado abajo por el plano xy , a los lados por la esfera $\rho = 2$ y arriba por el cono $\phi = \pi/3$.



Cálculo de integrales triples

39. Enuncie las integrales triples para el volumen de la esfera $\rho = 2$ en coordenadas (a) esféricas, (b) cilíndricas y (c) rectangulares.
 40. Sea D la región del primer octante que está acotada abajo por el cono $\phi = \pi/4$ y arriba por la esfera $\rho = 3$. Expresar el volumen de la

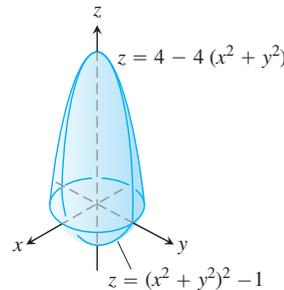
región D como una integral triple iterada en coordenadas (a) cilíndricas y (b) esféricas. Luego (c) calcule V .

41. Sea D el pequeño casquete de una bola sólida con 2 unidades de radio, cortado por un plano que está a una unidad del centro de la esfera. Expresar el volumen de la región D como una integral triple iterada en coordenadas (a) esféricas, (b) cilíndricas y (c) rectangulares. Luego (d) calcule el volumen evaluando una de las tres integrales triples.
 42. Expresar el momento de inercia I_z del hemisferio sólido $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0$, como una integral iterada en coordenadas (a) cilíndricas y (b) esféricas. Luego (c) encuentre I_z .

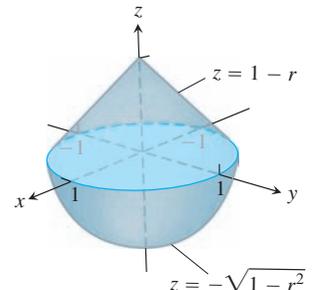
Volúmenes

Calcule los volúmenes de los sólidos de los ejercicios 43 a 48.

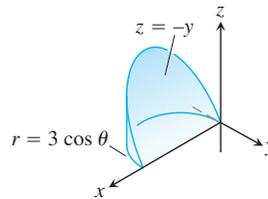
- 43.



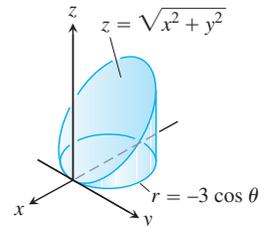
- 44.



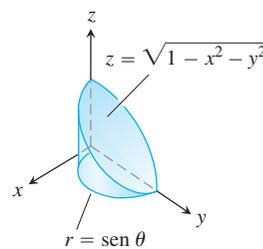
- 45.



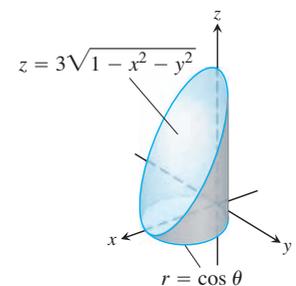
- 46.



- 47.



- 48.



49. **Esferas y conos** Calcule el volumen de la porción de la esfera sólida $\rho \leq a$ que está entre los conos $\phi = \pi/3$ y $\phi = 2\pi/3$.
 50. **Esferas y semiplanos** Calcule el volumen de la región de la esfera sólida $\rho \leq a$ cortada por los semiplanos $\theta = 0$ y $\theta = \pi/6$ en el primer octante.
 51. **Esfera y plano** Calcule el volumen de la región más pequeña de la esfera sólida $\rho \leq 2$ cortada por el plano $z = 1$.
 52. **Cono y planos** Calcule el volumen del sólido encerrado por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ entre los planos $z = 1, z = 2$.
 53. **Cilindro y paraboloides** Calcule el volumen de la región acotada abajo por el plano $z = 0$, a los lados por el cilindro $x^2 + y^2 = 1$, y arriba por el paraboloides $z = x^2 + y^2$.

- 54. Cilindro y paraboloides** Calcule el volumen de la región acotada abajo por el paraboloide $z = x^2 + y^2$, a los lados por el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y arriba por el paraboloide $z = x^2 + y^2 + 1$.
- 55. Cilindro y conos** Calcule el volumen del sólido cilíndrico de pared gruesa $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$ cortado por los conos $z = \pm \sqrt{x^2 + y^2}$.
- 56. Esfera y cilindro** Calcule el volumen de la región que está dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ y fuera del cilindro $x^2 + y^2 = 1$.
- 57. Cilindro y planos** Calcule el volumen de la región encerrada por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y por los planos $z = 0$ y $y + z = 4$.
- 58. Cilindro y planos** Calcule el volumen de la región encerrada por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y por los planos $z = 0$ y $x + y + z = 4$.
- 59. Región entre paraboloides** Calcule el volumen de la región acotada arriba por el paraboloide $z = 5 - x^2 - y^2$ y abajo por el paraboloide $z = 4x^2 + 4y^2$.
- 60. Paraboloide y cilindro** Calcule el volumen de la región acotada arriba por el paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$, abajo por el plano xy y que está fuera del cilindro $x^2 + y^2 = 1$.
- 61. Cilindro y esfera** Calcule el volumen de la región del cilindro sólido $x^2 + y^2 \leq 1$ cortada por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.
- 62. Esfera y paraboloide** Calcule el volumen de la región acotada arriba por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ y abajo por el paraboloide $z = x^2 + y^2$.

Valores promedio

- 63.** Calcule el valor promedio de la función $f(r, \theta, z) = r$ sobre la región acotada por el cilindro $r = 1$ que se encuentra entre los planos $z = -1$ y $z = 1$.
- 64.** Determine el valor promedio de la función $f(r, \theta, z) = r$ sobre la bola sólida acotada por la esfera $r^2 + z^2 = 1$. (Ésta es la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$).
- 65.** Calcule el valor promedio de la función $f(\rho, \phi, \theta) = \rho$ sobre la bola sólida $\rho \leq 1$.
- 66.** Calcule el valor promedio de la función $f(\rho, \phi, \theta) = \rho \cos \phi$ sobre la parte superior de la bola sólida $\rho \leq 1$, $0 \leq \phi \leq \pi/2$.

Masas, momentos y centroides

- 67. Centro de masa** Un sólido de densidad constante está acotado abajo por el plano $z = 0$, arriba por el cono $z = r$, $r \geq 0$ y a los lados por el cilindro $r = 1$. Determine el centro de masa.
- 68. Centroides** Determine el centroide de la región del primer octante que está acotada arriba por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, abajo por el plano $z = 0$ y a los lados por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y por los planos $x = 0$, $y = 0$.
- 69. Centroides** Determine el centroide del sólido en el ejercicio 38.
- 70. Centroides** Determine el centroide del sólido acotado arriba por la esfera $\rho = a$ y abajo por el cono $\phi = \pi/4$.
- 71. Centroides** Determine el centroide de la región acotada arriba por la superficie $z = \sqrt{r}$, a los lados por el cilindro $r = 4$ y abajo por el plano xy .
- 72. Centroides** Determine el centroide de la región de la bola sólida $r^2 + z^2 \leq 1$ cortada por los semiplanos $\theta = -\pi/3$, $r \geq 0$ y $\theta = \pi/3$, $r \geq 0$.

- 73. Momento de inercia de un cono sólido** Calcule el momento de inercia de un cono circular recto de altura 1 y base de radio 1, con respecto a un eje que pasa por el vértice paralelo a la base. (Use $\delta = 1$).
- 74. Momento de inercia de una esfera sólida** Determine el momento de inercia de una esfera sólida de radio a con respecto a un diámetro. (Use $\delta = 1$).
- 75. Momento de inercia de un cono sólido** Calcule el momento de inercia de un cono circular recto de altura h y base de radio a , con respecto a su eje. (Sugerencia: Ponga el cono con su vértice en el origen y su eje a lo largo del eje z).
- 76. Densidad variable** Un sólido está acotado arriba por el paraboloide $z = r^2$, abajo por el plano $z = 0$ y a los lados por el cilindro $r = 1$. Calcule el centro de masa y el momento de inercia con respecto al eje z si la densidad es
- a. $\delta(r, \theta, z) = z$ b. $\delta(r, \theta, z) = r$.
- 77. Densidad variable** Un sólido está acotado abajo por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y arriba por el plano $z = 1$. Calcule el centro de masa y el momento de inercia con respecto al eje z , si la densidad es
- a. $\delta(r, \theta, z) = z$ b. $\delta(r, \theta, z) = z^2$.
- 78. Densidad variable** Una bola sólida está acotada arriba por la esfera $\rho = a$. Calcule el momento de inercia y el radio de giro con respecto al eje z si la densidad es
- a. $\delta(\rho, \phi, \theta) = \rho^2$ b. $\delta(\rho, \phi, \theta) = r = \rho \sin \phi$.
- 79. Centroides de un semielipsoide sólido** Demuestre que el centroide del semielipsoide de revolución sólido $(r^2/a^2) + (z^2/h^2) \leq 1$, $z \geq 0$ está sobre el eje z a $3/8$ del camino de la base a la parte superior. El caso particular $h = a$ da un hemisferio sólido. Así, el centroide de un hemisferio sólido está en el eje de simetría a $3/8$ del camino de la base a la parte superior.
- 80. Centroides de un cono sólido** Demuestre que el centroide de un cono circular recto sólido está a un cuarto del camino de la base al vértice. (En general, el centroide de un cono sólido o de una pirámide sólida está a un cuarto del camino del centroide de la base al vértice).
- 81. Densidad del centro de un planeta** Un planeta tiene la forma de una esfera de radio R y una masa total M con una distribución de densidad con simetría esférica que crece linealmente al aproximarse al centro. ¿Cuál es la densidad en el centro de este planeta, si la densidad en la superficie es igual a cero?
- 82. Masa de la atmósfera de un planeta** Un planeta esférico de radio R tiene una atmósfera cuya densidad es $\mu = \mu_0 e^{-ch}$, donde h es la altura sobre la superficie del planeta, μ_0 es la densidad a nivel del mar y c es una constante positiva. Calcule la masa de la atmósfera del planeta.

Teoría y ejemplos

- 83. Planos verticales en coordenadas cilíndricas**
- a. Demuestre que los planos perpendiculares al eje x tienen ecuaciones de la forma $r = a \sec \theta$ en coordenadas cilíndricas.
- b. Demuestre que los planos perpendiculares al eje y tienen ecuaciones de la forma $r = b \csc \theta$.
- 84. (Continuación del ejercicio 83).** Determine una ecuación de la forma $r = f(\theta)$ en coordenadas cilíndricas para el plano $ax + by = c$, $c \neq 0$.
- 85. Simetría** ¿Qué simetría tendrá una superficie con una ecuación de la forma $r = f(z)$ en coordenadas cilíndricas? Justifique su respuesta.
- 86. Simetría** ¿Qué simetría tendrá una superficie con una ecuación de la forma $\rho = f(\phi)$ en coordenadas esféricas? Justifique su respuesta.

15.8 | Sustitución en integrales múltiples

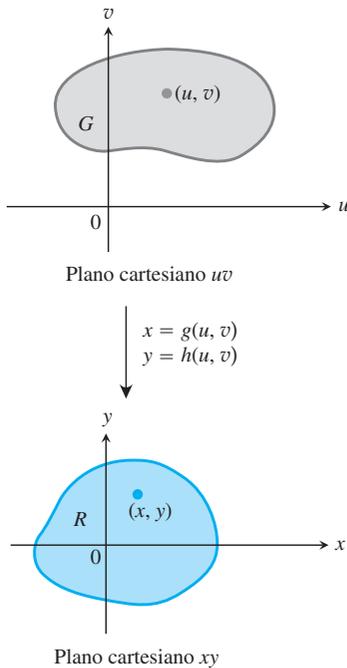


FIGURA 15.53 Las ecuaciones $x = g(u, v)$ y $y = h(u, v)$ nos permiten cambiar una integral sobre una región R del plano xy a una integral sobre una región G del plano uv usando la ecuación (1).

El objetivo de esta sección es presentar las ideas implicadas en las transformaciones de coordenadas. Usted aprenderá cómo evaluar integrales múltiples por sustitución para reemplazar integrales complicadas por otras que sean más fáciles de evaluar. Las sustituciones logran esto al simplificar el integrando, los límites de integración, o ambos. Un estudio más profundo de las transformaciones y de las sustituciones en variables múltiples, y del *jacobiano*, se deja para un curso más avanzado después de un curso de álgebra lineal.

Sustituciones en integrales dobles

La sustitución por coordenadas polares de la sección 15.4 es un caso particular de un método más general de sustitución para integrales dobles, un método que representa los cambios de variable como transformaciones de regiones.

Suponga que la región G en el plano uv se transforma de manera uno a uno en la región R del plano xy mediante ecuaciones de la forma

$$x = g(u, v), \quad y = h(u, v),$$

como sugiere la figura 15.53. Llamamos a R la **imagen** de G bajo la transformación, y G es la **preimagen** de R . Cualquier función $f(x, y)$ definida en R se considera como una función $f(g(u, v), h(u, v))$ definida en G . ¿Cuál es la relación entre la integral de $f(x, y)$ sobre R con la integral de $f(g(u, v), h(u, v))$ sobre G ?

La respuesta es que si g, h y f tienen derivadas parciales continuas y $J(u, v)$ (que analizaremos dentro de poco) se anula sólo en puntos aislados, entonces

$$\iint_R f(x, y) \, dx \, dy = \iint_G f(g(u, v), h(u, v)) |J(u, v)| \, du \, dv. \quad (1)$$

El factor $J(u, v)$, cuyo valor absoluto aparece en la ecuación (1), es el *jacobiano* de la transformación de coordenadas, así nombrado en honor del matemático alemán Carl Jacobi. El jacobiano mide la razón con que la transformación amplía o reduce el área en torno de un punto en G , cuando G se transforma en R .

DEFINICIÓN El **jacobiano** o **determinante jacobiano** de la transformación de coordenadas $x = g(u, v), y = h(u, v)$ es

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v}. \quad (2)$$

El jacobiano se denota también como

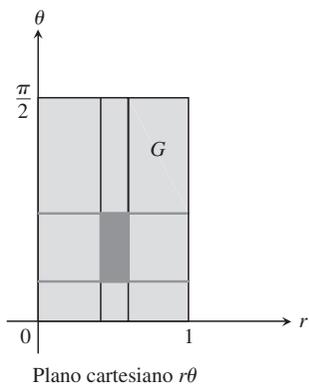
$$J(u, v) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$$

para ayudarnos a recordar la construcción del determinante de la ecuación (2) a partir de las derivadas parciales de x y y . La deducción de la ecuación (1) es intrincada y corresponde a un curso de cálculo avanzado, por lo que en este libro no la incluiremos.

EJEMPLO 1 Determine el jacobiano para la transformación de las coordenadas polares $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, y use la ecuación (1) para escribir la integral cartesiana $\iint_R f(x, y) \, dx \, dy$ como una integral polar.

BIOGRAFÍA HISTÓRICA

Carl Gustav Jacob Jacobi
(1804–1851)



$$\begin{aligned} \downarrow \\ x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \end{aligned}$$

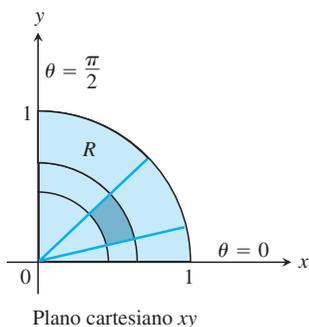


FIGURA 15.54 Las ecuaciones $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ transforman G en R .

Solución La figura 15.54 muestra la forma en que las ecuaciones $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ transforman el rectángulo G : $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$ en el cuarto de círculo R , acotado por $x^2 + y^2 = 1$ en el primer cuadrante del plano xy .

Para coordenadas polares, tenemos a r y θ en vez de u y v . Con $x = r \cos \theta$ y $y = r \sin \theta$, el jacobiano es

$$J(r, \theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r.$$

Puesto que suponemos que $r \geq 0$ cuando integramos en coordenadas polares, $|J(r, \theta)| = |r| = r$, de manera que la ecuación (1) da

$$\iint_R f(x, y) \, dx \, dy = \iint_G f(r \cos \theta, r \sin \theta) \, r \, dr \, d\theta. \quad (3)$$

Ésta es la misma fórmula que obtuvimos independientemente usando un argumento geométrico para el área polar en la sección 15.4.

Observe que la integral del lado derecho de la ecuación (3) no es la integral de $f(r \cos \theta, r \sin \theta)$ sobre una región en el plano de coordenadas polares, sino que es la integral del producto de $f(r \cos \theta, r \sin \theta)$ y r sobre una región G en el plano *cartesiano* $r\theta$. ■

He aquí un ejemplo de una sustitución en la cual la imagen de un rectángulo según la transformación de coordenadas es un trapecoide. Transformaciones como ésta se llaman **transformaciones lineales**.

EJEMPLO 2 Evalúe

$$\int_0^4 \int_{x=y/2}^{x=(y/2)+1} \frac{2x - y}{2} \, dx \, dy$$

aplicando la transformación

$$u = \frac{2x - y}{2}, \quad v = \frac{y}{2} \quad (4)$$

e integrando sobre una región adecuada en el plano uv .

Solución Trazamos la región de integración R en el plano xy e identificamos sus fronteras (figura 15.55)

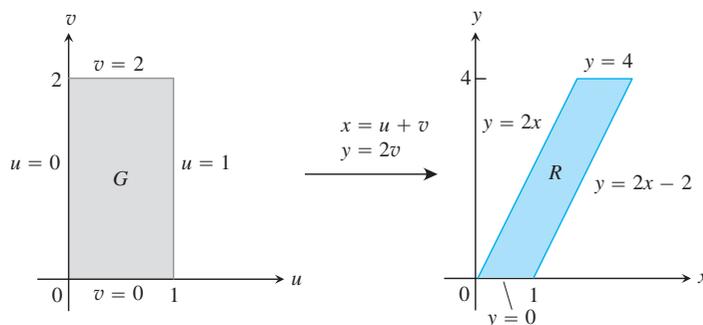


FIGURA 15.55 Las ecuaciones $x = u + v$ y $y = 2v$ transforman G en R . Al invertir la transformación mediante las ecuaciones $u = (2x - y)/2$ y $v = y/2$ se transforma R en G (ejemplo 2).

Para aplicar la ecuación (1) necesitamos conocer la región G correspondiente del plano uv y el jacobiano de la transformación. Para obtenerlos, primero despejamos x y y de las ecuaciones (4) en términos de u y v . Aplicando algo de álgebra nos da

$$x = u + v, \quad y = 2v. \tag{5}$$

Luego hallamos la frontera de G al sustituir estas expresiones en las ecuaciones para las fronteras de R (figura 15.55)

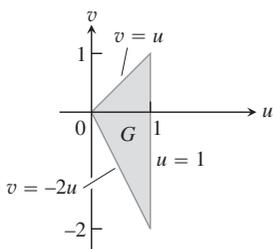
| Ecuaciones de la frontera de R en el plano xy | Ecuaciones correspondientes de la frontera de G en el plano uv . | Ecuaciones simplificadas en uv |
|---|--|----------------------------------|
| $x = y/2$ | $u + v = 2v/2 = v$ | $u = 0$ |
| $x = (y/2) + 1$ | $u + v = (2v/2) + 1 = v + 1$ | $u = 1$ |
| $y = 0$ | $2v = 0$ | $v = 0$ |
| $y = 4$ | $2v = 4$ | $v = 2$ |

El jacobiano de la transformación [de nuevo de la ecuación (5)] es

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial u}(u + v) & \frac{\partial}{\partial v}(u + v) \\ \frac{\partial}{\partial u}(2v) & \frac{\partial}{\partial v}(2v) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

Ahora tenemos todo lo necesario para aplicar la ecuación (1):

$$\begin{aligned} \int_0^4 \int_{x=y/2}^{x=(y/2)+1} \frac{2x - y}{2} dx dy &= \int_{v=0}^{v=2} \int_{u=0}^{u=1} u |J(u, v)| du dv \\ &= \int_0^2 \int_0^1 (u)(2) du dv = \int_0^2 [u^2]_0^1 dv = \int_0^2 dv = 2. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} x &= \frac{u}{3} - \frac{v}{3} \\ y &= \frac{2u}{3} + \frac{v}{3} \end{aligned}$$

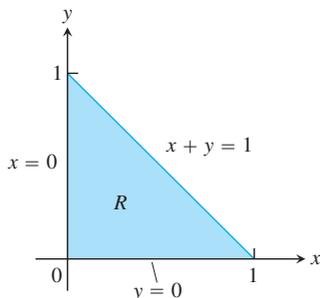


FIGURA 15.56 Las ecuaciones $x = (u/3) - (v/3)$ y $y = (2u/3) + (v/3)$ transforman G en R . Al invertir la transformación mediante las ecuaciones $u = x + y$ y $v = y - 2x$ se transforma R en G (ejemplo 3).

EJEMPLO 3 Evalúe

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \sqrt{x+y} (y-2x)^2 dy dx.$$

Solución Trazamos la región de integración R en el plano xy e identificamos sus fronteras (figura 15.56). El integrando sugiere la transformación $u = x + y$ y $v = y - 2x$. El álgebra de rutina produce x y y como funciones de u y v :

$$x = \frac{u}{3} - \frac{v}{3}, \quad y = \frac{2u}{3} + \frac{v}{3}. \tag{6}$$

Las ecuaciones (6) nos permiten encontrar las fronteras de la región G en el plano uv (figura 15.56).

| Ecuaciones de la frontera de R en el plano xy | Ecuaciones correspondientes de la frontera de G en el plano uv . | Ecuaciones simplificadas en uv |
|---|--|----------------------------------|
| $x + y = 1$ | $\left(\frac{u}{3} - \frac{v}{3}\right) + \left(\frac{2u}{3} + \frac{v}{3}\right) = 1$ | $u = 1$ |
| $x = 0$ | $\frac{u}{3} - \frac{v}{3} = 0$ | $v = u$ |
| $y = 0$ | $\frac{2u}{3} + \frac{v}{3} = 0$ | $v = -2u$ |

El jacobiano de la transformación de las ecuaciones (6) es

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{3}.$$

Al aplicar la ecuación (1), evaluamos la integral:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^{1-x} \sqrt{x+y} (y-2x)^2 dy dx &= \int_{u=0}^{u=1} \int_{v=-2u}^{v=u} u^{1/2} v^2 |J(u, v)| dv du \\ &= \int_0^1 \int_{-2u}^u u^{1/2} v^2 \left(\frac{1}{3}\right) dv du = \frac{1}{3} \int_0^1 u^{1/2} \left[\frac{1}{3} v^3 \right]_{v=-2u}^{v=u} du \\ &= \frac{1}{9} \int_0^1 u^{1/2} (u^3 + 8u^3) du = \int_0^1 u^{7/2} du = \frac{2}{9} u^{9/2} \Big|_0^1 = \frac{2}{9}. \end{aligned}$$

En el siguiente ejemplo ilustramos una transformación no lineal de coordenadas que se obtiene de la simplificación del integrando. Como en la transformación de las coordenadas polares, las transformaciones no lineales pueden convertir la línea recta de la frontera de una región en una frontera curva (o viceversa con la transformación inversa). En general, las transformaciones no lineales son más complejas de analizar que las lineales, y su estudio completo se deja para un curso más avanzado.

EJEMPLO 4 Evalúe la integral

$$\int_1^2 \int_{1/y}^y \sqrt{\frac{y}{x}} e^{\sqrt{xy}} dx dy.$$

Solución Los términos de raíz cuadrada en el integrando sugieren que podríamos simplificar la integración al sustituir $u = \sqrt{xy}$ y $v = \sqrt{y/x}$. Al elevar al cuadrado estas ecuaciones, fácilmente tenemos $u^2 = xy$ y $v^2 = y/x$, lo cual implica que $u^2 v^2 = y^2$ y $u^2/v^2 = x^2$. Entonces obtenemos la transformación (en el mismo orden de las variables ya discutidas)

$$x = \frac{u}{v} \quad y = uv.$$

Primero veamos qué pasa con el integrando mismo con esta transformación. El jacobiano de la transformación es

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{v} & -\frac{u}{v^2} \\ v & u \end{vmatrix} = \frac{2u}{v}.$$

Si G es la región de integración en el plano uv , entonces, al aplicar la ecuación (1), la integral doble transformada por la sustitución es

$$\iint_R \sqrt{\frac{y}{x}} e^{\sqrt{xy}} dx dy = \iint_G v e^u \frac{2u}{v} du dv = \iint_G 2ue^u du dv.$$

El integrando transformado es más fácil de integrar que el original, de manera que procedemos a determinar los límites de integración de la integral transformada.

La región de integración R de la integral original en el plano xy se muestra en la figura 15.57. A partir de las ecuaciones de sustitución $u = \sqrt{xy}$ y $v = \sqrt{y/x}$, vemos que la imagen de la frontera de la izquierda $xy = 1$ para R es el segmento de recta vertical $u = 1, 2 \geq v \geq 1$, en G (véase la figura 15.58). Asimismo, la frontera de la derecha $y = x$ de R traza el segmento de recta horizontal $v = 1, 1 \leq u \leq 2$, en G . Por último, la frontera horizontal de arriba $y = 2$ de R mapea a $uv = 2, 1 \leq v \leq 2$, en G . Cuando nos movemos en sentido contrario a

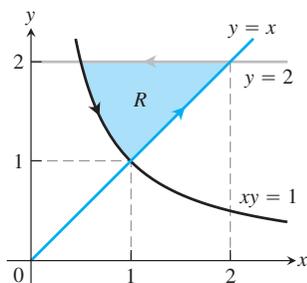


FIGURA 15.57 La región de integración R del ejemplo 4.

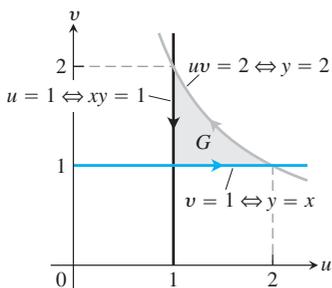


FIGURA 15.58 Las fronteras de la región G corresponden a aquellas regiones de R en la figura 15.57. Observe que cuando nos movemos en sentido contrario a las manecillas del reloj en la región R , también nos movemos en sentido contrario a las manecillas del reloj en la región G . Las ecuaciones de transformación inversa $u = \sqrt{xy}, v = \sqrt{y/x}$ generan la región G a partir de la región R .

las manecillas del reloj alrededor de la frontera de la región R , también nos movemos en sentido contrario a las manecillas del reloj alrededor de la frontera de G , como se indica en la figura 15.58. Si conocemos la región de integración G en el plano uv , escribimos las integrales iteradas equivalentes:

$$\int_1^2 \int_{1/y}^y \sqrt{\frac{y}{x}} e^{\sqrt{xy}} dx dy = \int_1^2 \int_1^{2/u} 2ue^u dv du. \quad \text{Observe el orden de integración.}$$

Evaluamos ahora la integral transformada del lado derecho,

$$\begin{aligned} \int_1^2 \int_1^{2/u} 2ue^u dv du &= 2 \int_1^2 \left[ve^u \right]_{v=1}^{v=2/u} du \\ &= 2 \int_1^2 (2e^u - ue^u) du \\ &= 2 \int_1^2 (2 - u)e^u du \\ &= 2 \left[(2 - u)e^u + e^u \right]_{u=1}^{u=2} \quad \text{Integración por partes.} \\ &= 2(e^2 - (e + e)) = 2e(e - 2). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Sustitución en integrales triples

Las sustituciones por coordenadas cilíndricas y esféricas de la sección 15.7 son casos particulares de un método de sustitución que representa los cambios de variable en las integrales triples como transformaciones de regiones tridimensionales. El método es similar al de las integrales dobles, excepto que ahora trabajamos con tres dimensiones en vez de dos.

Suponga que una región G del espacio uvw se transforma de uno a uno en la región D del espacio xyz mediante ecuaciones diferenciables de la forma

$$x = g(u, v, w), \quad y = h(u, v, w), \quad z = k(u, v, w),$$

como sugiere la figura 15.59. Entonces, cualquier función $F(x, y, z)$ definida en D se considera como una función

$$F(g(u, v, w), h(u, v, w), k(u, v, w)) = H(u, v, w)$$

definida en G . Si g , h y k tienen primeras derivadas parciales continuas, entonces la integral de $F(x, y, z)$ sobre D se relaciona con la integral de $H(u, v, w)$ sobre G mediante la ecuación

$$\iiint_D F(x, y, z) dx dy dz = \iiint_G H(u, v, w) |J(u, v, w)| du dv dw. \quad (7)$$

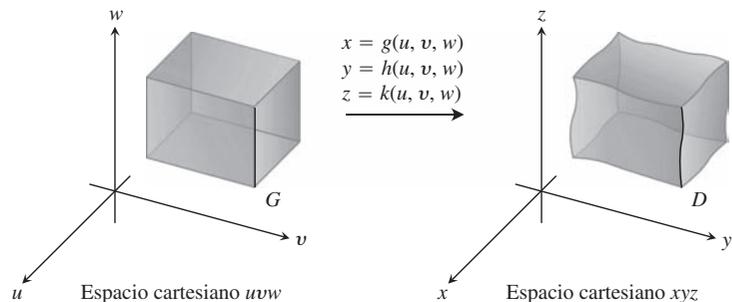


FIGURA 15.59 Las ecuaciones $x = g(u, v, w)$, $y = h(u, v, w)$ y $z = k(u, v, w)$ permiten cambiar una integral sobre una región D en el espacio cartesiano xyz por una integral sobre una región G en el espacio cartesiano uvw usando la ecuación (7).

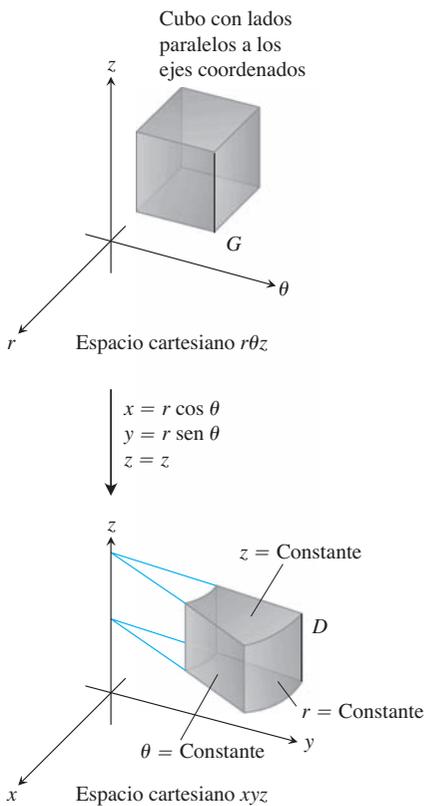


FIGURA 15.60 Las ecuaciones $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ y $z = z$ transforman el cubo G en una cuña cilíndrica D .

El factor $J(u, v, w)$, cuyo valor absoluto aparece en esta ecuación es el **determinante jacobiano**.

$$J(u, v, w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}.$$

Este determinante mide la razón con la que la transformación de coordenadas (u, v, w) a (x, y, z) amplía o reduce el volumen en torno de un punto en G . Como en el caso bidimensional, se omite la deducción de la fórmula de cambio de variable de la ecuación (7).

Para coordenadas cilíndricas, r, θ y z toman los lugares de u, v y w . La transformación del espacio cartesiano $r\theta z$ al espacio cartesiano xyz está dada por las ecuaciones

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z$$

(figura 15.60). El jacobiano de la transformación es

$$J(r, \theta, z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r.$$

La versión correspondiente de la ecuación (7) es

$$\iiint_D F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_G H(r, \theta, z) |r| \, dr \, d\theta \, dz.$$

Podemos eliminar los símbolos de valor absoluto siempre que $r \geq 0$.

Para coordenadas esféricas, ρ, ϕ y θ toman los lugares de u, v y w . La transformación del espacio cartesiano $\rho\phi\theta$ al espacio cartesiano xyz está dada por

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta, \quad y = \rho \sin \phi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \phi$$

(figura 15.61). El jacobiano de la transformación es (véase el ejercicio 19)

$$J(\rho, \phi, \theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \rho^2 \sin \phi.$$

La versión correspondiente de la ecuación (7) es

$$\iiint_D F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_G H(\rho, \phi, \theta) |\rho^2 \sin \phi| \, d\rho \, d\phi \, d\theta.$$

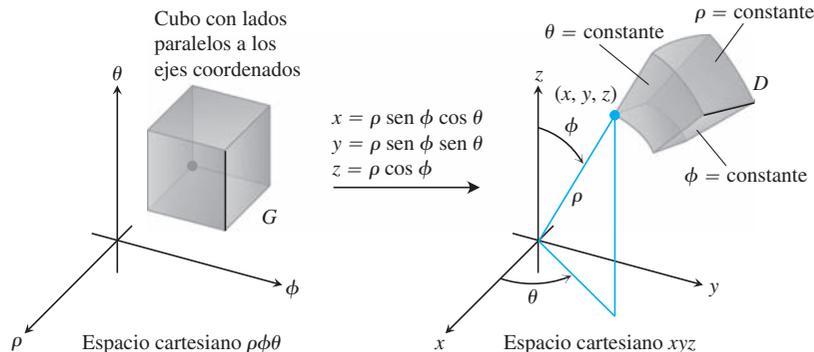
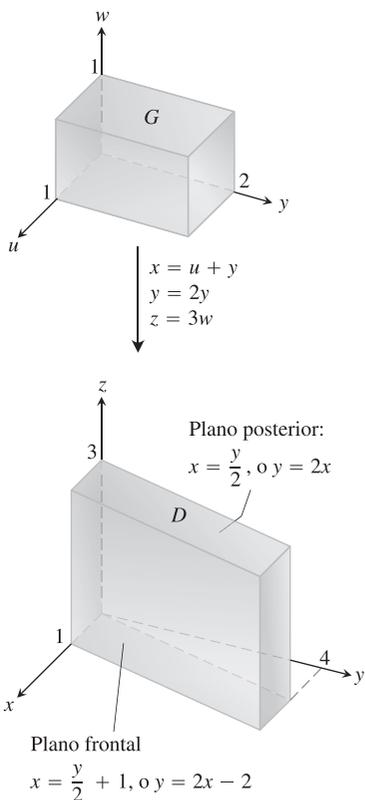


FIGURA 15.61 Las ecuaciones $x = \rho \text{ sen } \phi \text{ cos } \theta$, $y = \rho \text{ sen } \phi \text{ sen } \theta$ y $z = \rho \text{ cos } \phi$ transforman el cubo G en la cuña esférica D .

Podemos eliminar los símbolos de valor absoluto porque $\text{sen } \phi$ nunca es negativo para $0 \leq \phi \leq \pi$. Observe que es el mismo resultado que se obtuvo en la sección 15.7.

He aquí un ejemplo de otra sustitución. Aunque podríamos evaluar la integral del ejemplo en forma directa, la elegimos para ilustrar el método de sustitución en un caso sencillo (y bastante intuitivo).



EJEMPLO 5 Evalúe

$$\int_0^3 \int_0^4 \int_{x=y/2}^{x=(y/2)+1} \left(\frac{2x - y}{2} + \frac{z}{3} \right) dx dy dz$$

aplicando la transformación

$$u = (2x - y)/2, \quad v = y/2, \quad w = z/3 \tag{8}$$

e integrando sobre una región adecuada en el espacio uvw .

Solución Trazamos la región de integración D en el espacio xyz e identificamos sus fronteras (figura 15.62). En este caso, las superficies de la frontera son planos.

Para aplicar la ecuación (7), necesitamos encontrar la región G correspondiente del espacio uvw y el jacobiano de la transformación. Para encontrarlos, primero despejamos x, y y z de las ecuaciones (8) en términos de u, v y w . Después de realizar un poco de álgebra tenemos

$$x = u + v, \quad y = 2v, \quad z = 3w. \tag{9}$$

Luego obtenemos las fronteras de G al sustituir estas expresiones en las ecuaciones de las fronteras de D :

| Ecuaciones de la frontera de D en el espacio xyz | Ecuaciones correspondientes de la frontera de G en el espacio uvw | Ecuaciones simplificadas en el espacio uvw |
|--|---|--|
| $x = y/2$ | $u + v = 2v/2 = v$ | $u = 0$ |
| $x = (y/2) + 1$ | $u + v = (2v/2) + 1 = v + 1$ | $u = 1$ |
| $y = 0$ | $2v = 0$ | $v = 0$ |
| $y = 4$ | $2v = 4$ | $v = 2$ |
| $z = 0$ | $3w = 0$ | $w = 0$ |
| $z = 3$ | $3w = 3$ | $w = 1$ |

FIGURA 15.62 Las ecuaciones $x = u + v, y = 2v$ y $z = 3w$ transforman G en D . Al invertir la transformación mediante las ecuaciones $u = (2x - y)/2, v = y/2$ y $w = z/3$ se transforma D en G (ejemplo 5).

De nuevo, por las ecuaciones (9), el jacobiano de la transformación es

$$J(u, v, w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6.$$

Ahora tenemos todo lo necesario para aplicar la ecuación (7):

$$\begin{aligned} & \int_0^3 \int_0^4 \int_{x=y/2}^{x=(y/2)+1} \left(\frac{2x-y}{2} + \frac{z}{3} \right) dx dy dz \\ &= \int_0^1 \int_0^2 \int_0^1 (u+w) |J(u, v, w)| du dv dw \\ &= \int_0^1 \int_0^2 \int_0^1 (u+w)(6) du dv dw = 6 \int_0^1 \int_0^2 \left[\frac{u^2}{2} + uw \right]_0^1 dv dw \\ &= 6 \int_0^1 \int_0^2 \left(\frac{1}{2} + w \right) dv dw = 6 \int_0^1 \left[\frac{v}{2} + vw \right]_0^2 dw = 6 \int_0^1 (1 + 2w) dw \\ &= 6 \left[w + w^2 \right]_0^1 = 6(2) = 12. \end{aligned}$$

Ejercicios 15.8

Cálculo de jacobianos y regiones transformadas en el plano

1. a. Resuelva el sistema

$$u = x - y, \quad v = 2x + y$$

para x y y en términos de u y v . Luego obtenga el valor del jacobiano $\partial(x, y)/\partial(u, v)$.

b. Encuentre la imagen bajo la transformación $u = x - y$, $v = 2x + y$ de la región triangular con vértices $(0, 0)$, $(1, 1)$ y $(1, -2)$ en el plano xy . Trace la región transformada en el plano uv .

2. a. Resuelva el sistema

$$u = x + 2y, \quad v = x - y$$

para x y y en términos de u y v . Luego encuentre el valor del jacobiano $\partial(x, y)/\partial(u, v)$.

b. Encuentre la imagen bajo la transformación $u = x + 2y$, $v = x - y$ de la región triangular en el plano xy acotada por las rectas $y = 0$, $y = x$ y $x + 2y = 2$. Trace la región transformada en el plano uv .

3. a. Resuelva el sistema

$$u = 3x + 2y, \quad v = x + 4y$$

para x y y en términos de u y v . Luego halle el valor del jacobiano $\partial(x, y)/\partial(u, v)$.

b. Encuentre la imagen bajo la transformación $u = 3x + 2y$, $v = x + 4y$ de la región triangular en el plano xy acotada por

el eje x , el eje y y la recta $x + y = 1$. Trace la región transformada en el plano uv .

4. a. Resuelva el sistema

$$u = 2x - 3y, \quad v = -x + y$$

para x y y en términos de u y v . Luego obtenga el valor del jacobiano $\partial(x, y)/\partial(u, v)$.

b. Encuentre la imagen bajo la transformación $u = 2x - 3y$, $v = -x + y$ del paralelogramo R en el plano xy con fronteras $x = -3$, $x = 0$, $y = x$ y $y = x + 1$. Trace la región transformada en el plano uv .

Sustituciones en integrales dobles

5. Evalúe la integral

$$\int_0^4 \int_{x=y/2}^{x=(y/2)+1} \frac{2x-y}{2} dx dy$$

del ejemplo 1 por integración directa con respecto a x y y para confirmar que su valor es 2.

6. Use la transformación del ejercicio 1 para evaluar la integral

$$\iint_R (2x^2 - xy - y^2) dx dy$$

para la región R del primer cuadrante, acotada por las rectas $y = -2x + 4$, $y = -2x + 7$, $y = x - 2$ y $y = x + 1$.

7. Use la transformación del ejercicio 3 para evaluar la integral

$$\iint_R (3x^2 + 14xy + 8y^2) dx dy$$

para la región R del primer cuadrante, acotada por las rectas $y = -(3/2)x + 1$, $y = -(3/2)x + 3$, $y = -(1/4)x$, y $y = -(1/4)x + 1$.

8. Use la transformación y el paralelogramo R del ejercicio 4 para evaluar la integral

$$\iint_R 2(x - y) dx dy.$$

9. Sea R la región del primer cuadrante del plano xy , acotada por las hipérbolas $xy = 1$, $xy = 9$, y las rectas $y = x$, $y = 4x$. Use la transformación $x = u/v$, $y = uv$, con $u > 0$ y $v > 0$ para replantear

$$\iint_R \left(\sqrt{\frac{y}{x}} + \sqrt{xy} \right) dx dy$$

como una integral sobre una región adecuada G del plano uv . Luego evalúe la integral sobre G .

10. a. Calcule el jacobiano de la transformación $x = u$, $y = uv$, y dibuje la región G : $1 \leq u \leq 2$, $1 \leq uv \leq 2$ en el plano uv .
b. Use la ecuación (1) para transformar la integral

$$\int_1^2 \int_1^2 \frac{y}{x} dy dx$$

en una integral sobre G , y evalúe ambas integrales.

11. **Momento polar de inercia de una placa elíptica** Una placa delgada de densidad constante cubre la región acotada por la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, $a > 0$, $b > 0$ en el plano xy . Calcule el primer momento de la placa con respecto al origen. (*Sugerencia:* Use la transformación $x = ar \cos \theta$, $y = br \sin \theta$).
12. **El área de una elipse** El área πab de la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ se puede encontrar integrando la función $f(x, y) = 1$ sobre la región acotada por la elipse en el plano xy . La evaluación directa de la integral requiere una sustitución trigonométrica. Una forma más sencilla de evaluarla consiste en usar la transformación $x = au$, $y = bv$ y evaluar la integral transformada sobre el disco G : $u^2 + v^2 \leq 1$ en el plano uv . Encuentre el área de esta forma.
13. Use la transformación del ejercicio 2 para evaluar la integral

$$\int_0^{2/3} \int_y^{2-2y} (x + 2y)e^{(y-x)} dx dy$$

escribiéndola primero como una integral sobre una región G en el plano uv .

14. Use la transformación $x = u + (1/2)v$, $y = v$ para evaluar la integral

$$\int_0^2 \int_{y/2}^{(y+4)/2} y^3(2x - y)e^{(2x-y)^2} dx dy$$

escribiéndola primero como una integral sobre una región G en el plano uv .

15. Use la transformación $x = u/v$, $y = uv$ para evaluar la suma integral

$$\int_1^2 \int_{1/y}^y (x^2 + y^2) dx dy + \int_2^4 \int_{y/4}^{4/y} (x^2 + y^2) dx dy.$$

16. Use la transformación $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$ para evaluar la integral

$$\int_0^1 \int_0^{2\sqrt{1-x}} \sqrt{x^2 + y^2} dy dx.$$

[*Sugerencia:* Muestre que la imagen de la región triangular G con vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ en el plano uv es la región de integración R en el plano xy definida por los límites de integración].

Cálculo de jacobianos

17. Obtenga el jacobiano $\partial(x, y)/\partial(u, v)$ para las transformaciones

a. $x = u \cos v$, $y = u \sin v$

b. $x = u \sin v$, $y = u \cos v$.

18. Calcule el jacobiano $\partial(x, y, z)/\partial(u, v, w)$ para las transformaciones

a. $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = w$

b. $x = 2u - 1$, $y = 3v - 4$, $z = (1/2)(w - 4)$.

19. Evalúe el determinante adecuado para mostrar que el jacobiano de la transformación del espacio cartesiano $\rho\phi\theta$ al espacio cartesiano xyz es $\rho^2 \sin \phi$.

20. **Sustituciones en integrales triples** ¿Cómo puede considerar las situaciones de integrales definidas simples como transformaciones de regiones? ¿Cuál es el jacobiano en ese caso? Ilustre con un ejemplo.

Sustituciones en integrales simples

21. Evalúe la integral del ejemplo 5 integrando con respecto a x , y y z .

22. **Volumen de un elipsoide** Calcule el volumen del elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

(*Sugerencia:* Sean $x = au$, $y = bv$ y $z = cw$. Después encuentre el volumen de una región adecuada en el espacio uvw).

23. Evalúe

$$\iiint |xyz| dx dy dz$$

sobre el elipsoide sólido

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1.$$

(*Sugerencia:* Sean $x = au$, $y = bv$ y $z = cw$. Luego integre sobre una región adecuada en el espacio uvw).

24. Sea D una región en el espacio xyz definida por las desigualdades

$$1 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq xy \leq 2, \quad 0 \leq z \leq 1.$$

Evalúe

$$\iiint_D (x^2y + 3xyz) dx dy dz$$

utilizando la transformación

$$u = x, \quad v = xy, \quad w = 3z$$

e integrando sobre una región adecuada G en el espacio uvw .

25. Centroide de un semielipsoide sólido Suponga que el centroide de un hemisferio sólido está sobre el eje de simetría, a $3/8$ de distancia de la base a la parte superior; demuestre, transformando las integrales adecuadas, que el centro de masa de un semielipsoide sólido $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) + (z^2/c^2) \leq 1, z \geq 0$ está sobre el eje z a $3/8$ de la distancia de la base a la parte superior. (Puede hacerlo sin evaluar las integrales).

26. Capas cilíndricas En la sección 6.2 aprendimos a calcular el volumen de un sólido de revolución mediante el método de capas; a saber, si la región entre la curva $y = f(x)$ y el eje x de a a b ($0 < a < b$) gira en torno del eje y , el volumen del sólido resultante es $\int_a^b 2\pi x f(x) dx$. Demuestre que el cálculo de los volúmenes mediante integrales triples da el mismo resultado. (*Sugerencia:* Use coordenadas cilíndricas, con los roles de y y z cambiados).

Capítulo 15 Preguntas de repaso

- Defina la integral doble de una función de dos variables sobre una región acotada en el plano coordenado.
- ¿Cómo se evalúan las integrales dobles mediante las integrales iteradas? ¿Es importante el orden de integración? ¿Cómo se determinan los límites de integración? Dé ejemplos.
- ¿Cómo se usan las integrales dobles para calcular áreas y valores promedio? Dé ejemplos.
- ¿Cómo se cambiaría una integral doble en coordenadas rectangulares por una integral doble en coordenadas polares? ¿De qué podría servir? Dé un ejemplo.
- Defina la integral triple de una función $f(x, y, z)$ sobre una región acotada en el espacio.
- ¿Cómo se evalúan las integrales triples en coordenadas rectangulares? ¿Cómo se determinan los límites de integración? Dé un ejemplo.
- ¿Cómo se usan las integrales dobles y triples en coordenadas rectangulares para calcular volúmenes, valores promedio, masas, momentos y centros de masa? Dé ejemplos.
- ¿Cómo se definen las integrales triples en coordenadas cilíndricas y esféricas? ¿Por qué sería preferible trabajar en alguno de estos sistemas de coordenadas que trabajar con coordenadas rectangulares?
- ¿Cómo se evalúan las integrales triples en coordenadas cilíndricas y esféricas? ¿Cómo se determinan los límites de integración? Dé ejemplos.
- ¿Cómo se representan las sustituciones en integrales dobles como transformaciones de regiones bidimensionales? Dé un ejemplo de cálculo.
- ¿Cómo se representan las sustituciones en integrales triples como transformaciones de regiones tridimensionales? Dé un ejemplo de cálculo.

Capítulo 15 Ejercicios de práctica

Evaluación de integrales iteradas dobles

En los ejercicios 1 a 4, bosqueje la región de integración y evalúe la integral doble.

$$1. \int_1^{10} \int_0^{1/y} ye^{xy} dx dy \quad 2. \int_0^1 \int_0^{x^3} e^{y/x} dy dx$$

$$3. \int_0^{3/2} \int_{-\sqrt{9-4t^2}}^{\sqrt{9-4t^2}} t ds dt \quad 4. \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{2-\sqrt{y}} xy dx dy$$

En los ejercicios 5 a 8, bosqueje la región de integración y escriba una integral equivalente con el orden de integración invertido. Luego evalúe ambas integrales.

$$5. \int_0^4 \int_{-\sqrt{4-y}}^{(y-4)/2} dx dy \quad 6. \int_0^1 \int_{x^2}^x \sqrt{x} dy dx$$

$$7. \int_0^{3/2} \int_{-\sqrt{9-4y^2}}^{\sqrt{9-4y^2}} y dx dy \quad 8. \int_0^2 \int_0^{4-x^2} 2x dy dx$$

Evalúe las integrales en los ejercicios 9 a 12.

$$9. \int_0^1 \int_{2y}^2 4 \cos(x^2) dx dy \quad 10. \int_0^2 \int_{y/2}^1 e^{x^2} dx dy$$

$$11. \int_0^8 \int_{\sqrt{x}}^2 \frac{dy dx}{y^4 + 1} \quad 12. \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \frac{2\pi \operatorname{sen} \pi x^2}{x^2} dx dy$$

Uso de integrales dobles en áreas y volúmenes

- Área entre una recta y una parábola** Calcule el área de la región encerrada por la recta $y = 2x + 4$ y la parábola $y = 4 - x^2$ en el plano xy .
- Área acotada por rectas y parábola** Calcule el área de la región "triangular" del plano xy acotada a la derecha por la parábola $y = x^2$, a la izquierda por la recta $x + y = 2$ y arriba por la recta $y = 4$.
- Volumen de la región bajo un paraboloides** Calcule el volumen bajo el paraboloides $z = x^2 + y^2$ arriba del triángulo encerrado por las rectas $y = x, x = 0$ y $x + y = 2$ en el plano xy .
- Volumen de la región bajo un cilindro parabólico** Calcule el volumen debajo el cilindro parabólico $z = x^2$ sobre la región encerrada por la parábola $y = 6 - x^2$ y la recta $y = x$ en el plano xy .

Valores promedio

Calcule el valor promedio de $f(x, y) = xy$ sobre las regiones de los ejercicios 17 y 18.

- El cuadrado acotado por las rectas $x = 1, y = 1$ en el primer cuadrante.
- El cuarto de círculo $x^2 + y^2 \leq 1$ en el primer cuadrante.

Coordenadas polares

Evalúe las integrales de los ejercicios 19 y 20 cambiando a coordenadas polares.

19.
$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2 \, dy \, dx}{(1 + x^2 + y^2)^2}$$

20.
$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \ln(x^2 + y^2 + 1) \, dx \, dy$$

21. **Integración sobre una lemniscata** Integre la función $f(x, y) = 1/(1 + x^2 + y^2)^2$ sobre la región encerrada por un lazo de la lemniscata $(x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2) = 0$.

22. Integre $f(x, y) = 1/(1 + x^2 + y^2)^2$ sobre

a. **Región triangular** El triángulo con vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, \sqrt{3})$.

b. **Primer cuadrante** El primer cuadrante en el plano xy .

Evaluación de integrales iteradas triples

Evalúe las integrales de los ejercicios 23 a 26.

23.
$$\int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi \cos(x + y + z) \, dx \, dy \, dz$$

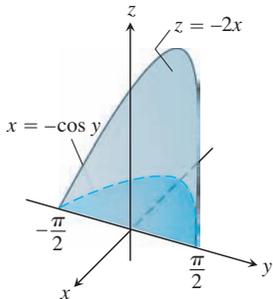
24.
$$\int_{\ln 6}^{\ln 7} \int_0^{\ln 2} \int_{\ln 4}^{\ln 5} e^{(x+y+z)} \, dz \, dy \, dx$$

25.
$$\int_0^1 \int_0^{x^2} \int_0^{x+y} (2x - y - z) \, dz \, dy \, dx$$

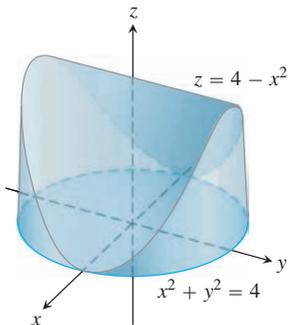
26.
$$\int_1^e \int_1^x \int_0^z \frac{2y}{z^3} \, dy \, dz \, dx$$

Volúmenes y valores promedio usando integrales triples

27. **Volumen** Calcule el volumen de la región con forma de cuña encerrada por los lados por el cilindro $x = -\cos y$, $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$, arriba por el plano $z = -2x$, y abajo por el plano xy .



28. **Volumen** Calcule el volumen del sólido acotado arriba por el cilindro $z = 4 - x^2$, a los lados por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y abajo por el plano xy .



29. **Valor promedio** Calcule el valor promedio de $f(x, y, z) = 30xz \sqrt{x^2 + y}$ sobre el sólido rectangular en el primer octante acotado por los planos coordenados y los planos $x = 1$, $y = 3$, $z = 1$.

30. **Valor promedio** Calcule el valor promedio de ρ sobre la esfera sólida $\rho \leq a$ (coordenadas esféricas).

Coordenadas cilíndricas y esféricas

31. **Coordenadas cilíndricas a rectangulares** Convierta

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \int_r^{\sqrt{4-r^2}} 3 \, dz \, r \, dr \, d\theta, \quad r \geq 0$$

(a) a coordenadas rectangulares con el orden de integración $dz \, dx \, dy$ y (b) a coordenadas esféricas. Luego (c) evalúe una de las integrales.

32. **Coordenadas rectangulares a cilíndricas** (a) Convierta a coordenadas cilíndricas. Luego (b) evalúe la nueva integral

$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-(x^2+y^2)}^{(x^2+y^2)} 21xy^2 \, dz \, dy \, dx$$

33. **Coordenadas rectangulares a esféricas** (a) Convierta a coordenadas esféricas. Luego (b) evalúe la nueva integral

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 \, dz \, dy \, dx$$

34. **Coordenadas rectangulares, cilíndricas y esféricas** Escriba una integral triple iterada para la integral de $f(x, y, z) = 6 + 4y$ sobre la región del primer octante acotada por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y los planos coordenados, en (a) coordenadas rectangulares, (b) coordenadas cilíndricas y (c) coordenadas esféricas. Luego (d) determine la integral de f evaluando una de las integrales triples.

35. **Coordenadas cilíndricas a rectangulares** Enuncie una integral en coordenadas rectangulares equivalente a la integral

$$\int_0^{\pi/2} \int_1^{\sqrt{3}} \int_1^{\sqrt{4-r^2}} r^3 (\sin \theta \cos \theta) z^2 \, dz \, dr \, d\theta.$$

Arregle el orden de integración para que z sea primero, luego y y por último x .

36. **Coordenadas rectangulares a cilíndricas** El volumen de un sólido es

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} \, dz \, dy \, dx.$$

a. Describa el sólido dando las ecuaciones de las superficies que forman su frontera.

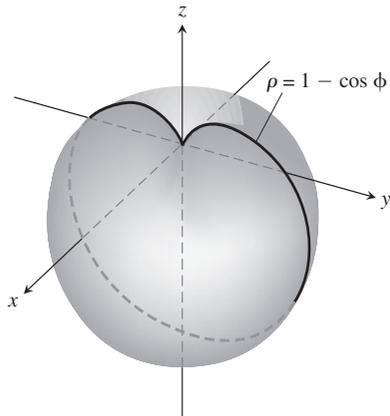
b. Convierta la integral a coordenadas cilíndricas, pero no evalúe la integral.

37. **Coordenadas esféricas contra cilíndricas** Las integrales triples que implican formas esféricas no siempre requieren coordenadas esféricas para evaluarse de manera conveniente. Algunos cálculos se realizan más fácilmente con coordenadas cilíndricas. Como ejemplo, calcule el volumen de la región acotada arriba por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ y abajo por el plano $z = 2$ usando (a) coordenadas cilíndricas y (b) coordenadas esféricas.

Masas y momentos

38. **Cálculo de I_z en coordenadas esféricas** Calcule, con respecto al eje z , el momento de inercia de un sólido con densidad constante $\delta = 1$ que está acotado arriba por la esfera $\rho = 2$ y abajo por el cono $\phi = \pi/3$ (coordenadas esféricas).

39. **Momento de inercia de una esfera “gruesa”** Calcule el momento de inercia de un sólido con densidad constante δ acotado por dos esferas concéntricas de radios a y b ($a < b$) con respecto a un diámetro.
40. **Momento de inercia de una manzana** Calcule, con respecto al eje z , el momento de inercia de un sólido con densidad $\delta = 1$ encerrado por la superficie dada en coordenadas esféricas $\rho = 1 - \cos \phi$. El sólido es generado por la curva girada en torno del eje z que se destaca en la siguiente figura.



41. **Centroide** Determine el centroide de la región “triangular” acotada por las rectas $x = 2$, $y = 2$ y la hipérbola $xy = 2$ en el plano xy .
42. **Centroide** Determine el centroide de la región entre la parábola $x^2 + y^2 - 2y = 0$ y la recta $x + 2y = 0$ en el plano xy .
43. **Momento polar** Calcule, con respecto al origen, el momento polar de inercia de una placa delgada triangular de densidad constante $\delta = 3$, acotada por el eje y y las rectas $y = 2x$ y $y = 4$ en el plano xy .
44. **Momento polar** Calcule el momento polar de inercia con respecto al centro de una delgada lámina rectangular de densidad constante $\delta = 1$, acotada por las rectas
- $x = \pm 2$, $y = \pm 1$ en el plano xy
 - $x = \pm a$, $y = \pm b$ en el plano xy
- (Sugerencia: Calcule I_x . Luego use la fórmula de I_x para hallar I_y y sume ambas para determinar I_0).
45. **Momento de inercia** Calcule, con respecto al eje x , el momento de inercia de una delgada placa con densidad constante δ que cubre el triángulo con vértices $(0, 0)$, $(3, 0)$ y $(3, 2)$ en el plano xy .
46. **Placa con densidad variable** Calcule, con respecto a los ejes coordenados, el centro de masa, así como los momentos de inercia de una

delgada placa acotada por la recta $y = x$ y la parábola $y = x^2$ en el plano xy si la densidad es $\delta(x, y) = x + 1$.

47. **Placa con densidad variable** Calcule, con respecto a los ejes coordenados, la masa y los primeros momentos de una delgada placa cuadrada acotada por las rectas $x = \pm 1$, $y = \pm 1$ en el plano xy si la densidad es $\delta(x, y) = x^2 + y^2 + 1/3$.
48. **Triángulos con los mismos momentos inerciales** Calcule, con respecto al eje x , el momento de inercia de una delgada placa triangular de densidad constante δ , cuya base está a lo largo del intervalo $[0, b]$ sobre el eje x y cuyo vértice está sobre la recta $y = h$ sobre el eje x . Como verá, no importa dónde esté el vértice sobre esta recta. Todos estos triángulos tienen el mismo momento de inercia con respecto al eje x .
49. **Centroide** Calcule el centroide de la región del plano de coordenadas polares definida mediante las desigualdades $0 \leq r \leq 3$, $-\pi/3 \leq \theta \leq \pi/3$.
50. **Centroide** Determine el centroide de la región del primer cuadrante acotada por los rayos $\theta = 0$ y $\theta = \pi/2$ y las circunferencias $r = 1$ y $r = 3$.
51. **a. Centroide** Determine el centroide de la región del plano de coordenadas polares que está dentro de la cardiode $r = 1 + \cos \theta$ y fuera de la circunferencia $r = 1$.
- b.** Bosquee la región y exhiba el centroide en su dibujo.
52. **a. Centroide** Determine el centroide de la región plana definida por las desigualdades en coordenadas polares $0 \leq r \leq a$, $-\alpha \leq \theta \leq \alpha$ ($0 < \alpha \leq \pi$). ¿Cómo se mueve el centroide cuando $\alpha \rightarrow \pi^-$?
- b.** Bosquee la región para $\alpha = 5\pi/6$ y muestre el centroide en su dibujo.

Sustituciones

53. Demuestre que si $u = x - y$ y $v = y$, entonces

$$\int_0^\infty \int_0^x e^{-sx} f(x - y, y) dy dx = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s(u+v)} f(u, v) du dv.$$

54. ¿Qué relación debe haber entre las constantes a, b y c para que

$$\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)} dx dy = 1?$$

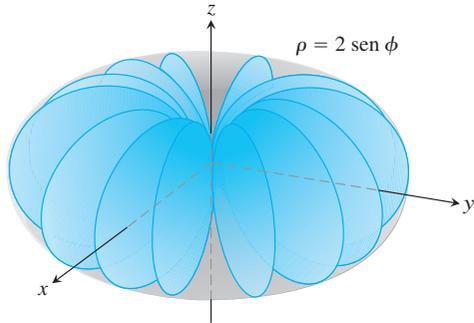
(Sugerencia: Sean $s = \alpha x + \beta y$ y $t = \gamma x + \delta y$, donde $(\alpha\delta - \beta\gamma)^2 = ac - b^2$. Entonces, $ax^2 + 2bxy + cy^2 = s^2 + t^2$).

Capítulo 15 Ejercicios adicionales y avanzados

Volúmenes

- Pila de arena: integrales dobles y triples** La base de una pila de arena cubre la región del plano xy acotada por la parábola $x^2 + y = 6$ y la recta $y = x$. La altura de la arena sobre el punto (x, y) es x^2 . Expresar el volumen de arena como (a) una integral doble, (b) una integral triple. Luego (c) calcule el volumen.
- Agua en un tazón semiesférico** Un tazón semiesférico de 5 cm de radio se llena con agua hasta 3 cm de la parte superior. Calcule el volumen de agua en el tazón.
- Región cilíndrica sólida entre dos planos** Calcule el volumen de la porción del cilindro sólido $x^2 + y^2 \leq 1$ que está entre los planos $z = 0$ y $x + y + z = 2$.
- Esfera y paraboloides** Calcule el volumen de la región acotada arriba por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ y abajo por el paraboloides $z = x^2 + y^2$.
- Dos paraboloides** Calcule el volumen de la región acotada arriba por el paraboloides $z = 3 - x^2 - y^2$ y abajo por el paraboloides $z = 2x^2 + 2y^2$.

6. **Coordenadas esféricas** Calcule el volumen de la región acotada por la superficie dada en coordenadas esféricas $\rho = 2 \operatorname{sen} \phi$ (vea la siguiente figura).



7. **Agujero en esfera** Se perfora un agujero cilíndrico circular en una esfera sólida, donde el eje del agujero es un diámetro de la esfera. El volumen del sólido restante es

$$V = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} \int_1^{\sqrt{4-z^2}} r \, dr \, dz \, d\theta.$$

- Determine el radio del agujero y el de la esfera.
 - Evalúe la integral.
8. **Esfera y cilindro** Calcule el volumen de material cortado de la esfera sólida $r^2 + z^2 \leq 9$ por el cilindro $r = 3 \operatorname{sen} \theta$.
9. **Dos paraboloides** Calcule el volumen de la región encerrada entre las superficies $z = x^2 + y^2$ y $z = (x^2 + y^2 + 1)/2$.
10. **Cilindro y superficie $z = xy$** Calcule el volumen de la región del primer octante que está entre los cilindros $r = 1$ y $r = 2$ acotado abajo por el plano xy y arriba por la superficie $z = xy$.

Cambio del orden de integración

11. Evalúe la integral

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \, dx.$$

(Sugerencia: Use la relación

$$\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} = \int_a^b e^{-xy} \, dy$$

para formar una integral doble y evalúe la integral cambiando el orden de integración).

12. **a. Coordenadas polares** Demuestre, cambiando a coordenadas polares, que

$$\int_0^{a \operatorname{sen} \beta} \int_{y \cot \beta}^{\sqrt{a^2 - y^2}} \ln(x^2 + y^2) \, dx \, dy = a^2 \beta \left(\ln a - \frac{1}{2} \right),$$

donde $a > 0$ y $0 < \beta < \pi/2$.

- b.** Rescriba la integral cartesiana con el orden de integración invertido.

13. **Reducción de una integral doble a una integral simple** Cambie el orden de integración para demostrar que la siguiente integral doble se reduce a una integral simple

$$\int_0^x \int_0^u e^{m(x-t)} f(t) \, dt \, du = \int_0^x (x-t) e^{m(x-t)} f(t) \, dt.$$

De manera similar, es posible demostrar que

$$\int_0^x \int_0^v \int_0^u e^{m(x-t)} f(t) \, dt \, du \, dv = \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} e^{m(x-t)} f(t) \, dt.$$

14. **Transformación de una integral doble para obtener límites constantes** A veces, una integral múltiple con límites variables se cambia por una con límites constantes. Cambie el orden de integración para demostrar que

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) \left(\int_0^x g(x-y) f(y) \, dy \right) dx \\ &= \int_0^1 f(y) \left(\int_y^1 g(x-y) f(x) \, dx \right) dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 g(|x-y|) f(x) f(y) \, dx \, dy. \end{aligned}$$

Masas y momentos

15. **Minimización del momento polar de inercia** Una delgada placa de densidad constante debe ocupar la región triangular en el primer cuadrante del plano xy con vértices $(0, 0)$, $(a, 0)$ y $(a, 1/a)$. ¿Qué valor de a minimiza el momento polar de inercia de la placa con respecto al origen?

16. **Momento polar de inercia de una placa triangular** Calcule, con respecto al origen, el momento polar de inercia de una delgada placa triangular de densidad constante $\delta = 3$ acotada por el eje y y las rectas $y = 2x$ y $y = 4$ en el plano xy .

17. **Masa y momento polar de inercia de un contrapeso** El contrapeso de un volante de densidad constante 1 tiene la forma del segmento más pequeño cortado en un círculo de radio a por una cuerda a distancia b del centro ($b < a$). Calcule la masa del contrapeso y su momento polar de inercia con respecto al centro del volante.

18. **Centroide de un búmeran** Determine el centroide de la región con forma de búmeran entre las parábolas $y^2 = -4(x-1)$ y $y^2 = -2(x-2)$ en el plano xy .

Teoría y ejemplos

19. Evalúe

$$\int_0^a \int_0^b e^{\max(b^2x^2, a^2y^2)} \, dy \, dx,$$

donde a y b son números positivos y

$$\max(b^2x^2, a^2y^2) = \begin{cases} b^2x^2 & \text{si } b^2x^2 \geq a^2y^2 \\ a^2y^2 & \text{si } b^2x^2 < a^2y^2. \end{cases}$$

20. Demuestre que

$$\iint \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} \, dx \, dy$$

sobre el rectángulo $x_0 \leq x \leq x_1, y_0 \leq y \leq y_1$, es

$$F(x_1, y_1) - F(x_0, y_1) - F(x_1, y_0) + F(x_0, y_0).$$

21. Suponga que $f(x, y)$ se escribe como el producto $f(x, y) = F(x)G(y)$ de una función de x y una función de y . Entonces, la integral de f so-

bre el rectángulo $R: a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$ se evalúa también como un producto, mediante la fórmula

$$\iint_R f(x, y) \, dA = \left(\int_a^b F(x) \, dx \right) \left(\int_c^d G(y) \, dy \right). \quad (1)$$

La demostración consiste en los siguientes cuatro pasos:

$$\iint_R f(x, y) \, dA = \int_c^d \left(\int_a^b F(x)G(y) \, dx \right) dy \quad (i)$$

$$= \int_c^d \left(G(y) \int_a^b F(x) \, dx \right) dy \quad (ii)$$

$$= \int_c^d \left(\int_a^b F(x) \, dx \right) G(y) \, dy \quad (iii)$$

$$= \left(\int_a^b F(x) \, dx \right) \int_c^d G(y) \, dy. \quad (iv)$$

a. Justifique los pasos (i) a (iv).

Cuando sea aplicable, la ecuación (1) ayuda a ahorrar tiempo. Utilícela para evaluar las siguientes integrales.

b. $\int_0^{\ln 2} \int_0^{\pi/2} e^x \cos y \, dy \, dx$ c. $\int_1^2 \int_{-1}^1 \frac{x}{y^2} \, dx \, dy$

22. Sea $D_u f$ la derivada de $f(x, y) = (x^2 + y^2)/2$ en la dirección del vector unitario $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$.

a. **Cálculo de un valor promedio** Calcule el valor promedio de $D_u f$ sobre la región triangular cortada en el primer cuadrante por la recta $x + y = 1$.

b. **Valor promedio y centroide** Demuestre que, en general, el valor promedio de $D_u f$ sobre una región en el plano xy es el valor de $D_u f$ en el centroide de la región.

23. **El valor de $\Gamma(1/2)$** La función gamma,

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} \, dt,$$

amplía la función factorial de los enteros no negativos a otros valores reales. De particular interés en la teoría de ecuaciones diferenciales es el número

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} t^{(1/2)-1} e^{-t} \, dt = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \, dt. \quad (2)$$

a. Si aún no ha resuelto el ejercicio 41 de la sección 15.4, hágalo ahora para demostrar que

$$I = \int_0^{\infty} e^{-y^2} \, dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

b. Sustituya $y = \sqrt{t}$ en la ecuación (2) para demostrar que $\Gamma(1/2) = 2I = \sqrt{\pi}$.

24. **Carga eléctrica total sobre una placa circular** La distribución de carga eléctrica sobre una placa circular de radio R metros es $\sigma(r, \theta) = kr(1 - \text{sen } \theta)$ coulombs/m² (k constante). Integre σ sobre la placa para encontrar la carga total Q .

25. **Un pluviómetro parabólico** Un tazón tiene la forma de la gráfica $z = x^2 + y^2$ desde $z = 0$ hasta $z = 10$ in. Usted quiere calibrar el tazón para que sirva como pluviómetro. ¿Qué altura en el tazón correspondería a una pulgada de lluvia? ¿Y a 3 in?

26. **Agua en una antena satelital** Una antena parabólica de satélite tiene 2 m de ancho y 1/2 m de profundidad. Su eje de simetría está inclinado 30 grados con respecto a la vertical.

a. Escriba, pero no evalúe, una integral triple en coordenadas rectangulares que dé la cantidad de agua que puede contener la antena. (*Sugerencia:* Coloque su sistema de coordenadas de forma que la antena esté en “posición estándar”, y el plano del nivel del agua esté inclinado). (*Cuidado:* Los límites de integración no son “bonitos”).

b. ¿Cuál debe ser la menor inclinación de la antena para que no acumule agua?

27. **Un semicilindro infinito** Sea D el interior del semicilindro circular recto infinito de radio 1, con su única cara suspendida 1 unidad sobre el origen y cuyo eje es el rayo que va de $(0, 0, 1)$ a infinito. Use coordenadas cilíndricas para evaluar

$$\iiint_D z(r^2 + z^2)^{-5/2} \, dV.$$

28. **Hipervolumen** Hemos visto que $\int_a^b 1 \, dx$ es la longitud del intervalo $[a, b]$ sobre la recta numérica (espacio unidimensional), $\iint_R 1 \, dA$ es el área de la región R en el plano xy (espacio bidimensional), y $\iiint_D 1 \, dV$ es el volumen de la región D en el espacio tridimensional (espacio xyz). Podríamos continuar: si Q es una región en el espacio de cuatro dimensiones (espacio $xyzw$), entonces $\iiint\int_Q 1 \, dV$ es el “hipervolumen” de Q . Use su capacidad de generalización y un sistema de coordenadas cartesianas en el espacio cuatridimensional para determinar el hipervolumen dentro de la esfera unitaria tridimensional $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$.

Capítulo 15 Proyectos para aplicación tecnológica

Mathematica/Módulo Maple

Pruebe su suerte: Use la técnica Monte Carlo para la integración numérica en tres dimensiones

Use la técnica Monte Carlo para integrar numéricamente en tres dimensiones.

Medias y momentos; la exploración de nuevas técnicas de graficación, parte II

Use el método de momentos de forma que emplee la simetría geométrica y la integración múltiple.



16

INTEGRACIÓN EN CAMPOS VECTORIALES

INTRODUCCIÓN En este capítulo ampliaremos los conceptos de integración en curvas y superficies en el espacio. La teoría de integrales de línea e integrales de superficie ofrece herramientas matemáticas poderosas para la ciencia y la ingeniería. Definiremos las integrales de línea que se usan para calcular el trabajo realizado por una fuerza al mover un objeto a lo largo de una trayectoria a través del campo y para calcular la masa de una varilla curvada de densidad variable. Definiremos también las integrales de superficie que se usan para calcular la tasa de flujo a la que pasa un fluido a través de una superficie. Presentaremos el teorema fundamental del cálculo integral vectorial y discutiremos sus consecuencias matemáticas y sus aplicaciones físicas. En el análisis final, los teoremas clave se presentan como interpretaciones generalizadas del teorema fundamental del cálculo.

16.1 | Integrales de línea

Para calcular la masa total de una varilla delgada que se encuentra a lo largo de una curva en el espacio o para obtener el trabajo realizado por una fuerza variable que actúa a lo largo de una curva, necesitamos un concepto de integral más general que el definido en el capítulo 5. Ahora requerimos integrar sobre una curva C y no sobre un intervalo $[a, b]$. Estas integrales, que son más generales, se conocen como *integrales de línea* (aunque el nombre de integrales de *trayectoria* sería más descriptivo). Plantearemos nuestras definiciones para curvas espaciales, sin olvidar que las curvas en el plano xy son sólo un caso particular de las anteriores, y que resultan de considerar su coordenada z igual a cero.

Supongamos que $f(x, y, z)$ es una función con valores reales y que queremos integrar a lo largo de la curva C que se encuentra en el dominio de f y está parametrizada por $\mathbf{r}(t) = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j} + k(t)\mathbf{k}$, $a \leq t \leq b$. Los valores de f a lo largo de la curva están dados por la composición $f(g(t), h(t), k(t))$. Integraremos esta composición con respecto a la longitud de arco desde $t = a$ hasta $t = b$. Para empezar, dividimos la curva C en un número finito n de subarcos (figura 16.1). El subarco típico tiene una longitud Δs_k . En cada subarco elegimos un punto (x_k, y_k, z_k) y formamos la suma:

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z_k) \Delta s_k,$$

la cual es similar a una suma de Riemann. Dependiendo de cómo se haga la partición de la curva C y de la selección de (x_k, y_k, z_k) en el k -ésimo subarco, podemos obtener diferentes valores de S_n . Si f es una función continua y las funciones g , h y k tienen primeras derivadas continuas, entonces esta suma tiende a un límite cuando n crece y las longitudes Δs_k tienden a cero. Este límite nos lleva a la siguiente definición, similar a la de la integral simple. En la definición, se supone que la partición satisface el enunciado de que $\Delta s_k \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.

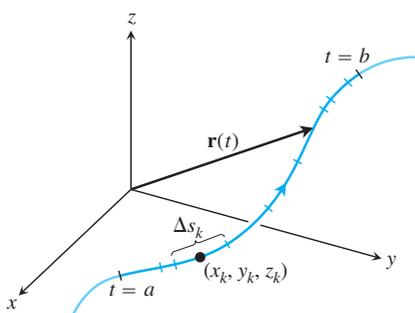


FIGURA 16.1 La curva $\mathbf{r}(t)$ dividida en pequeños arcos desde $t = a$ hasta $t = b$. El subarco típico tiene una longitud de Δs_k .

DEFINICIÓN Si f está definida sobre una curva C dada en forma paramétrica por $\mathbf{r}(t) = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j} + k(t)\mathbf{k}$, $a \leq t \leq b$, entonces la **integral de línea de f sobre C** es

$$\int_C f(x, y, z) ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z_k) \Delta s_k, \quad (1)$$

siempre que este límite exista.

Si la curva C es suave para $a \leq t \leq b$ (entonces $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ es continua y nunca es igual a $\mathbf{0}$) y la función f es continua sobre C , entonces se demuestra que el límite de la ecuación (1) existe. Ahora aplicamos el teorema fundamental del cálculo para derivar la ecuación de la longitud de arco,

$$s(t) = \int_a^t |\mathbf{v}(\tau)| d\tau, \quad \begin{array}{l} \text{Ecuación (3) de la sección 13.3} \\ \text{con } t_0 = a \end{array}$$

para expresar a ds en la ecuación (1) como $ds = |\mathbf{v}(t)| dt$ y evaluar la integral de f sobre C como

$$\frac{ds}{dt} = |\mathbf{v}| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \quad \int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f(g(t), h(t), k(t)) |\mathbf{v}(t)| dt. \quad (2)$$

Observe que la integral del lado derecho de la ecuación (2) es una integral definida simple del tipo que estudiamos en el capítulo 5, donde integramos con respecto al parámetro t . La fórmula evalúa en forma correcta la integral de línea del lado izquierdo, sin importar cuál parametrización se use, siempre que ésta sea suave. Observe que el parámetro t define la dirección a lo largo de la trayectoria. El punto inicial sobre C es la posición $\mathbf{r}(a)$, y el movimiento a lo largo de la trayectoria se da en la dirección de crecimiento de t (véase la figura 16.1).

Cómo evaluar una integral de línea

Para integrar una función continua $f(x, y, z)$ sobre una curva C :

1. Se determina una parametrización suave de C ,

$$\mathbf{r}(t) = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j} + k(t)\mathbf{k}, \quad a \leq t \leq b.$$

2. Se evalúa la integral como

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f(g(t), h(t), k(t)) |\mathbf{v}(t)| dt.$$

Si f es la función constante 1, entonces la integral de f sobre C da la longitud de C desde $t = a$ hasta $t = b$ como en la figura 16.1.

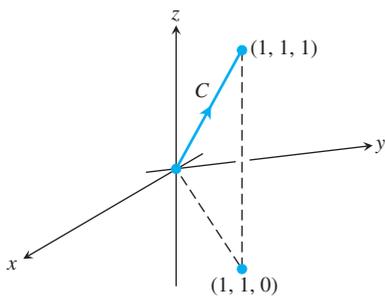


FIGURA 16.2 La trayectoria de integración del ejemplo 1.

EJEMPLO 1 Integre $f(x, y, z) = x - 3y^2 + z$ sobre el segmento de recta C que une el origen con el punto $(1, 1, 1)$ (figura 16.2).

Solución Elegimos la parametrización más sencilla posible:

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Los componentes tienen primeras derivadas continuas y $|\mathbf{v}(t)| = |\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$ nunca se anula, de manera que la parametrización es suave. La integral de f sobre C es

$$\begin{aligned} \int_C f(x, y, z) ds &= \int_0^1 f(t, t, t)(\sqrt{3}) dt && \text{Ecuación (2)} \\ &= \int_0^1 (t - 3t^2 + t)\sqrt{3} dt \\ &= \sqrt{3} \int_0^1 (2t - 3t^2) dt = \sqrt{3} [t^2 - t^3]_0^1 = 0. \end{aligned}$$



Aditividad

Las integrales de línea tienen la útil propiedad de que si la curva C está formada por la unión de un número finito de curvas suaves C_1, C_2, \dots, C_n , (sección 13.1), entonces la integral de la función sobre C es la suma de las integrales sobre las curvas que la conforman:

$$\int_C f \, ds = \int_{C_1} f \, ds + \int_{C_2} f \, ds + \cdots + \int_{C_n} f \, ds. \quad (3)$$

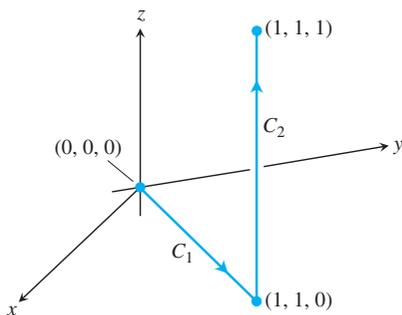


FIGURA 16.3 Trayectoria de integración del ejemplo 2.

EJEMPLO 2 La figura 16.3 muestra otra trayectoria desde el origen hasta el punto $(1, 1, 1)$, la unión de los segmentos de recta C_1 y C_2 . Integre la función $f(x, y, z) = x - 3y^2 + z$ sobre $C_1 \cup C_2$.

Solución Elegimos la parametrización más sencilla para C_1 y C_2 , y verificamos las longitudes de los vectores velocidad en el desarrollo:

$$\begin{aligned} C_1: \quad \mathbf{r}(t) &= t\mathbf{i} + t\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 1; \quad |\mathbf{v}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\ C_2: \quad \mathbf{r}(t) &= \mathbf{i} + \mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 1; \quad |\mathbf{v}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1. \end{aligned}$$

Con estas parametrizaciones tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{C_1 \cup C_2} f(x, y, z) \, ds &= \int_{C_1} f(x, y, z) \, ds + \int_{C_2} f(x, y, z) \, ds && \text{Ecuación (3)} \\ &= \int_0^1 f(t, t, 0)\sqrt{2} \, dt + \int_0^1 f(1, 1, t)(1) \, dt && \text{Ecuación (2)} \\ &= \int_0^1 (t - 3t^2 + 0)\sqrt{2} \, dt + \int_0^1 (1 - 3 + t)(1) \, dt \\ &= \sqrt{2} \left[\frac{t^2}{2} - t^3 \right]_0^1 + \left[\frac{t^2}{2} - 2t \right]_0^1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{2}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Observemos tres cosas acerca de las integraciones de los ejemplos 1 y 2. En primer lugar, al sustituir los componentes de la curva adecuada en la fórmula para f , esta integral se convierte en una integral normal con respecto a t . En segundo lugar, la integral de f sobre $C_1 \cup C_2$ se obtuvo integrando f sobre cada una de las secciones de la trayectoria y sumando estos resultados. Tercero, las integrales de f a lo largo de C y de $C_1 \cup C_2$ tienen valores diferentes.

El valor de una integral de línea a lo largo de la trayectoria entre dos puntos se modifica al cambiar la trayectoria entre ellos.

Analizaremos esta tercera observación en la sección 16.3.

Cálculo de masa y momento

Consideramos los resortes y alambres como masas distribuidas a lo largo de curvas suaves en el espacio. La distribución se describe mediante una función de densidad continua $\delta(x, y, z)$ que representa la masa por unidad de longitud. Cuando una curva C es parametrizada por $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$, $a \leq t \leq b$, entonces x, y y z son funciones del parámetro t , la densidad es la función $\delta(x(t), y(t), z(t))$, y la diferencial de la longitud de arco está dada por

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt.$$

(Véase la sección 13.3). La masa del resorte o del alambre, el centro de masa y los momentos se calculan con las fórmulas de la tabla 16.1, con las integrales en términos del parámetro t sobre el intervalo $[a, b]$. Por ejemplo, la fórmula de la masa se convierte en

$$M = \int_a^b \delta(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt.$$

Estas fórmulas también se aplican a varillas delgadas, y su deducción es similar a la de la sección 6.6. Observe el parecido de las fórmulas con las de las tablas 15.1 y 15.2 para integrales dobles y triples. Las integrales dobles para regiones planas y las integrales triples para sólidos se convierten en integrales de línea para resortes, alambres y varillas delgadas.

TABLA 16.1 Fórmulas de la masa y el momento para resortes, alambres y varillas delgadas a lo largo de una curva suave C en el espacio

Masa: $M = \int_C \delta ds$ $\delta = \delta(x, y, z)$ es la densidad en (x, y, z)

Primeros momentos con respecto a los planos coordenados:

$$M_{yz} = \int_C x \delta ds, \quad M_{xz} = \int_C y \delta ds, \quad M_{xy} = \int_C z \delta ds$$

Coordenadas del centro de masa:

$$\bar{x} = M_{yz}/M, \quad \bar{y} = M_{xz}/M, \quad \bar{z} = M_{xy}/M$$

Momentos de inercia con respecto a los ejes y otras rectas:

$$I_x = \int_C (y^2 + z^2) \delta ds, \quad I_y = \int_C (x^2 + z^2) \delta ds, \quad I_z = \int_C (x^2 + y^2) \delta ds,$$

$$I_L = \int_C r^2 \delta ds \quad r(x, y, z) = \text{distancia desde el punto } (x, y, z) \text{ hasta la recta } L$$

Observe que el elemento de masa dm es igual a δds en lugar de δdV como en la tabla 15.1, y que las integrales se toman sobre la curva C .

EJEMPLO 3 Un arco de metal delgado, más denso en la parte inferior que en la superior, se encuentra a lo largo de la semicircunferencia $y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$, en el plano yz (figura 16.4). Determine el centro de masa del arco, si la densidad en el punto (x, y, z) del arco es $\delta(x, y, z) = 2 - z$.

Solución Sabemos que $\bar{x} = 0$ y $\bar{y} = 0$ porque el arco está en el plano yz con la masa distribuida de manera simétrica alrededor del eje z . Para encontrar \bar{z} , parametrizamos la circunferencia como:

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{j} + (\sin t)\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

Para esta parametrización,

$$|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = \sqrt{(0)^2 + (-\sin t)^2 + (\cos t)^2} = 1,$$

De manera que $ds = |\mathbf{v}| dt = dt$.

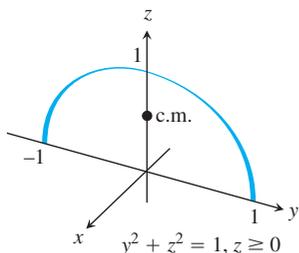


FIGURA 16.4 El ejemplo 3 nos muestra cómo encontrar el centro de masa para un arco circular de densidad variable.

Las fórmulas de la tabla 16.1 implican

$$M = \int_C \delta \, ds = \int_C (2 - z) \, ds = \int_0^\pi (2 - \sin t) \, dt = 2\pi - 2$$

$$M_{xy} = \int_C z\delta \, ds = \int_C z(2 - z) \, ds = \int_0^\pi (\sin t)(2 - \sin t) \, dt$$

$$= \int_0^\pi (2 \sin t - \sin^2 t) \, dt = \frac{8 - \pi}{2}$$

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{8 - \pi}{2} \cdot \frac{1}{2\pi - 2} = \frac{8 - \pi}{4\pi - 4} \approx 0.57.$$

Con \bar{z} redondeado a centésimas, el centro de masa es $(0, 0, 0.57)$

Integrales de línea en el plano

Existe una interpretación geométrica interesante de las integrales de línea en el plano. Si C es una curva suave en el plano xy parametrizada por $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$, $a \leq t \leq b$, se genera una superficie cilíndrica al mover una recta a lo largo de C ortogonal al plano, manteniendo la recta paralela al eje z como en la sección 12.6. Si $z = f(x, y)$ es una función continua no negativa sobre una región en el plano que contiene a la curva C , entonces la gráfica de f es una superficie que se encuentra arriba del plano. El cilindro se corta a través de esta superficie, formando una curva sobre ella que está arriba de la curva C y sigue su curso en zigzag. La parte de la superficie cilíndrica que está debajo de la superficie curva y arriba del plano xy es como una “pared zigzagueante” o “cerca” que está sobre la curva C y es ortogonal al plano. En cualquier punto (x, y) a lo largo de la curva, la altura de la pared es $f(x, y)$. La pared se ilustra en la figura 16.5, donde la “cima” de la pared es la curva que está sobre la superficie $z = f(x, y)$. (No se muestra la superficie formada por la gráfica de f en la figura, sólo la curva sobre ella que es cortada por el cilindro). A partir de la definición

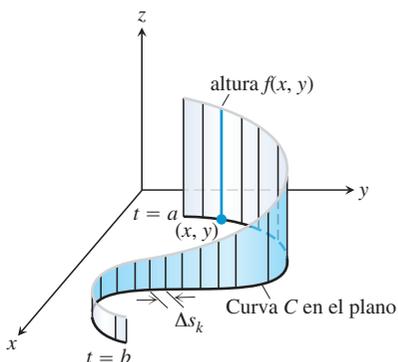


FIGURA 16.5 La integral de línea $\int_C f \, ds$ nos da el área de la porción de la superficie cilíndrica o “pared” debajo de $z = f(x, y) \geq 0$.

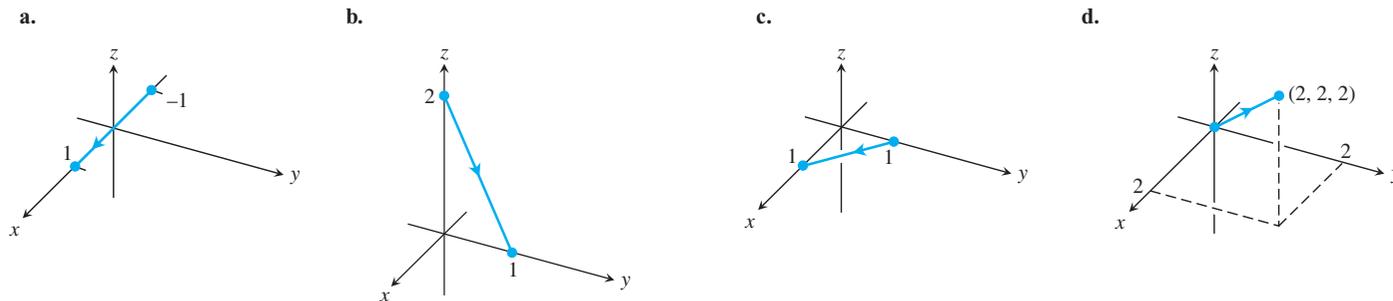
$$\int_C f \, ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta s_k,$$

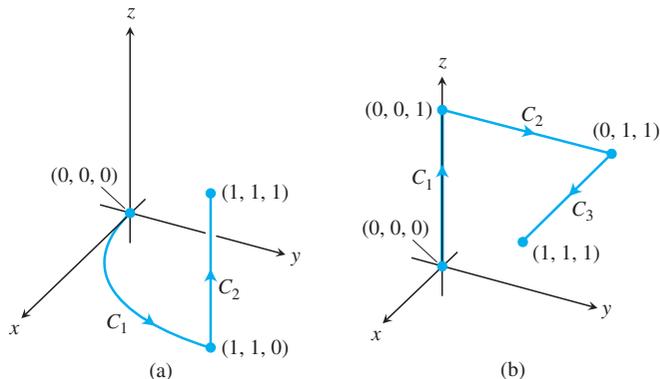
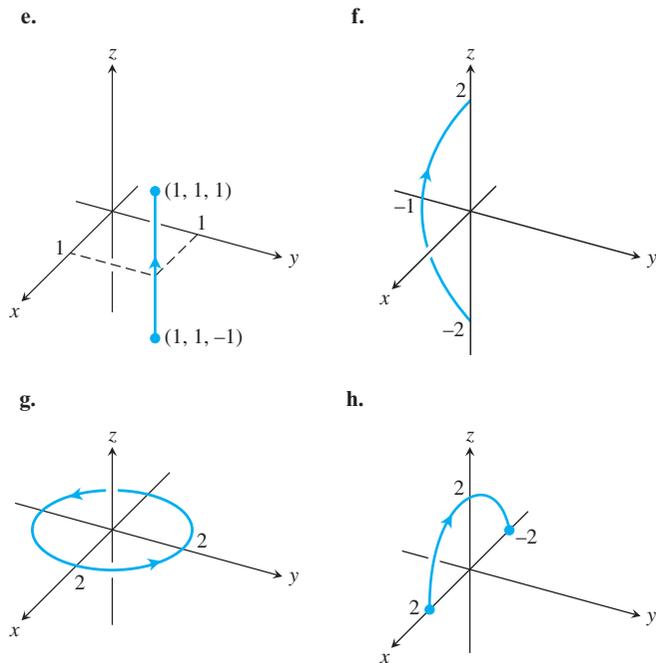
donde $\Delta s_k \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, vemos que la integral de línea $\int_C f \, ds$ es el área de la pared representada en la figura.

Ejercicios 16.1

Gráficas de ecuaciones vectoriales

Relacione las ecuaciones vectoriales de los ejercicios 1 a 8 con las gráficas (a)-(h) que aquí se presentan.





Trayectorias de integración de los ejercicios 15 y 16.

1. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (1 - t)\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 1$
2. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad -1 \leq t \leq 1$
3. $\mathbf{r}(t) = (2 \cos t)\mathbf{i} + (2 \sin t)\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$
4. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i}, \quad -1 \leq t \leq 1$
5. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 2$
6. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{j} + (2 - 2t)\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 1$
7. $\mathbf{r}(t) = (t^2 - 1)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}, \quad -1 \leq t \leq 1$
8. $\mathbf{r}(t) = (2 \cos t)\mathbf{i} + (2 \sin t)\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq \pi$

Evaluación de integrales de línea sobre curvas en el espacio

9. Evalúe $\int_C (x + y) ds$ donde C es el segmento de recta $x = t, y = (1 - t), z = 0$, desde $(0, 1, 0)$ hasta $(1, 0, 0)$.
10. Evalúe $\int_C (x - y + z - 2) ds$ donde C es el segmento de recta $x = t, y = (1 - t), z = 1$, desde $(0, 1, 1)$ hasta $(1, 0, 1)$.
11. Evalúe $\int_C (xy + y + z) ds$ a lo largo de la curva $\mathbf{r}(t) = 2t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + (2 - 2t)\mathbf{k}, 0 \leq t \leq 1$.
12. Evalúe $\int_C \sqrt{x^2 + y^2} ds$ a lo largo de la curva $\mathbf{r}(t) = (4 \cos t)\mathbf{i} + (4 \sin t)\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}, -2\pi \leq t \leq 2\pi$.
13. Encuentre la integral de $f(x, y, z) = x + y + z$ sobre el segmento de recta que va desde $(1, 2, 3)$ hasta $(0, -1, 1)$.
14. Encuentre la integral de línea de $f(x, y, z) = \sqrt{3}/(x^2 + y^2 + z^2)$ sobre la curva $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t\mathbf{k}, 1 \leq t \leq \infty$.
15. Integre $f(x, y, z) = x + \sqrt{y} - z^2$ sobre la trayectoria que va desde $(0, 0, 0)$ hasta $(1, 1, 1)$ (véase la figura anexa) dada por

$$C_1: \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$C_2: \mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

16. Integre $f(x, y, z) = x + \sqrt{y} - z^2$ sobre la trayectoria que va desde $(0, 0, 0)$ hasta $(1, 1, 1)$ (véase la figura anexa) y está dada por

$$C_1: \mathbf{r}(t) = t\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$C_2: \mathbf{r}(t) = t\mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$C_3: \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

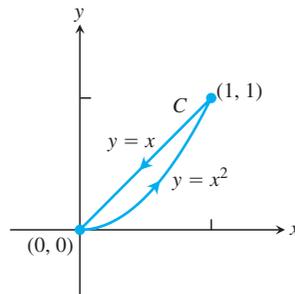
17. Integre $f(x, y, z) = (x + y + z)/(x^2 + y^2 + z^2)$ sobre la trayectoria $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t\mathbf{k}, 0 < a \leq t \leq b$.

18. Integre $f(x, y, z) = -\sqrt{x^2 + z^2}$ sobre la circunferencia

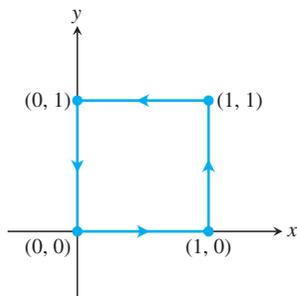
$$\mathbf{r}(t) = (a \cos t)\mathbf{j} + (a \sin t)\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Integrales de línea sobre curvas planas

19. Evalúe $\int_C x ds$, donde C es
 - a. el segmento de recta $x = t, y = t/2$, desde $(0, 0)$ hasta $(4, 2)$.
 - b. la curva parabólica $x = t, y = t^2$, desde $(0, 0)$ hasta $(2, 4)$.
20. Evalúe $\int_C \sqrt{x + 2y} ds$, donde C es
 - a. el segmento de recta $x = t, y = 4t$, desde $(0, 0)$ hasta $(1, 4)$.
 - b. $C_1 \cup C_2$; C_1 es el segmento de recta desde $(0, 0)$ hasta $(1, 0)$, y C_2 es el segmento de recta desde $(1, 0)$ hasta $(1, 2)$.
21. Encuentre la integral de línea de $f(x, y) = ye^{x^2}$ a lo largo de la curva $\mathbf{r}(t) = 4t\mathbf{i} - 3t\mathbf{j}, -1 \leq t \leq 2$.
22. Obtenga la integral de línea de $f(x, y) = x - y + 3$ a lo largo de la curva $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j}, 0 \leq t \leq 2\pi$.
23. Evalúe $\int_C \frac{x^2}{y^{4/3}} ds$, donde C es la curva $x = t^2, y = t^3$, para $1 \leq t \leq 2$.
24. Obtenga la integral de línea de $f(x, y) = \sqrt{y}/x$ a lo largo de la curva $\mathbf{r}(t) = t^3\mathbf{i} + t^4\mathbf{j}, 1/2 \leq t \leq 1$.
25. Evalúe $\int_C (x + \sqrt{y}) ds$ donde C está dada en la figura anexa.



26. Evalúe $\int_C \frac{1}{x^2 + y^2 + 1} ds$ donde C está dada en la figura anexa.



En los ejercicios 27 a 30, integre f sobre la curva dada.

27. $f(x, y) = x^3/y$, $C: y = x^2/2$, $0 \leq x \leq 2$
 28. $f(x, y) = (x + y^2)/\sqrt{1 + x^2}$, $C: y = x^2/2$ desde $(1, 1/2)$ hasta $(0, 0)$
 29. $f(x, y) = x + y$, $C: x^2 + y^2 = 4$ en el primer cuadrante, desde $(2, 0)$ hasta $(0, 2)$
 30. $f(x, y) = x^2 - y$, $C: x^2 + y^2 = 4$ en el primer cuadrante, desde $(0, 2)$ hasta $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$
 31. Determine el área de uno de los lados de la “pared zigzagueante” que es ortogonal a la curva $y = x^2$, $0 \leq x \leq 2$ y está debajo de la curva y sobre la superficie $f(x, y) = x + \sqrt{y}$.
 32. Determine el área de uno de los lados de la “pared” que es ortogonal a la curva $2x + 3y = 6$, $0 \leq x \leq 6$ y está debajo de la curva y sobre la superficie $f(x, y) = 4 + 3x + 2y$.

Masas y momentos

33. **Masa de un alambre** Encuentre la masa de un alambre colocado a lo largo de una curva $\mathbf{r}(t) = (t^2 - 1)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 1$, si la densidad es $\delta = (3/2)t$.
 34. **Centro de masa de un alambre curvo** Un alambre de densidad $\delta(x, y, z) = 15\sqrt{y + 2}$ está colocado a lo largo de la curva $\mathbf{r}(t) = (t^2 - 1)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$, $-1 \leq t \leq 1$. Encuentre su centro de masa. Trace la curva y su centro de masa juntos.
 35. **Masa de un alambre con densidad variable** Encuentre la masa de un alambre delgado, colocado a lo largo de la curva $\mathbf{r}(t) = \sqrt{2}t\mathbf{i} + \sqrt{2}t\mathbf{j} + (4 - t^2)\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 1$, si la densidad es (a) $\delta = 3t$ y (b) $\delta = 1$.
 36. **Centro de masa de un alambre delgado con densidad variable** Encuentre el centro de masa de un alambre delgado colocado a lo largo de la curva $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + (2/3)t^{3/2}\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 2$, si la densidad es $\delta = 3\sqrt{5 + t}$.
 37. **Momento de inercia de un lazo de alambre** Un lazo circular de alambre, con densidad constante δ , se encuentra a lo largo de la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$, en el plano xy . Encuentre el momento de inercia con respecto al eje z .
 38. **Inercia de una varilla delgada** Una varilla delgada con densidad constante está colocada a lo largo del segmento de recta $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{j} +$

$(2 - 2t)\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 1$, en el plano yz . Encuentre el momento de inercia de la varilla con respecto a los tres ejes coordenados.

39. **Dos resortes con densidad constante** Un resorte de densidad constante δ se encuentra a lo largo de la hélice

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

- a. Encuentre I_z .
 b. Suponga que ahora tiene otro resorte de densidad constante δ , con el doble de la longitud del resorte en el inciso (a) y que está a lo largo de la hélice para $0 \leq t \leq 4\pi$. ¿Esperaría que el valor de I_z para el resorte más largo fuera igual que su análogo del resorte más pequeño? ¿O que fuera distinto? Verifique sus especulaciones calculando I_z para el resorte más grande.
 40. **Alambre de densidad constante** Un alambre con densidad constante $\delta = 1$ está a lo largo de la curva

$$\mathbf{r}(t) = (t \cos t)\mathbf{i} + (t \sin t)\mathbf{j} + (2\sqrt{2}/3)t^{3/2}\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

determine \bar{x} e I_z .

41. **El arco del ejemplo 3** Determine I_z para el arco del ejemplo 3.
 42. **Centro de masa y momentos de inercia para un alambre con densidad variable** Encuentre el centro de masa y los momentos de inercia con respecto a los ejes coordenados de un alambre delgado que está a lo largo de la curva

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \frac{2\sqrt{2}}{3}t^{3/2}\mathbf{j} + \frac{t^2}{2}\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 2,$$

si la densidad es $\delta = 1/(t + 1)$.

EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

En los ejercicios 43 a 46, utilice un SAC para realizar los siguientes pasos y evaluar las integrales de línea.

- a. Encuentre $ds = |\mathbf{v}(t)| dt$ para la trayectoria $\mathbf{r}(t) = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j} + k(t)\mathbf{k}$.
 b. Exprese el integrando $f(g(t), h(t), k(t))|\mathbf{v}(t)|$ como función del parámetro t .
 c. Evalúe $\int_C f ds$ usando la ecuación (2) del texto.
 43. $f(x, y, z) = \sqrt{1 + 30x^2 + 10y}$; $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 2$
 44. $f(x, y, z) = \sqrt{1 + x^3 + 5y^3}$; $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \frac{1}{3}t^2\mathbf{j} + \sqrt{t}\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 2$
 45. $f(x, y, z) = x\sqrt{y} - 3z^2$; $\mathbf{r}(t) = (\cos 2t)\mathbf{i} + (\sin 2t)\mathbf{j} + 5t\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 2\pi$
 46. $f(x, y, z) = \left(1 + \frac{9}{4}z^{1/3}\right)^{1/4}$; $\mathbf{r}(t) = (\cos 2t)\mathbf{i} + (\sin 2t)\mathbf{j} + t^{5/2}\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 2\pi$

16.2

Campos vectoriales e integrales de línea: Trabajo, circulación y flujo

Las fuerzas gravitacionales y eléctricas tienen magnitud y dirección. Se representan por un vector en cada punto de su dominio, generando así un *campo vectorial*. En esta sección mostraremos cómo calcular el trabajo realizado al mover un objeto a través del campo mediante una integral de línea implicada con el campo vectorial. También estudiaremos los campos de velocidad, como el campo vectorial que representa la velocidad de un fluido que fluye a través de su dominio. Se

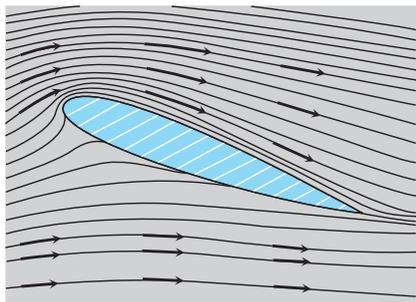


FIGURA 16.6 Vectores velocidad de un flujo alrededor de una superficie de sustentación en un túnel de viento.

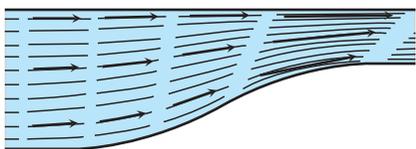


FIGURA 16.7 Líneas de flujo dentro de un canal que se contrae. La rapidez del agua aumenta cuando el canal se hace angosto y los vectores velocidad aumentan su longitud.

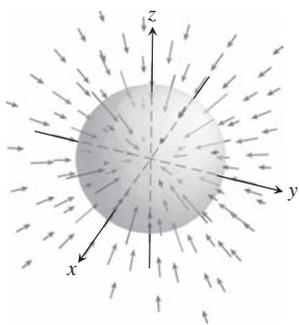


FIGURA 16.8 Los vectores en un campo gravitacional apuntan hacia el centro de masa que es fuente del campo.

usa una integral de línea para calcular la tasa a la cual el fluido fluye tanto a lo largo como a través de una trayectoria curva dentro del dominio.

Campos vectoriales

Suponga que una región en el plano o en el espacio está ocupada por un fluido en movimiento, como aire o agua. El fluido está formado por un número muy grande de partículas y , en cualquier instante, una partícula tiene una velocidad \mathbf{v} . En diferentes puntos de la región en un instante dado, estas velocidades varían. Pensamos que el vector velocidad está pegado a cada uno de los puntos del fluido y que representa la velocidad de una partícula en ese punto. Un fluido tal es un ejemplo de un *campo vectorial*. La figura 16.6 muestra un campo vectorial de velocidad, obtenido del aire que fluye alrededor de una superficie de sustentación dentro de un túnel de viento. La figura 16.7 muestra otro campo vectorial de vectores velocidad a lo largo de líneas de flujo del agua que se mueve en un canal. Además de los campos vectoriales asociados a flujos de fluidos, existen campos de fuerza asociados a la atracción de la gravedad (figura 16.8), campos magnéticos, campos eléctricos y hasta campos puramente matemáticos.

En general, un **campo vectorial** es una función que asigna un vector a cada punto en su dominio. Un campo de vectores tridimensionales en el espacio tendrá una fórmula como

$$\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + P(x, y, z)\mathbf{k}.$$

El campo es **continuo** si las **funciones componentes** M , n y P son continuas, es derivable si cada una de las funciones componentes son **derivables**. Un campo de vectores bidimensionales tiene una fórmula como

$$\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}.$$

Encontramos otro tipo de campo vectorial en el capítulo 13. Los vectores tangentes \mathbf{T} y los vectores normales \mathbf{N} de una curva en el espacio son campos vectoriales a lo largo de la curva. A lo largo de una curva $\mathbf{r}(t)$ tienen una fórmula componente similar a la expresión del campo de velocidad

$$\mathbf{v}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}.$$

Si unimos el vector gradiente ∇f de una función escalar $f(x, y, z)$ en cada punto de una superficie de nivel de la función, tendremos un campo tridimensional sobre la superficie. Y si asociamos el vector velocidad en cada punto del flujo de un fluido, tendremos un campo tridimensional definido en una región del espacio. Éstos y otros campos se ilustran en las figuras 16.9 a 16.15. Para dibujar estos campos, hacemos una selección representativa de puntos del dominio y trazamos los vectores asociados a ellos. Las flechas que representan a los vectores

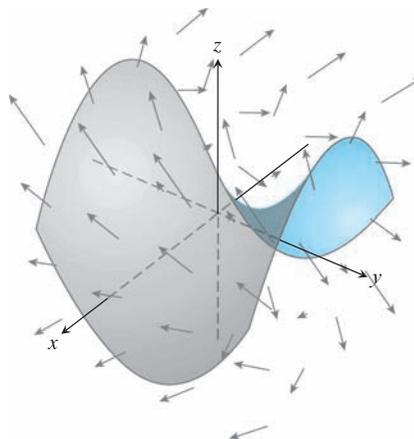


FIGURA 16.9 Una superficie, como una red o un paracaídas, en un campo vectorial que representa los vectores velocidad del flujo de agua o aire. Las flechas muestran la dirección y sus longitudes indican la rapidez.

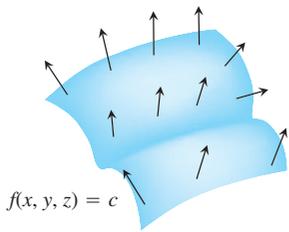


FIGURA 16.10 El campo de vectores gradientes ∇f sobre una superficie $f(x, y, z) = c$.

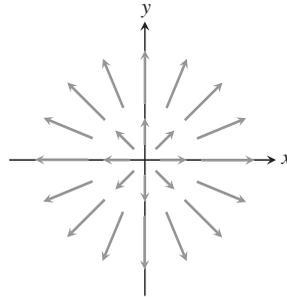


FIGURA 16.11 El campo radial $F = xi + yj$ de vectores posición en puntos en el plano. Observe la convención de que una flecha se dibuja con su base, no su punta, en el punto donde se evalúa F .

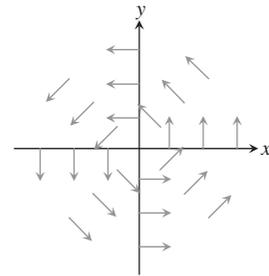


FIGURA 16.12 El campo circular o de “giro” con vectores unitarios $F = (-yi + xj)/(x^2 + y^2)^{1/2}$ en el plano. El campo no está definido en el origen.

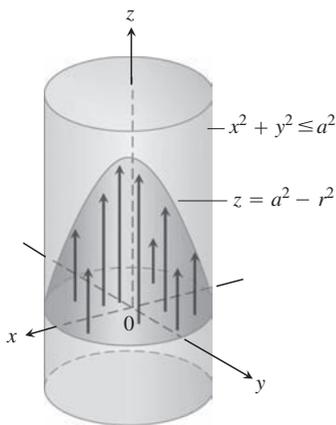


FIGURA 16.13 El flujo de un fluido en un tubo cilíndrico largo. Los vectores $v = (a^2 - r^2)k$ dentro del cilindro que tiene sus bases en el plano xy y sus puntas en el paraboloid $z = a^2 - r^2$.

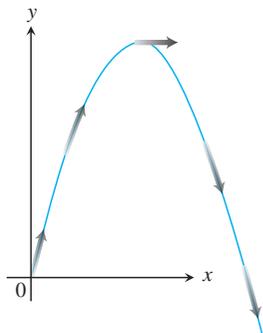


FIGURA 16.14 Los vectores velocidad $v(t)$ del movimiento de un proyectil definen un campo vectorial a lo largo de la trayectoria.

se trazan con su punto base, no con sus puntas, exactamente donde las funciones vectoriales se evalúan.

Campos gradiente

El vector gradiente de una función escalar diferenciable en un punto da la dirección de mayor crecimiento de la función. Un tipo importante de campo vectorial es el formado por todos los



VELOCIDAD DEL VIENTO, M/S
0 2 4 6 8 10 12 14 16+

FIGURA 16.15 El satélite *Seasat* de la NASA usa un radar para tomar 350,000 medidas del viento sobre los océanos del mundo. Las flechas indican la dirección del viento; su longitud y tono indican la rapidez. Observe la gran tormenta en el sur de Groenlandia.

vectores gradiente de la función (véase la sección 14.5). Definimos el **campo gradiente** de una función derivable $f(x, y, z)$ como el campo de vectores gradiente

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}.$$

En cada punto (x, y, z) , el campo gradiente proporciona un vector que apunta en la dirección del mayor crecimiento de f , de magnitud igual al valor de la derivada direccional en esa dirección. El campo gradiente no siempre es un campo de fuerza o un campo de velocidad.

EJEMPLO 1 Suponga que la temperatura t en cada punto (x, y, z) en una región del espacio está dada por

$$T = 100 - x^2 - y^2 - z^2,$$

y que $\mathbf{F}(x, y, z)$ está definido como el gradiente de T . Obtenga el campo vectorial \mathbf{F} .

Solución El campo gradiente \mathbf{F} es el campo $\mathbf{F} = \nabla T = -2x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} - 2z\mathbf{k}$. En cada punto del espacio, el campo vectorial \mathbf{F} da la dirección en la cual el incremento de temperatura es el mayor. ■

Integrales de línea de campos vectoriales

En la sección 16.1 definimos la integral de línea de una función escalar $f(x, y, z)$ sobre una trayectoria C . Ahora pondremos atención a la idea de una integral de línea de un campo vectorial \mathbf{F} a lo largo de la curva C .

Suponga que el campo vectorial $\mathbf{F} = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + P(x, y, z)\mathbf{k}$ tiene componentes continuos, y que la curva C tiene una parametrización suave $\mathbf{r}(t) = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j} + k(t)\mathbf{k}$, $a \leq t \leq b$. Como vimos en la sección 16.1, la parametrización $\mathbf{r}(t)$ define una dirección (u orientación) a lo largo de C , a la cual llamamos **dirección hacia delante**. En cada punto a lo largo de la trayectoria de C , el vector tangente $\mathbf{T} = d\mathbf{r}/ds = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ es un vector unitario tangente a la trayectoria y apunta hacia delante. (El vector $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ es el vector velocidad tangente a C en ese punto, como vimos en las secciones 13.1 y 13.3). Intuimos que la integral de línea del campo vectorial es la integral de línea del componente escalar tangencial de \mathbf{F} a lo largo de C . Este componente tangencial está dado por el producto punto

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds},$$

de manera que llegamos a la siguiente definición formal, donde $f = \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$ en la ecuación (1) de la sección 16.1.

DEFINICIÓN Sea \mathbf{F} un campo vectorial con componentes continuos definidos a lo largo de la curva suave C parametrizada por $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$. Entonces, la **integral de línea de \mathbf{F} a lo largo de C** es

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds = \int_C \left(\mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) ds = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Las integrales de línea de campos vectoriales se evalúan de manera similar a la forma como evaluamos integrales de línea de funciones escalares (sección 16.1).

Para evaluar la integral de línea $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ a lo largo de $C: \mathbf{r}(t) = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j} + k(t)\mathbf{k}$, siga estos pasos:

1. Exprese el campo vectorial \mathbf{F} en términos de la curva parametrizada C como $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ sustituyendo los componentes $x = g(t)$, $y = h(t)$, $z = k(t)$ de \mathbf{r} en los componentes escalares $M(x, y, z)$, $N(x, y, z)$, $P(x, y, z)$ de \mathbf{F} .
2. Calcule la derivada del vector (velocidad) $d\mathbf{r}/dt$.
3. Evalúe la integral de línea con respecto al parámetro t , $a \leq t \leq b$, para obtener

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt.$$

EJEMPLO 2 Evalúe $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, donde $\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{i} + xy\mathbf{j} - y^2\mathbf{k}$ a lo largo de la curva C dada por $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j} + \sqrt{t}\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 1$.

Solución Tenemos que

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \sqrt{t}\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} - t^2\mathbf{k}$$

y

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = 2t\mathbf{i} + \mathbf{j} + \frac{1}{2\sqrt{t}}\mathbf{k}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt \\ &= \int_0^1 \left(2t^{3/2} + t^3 - \frac{1}{2}t^{3/2} \right) dt \\ &= \left[\left(\frac{3}{2} \right) \left(\frac{2}{5}t^{5/2} \right) + \frac{1}{4}t^4 \right]_0^1 = \frac{17}{20}. \end{aligned}$$

Integrales de línea con respecto a los ejes coordenados xyz

Algunas veces resulta útil escribir la integral de línea de una función escalar con respecto a una de las coordenadas, como $\int_C M dx$. Esta integral no es lo mismo que la integral de línea de la longitud de arco $\int_C M ds$ definida en la sección 16.1. Para definir la nueva integral de la función escalar $M(x, y, z)$, especificamos un campo vectorial $\mathbf{F} = M(x, y, z)\mathbf{i}$ sobre la curva C parametrizada por $\mathbf{r}(t) = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j} + k(t)\mathbf{k}$, $a \leq t \leq b$. Con esta notación tenemos que $x = g(t)$ y $dx = g'(t) dt$. De esta forma,

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = M(x, y, z)g'(t) dt = M(x, y, z) dx.$$

Así, se *define* la integral de línea de M sobre C con respecto a la coordenada x como

$$\int_C M(x, y, z) dx = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \quad \text{donde } \mathbf{F} = M(x, y, z)\mathbf{i}.$$

Del mismo modo, definiendo $\mathbf{F} = N(x, y, z)\mathbf{j}$ o $\mathbf{F} = P(x, y, z)\mathbf{k}$, obtenemos las integrales $\int_C N dy$ y $\int_C P dz$. Al expresar todo en términos del parámetro t , tenemos las siguientes fórmulas de estas integrales:

$$\int_C M(x, y, z) dx = \int_a^b M(g(t), h(t), k(t)) g'(t) dt \quad (1)$$

$$\int_C N(x, y, z) dy = \int_a^b N(g(t), h(t), k(t)) h'(t) dt \quad (2)$$

$$\int_C P(x, y, z) dz = \int_a^b P(g(t), h(t), k(t)) k'(t) dt \quad (3)$$

A menudo sucede que estas integrales de línea se usan en combinación, así que abreviamos la notación escribiendo

$$\int_C M(x, y, z) dx + \int_C N(x, y, z) dy + \int_C P(x, y, z) dz = \int_C M dx + N dy + P dz.$$

EJEMPLO 3 Evalúe la integral de línea $\int_C -y dx + z dy + 2x dz$, donde C es la hélice $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Solución Expresamos todo en términos del parámetro t , de manera que $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$ y $dx = -\sin t dt$, $dy = \cos t dt$, $dz = dt$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \int_C -y dx + z dy + 2x dz &= \int_0^{2\pi} [(-\sin t)(-\sin t) + t \cos t + 2 \cos t] dt \\ &= \int_0^{2\pi} [2 \cos t + t \cos t + \sin^2 t] dt \\ &= \left[2 \sin t + (t \sin t + \cos t) + \left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} \right) \right]_0^{2\pi} \\ &= [0 + (0 + 1) + (\pi - 0)] - [0 + (0 + 1) + (0 - 0)] \\ &= \pi. \end{aligned}$$

Trabajo realizado por una fuerza sobre una curva en el espacio

Suponga que el campo vectorial $\mathbf{F} = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + P(x, y, z)\mathbf{k}$ representa una fuerza a través de una región en el espacio (puede ser la fuerza de gravedad o una fuerza electromagnética), y también que

$$\mathbf{r}(t) = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j} + k(t)\mathbf{k}, \quad a \leq t \leq b,$$

es una curva suave en la misma región. Para obtener la fórmula del trabajo realizado por la fuerza al mover un objeto a lo largo de la curva se aplica el mismo razonamiento que usamos en el capítulo 6 para deducir la fórmula $W = \int_a^b F(x) dx$ para el trabajo realizado por una fuerza continua de magnitud $F(x)$ dirigida a lo largo de un intervalo sobre el eje x . Para una curva C en el espacio, definimos el trabajo realizado por un campo de fuerza continuo \mathbf{F} para mover un objeto a lo largo de C de un punto A a un punto B de la siguiente manera.

Dividimos la curva C en pequeños subarcos $P_{k-1}P_k$ con longitudes Δs_k , iniciando en A y terminando en B . Elegimos cualquier punto (x_k, y_k, z_k) en el subarco $P_{k-1}P_k$ y hacemos que $\mathbf{T}(x_k, y_k, z_k)$ sea el vector tangente unitario en el punto seleccionado. El trabajo W_k realizado para mover el objeto a lo largo del subarco $P_{k-1}P_k$ es aproximado por el componente tangencial de la fuerza $\mathbf{F}(x_k, y_k, z_k)$ multiplicada por la longitud de arco Δs_k aproximada a la distancia al mover el objeto a lo largo del subarco (figura 16.16). El trabajo total realizado al mover el

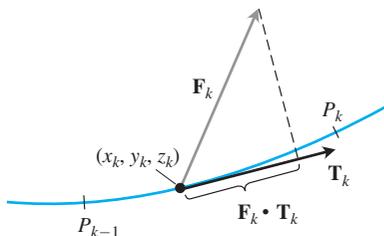


FIGURA 16.16 El trabajo realizado a lo largo del subarco que se muestra aquí es aproximadamente $\mathbf{F}_k \cdot \mathbf{T}_k \Delta s_k$, donde $\mathbf{F}_k = \mathbf{F}(x_k, y_k, z_k)$ y $\mathbf{T}_k = \mathbf{T}(x_k, y_k, z_k)$.

objeto desde el punto A hasta el punto B es aproximado por la suma del trabajo realizado a lo largo de cada uno de los subarcos, de manera que

$$W \approx \sum_{k=1}^n W_k \approx \sum_{k=1}^n \mathbf{F}(x_k, y_k, z_k) \cdot \mathbf{T}(x_k, y_k, z_k) \Delta s_k.$$

Para cualquier subdivisión de C en n subarcos y para cualquier elección de los puntos (x_k, y_k, z_k) dentro de cada subarco, cuando $n \rightarrow \infty$ y $\Delta s_k \rightarrow 0$, estas sumas se aproximan a la integral de línea

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds.$$

Ésta es exactamente la integral de línea de \mathbf{F} a lo largo de C , la cual se define como el trabajo total realizado.

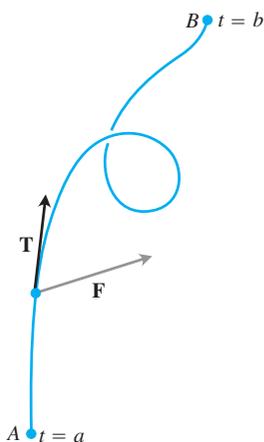


FIGURA 16.17 El trabajo realizado por una fuerza \mathbf{F} es la integral de línea del componente escalar $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$ sobre la curva suave desde A hasta B .

DEFINICIÓN Sea C una curva suave parametrizada por $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$, y \mathbf{F} un campo de fuerza continuo sobre una región que contiene a C . De esta forma, el **trabajo** realizado al mover un objeto desde el punto $A = \mathbf{r}(a)$ al punto $B = \mathbf{r}(b)$ a lo largo de C es

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \, dt. \tag{4}$$

El signo del número calculado mediante esta integral depende de la dirección en que se recorra la curva. Si invertimos la dirección del movimiento, también invertimos la dirección de \mathbf{T} en la figura 16.17 y cambiamos el signo de $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$ y, por lo tanto, de su integral.

Al usar las notaciones aquí presentadas, expresamos la integral de trabajo de diferentes maneras, de acuerdo con lo que más nos convenga en cada caso. La tabla 16.2 indica cinco formas de escribir la integral de trabajo de la ecuación (4).

TABLA 16.2 Distintas maneras de escribir la integral de trabajo para $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ sobre la curva $C: \mathbf{r}(t) = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j} + k(t)\mathbf{k}$, $a \leq t \leq b$.

| | |
|--|----------------------------------|
| $W = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds$ | La definición |
| $= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ | Forma diferencial vectorial |
| $= \int_a^b \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \, dt$ | Evaluación vectorial paramétrica |
| $= \int_a^b \left(M \frac{dx}{dt} + N \frac{dy}{dt} + P \frac{dz}{dt} \right) dt$ | Evaluación escalar paramétrica |
| $= \int_C M \, dx + N \, dy + P \, dz$ | Forma diferencial escalar |

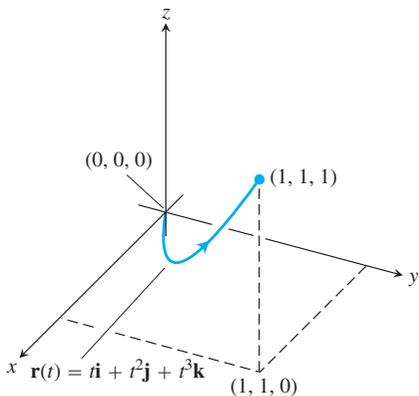


FIGURA 16.18 La curva del ejemplo 4.

EJEMPLO 4 Calcule el trabajo realizado por el campo de fuerza $\mathbf{F} = (y - x^2)\mathbf{i} + (z - y^2)\mathbf{j} + (x - z^2)\mathbf{k}$ a lo largo de la curva $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 1$, desde $(0, 0, 0)$ hasta $(1, 1, 1)$ (figura 16.18).

Solución En primer lugar, evaluamos \mathbf{F} sobre la curva $\mathbf{r}(t)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= (y - x^2)\mathbf{i} + (z - y^2)\mathbf{j} + (x - z^2)\mathbf{k} \\ &= \underbrace{(t^2 - t^2)}_0 \mathbf{i} + (t^3 - t^4)\mathbf{j} + (t - t^6)\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Al sustituir $x = t$,
 $y = t^2, z = t^3$.

Luego calculamos $d\mathbf{r}/dt$,

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}) = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}.$$

Al final, calculamos $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}/dt$ e integramos desde $t = 0$ hasta $t = 1$:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= [(t^3 - t^4)\mathbf{j} + (t - t^6)\mathbf{k}] \cdot (\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}) \\ &= (t^3 - t^4)(2t) + (t - t^6)(3t^2) = 2t^4 - 2t^5 + 3t^3 - 3t^8 \end{aligned}$$

de manera que,

$$\begin{aligned} \text{Trabajo} &= \int_0^1 (2t^4 - 2t^5 + 3t^3 - 3t^8) dt \\ &= \left[\frac{2}{5}t^5 - \frac{2}{6}t^6 + \frac{3}{4}t^4 - \frac{3}{9}t^9 \right]_0^1 = \frac{29}{60}. \end{aligned}$$

EJEMPLO 5 Calcule el trabajo realizado por el campo de fuerza $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ al mover un objeto a lo largo de la curva C parametrizada por $\mathbf{r}(t) = \cos(\pi t)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \sin(\pi t)\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 1$.

Solución Empezamos por escribir \mathbf{F} a lo largo de C como una función de t ,

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \cos(\pi t)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \sin(\pi t)\mathbf{k}.$$

A continuación calculamos $d\mathbf{r}/dt$,

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\pi \sin(\pi t)\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + \pi \cos(\pi t)\mathbf{k}.$$

Luego calculamos el producto punto,

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\pi \sin(\pi t) \cos(\pi t) + 2t^3 + \pi \sin(\pi t) \cos(\pi t) = 2t^3.$$

El trabajo realizado es la integral de línea

$$\int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = \int_0^1 2t^3 dt = \left[\frac{t^4}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Integrales de flujo y de circulación de campos de velocidad

Suponga que \mathbf{F} representa el campo de velocidad de un fluido que fluye a través de una región en el espacio (un dique de marea o la cámara de una turbina en un generador hidroeléctrico, por ejemplo). En estas circunstancias, la integral de $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$ a lo largo de una curva en la región nos da el flujo del fluido a lo largo de la curva.

DEFINICIONES Si $\mathbf{r}(t)$ parametriza una curva suave C en el dominio de un campo continuo de velocidad \mathbf{F} , el **flujo** a lo largo de la curva desde $A = \mathbf{r}(a)$ hasta $B = \mathbf{r}(b)$ es

$$\text{Flujo} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds. \tag{5}$$

En este caso, la integral se llama **integral de flujo**. Si la curva empieza y termina en el mismo punto, de forma que $A = B$, entonces el flujo es la **circulación** alrededor de la curva.

La dirección en que se recorre C es importante. Si la invertimos, entonces \mathbf{T} se sustituye por $-\mathbf{T}$ y el signo de la integral cambia. Calculamos las integrales de flujo de la misma manera que las integrales de trabajo.

EJEMPLO 6 El campo de velocidad de un fluido es $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + z\mathbf{j} + y\mathbf{k}$. Encuentre el flujo a lo largo de la hélice $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq \pi/2$.

Solución Evaluamos \mathbf{F} sobre la curva

$$\mathbf{F} = x\mathbf{i} + z\mathbf{j} + y\mathbf{k} = (\cos t)\mathbf{i} + t\mathbf{j} + (\sin t)\mathbf{k} \quad \text{Sustituir } x = \cos t, z = t, y = \sin t.$$

y después encontramos $d\mathbf{r}/dt$:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = (-\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Después integramos $\mathbf{F} \cdot (d\mathbf{r}/dt)$ desde $t = 0$ hasta $t = \frac{\pi}{2}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= (\cos t)(-\sin t) + (t)(\cos t) + (\sin t)(1) \\ &= -\sin t \cos t + t \cos t + \sin t \end{aligned}$$

de manera que

$$\begin{aligned} \text{Flujo} &= \int_{t=a}^{t=b} \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = \int_0^{\pi/2} (-\sin t \cos t + t \cos t + \sin t) dt \\ &= \left[\frac{\cos^2 t}{2} + t \sin t \right]_0^{\pi/2} = \left(0 + \frac{\pi}{2} \right) - \left(\frac{1}{2} + 0 \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

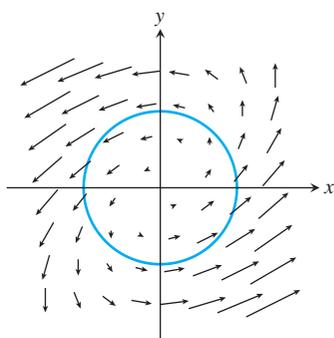


FIGURA 16.19 El campo vectorial \mathbf{F} y la curva $\mathbf{r}(t)$ del ejemplo 7.

EJEMPLO 7 Determine la circulación del campo $\mathbf{F} = (x - y)\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ a lo largo de la circunferencia $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ (figura 16.19).

Solución En la circunferencia, $\mathbf{F} = (x - y)\mathbf{i} + x\mathbf{j} = (\cos t - \sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j}$, y

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = (-\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j}.$$

Entonces

$$\mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\sin t \cos t + \underbrace{\cos^2 t}_1$$

da como resultado

$$\begin{aligned} \text{Circulación} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = \int_0^{2\pi} (1 - \sin t \cos t) dt \\ &= \left[t - \frac{\sin^2 t}{2} \right]_0^{2\pi} = 2\pi. \end{aligned}$$

Como sugiere la figura 16.19, un fluido con este campo de velocidad circula en *sentido contrario al de las manecillas del reloj*, alrededor de la circunferencia. ■

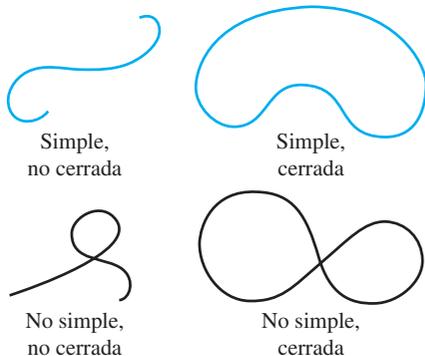


FIGURA 16.20 Distintas curvas simples o cerradas. Las curvas cerradas también se conocen como lazos.

Flujo a través de una curva plana

Una curva en el plano xy es **simple** si no se cruza a sí misma (figura 16.20). Cuando una curva inicia y termina en el mismo punto, es una **curva cerrada** o un **lazo**. Para encontrar la tasa a la que un fluido entra o sale de una región encerrada por una curva cerrada suave C en el plano xy ,

calculamos la integral de línea sobre C de $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$, el componente escalar del campo de velocidad del fluido en la dirección del vector normal a la curva, que apunta hacia fuera. El valor de la integral es el *flujo* de \mathbf{F} a través de C . *Flujo* es la expresión latina de *fluir*, pero en muchos cálculos de flujos no siempre se implica movimiento. Si \mathbf{F} fuera un campo eléctrico o un campo magnético, la integral de $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ continuaría siendo el flujo del campo a través de C .

DEFINICIÓN Si C es una curva simple cerrada suave en el dominio de un campo vectorial continuo $\mathbf{F} = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$ en el plano, y si \mathbf{n} es el vector unitario normal a C que apunta hacia fuera, el **flujo** de \mathbf{F} a través de C es

$$\text{Flujo de } \mathbf{F} \text{ a través de } C = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds. \tag{6}$$

Observe la diferencia entre el flujo y la circulación. El flujo de \mathbf{F} a través de C es la integral de línea con respecto a la longitud de arco de $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$, es decir, el componente escalar de \mathbf{F} en la dirección del vector normal. La circulación de \mathbf{F} alrededor de C es la integral de línea con respecto a la longitud de arco de $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$, es decir, el componente escalar de \mathbf{F} en la dirección del vector tangente unitario. El flujo es la integral del componente normal de \mathbf{F} y la circulación es la integral del componente tangencial de \mathbf{F} .

Para evaluar la integral para el flujo en la ecuación (6), iniciamos con una parametrización suave

$$x = g(t), \quad y = h(t), \quad a \leq t \leq b,$$

que traza la curva C exactamente una vez cuando t crece de a a b . Encontramos el vector unitario normal exterior \mathbf{n} , calculando el producto cruz del vector unitario tangente a la curva \mathbf{T} con el vector \mathbf{k} . ¿Pero cuál orden debemos elegir? ¿ $\mathbf{T} \times \mathbf{k}$ o $\mathbf{k} \times \mathbf{T}$? ¿Cuál apunta hacia fuera? Esto depende de la forma de recorrer C cuando t crece. Si el movimiento es en el sentido de las manecillas del reloj, $\mathbf{k} \times \mathbf{T}$ apunta hacia fuera; si el movimiento es en contra de las manecillas del reloj, $\mathbf{T} \times \mathbf{k}$ apunta hacia fuera (figura 16.21). La elección usual es $\mathbf{n} = \mathbf{T} \times \mathbf{k}$, lo que supone que el movimiento es en contra de las manecillas. Así, aunque el valor de la integral en la ecuación (6) no depende de la manera en que se recorra C , las fórmulas que estamos a punto de deducir para calcular \mathbf{n} y evaluar la integral de la ecuación (6) suponen que el movimiento es en contra de las manecillas del reloj.

En términos de componentes,

$$\mathbf{n} = \mathbf{T} \times \mathbf{k} = \left(\frac{dx}{ds} \mathbf{i} + \frac{dy}{ds} \mathbf{j} \right) \times \mathbf{k} = \frac{dy}{ds} \mathbf{i} - \frac{dx}{ds} \mathbf{j}.$$

Si $\mathbf{F} = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$, entonces

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = M(x, y) \frac{dy}{ds} - N(x, y) \frac{dx}{ds}.$$

Por lo tanto,

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_C \left(M \frac{dy}{ds} - N \frac{dx}{ds} \right) ds = \oint_C M \, dy - N \, dx.$$

Colocamos una circunferencia dirigida \odot en la última integral, para recordar que la integración en la curva cerrada C es en contra de las manecillas del reloj. Para evaluar esta integral, expresamos M , dy , N y dx en términos del parámetro t e integramos desde $t = a$ hasta $t = b$. No necesitamos conocer ni \mathbf{n} ni ds para encontrar el flujo.

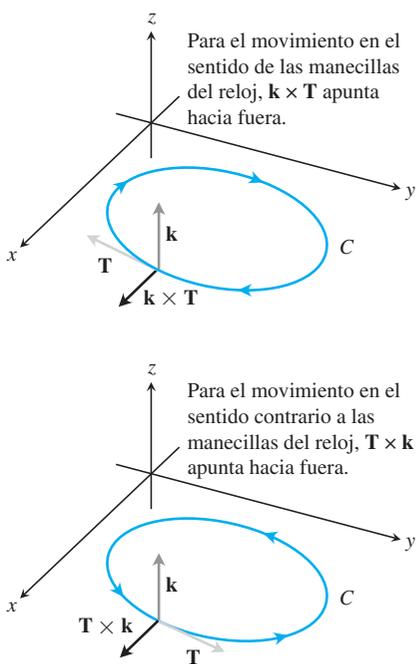


FIGURA 16.21 Para encontrar el vector unitario normal exterior para una curva suave C en el plano xy recorrida en sentido contrario al de las manecillas del reloj al crecer t , consideramos $\mathbf{n} = \mathbf{T} \times \mathbf{k}$. Para el movimiento en el sentido de las manecillas, consideramos $\mathbf{n} = \mathbf{k} \times \mathbf{T}$.

Cálculo del flujo a través de una curva suave cerrada en el plano

$$(\text{Flujo de } \mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} \text{ a través de } C) = \oint_C M dy - N dx \quad (7)$$

La integral se evalúa con cualquier parametrización suave $x = g(t)$, $y = h(t)$, $a \leq t \leq b$, que recorra C en contra de las manecillas del reloj, exactamente una vez.

EJEMPLO 8 Determine el flujo de $\mathbf{F} = (x - y)\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ a través de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ en el plano xy . (El campo vectorial y la curva se mostraron antes en la figura 16.19).

Solución La parametrización $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, recorre la circunferencia en contra de las manecillas del reloj exactamente una vez. Entonces usamos esta parametrización en la ecuación (7). Con

$$\begin{aligned} M &= x - y = \cos t - \sin t, & dy &= d(\sin t) = \cos t dt \\ N &= x = \cos t, & dx &= d(\cos t) = -\sin t dt, \end{aligned}$$

Tenemos

$$\begin{aligned} \text{Flujo} &= \int_C M dy - N dx = \int_0^{2\pi} (\cos^2 t - \sin t \cos t + \cos t \sin t) dt && \text{Ecuación (7)} \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right]_0^{2\pi} = \pi. \end{aligned}$$

El flujo de \mathbf{F} a través de la circunferencia es π . Como la respuesta es positiva, el flujo neto a través de la curva es hacia fuera. Un flujo neto hacia dentro daría un flujo negativo. ■

Ejercicios 16.2

Campos vectoriales

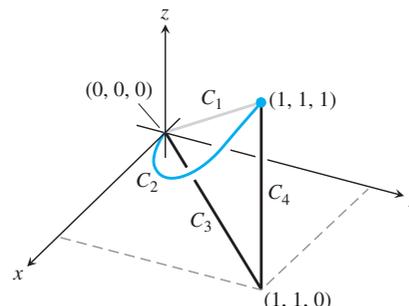
Determine el campo gradiente de las funciones de los ejercicios 1 a 4.

- $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$
- $f(x, y, z) = \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
- $g(x, y, z) = e^z - \ln(x^2 + y^2)$
- $g(x, y, z) = xy + yz + xz$
- Dé una fórmula $\mathbf{F} = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$ para el campo vectorial en el plano con la propiedad de que \mathbf{F} apunte hacia el origen con una magnitud inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de (x, y) al origen. [El campo no está definido en $(0, 0)$].
- Dé una fórmula $\mathbf{F} = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$ para el campo vectorial en el plano con la propiedad de que sea $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ en $(0, 0)$, y que en cualquier otro punto (a, b) , \mathbf{F} sea tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ y apunte en la dirección de las manecillas del reloj con una magnitud $|\mathbf{F}| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Integrales de línea de campos vectoriales

En los ejercicios 7 a 12, encuentre las integrales de línea de \mathbf{F} desde $(0, 0, 0)$ hasta $(1, 1, 1)$ sobre cada una de las siguientes trayectorias en la figura anexa.

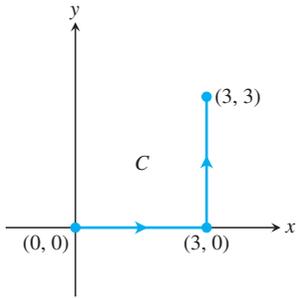
- La trayectoria en línea recta $C_1: \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 1$
 - La trayectoria curva $C_2: \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^4\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 1$
 - La trayectoria $C_3 \cup C_4$ formada por el segmento de recta desde $(0, 0, 0)$ hasta $(1, 1, 0)$ seguido por el segmento desde $(1, 1, 0)$ hasta $(1, 1, 1)$
- $\mathbf{F} = 3y\mathbf{i} + 2x\mathbf{j} + 4z\mathbf{k}$
 - $\mathbf{F} = [1/(x^2 + 1)]\mathbf{j}$
 - $\mathbf{F} = \sqrt{z}\mathbf{i} - 2x\mathbf{j} + \sqrt{y}\mathbf{k}$
 - $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$
 - $\mathbf{F} = (3x^2 - 3x)\mathbf{i} + 3z\mathbf{j} + \mathbf{k}$
 - $\mathbf{F} = (y + z)\mathbf{i} + (z + x)\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}$



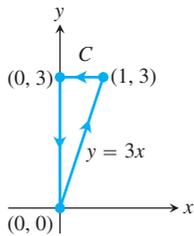
Integrales de línea con respecto a x, y y z

En los ejercicios 13 a 16, calcule las integrales de línea a lo largo de la trayectoria dada C .

13. $\int_C (x - y) dx$, donde $C: x = t, y = 2t + 1$, para $0 \leq t \leq 3$
14. $\int_C \frac{x}{y} dy$, donde $C: x = t, y = t^2$, para $1 \leq t \leq 2$
15. $\int_C (x^2 + y^2) dy$, donde C está dada en la siguiente figura.



16. $\int_C \sqrt{x + y} dx$, donde C está dada en la figura anexa



17. Evalúe cada una de las siguientes integrales a lo largo de la curva $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} - \mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 1$.

- a. $\int_C (x + y - z) dx$
- b. $\int_C (x + y - z) dy$
- c. $\int_C (x + y - z) dz$

18. Evalúe cada una de las siguientes integrales a lo largo de la curva $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} - (\cos t)\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq \pi$.

- a. $\int_C xz dx$
- b. $\int_C xz dy$
- c. $\int_C xyz dz$

Trabajo

En los ejercicios 19 a 22, determine el trabajo realizado por una fuerza \mathbf{F} en la curva cuando crece t .

19. $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + y\mathbf{j} - yz\mathbf{k}$
 $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 1$
20. $\mathbf{F} = 2y\mathbf{i} + 3x\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}$
 $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + (t/6)\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 2\pi$
21. $\mathbf{F} = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$
 $\mathbf{r}(t) = (\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 2\pi$
22. $\mathbf{F} = 6z\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + 12x\mathbf{k}$
 $\mathbf{r}(t) = (\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j} + (t/6)\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 2\pi$

Integrales de línea en el plano

23. Evalúe $\int_C xy dx + (x + y) dy$ a lo largo de la curva $y = x^2$ desde $(-1, 1)$ hasta $(2, 4)$.
24. Evalúe $\int_C (x - y) dx + (x + y) dy$ en sentido contrario al de las manecillas del reloj, a lo largo del triángulo con vértices en $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 1)$.
25. Evalúe $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds$ para el campo vectorial $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} - y\mathbf{j}$ a lo largo de la curva $x = y^2$, desde $(4, 2)$ hasta $(1, -1)$.
26. Evalúe $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ para el campo vectorial $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$ en el sentido contrario al de las manecillas del reloj, a lo largo de la circunferencia unitaria $x^2 + y^2 = 1$ desde $(1, 0)$ hasta $(0, 1)$.

Trabajo, circulación y flujo en el plano

27. **Trabajo** Determine el trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + (y - x)\mathbf{j}$ en la línea recta desde $(1, 1)$ hasta $(2, 3)$.
28. **Trabajo** Determine el trabajo realizado por el gradiente de $f(x, y) = (x + y)^2$ en contra de las manecillas del reloj, a lo largo de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ desde $(2, 0)$ hasta regresar al mismo punto.
29. **Circulación y flujo** Encuentre la circulación y el flujo de los campos

$$\mathbf{F}_1 = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \quad \text{y} \quad \mathbf{F}_2 = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$$

alrededor y a través de las siguientes curvas.

- a. La circunferencia $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
 - b. La elipse $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (4 \sin t)\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
30. **Flujo a través de una circunferencia** Encuentre el flujo de los campos

$$\mathbf{F}_1 = 2x\mathbf{i} - 3y\mathbf{j} \quad \text{y} \quad \mathbf{F}_2 = 2x\mathbf{i} + (x - y)\mathbf{j}$$

a través de la circunferencia

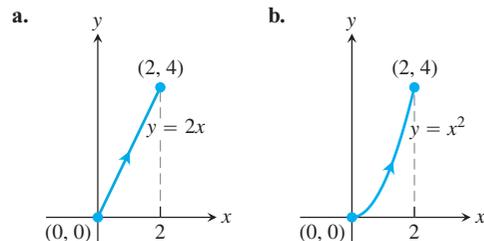
$$\mathbf{r}(t) = (a \cos t)\mathbf{i} + (a \sin t)\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

En los ejercicios 31 a 34, encuentre la circulación y el flujo del campo \mathbf{F} alrededor y a través de una trayectoria semicircular cerrada que consta del arco de circunferencia $\mathbf{r}_1(t) = (a \cos t)\mathbf{i} + (a \sin t)\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq \pi$, seguido por el segmento de recta $\mathbf{r}_2(t) = t\mathbf{i}$, $-a \leq t \leq a$.

31. $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$
32. $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j}$
33. $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$
34. $\mathbf{F} = -y^2\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$
35. **Integrales de flujo** Calcule el flujo del campo de velocidades $\mathbf{F} = (x + y)\mathbf{i} - (x^2 + y^2)\mathbf{j}$ a lo largo de cada una de las trayectorias desde $(1, 0)$ hasta $(-1, 0)$ en el plano xy .
 - a. La parte superior de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$
 - b. El segmento de recta desde $(1, 0)$ hasta $(-1, 0)$
 - c. El segmento de recta desde $(1, 0)$ hasta $(0, -1)$, seguido por el segmento de recta desde $(0, -1)$ hasta $(-1, 0)$.

36. **Flujo a través de un triángulo** Encuentre el flujo del campo \mathbf{F} del ejercicio 35, a través del exterior del triángulo con vértices en $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$.

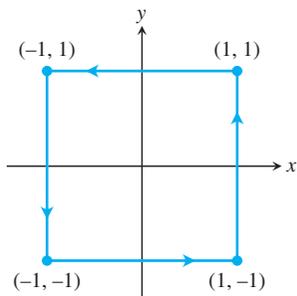
37. Calcule el flujo del campo de velocidades $\mathbf{F} = y^2\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j}$ a lo largo de cada una de las siguientes trayectorias desde $(0, 0)$ hasta $(2, 4)$.



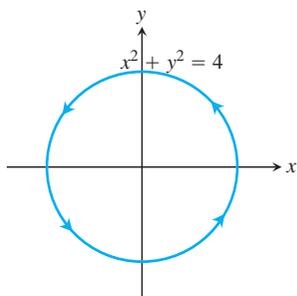
- c. Use una trayectoria diferente a las de los incisos (a) y (b), desde $(0, 0)$ hasta $(2, 4)$.

38. Obtenga la circulación del campo $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + (x + 2y)\mathbf{j}$ alrededor de cada una de las siguientes trayectorias cerradas.

a.



b.



c. Use una trayectoria diferente de las de los incisos (a) y (b).

Campos vectoriales en el plano

39. **Campo de rotación** Trace el campo de rotación

$$\mathbf{F} = -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\mathbf{i} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\mathbf{j}$$

(véase la figura 16.12) junto con sus componentes horizontal y vertical, en un conjunto representativo de puntos de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$.

40. **Campo radial** Trace el campo radial

$$\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$

(véase la figura 16.11) junto con sus componentes horizontales y verticales, en un conjunto representativo de puntos del círculo $x^2 + y^2 = 1$.

41. **Un campo de vectores tangentes**

a. Encuentre un campo $\mathbf{G} = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ en el plano xy , con la propiedad de que para todo punto $(a, b) \neq (0, 0)$, \mathbf{G} sea un vector de magnitud $\sqrt{a^2 + b^2}$ tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ y que apunte en sentido contrario al de las manecillas del reloj. [El campo no está definido en $(0, 0)$].

b. ¿Cuál es la relación de \mathbf{G} con el campo de rotación \mathbf{F} de la figura 16.12?

42. **Un campo de vectores tangentes**

a. Encuentre un campo $\mathbf{G} = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ en el plano xy , con la propiedad de que para todo punto $(a, b) \neq (0, 0)$, \mathbf{G} sea un vector unitario tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ y que apunte en el sentido de las manecillas del reloj.

b. ¿Cuál es la relación de \mathbf{G} con el campo de rotación \mathbf{F} de la figura 16.12?

43. **Vectores unitarios que apuntan hacia el origen** Encuentre un campo $\mathbf{F} = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$ en el plano xy , con la propiedad de que en cada punto $(x, y) \neq (0, 0)$, \mathbf{F} sea un vector unitario que apunte hacia el origen. [El campo no está definido en $(0, 0)$].

44. **Dos campos “centrales”** Encuentre un campo $\mathbf{F} = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$ en el plano xy , con la propiedad de que para cada punto $(x, y) \neq (0, 0)$, \mathbf{F} sea un vector que apunte hacia el origen y $|\mathbf{F}|$ sea (a) la distancia desde (x, y) hasta el origen, (b) inversamente proporcional a la distancia desde (x, y) hasta el origen. [El campo no está definido en $(0, 0)$].

45. **Trabajo y área** Suponga que $f(t)$ es derivable y positiva para $a \leq t \leq b$. Sea C la trayectoria $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + f(t)\mathbf{j}$, $a \leq t \leq b$, y $\mathbf{F} = y\mathbf{i}$. ¿Hay alguna relación entre el valor de la integral de trabajo

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

y el área de la región acotada por el eje t , la gráfica de f y las rectas $t = a$ y $t = b$? Justifique su respuesta.

46. **Trabajo realizado por una fuerza radial de magnitud constante** Una partícula se mueve a lo largo de una curva suave $y = f(x)$ desde $(a, f(a))$ hasta $(b, f(b))$. La fuerza que mueve a la partícula tiene una magnitud constante k , y siempre apunta hacia el origen. Demuestre que el trabajo realizado por la fuerza es

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds = k[(b^2 + (f(b))^2)^{1/2} - (a^2 + (f(a))^2)^{1/2}].$$

Integrales de flujo en el espacio

En los ejercicios 47 a 50, \mathbf{F} es el campo de velocidad de un fluido que fluye a través de una región en el espacio. Encuentre el flujo a lo largo de la curva dada, en la dirección en que crece t .

47. $\mathbf{F} = -4xy\mathbf{i} + 8y\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 2$$

48. $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$

$$\mathbf{r}(t) = 3t\mathbf{j} + 4t\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

49. $\mathbf{F} = (x - z)\mathbf{i} + x\mathbf{k}$

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq \pi$$

50. $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

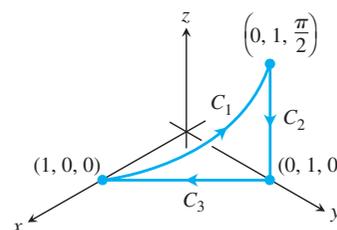
$$\mathbf{r}(t) = (-2 \cos t)\mathbf{i} + (2 \sin t)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

51. **Circulación** Encuentre la circulación de $\mathbf{F} = 2x\mathbf{i} + 2z\mathbf{j} + 2y\mathbf{k}$ alrededor de la trayectoria cerrada formada por las tres curvas siguientes, recorridas en la dirección en que crece t .

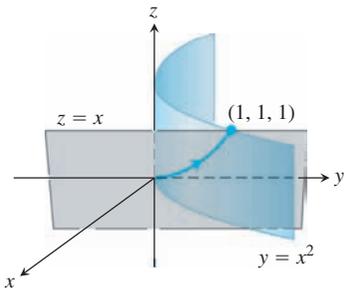
$$C_1: \mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq \pi/2$$

$$C_2: \mathbf{r}(t) = \mathbf{j} + (\pi/2)(1 - t)\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$C_3: \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (1 - t)\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 1$$



- 52. Circulación nula** Sea C la elipse en que el plano $2x + 3y - z = 0$ corta al cilindro $x^2 + y^2 = 12$. Demuestre, sin evaluar la integral de línea directamente, que la circulación del campo $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ alrededor de C en cualquier dirección, es igual a cero.
- 53. Flujo a lo largo de una curva** El campo $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + y\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$ es el campo de velocidades de un fluido en el espacio. Calcule el flujo desde $(0, 0, 0)$ hasta $(1, 1, 1)$ a lo largo de la curva de intersección del cilindro $y = x^2$ y el plano $z = x$. (Sugerencia: Use $t = x$ como parámetro).



- 54. Flujo de un campo gradiente** Encuentre el flujo del campo $\mathbf{F} = \nabla(xy^2z^3)$:
- Una vez a lo largo de la curva C del ejercicio 52, en el sentido de las manecillas del reloj visto desde arriba.
 - A lo largo del segmento de recta desde $(1, 1, 1)$ hasta $(2, 1, -1)$.

EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

En los ejercicios 55 a 60, utilice un SAC para calcular el trabajo realizado por una fuerza \mathbf{F} sobre la trayectoria dada:

- Encuentre $d\mathbf{r}$ para la trayectoria $\mathbf{r}(t) = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j} + k(t)\mathbf{k}$.
 - Evalúe la fuerza \mathbf{F} a lo largo de la trayectoria.
 - Evalúe $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.
- 55.** $\mathbf{F} = xy^6\mathbf{i} + 3x(xy^5 + 2)\mathbf{j}$; $\mathbf{r}(t) = (2 \cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$
- 56.** $\mathbf{F} = \frac{3}{1+x^2}\mathbf{i} + \frac{2}{1+y^2}\mathbf{j}$; $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq \pi$
- 57.** $\mathbf{F} = (y + yz \cos xyz)\mathbf{i} + (x^2 + xz \cos xyz)\mathbf{j} + (z + xy \cos xyz)\mathbf{k}$; $\mathbf{r}(t) = (2 \cos t)\mathbf{i} + (3 \sin t)\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 2\pi$
- 58.** $\mathbf{F} = 2xy\mathbf{i} - y^2\mathbf{j} + ze^x\mathbf{k}$; $\mathbf{r}(t) = -t\mathbf{i} + \sqrt{t}\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$, $1 \leq t \leq 4$
- 59.** $\mathbf{F} = (2y + \sin x)\mathbf{i} + (z^2 + (1/3)\cos y)\mathbf{j} + x^4\mathbf{k}$; $\mathbf{r}(t) = (\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j} + (\sin 2t)\mathbf{k}$, $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$
- 60.** $\mathbf{F} = (x^2y)\mathbf{i} + \frac{1}{3}x^3\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$; $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + (2 \sin^2 t - 1)\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 2\pi$

16.3

Independencia de la trayectoria, campos conservativos y funciones potenciales

Un **campo gravitacional** \mathbf{G} es un campo vectorial que representa el efecto de la gravedad en un punto del espacio debido a la presencia de un objeto de gran masa. La fuerza gravitacional sobre un cuerpo de masa m que se encuentra en el campo está dada por $\mathbf{F} = m\mathbf{G}$. De manera similar, un **campo eléctrico** \mathbf{E} es un campo vectorial en el espacio que representa el efecto de las fuerzas eléctricas sobre una partícula cargada que se encuentra dentro de él. La fuerza sobre un cuerpo de carga q ubicado en el campo está dada por $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$. En los campos eléctricos y gravitacionales, la cantidad de trabajo necesario para mover una masa o una carga desde un punto hasta otro depende de la posición inicial y final del objeto, y no de la trayectoria elegida entre los dos puntos. En esta sección analizaremos los campos vectoriales que tienen esta propiedad y cómo se efectúa el cálculo de las integrales de trabajo asociadas con ellos.

Independencia de la trayectoria

Si A y B son dos puntos de una región abierta D en el espacio, la integral de línea de \mathbf{F} a lo largo de C desde A hasta B para el campo \mathbf{F} definido sobre D por lo regular depende de la trayectoria de C , como vimos en la sección 16.1. Sin embargo, para algunos campos especiales, el valor de la integral de línea es el mismo para todas las trayectorias desde A hasta B .

DEFINICIONES Sea \mathbf{F} un campo vectorial definido en una región abierta D en el espacio, y supongamos que para cualesquiera dos puntos A y B en D , la integral de línea $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ a lo largo de la trayectoria C desde A hasta B en D es la misma sobre todas las trayectorias desde A hasta B . Entonces, la integral $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es **independiente de la trayectoria en D** y el campo \mathbf{F} es **conservativo sobre D** .

La palabra *conservativo* proviene de la física, donde se usa para hacer referencia a los campos donde se cumple el principio de conservación de la energía. Cuando una integral de línea es

independiente de la trayectoria C desde el punto A hasta el punto B , representamos la integral de línea por el símbolo \int_A^B en vez de utilizar el símbolo habitual de la integral de línea \int_C . Esta sustitución nos ayuda a recordar la propiedad de independencia de la trayectoria.

En condiciones de derivabilidad, que por lo regular se cumplen en la práctica, un campo \mathbf{F} es conservativo si y sólo si es el campo gradiente de una función escalar f , es decir, si y sólo si $\mathbf{F} = \nabla f$ para alguna f . La función f toma entonces un nombre especial.

DEFINICIÓN Si \mathbf{F} es un campo vectorial definido en D y $\mathbf{F} = \nabla f$ para alguna función escalar f en D , entonces f recibe el nombre de **función potencial de \mathbf{F}** .

Un potencial gravitacional es una función escalar cuyo campo gradiente es un campo gravitacional, un potencial eléctrico es una función escalar cuyo campo gradiente es un campo eléctrico, y así sucesivamente. Como veremos, una vez que hayamos encontrado la función potencial f para el campo \mathbf{F} , podemos evaluar todas las integrales de línea en el dominio de \mathbf{F} para cualquier trayectoria entre A y B mediante

$$\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_A^B \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(B) - f(A). \quad (1)$$

Si se considera una función ∇f para funciones de varias variables como algo parecido a la derivada de f' para funciones de una sola variable, entonces se observa que la ecuación (1) es la versión vectorial análoga de la fórmula del teorema fundamental de cálculo

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a).$$

Los campos conservativos tienen otras propiedades notables. Por ejemplo, decir que \mathbf{F} es conservativo en D equivale a decir que la integral de \mathbf{F} en cada trayectoria cerrada en D es igual a cero. Es lógico que deban cumplirse ciertas condiciones por parte de las curvas, los campos y el dominio para que la ecuación (1) sea válida. A continuación estudiaremos esas condiciones.

Supuestos sobre curvas, campos vectoriales y dominios

Para que los cálculos y resultados que vamos a deducir sean válidos, debemos suponer ciertas propiedades de las curvas, superficies, dominios y campos vectoriales con los que estemos tratando. Presentamos estos supuestos en los enunciados de teoremas y se aplican también en los ejemplos y ejercicios a menos que se especifique lo contrario.

Supongamos que todas las curvas son **suaves por partes**; es decir, están formadas por un número finito de partes suaves unidas por los extremos, como explicamos en la sección 13.1. Suponemos también que los campos vectoriales \mathbf{F} de los componentes tienen sus primeras derivadas parciales continuas.

Consideramos que los dominios de D son regiones abiertas en el espacio. Esto significa que cada punto en D es el centro de una bola abierta contenida por completo en D (véase la sección 13.1). Suponemos también que D es **conexa**, lo que significa, en una región abierta, que todo punto en D se une a otro por medio de una curva suave que se encuentra en la región. Por último, suponemos que D es **simplemente conexa**, lo que significa que todo lazo en D se contrae hasta formar un punto sin salir de D . El plano que se obtiene al remover un disco es una región bidimensional que *no* es simplemente conexa; un lazo en el plano que rodea el disco no se contrae sin que salga por el “hoyo” que se forma al remover el disco (véase la figura 16.22c). De manera similar, si removemos un segmento de recta del espacio, la región resultante D *no* es simplemente conexa. No hay forma de contraer un lazo alrededor de un segmento de recta hasta un punto, sin salir de D .

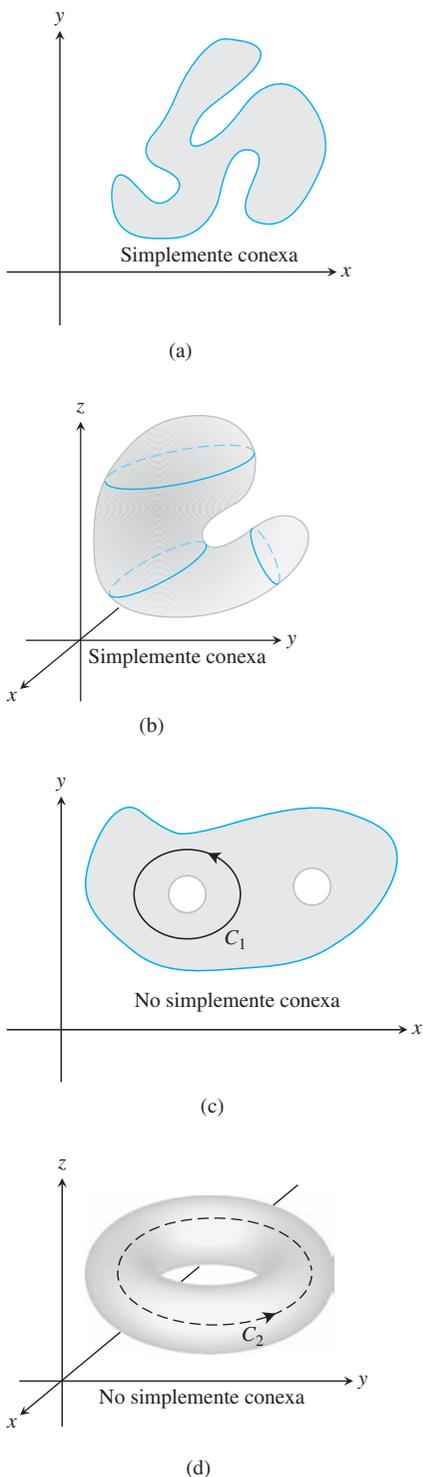


FIGURA 16.22 Cuatro regiones conexas. En (a) y (b), las regiones son simplemente conexas. En (c) y (d) las regiones no son simplemente conexas porque las curvas C_1 y C_2 no se contraen hasta formar un punto sin salir de las regiones que las contienen.

La conexidad y la conexidad simple no son lo mismo, y una no implica a la otra. Consideramos a las regiones conexas como de “una sola pieza” y a las regiones simplemente conexas como regiones “sin agujero alguno que atrape lazos”. Todo el espacio es conexo y simplemente conexo. La figura 16.22 ilustra algunas de estas propiedades.

Advertencia Algunos resultados de este capítulo pueden fallar si los aplicamos en situaciones que no cumplan estas condiciones. Por ejemplo, el criterio de los componentes para campos conservativos, que veremos después en esta sección, no es válido en dominios que no sean simplemente conexas (véase el ejemplo 5).

Integrales de línea en campos conservativos

Los campos gradiente \mathbf{F} se obtienen al derivar una función escalar f . Un teorema similar al teorema fundamental del cálculo ofrece una manera de evaluar las integrales de línea de los campos gradiente.

TEOREMA 1: El teorema fundamental de las integrales de línea Sea C una curva suave que une el punto A con el punto B en el plano o en el espacio, parametrizada por $\mathbf{r}(t)$. Sea f una función diferenciable con un vector gradiente continuo $\mathbf{F} = \nabla f$ en el dominio D que contiene a C . Así,

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(B) - f(A).$$

Como el teorema fundamental, el teorema 1 nos ofrece una manera de evaluar las integrales de línea sin tener que aplicar los límites de las sumas de Riemann o calcular la integral de línea por el procedimiento usado en la sección 16.2. Antes de probar el teorema 1, damos un ejemplo.

EJEMPLO 1 Suponga que el campo de fuerza $\mathbf{F} = \nabla f$ es el gradiente de la función

$$f(x, y, z) = -\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Determine el trabajo realizado por \mathbf{F} al mover un objeto a lo largo de una curva suave C que une $(1, 0, 0)$ con $(0, 0, 2)$ sin pasar por el origen.

Solución Una aplicación del teorema 1 indica que el trabajo realizado por \mathbf{F} a lo largo de cualquier curva C que une dos puntos sin pasar por el origen es

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(0, 0, 2) - f(1, 0, 0) = -\frac{1}{4} - (-1) = \frac{3}{4}. \quad \blacksquare$$

La fuerza gravitacional de un planeta y la fuerza eléctrica asociada con una partícula cargada pueden modelarse mediante el campo \mathbf{F} dado en el ejemplo 1 hasta una constante que depende de las unidades de medición.

Demostración del teorema 1 Suponga que A y B son dos puntos en la región D , y que $C: \mathbf{r}(t) = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j} + k(t)\mathbf{k}$, $a \leq t \leq b$, es una curva suave en D que une A y B . Usamos

la forma abreviada $\mathbf{r}(t) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ para la parametrización de la curva. A lo largo de la curva, f es una función diferenciable de t , entonces

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} && \text{Regla de la cadena de la} \\ & && \text{sección 14.4 con } x = g(t), \\ & && y = h(t), z = k(t) \\ &= \nabla f \cdot \left(\frac{dx}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \mathbf{j} + \frac{dz}{dt} \mathbf{k} \right) = \nabla f \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}. && \text{Porque } \mathbf{F} = \nabla f \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{t=a}^{t=b} \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = \int_a^b \frac{df}{dt} dt && \mathbf{r}(a) = A, \mathbf{r}(b) = B \\ &= f(g(t), h(t), k(t)) \Big|_a^b = f(B) - f(A). \end{aligned}$$

Vemos entonces por el teorema 1 que el cálculo de la integral de línea del campo gradiente $\mathbf{F} = \nabla f$ es fácil de calcular una vez que conocemos la función f . Muchos campos vectoriales importantes de las aplicaciones son campos gradiente. El siguiente resultado, que proviene del teorema 1, muestra también que cualquier campo conservativo es de este tipo.

TEOREMA 2: Los campos conservativos son campos gradiente Sea $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ un campo vectorial cuyos componentes son continuos en una región conexa abierta D en el espacio. Entonces, \mathbf{F} es un campo conservativo si y sólo si \mathbf{F} es un campo gradiente ∇f para una función derivable f .

El teorema 2 dice que $\mathbf{F} = \nabla f$ si y sólo si para dos puntos A y B en la región D , el valor de la integral de línea $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria C que une A y B en D .

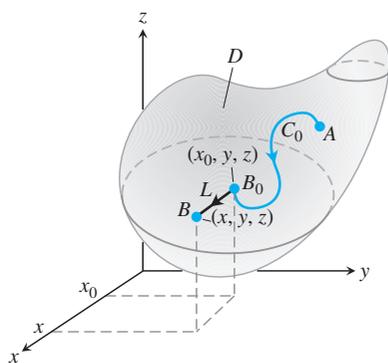


FIGURA 16.23 La función $f(x, y, z)$ en el criterio del teorema 2 se calcula mediante la integral de línea $\int_{C_0} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(B_0)$ desde A hasta B_0 , más la integral de línea $\int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ a lo largo del segmento de recta L paralelo al eje x que une B_0 a B localizado en (x, y, z) . El valor de f en A es $f(A) = 0$.

Demostración del teorema 2 Si \mathbf{F} es un campo gradiente, entonces $\mathbf{F} = \nabla f$ para una función derivable f y se cumple el teorema 1 que dice que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(B) - f(A)$. El valor de la integral de línea no depende de C , sino sólo de sus extremos A y B . De esta manera, la integral de línea es independiente de la trayectoria y \mathbf{F} satisface la definición de un campo conservativo.

Por otro lado, suponga que \mathbf{F} es un campo vectorial conservativo y queremos encontrar una función f en D que satisfaga $\nabla f = \mathbf{F}$. Primero, seleccionamos un punto en D y hacemos $f(A) = 0$. Para cualquier otro punto B en D definimos a $f(B)$ como $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, donde C es cualquier trayectoria suave en D desde A hasta B . El valor de $f(B)$ no depende de la selección de C , puesto que \mathbf{F} es conservativo. Para demostrar que $\nabla f = \mathbf{F}$, necesitamos demostrar que $\partial f / \partial x = M$, $\partial f / \partial y = N$ y $\partial f / \partial z = P$.

Suponga que B tiene las coordenadas (x, y, z) . Por definición, el valor de la función f en un punto próximo B_0 localizado en (x_0, y, z) es $\int_{C_0} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, donde C_0 es cualquier trayectoria desde A hasta B_0 . Seleccionamos una trayectoria $C = C_0 \cup L$ desde A hasta B formada por el primer recorrido a lo largo de C_0 para llegar a B_0 y luego recorre el segmento de recta L desde B_0 hasta B (figura 16.23). Cuando B_0 está cerca de B , el segmento L está en D y, puesto que el valor $f(B)$ es independiente de la trayectoria desde A hasta B ,

$$f(x, y, z) = \int_{C_0} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Al derivar, tenemos

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{C_0} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \right).$$

Sólo el último término de la derecha depende de x , por lo que

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x} \int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Ahora parametrizamos L como $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $x_0 \leq t \leq x$. Así, $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{i}$, $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}/dt = M$, y $\int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{x_0}^x M(t, y, z) dt$. La sustitución nos da

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x} \int_{x_0}^x M(t, y, z) dt = M(x, y, z)$$

por el teorema fundamental del cálculo. Las derivadas parciales $\partial f/\partial y = N$ y $\partial f/\partial z = P$ se obtienen de manera similar, al mostrar que $\mathbf{F} = \nabla f$. ■

EJEMPLO 2 Calcule el trabajo realizado por el campo conservativo

$$\mathbf{F} = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k} = \nabla f, \quad \text{donde } f(x, y, z) = xyz,$$

a lo largo de cualquier curva suave C que una el punto $A(-1, 3, 9)$ con el punto $B(1, 6, -4)$.

Solución Con $f(x, y, z) = xyz$ tenemos

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_A^B \nabla f \cdot d\mathbf{r} && \mathbf{F} = \nabla f \text{ sin importar la trayectoria} \\ &= f(B) - f(A) && \text{Teorema 1} \\ &= xyz|_{(1,6,-4)} - xyz|_{(-1,3,9)} \\ &= (1)(6)(-4) - (-1)(3)(9) \\ &= -24 + 27 = 3. \end{aligned}$$

Una propiedad muy útil de las integrales de línea de los campos conservativos entra en juego cuando la trayectoria de integración es una curva cerrada o lazo. Usamos la notación \oint_C en la integración alrededor de una trayectoria cerrada (que estudiaremos con más detalle en la siguiente sección).

TEOREMA 3: Propiedad de los lazos en campos conservativos Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

1. $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ alrededor de todo lazo (esto es, una curva cerrada C) en D .
2. El campo \mathbf{F} es conservativo sobre D .

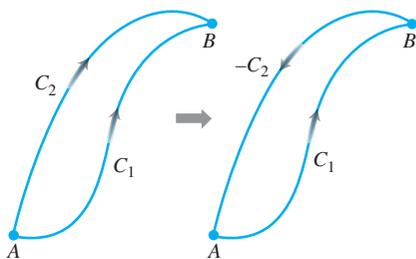


FIGURA 16.24 Si tenemos dos trayectorias desde A hasta B , podemos invertir una de ellas y formar un lazo.

Demostración de que el inciso 1 \Rightarrow inciso 2 Queremos demostrar que para dos puntos cualesquiera A y B en D , la integral $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ tiene el mismo valor sobre dos trayectorias cualesquiera C_1 y C_2 , desde A hasta B . Invertimos la dirección de C_2 para obtener una trayectoria $-C_2$ desde B hasta A (figura 16.24). Juntas, C_1 y $-C_2$ forman un lazo cerrado C , y por suposición,

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{-C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

Así, las integrales sobre C_1 y C_2 dan el mismo valor. Observe que la definición de $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ indica que al cambiar la dirección a lo largo de la curva se invierte el signo de la integral de línea.

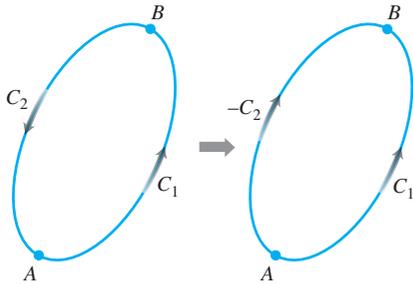


FIGURA 16.25 Si A y B están en un lazo, invertimos parte del lazo para formar dos trayectorias desde A hasta B .

Demostración de que el inciso 2 \Rightarrow inciso 1 Queremos demostrar que la integral de línea de $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es cero sobre cualquier lazo cerrado C . Elegimos dos puntos, A y B sobre C y los usamos para dividir C en dos partes: C_1 desde A hasta B , seguido por C_2 desde B hasta A (figura 16.25). Así,

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0. \quad \blacksquare$$

El siguiente diagrama resume los resultados de los teoremas 2 y 3.

| | | | | |
|--------------------------------|-------------------|---------------------------|-------------------|--|
| Teorema 2 | \Leftrightarrow | Teorema 3 | \Leftrightarrow | $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ |
| $\mathbf{F} = \nabla f$ en D | | \mathbf{F} conservativo | | sobre cualquier lazo en D |
| | | en D | | |

Ahora surgen dos preguntas:

1. ¿Cómo sabemos si un campo vectorial \mathbf{F} es conservativo?
2. Si \mathbf{F} es un campo conservativo, ¿cómo encontramos la función potencial f (de manera que $\mathbf{F} = \nabla f$)?

Búsqueda de potenciales en campos conservativos

El criterio para que un campo vectorial sea conservativo implica la equivalencia de ciertas derivadas parciales de los componentes del campo.

Criterio de componentes para campos conservativos

Sea $\mathbf{F} = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + P(x, y, z)\mathbf{k}$ un campo en un dominio conexo y simplemente conexo, cuyas funciones componentes tienen sus primeras derivadas parciales continuas. De esta forma, \mathbf{F} es conservativo, si y sólo si,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial z}, \quad \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \text{y} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}. \quad (2)$$

Demostración de que las ecuaciones (2) se cumplen si \mathbf{F} es conservativo Hay una función potencial f tal que

$$\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k} = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} && \text{Teorema de las derivadas mixtas, sección 14.3} \\ &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial N}{\partial z}. \end{aligned}$$

Las otras igualdades en las ecuaciones (2) se demuestran de forma similar. ■

La segunda parte de la demostración, referente a que la ecuación (2) implica que \mathbf{F} es conservativo, es una consecuencia del teorema de Stokes, que revisaremos en la sección 16.7, y requiere que el dominio de \mathbf{F} sea simplemente conexo.

Una vez que sabemos que \mathbf{F} es conservativo, con frecuencia deseamos encontrar una función potencial para \mathbf{F} . Para esto hay que resolver la ecuación $\nabla f = \mathbf{F}$ o

$$\frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$$

para f . Logramos esto integrando las tres ecuaciones

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = P,$$

como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3 Demostremos que $\mathbf{F} = (e^x \cos y + yz)\mathbf{i} + (xz - e^x \operatorname{sen} y)\mathbf{j} + (xy + z)\mathbf{k}$ es conservativo en su dominio natural y determinemos una función potencial para él.

Solución El dominio natural de \mathbf{F} es todo el espacio, el cual es conexo y simplemente conexo. Aplicamos el criterio de las ecuaciones (2) para

$$M = e^x \cos y + yz, \quad N = xz - e^x \operatorname{sen} y, \quad P = xy + z$$

y calculamos

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x = \frac{\partial N}{\partial z}, \quad \frac{\partial M}{\partial z} = y = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -e^x \operatorname{sen} y + z = \frac{\partial M}{\partial y}.$$

Las derivadas parciales son continuas, de manera que estas igualdades nos dicen que \mathbf{F} es conservativo, por lo que existe una función f con $\nabla f = \mathbf{F}$ (teorema 2).

Encontramos f integrando las ecuaciones

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x \cos y + yz, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = xz - e^x \operatorname{sen} y, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = xy + z. \quad (3)$$

Integramos la primera ecuación con respecto a x , dejando a y y z fijas, para obtener

$$f(x, y, z) = e^x \cos y + xyz + g(y, z).$$

Escribimos la constante de integración como función de y y z , pues su valor depende de y y z aunque no de x . Después, calculamos $\partial f/\partial y$ a partir de esta ecuación y la igualamos con la expresión $\partial f/\partial y$ en las ecuaciones (3). Esto nos da

$$-e^x \operatorname{sen} y + xz + \frac{\partial g}{\partial y} = xz - e^x \operatorname{sen} y,$$

de manera que $\partial g/\partial y = 0$. Por lo tanto, g es función sólo de z , y

$$f(x, y, z) = e^x \cos y + xyz + h(z).$$

Ahora calculamos $\partial f/\partial z$ a partir de esta ecuación e igualamos con la fórmula para $\partial f/\partial z$ de las ecuaciones (3). Esto nos da

$$xy + \frac{dh}{dz} = xy + z, \quad \text{o} \quad \frac{dh}{dz} = z,$$

por lo que

$$h(z) = \frac{z^2}{2} + C.$$

Por lo tanto,

$$f(x, y, z) = e^x \cos y + xyz + \frac{z^2}{2} + C.$$

Tenemos un número infinito de funciones potenciales de \mathbf{F} , una por cada valor de C . ■

EJEMPLO 4 Demuestre que $\mathbf{F} = (2x - 3)\mathbf{i} - z\mathbf{j} + (\cos z)\mathbf{k}$ no es conservativo.

Solución Aplicamos el criterio de los componentes en las ecuaciones (2) y vemos de inmediato que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (\cos z) = 0, \quad \frac{\partial N}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} (-z) = -1.$$

Como son diferentes, \mathbf{F} no es conservativo. No requerimos más verificaciones. ■

EJEMPLO 5 Demuestre que el campo vectorial

$$\mathbf{F} = \frac{-y}{x^2 + y^2} \mathbf{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$

satisface las ecuaciones del criterio de los componentes, pero no es conservativo sobre su dominio natural. Explique cómo es esto posible.

Solución Tenemos que $M = -y/(x^2 + y^2)$, $N = x/(x^2 + y^2)$ y $P = 0$. Si aplicamos el criterio de los componentes, tenemos que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 = \frac{\partial N}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial x} = 0 = \frac{\partial M}{\partial z}, \quad \text{y} \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Así, parece que el campo \mathbf{F} pasa el criterio de los componentes. Sin embargo, el criterio supone que el dominio de \mathbf{F} es simplemente conexo, pero éste no es el caso. Como $x^2 + y^2$ no puede ser cero, el dominio natural es el complemento del eje z que contiene lazos que no se contraen en un punto. Un lazo como éste es el círculo unitario C en el plano xy . El círculo es parametrizado por $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Este lazo se enreda alrededor del eje z y no se puede contraer en un punto mientras esté dentro del complemento del eje z .

Para demostrar que \mathbf{F} no es conservativo, calculamos la integral de línea $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ alrededor del lazo C . En primer lugar, escribimos el campo en términos del parámetro t :

$$\mathbf{F} = \frac{-y}{x^2 + y^2} \mathbf{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \mathbf{j} = \frac{-\sin t}{\sin^2 t + \cos^2 t} \mathbf{i} + \frac{\cos t}{\sin^2 t + \cos^2 t} \mathbf{j} = (-\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j}.$$

A continuación, calculamos $d\mathbf{r}/dt = (-\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j}$, y luego calculamos la integral de línea como

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = 2\pi.$$

Como la integral de línea de \mathbf{F} alrededor del lazo C no es cero, el campo \mathbf{F} no es conservativo, en virtud del teorema 3. ■

El ejemplo 5 indica que el criterio de los componentes no se aplica cuando el dominio del campo no es simplemente conexo. Sin embargo, si modificamos el dominio de forma que esté restringido a la bola de radio 1 con centro en el punto $(2, 2, 2)$ o a cualquier región en forma de bola, que no contenga una parte del eje z , entonces este nuevo dominio C es simplemente conexo. Ahora, la derivada parcial de las ecuaciones (2) y los supuestos del criterio de los componentes quedan satisfechos. En esta nueva situación, el campo \mathbf{F} del ejemplo 5 es conservativo

en D . Así como debemos ser cuidadosos cuando estemos validando si una función satisface una propiedad a través de su dominio (como la continuidad o la propiedad del valor intermedio), también debemos ser cuidadosos en la identificación de las propiedades que un campo vectorial debe o no debe tener en su dominio.

Formas diferenciables exactas

A menudo es conveniente expresar las integrales de trabajo y circulación en la forma diferencial

$$\int_C M dx + N dy + P dz$$

analizada en la sección 16.2. Estas integrales son relativamente fáciles de evaluar si $M dx + N dy + P dz$ es la diferencial total de una función f y C es cualquier trayectoria que une los dos puntos desde A hasta B . A partir de esto

$$\begin{aligned} \int_C M dx + N dy + P dz &= \int_C \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \\ &= \int_A^B \nabla f \cdot d\mathbf{r} && \nabla f \text{ es conservativo.} \\ &= f(B) - f(A). && \text{Teorema 1} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int_A^B df = f(B) - f(A),$$

justo como sucede con las funciones diferenciables de una sola variable.

DEFINICIONES Cualquier expresión $M(x, y, z) dx + N(x, y, z) dy + P(x, y, z) dz$ es una **forma diferencial**. Una forma diferencial es **exacta** en un dominio D en el espacio si

$$M dx + N dy + P dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = df$$

para alguna función escalar f a través de D .

Observe que si $M dx + N dy + P dz = df$ en D , entonces $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ es el campo gradiente de f en D , y de manera recíproca, si $\mathbf{F} = \nabla f$, entonces la forma $M dx + N dy + P dz$ es exacta. Por lo tanto, el criterio para determinar si la forma es exacta es el mismo criterio que se usa para determinar si \mathbf{F} es conservativo.

Criterio de los componentes para determinar si $M dx + N dy + P dz$ es exacta

La forma diferencial $M dx + N dy + P dz$ es exacta en un dominio conexo y simplemente conexo si y sólo si,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial z}, \quad \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \text{y} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}.$$

Esto equivale a decir que el campo $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ es conservativo.

EJEMPLO 6 Demuestre que $y dx + x dy + 4 dz$ es exacta y evalúe la integral

$$\int_{(1,1,1)}^{(2,3,-1)} y dx + x dy + 4 dz$$

sobre cualquier trayectoria desde $(1, 1, 1)$ hasta $(2, 3, -1)$.

Solución Sean $M = y$, $N = x$, $P = 4$, y aplicamos el criterio para ver si la forma es exacta:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 = \frac{\partial N}{\partial z}, \quad \frac{\partial M}{\partial z} = 0 = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 1 = \frac{\partial M}{\partial y}.$$

Estas igualdades nos dicen que $y dx + x dy + 4 dz$ es exacta, de manera que

$$y dx + x dy + 4 dz = df$$

para cierta función f , y el valor de la integral es $f(2, 3, -1) - f(1, 1, 1)$.

Determinamos f salvo por una constante, integrando las ecuaciones

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 4. \quad (4)$$

De la primera ecuación obtenemos

$$f(x, y, z) = xy + g(y, z).$$

La segunda ecuación nos dice que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + \frac{\partial g}{\partial y} = x, \quad \text{o} \quad \frac{\partial g}{\partial y} = 0.$$

Por lo tanto, g es una función sólo de z y

$$f(x, y, z) = xy + h(z).$$

La tercera de las ecuaciones (4) nos dice que

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0 + \frac{dh}{dz} = 4, \quad \text{o} \quad h(z) = 4z + C.$$

Por lo tanto,

$$f(x, y, z) = xy + 4z + C.$$

El valor de la integral de línea es independiente de la trayectoria tomada desde $(1, 1, 1)$ hasta $(2, 3, -1)$, y es igual a

$$f(2, 3, -1) - f(1, 1, 1) = 2 + C - (5 + C) = -3. \quad \blacksquare$$

Ejercicios 16.3

Criterios para campos conservativos

¿Cuáles de los campos de los ejercicios 1 a 6 son conservativos y cuáles no?

- $\mathbf{F} = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$
- $\mathbf{F} = (y \operatorname{sen} z)\mathbf{i} + (x \operatorname{sen} z)\mathbf{j} + (xy \cos z)\mathbf{k}$
- $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + (x + z)\mathbf{j} - y\mathbf{k}$
- $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$
- $\mathbf{F} = (z + y)\mathbf{i} + z\mathbf{j} + (y + x)\mathbf{k}$
- $\mathbf{F} = (e^x \cos y)\mathbf{i} - (e^x \operatorname{sen} y)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

$$8. \mathbf{F} = (y + z)\mathbf{i} + (x + z)\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}$$

$$9. \mathbf{F} = e^{y+2z}(\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 2x\mathbf{k})$$

$$10. \mathbf{F} = (y \operatorname{sen} z)\mathbf{i} + (x \operatorname{sen} z)\mathbf{j} + (xy \cos z)\mathbf{k}$$

$$11. \mathbf{F} = (\ln x + \sec^2(x + y))\mathbf{i} +$$

$$\left(\sec^2(x + y) + \frac{y}{y^2 + z^2} \right)\mathbf{j} + \frac{z}{y^2 + z^2}\mathbf{k}$$

$$12. \mathbf{F} = \frac{y}{1 + x^2 y^2}\mathbf{i} + \left(\frac{x}{1 + x^2 y^2} + \frac{z}{\sqrt{1 - y^2 z^2}} \right)\mathbf{j} +$$

$$\left(\frac{y}{\sqrt{1 - y^2 z^2}} + \frac{1}{z} \right)\mathbf{k}$$

Determinación de las funciones potenciales

En los ejercicios 7 a 12, encuentre una función potencial f para el campo \mathbf{F} .

$$7. \mathbf{F} = 2x\mathbf{i} + 3y\mathbf{j} + 4z\mathbf{k}$$

Formas diferenciales exactas

En los ejercicios 13 a 17, demuestre que las formas diferenciales en las integrales son exactas. Después evalúe las integrales.

13. $\int_{(0,0,0)}^{(2,3,-6)} 2x \, dx + 2y \, dy + 2z \, dz$
14. $\int_{(1,1,2)}^{(3,5,0)} yz \, dx + xz \, dy + xy \, dz$
15. $\int_{(0,0,0)}^{(1,2,3)} 2xy \, dx + (x^2 - z^2) \, dy - 2yz \, dz$
16. $\int_{(0,0,0)}^{(3,3,1)} 2x \, dx - y^2 \, dy - \frac{4}{1+z^2} \, dz$
17. $\int_{(1,0,0)}^{(0,1,1)} \sin y \cos x \, dx + \cos y \sin x \, dy + dz$

Determinación de funciones potenciales para evaluar integrales de línea

Aunque no están definidos en todo el espacio R^3 , los campos asociados con los ejercicios 18 a 22 son simplemente conexos y, mediante el criterio de los componentes, se comprueba si son conservativos. Encuentre una función potencial para cada campo y evalúe las integrales como en el ejemplo 6.

18. $\int_{(0,2,1)}^{(1,\pi/2,2)} 2 \cos y \, dx + \left(\frac{1}{y} - 2x \sin y\right) \, dy + \frac{1}{z} \, dz$
19. $\int_{(1,1,1)}^{(1,2,3)} 3x^2 \, dx + \frac{z^2}{y} \, dy + 2z \ln y \, dz$
20. $\int_{(1,2,1)}^{(2,1,1)} (2x \ln y - yz) \, dx + \left(\frac{x^2}{y} - xz\right) \, dy - xy \, dz$
21. $\int_{(1,1,1)}^{(2,2,2)} \frac{1}{y} \, dx + \left(\frac{1}{z} - \frac{x}{y^2}\right) \, dy - \frac{y}{z^2} \, dz$
22. $\int_{(-1,-1,-1)}^{(2,2,2)} \frac{2x \, dx + 2y \, dy + 2z \, dz}{x^2 + y^2 + z^2}$

Aplicaciones y ejemplos

23. **Revisión del ejemplo 6** Evalúe la integral

$$\int_{(1,1,1)}^{(2,3,-1)} y \, dx + x \, dy + 4 \, dz$$

del ejemplo 6 determinando ecuaciones paramétricas para el segmento de recta desde $(1, 1, 1)$ hasta $(2, 3, -1)$ y evaluando la integral de línea de $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ a lo largo del segmento. Como \mathbf{F} es conservativo, la integral es independiente de la trayectoria.

24. Evalúe

$$\int_C x^2 \, dx + yz \, dy + (y^2/2) \, dz$$

a lo largo del segmento de recta C que une a $(0, 0, 0)$ con $(0, 3, 4)$.

Independencia de la trayectoria Demuestre que los valores de las integrales de los ejercicios 25 a 26 no dependen de la trayectoria desde A hasta B .

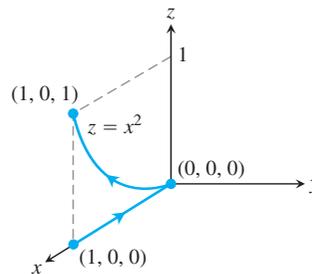
25. $\int_A^B z^2 \, dx + 2y \, dy + 2xz \, dz$
26. $\int_A^B \frac{x \, dx + y \, dy + z \, dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

En los ejercicios 27 y 28, encuentre una función potencial para \mathbf{F} .

27. $\mathbf{F} = \frac{2x}{y} \mathbf{i} + \left(\frac{1-x^2}{y^2}\right) \mathbf{j}, \quad \{(x, y): y > 0\}$
28. $\mathbf{F} = (e^x \ln y) \mathbf{i} + \left(\frac{e^x}{y} + \sin z\right) \mathbf{j} + (y \cos z) \mathbf{k}$

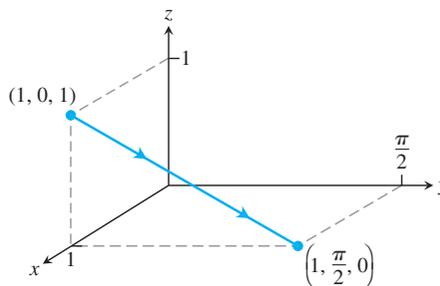
29. **Trabajo a lo largo de diferentes trayectorias** Determine el trabajo realizado por $\mathbf{F} = (x^2 + y)\mathbf{i} + (y^2 + x)\mathbf{j} + ze\mathbf{k}$ para las siguientes trayectorias desde $(1, 0, 0)$ hasta $(1, 0, 1)$.

- a. El segmento de recta $x = 1, y = 0, 0 \leq z \leq 1$
- b. La hélice $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + (t/2\pi)\mathbf{k}, 0 \leq t \leq 2\pi$
- c. El eje x desde $(1, 0, 0)$ hasta $(0, 0, 0)$ seguido de la parábola $z = x^2, y = 0$ desde $(0, 0, 0)$ hasta $(1, 0, 1)$.

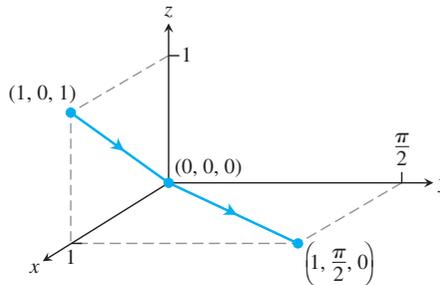


30. **Trabajo a lo largo de trayectorias diferentes** Determine el trabajo realizado por $\mathbf{F} = ey\mathbf{i} + (xze^{yz} + z \cos y)\mathbf{j} + (xye^{yz} + \sin y)\mathbf{k}$ sobre las siguientes trayectorias, desde $(1, 0, 1)$ hasta $(1, \pi/2, 0)$.

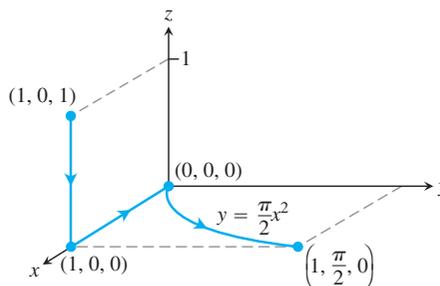
- a. El segmento de recta $x = 1, y = \pi t/2, z = 1 - t, 0 \leq t \leq 1$



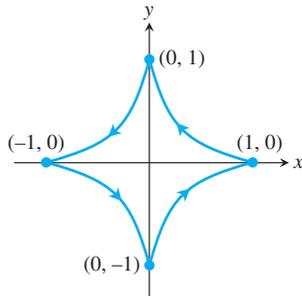
- b. El segmento de recta desde $(1, 0, 1)$ hasta el origen, seguido del segmento de recta desde el origen hasta el punto $(1, \pi/2, 0)$



- c. El segmento de recta desde $(1, 0, 1)$ hasta $(1, 0, 0)$, seguido por el eje x de $(1, 0, 0)$ al origen, seguido por la parábola $y = \pi x^2/2, z = 0$ desde allí hasta $(1, \pi/2, 0)$



- 31. Dos maneras de evaluar una integral de trabajo** Sea $\mathbf{F} = \nabla(x^3y^2)$ y sea C la trayectoria en el plano xy , que va desde $(-1, 1)$ hasta $(1, 1)$, y que consiste en el segmento de recta desde $(-1, 1)$ hasta $(0, 0)$, seguido del segmento de recta desde $(0, 0)$ hasta $(1, 1)$. Evalúe $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ de dos maneras.
- Encuentre parametrizaciones para los segmentos que forman a C y evalúe la integral.
 - Use $f(x, y) = x^3y^2$ como una función potencial para \mathbf{F} .
- 32. Integración a lo largo de distintas trayectorias** Evalúe la integral de línea $\int_C 2x \cos y \, dx - x^2 \sin y \, dy$ a lo largo de las siguientes trayectorias C , en el plano xy .
- La parábola $y = (x - 1)^2$ desde $(1, 0)$ hasta $(0, 1)$
 - El segmento de recta desde $(-1, \pi)$ hasta $(1, 0)$
 - El eje x , desde $(-1, 0)$ hasta $(1, 0)$
 - La asteroide $\mathbf{r}(t) = (\cos^3 t)\mathbf{i} + (\sin^3 t)\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, recorrida en el sentido contrario al de las manecillas del reloj, desde $(1, 0)$ hasta regresar a $(1, 0)$



- 33. a. Forma diferencial exacta** ¿Cuál debe ser la relación entre las constantes a , b y c para que la siguiente forma diferencial sea exacta?
- $$(ay^2 + 2czx) \, dx + y(bx + cz) \, dy + (ay^2 + cx^2) \, dz$$
- b. Campo gradiente** ¿Para cuales valores de b y c ocurre que $\mathbf{F} = (y^2 + 2czx)\mathbf{i} + y(bx + cz)\mathbf{j} + (y^2 + cx^2)\mathbf{k}$ es un campo gradiente?

- 34. Gradiente de una integral de línea** Suponga que $\mathbf{F} = \nabla f$ es un campo vectorial conservativo

$$g(x, y, z) = \int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Demuestre que $\nabla g = \mathbf{F}$.

- 35. Trayectoria de menor trabajo** Se le ha pedido encontrar la trayectoria a lo largo de la cual un campo de fuerza \mathbf{F} desarrollará el menor trabajo al mover una partícula entre dos posiciones. Un rápido cálculo indica que \mathbf{F} es conservativo. ¿Qué debe responderse? Justifique su respuesta.
- 36. Un experimento revelador** Mediante un experimento, usted ha observado que un campo de fuerza \mathbf{F} desarrolla sólo la mitad de trabajo al mover un objeto a lo largo de una trayectoria C_1 desde A hasta B , que el trabajo realizado al mover el objeto a lo largo de la trayectoria C_2 , la cual también va desde A hasta B . ¿Qué puede concluir acerca de \mathbf{F} ? Justifique su respuesta.
- 37. Trabajo realizado por una fuerza constante** Demuestre que el trabajo realizado por un campo de fuerza constante $\mathbf{F} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ al mover una partícula a lo largo de cualquier trayectoria desde A hasta B es $W = \mathbf{F} \cdot \overrightarrow{AB}$.
- 38. Campo gravitacional**
- Encuentre una función potencial para el campo gravitacional

$$\mathbf{F} = -GmM \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

(G , m y M son constantes).

- Sean P_1 y P_2 puntos que se encuentran a distancias s_1 y s_2 desde el origen. Demuestre que el trabajo realizado por el campo gravitacional del inciso (a), para mover una partícula desde P_1 hasta P_2 , es

$$GmM \left(\frac{1}{s_2} - \frac{1}{s_1} \right).$$

16.4 Teorema de Green en el plano

Si \mathbf{F} es un campo conservativo, entonces sabemos que $\mathbf{F} = \nabla f$ para una función derivable f , y calculamos la integral de línea de F sobre cualquier trayectoria C que une el punto A al punto B como $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(B) - f(A)$. En esta sección deduciremos un método para calcular la integral de flujo o de trabajo sobre una curva cerrada C en el plano cuando el campo \mathbf{F} no es conservativo. Este método, conocido como el teorema de Green, nos permite convertir la integral de línea en una integral doble sobre la región encerrada por C .

Haremos el análisis en términos de campos de velocidad o de flujo de fluidos (un fluido es un líquido o un gas) porque son fáciles de imaginar. Sin embargo, el teorema de Green se aplica a cualquier campo vectorial, sin importar cualquier interpretación del campo, siempre que satisfaga ciertas condiciones. Presentaremos dos ideas nuevas del teorema de Green: *divergencia* y *densidad de circulación* alrededor de un eje perpendicular al plano.

Divergencia

Suponga que $\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$ es el campo de velocidad del flujo de un fluido en el plano y que las primeras derivadas parciales de M y N son continuas en cada punto de una región R . Sea (x, y) un punto en R , y A un pequeño rectángulo con una esquina en (x, y) que, junto con su interior, está contenido por completo en R . Los lados del rectángulo son paralelos a los ejes coordenados y tienen longitudes Δx y Δy . Suponga que los componentes M y N no

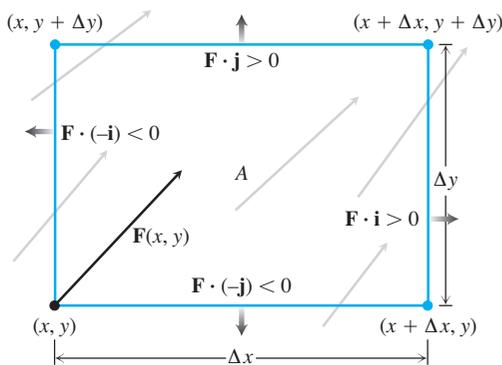


FIGURA 16.26 La tasa a la que el fluido sale del rectángulo A a través de la orilla inferior en la dirección de la normal hacia fuera $-\mathbf{j}$ es aproximadamente $\mathbf{F}(x, y) \cdot (-\mathbf{j})\Delta x$, la cual es negativa para el campo vectorial \mathbf{F} mostrado aquí. Para aproximar la tasa del flujo en el punto (x, y) , calculamos las tasas (aproximadas) del flujo a través de cada lado en la dirección de las flechas sombreadas, sumamos esas tasas y luego dividimos la suma entre el área de A . Tomando el límite como $\Delta x \rightarrow 0$ y $\Delta y \rightarrow 0$ obtenemos la tasa del flujo por unidad de área.

cambian de signo a través de la pequeña región contenida en el rectángulo A . La tasa a la que el fluido sale del rectángulo por la orilla inferior es aproximadamente (figura 16.26)

$$\mathbf{F}(x, y) \cdot (-\mathbf{j}) \Delta x = -N(x, y)\Delta x.$$

Éste es el componente escalar de la velocidad en (x, y) en la dirección normal hacia fuera multiplicada por la longitud del segmento. Si la velocidad se expresa en metros por segundo, por ejemplo, la tasa del flujo se determinará en metros por segundo por metro o metros cuadrados por segundo. Las tasas a las cuales el fluido cruza los otros tres lados en las direcciones de sus normales hacia fuera se calculan de manera similar. Las tasas del flujo serían positivas o negativas, dependiendo de los signos de los componentes de \mathbf{F} . Aproximamos la tasa del flujo neto a través de la frontera rectangular de A sumando las tasas de flujo a través de los cuatro lados, como se muestra en los siguientes productos punto.

- Tasas de flujo de salida**
- Arriba: $\mathbf{F}(x, y + \Delta y) \cdot \mathbf{j} \Delta x = N(x, y + \Delta y)\Delta x$
 - Abajo: $\mathbf{F}(x, y) \cdot (-\mathbf{j}) \Delta x = -N(x, y)\Delta x$
 - Derecha: $\mathbf{F}(x + \Delta x, y) \cdot \mathbf{i} \Delta y = M(x + \Delta x, y)\Delta y$
 - Izquierda: $\mathbf{F}(x, y) \cdot (-\mathbf{i}) \Delta y = -M(x, y)\Delta y.$

Al sumar los lados opuestos tenemos

$$\text{Arriba y abajo: } (N(x, y + \Delta y) - N(x, y))\Delta x \approx \left(\frac{\partial N}{\partial y} \Delta y\right)\Delta x$$

$$\text{Izquierda y derecha: } (M(x + \Delta x, y) - M(x, y))\Delta y \approx \left(\frac{\partial M}{\partial x} \Delta x\right)\Delta y.$$

Al sumar las dos últimas ecuaciones obtenemos el efecto neto de las tasas del flujo, o el

$$\text{Flujo a través de la frontera del rectángulo} \approx \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right)\Delta x\Delta y.$$

Ahora dividimos entre $\Delta x\Delta y$ para estimar el flujo total por unidad de área o *densidad de flujo* para el rectángulo:

$$\frac{\text{Flujo a través del rectángulo frontera}}{\text{Área del rectángulo}} \approx \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right).$$

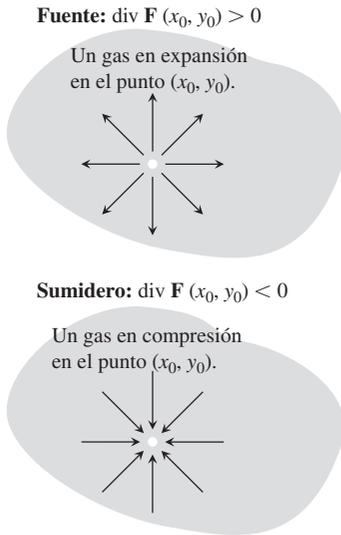


FIGURA 16.27 Si un gas se expande en el punto (x_0, y_0) , las líneas de flujo tienen divergencia positiva; si el gas se comprime, la divergencia es negativa.

Por último, hacemos que Δx y Δy tiendan a cero para definir lo que llamaremos la densidad de flujo de \mathbf{F} en el punto (x, y) . En matemáticas, la densidad del flujo se conoce como la *divergencia* de \mathbf{F} . La notación para esto es $\text{div } \mathbf{F}$, que se lee “divergencia de \mathbf{F} ” o “ $\text{div } \mathbf{F}$ ”.

DEFINICIÓN La **divergencia (densidad de flujo)** de un campo vectorial $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ en el punto (x, y) es

$$\text{div } \mathbf{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}. \quad (1)$$

A diferencia de un líquido, un gas es compresible, y la divergencia de su campo de velocidad mide cuánto se expande o se comprime en cada punto. De forma intuitiva, si un gas se expande en el punto (x_0, y_0) , las líneas de flujo divergen en ese punto (de ahí su nombre), y como el gas está saliendo de un rectángulo pequeño alrededor de (x_0, y_0) , la divergencia de \mathbf{F} en (x_0, y_0) es positiva. Si el gas se comprime en vez de expandirse, la divergencia es negativa (figura 16.27).

EJEMPLO 1 Los siguientes campos vectoriales representan la velocidad de un gas que fluye en el plano xy . Determine la divergencia de cada campo vectorial e interprete su significado físico. La figura 16.28 representa los campos vectoriales.

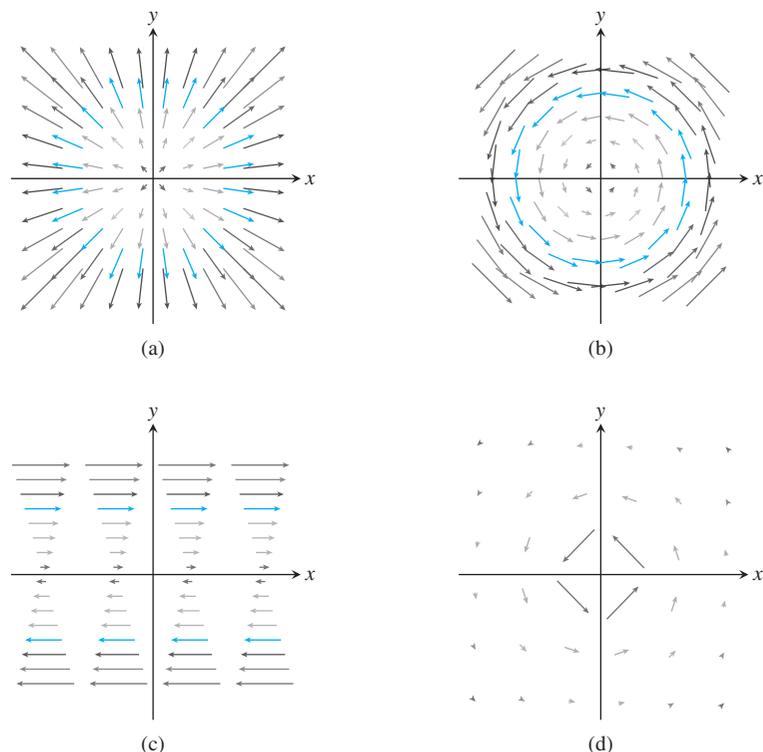


FIGURA 16.28 Campos de velocidad de un gas que fluye en el plano (ejemplo 1).

(a) *Expansión o compresión uniforme:* $\mathbf{F}(x, y) = cx\mathbf{i} + cy\mathbf{j}$

(b) *Rotación uniforme:* $\mathbf{F}(x, y) = -cy\mathbf{i} + cx\mathbf{j}$

(c) *Flujo cortante:* $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i}$

(d) *Efecto remolino:* $\mathbf{F}(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}\mathbf{i} + \frac{x}{x^2 + y^2}\mathbf{j}$

Solución

- (a) $\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(cx) + \frac{\partial}{\partial y}(cy) = 2c$: si $c > 0$, el gas está sujeto a una expansión uniforme; si $c < 0$, experimenta una compresión uniforme.
- (b) $\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(-cy) + \frac{\partial}{\partial y}(cx) = 0$: el gas ni se expande ni se comprime.
- (c) $\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(y) = 0$: el gas ni se expande ni se comprime.
- (d) $\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-y}{x^2 + y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = 0$: otra vez, la divergencia es cero en todos los puntos del dominio del campo de velocidad.

Los casos (b), (c) y (d) de la figura 16.28 son modelos posibles para los flujos bidimensionales de líquidos. En la dinámica de fluidos, cuando el campo de velocidad de un líquido que fluye siempre tiene una divergencia igual a cero, como en estos casos, se dice que el líquido es **incompresible**.

Giro alrededor de un eje: El componente k del rotacional

La segunda idea que necesitamos para el teorema de Green tiene que ver con la forma de medir, en un punto, el giro de una rueda con paletas, con el eje perpendicular al plano, en un fluido que se mueve en una región plana. Esto nos da una idea de la forma en que circula un fluido con respecto a los ejes, localizados en diferentes puntos, perpendiculares a la región. En ocasiones, los físicos se refieren a esto como la *densidad de circulación* de un campo vectorial \mathbf{F} en un punto. Para obtenerlo, regresemos al campo de velocidades

$$\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$$

y al rectángulo A de la figura 16.29 (donde suponemos que los componentes de \mathbf{F} son positivos).

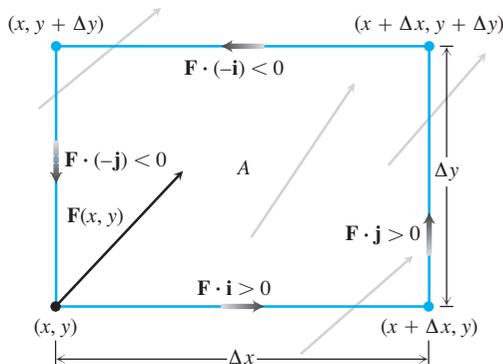


FIGURA 16.29 La tasa a la que el fluido fluye a través del rectángulo A por la orilla inferior en la dirección \mathbf{i} es aproximadamente $\mathbf{F}(x, y) \cdot \mathbf{i} \Delta x$, la cual es positiva para el campo vectorial \mathbf{F} mostrado aquí. Para aproximar la tasa de circulación en el punto (x, y) , calculamos las tasas (aproximadas) del flujo a través de cada orilla en la dirección de las flechas sombreadas, sumamos esas tasas, y luego dividimos la suma entre el área de A . Al tomar el límite como $\Delta x \rightarrow 0$ y $\Delta y \rightarrow 0$ obtenemos la tasa de circulación por unidad de área.

La tasa de circulación de \mathbf{F} a lo largo de la frontera A es la suma de las tasas de flujo a lo largo de los lados en dirección tangencial. Para la orilla inferior, la tasa de flujo es aproximadamente

$$\mathbf{F}(x, y) \cdot \mathbf{i} \Delta x = M(x, y)\Delta x.$$

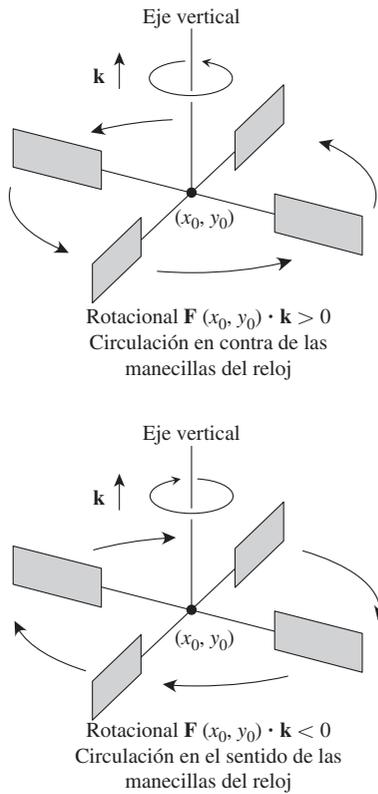


FIGURA 16.30 En el flujo de un fluido incompresible sobre una región plana, el componente \mathbf{k} del rotacional mide la tasa de giro del fluido en un punto. El componente \mathbf{k} del rotacional es positivo en los puntos donde la rotación va en sentido contrario al de las manecillas del reloj y negativo donde la rotación es en el sentido de las manecillas.

Esto es el componente escalar de la velocidad $\mathbf{F}(x, y)$ en la dirección del vector tangente \mathbf{i} multiplicado por la longitud del segmento. Las tasas de flujo son positivas o negativas dependiendo de los componentes de \mathbf{F} . Aproximamos la tasa de circulación neta alrededor de la frontera rectangular de A sumando las tasas de flujo a lo largo de los cuatro lados, como lo indican los siguientes productos punto.

$$\text{Arriba: } \mathbf{F}(x, y + \Delta y) \cdot (-\mathbf{i}) \Delta x = -M(x, y + \Delta y) \Delta x$$

$$\text{Abajo: } \mathbf{F}(x, y) \cdot \mathbf{i} \Delta x = M(x, y) \Delta x$$

$$\text{Derecha: } \mathbf{F}(x + \Delta x, y) \cdot \mathbf{j} \Delta y = N(x + \Delta x, y) \Delta y$$

$$\text{Izquierda: } \mathbf{F}(x, y) \cdot (-\mathbf{j}) \Delta y = -N(x, y) \Delta y.$$

Sumamos las expresiones correspondientes a los lados opuestos para obtener

$$\text{Arriba y abajo: } -(M(x, y + \Delta y) - M(x, y)) \Delta x \approx -\left(\frac{\partial M}{\partial y} \Delta y\right) \Delta x$$

$$\text{Derecha e izquierda: } (N(x + \Delta x, y) - N(x, y)) \Delta y \approx \left(\frac{\partial N}{\partial x} \Delta x\right) \Delta y.$$

Al sumar estas dos últimas ecuaciones tenemos la circulación neta con orientación en el sentido contrario al de las manecillas del reloj y, dividiendo entre $\Delta x \Delta y$, tenemos una estimación de la densidad de circulación para el rectángulo:

$$\frac{\text{Circulación alrededor del rectángulo}}{\text{área del rectángulo}} \approx \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}.$$

Sea que Δx y Δy tiendan a cero para definir lo que llamamos *densidad de circulación* de \mathbf{F} en el punto (x, y) .

La orientación positiva de la densidad de circulación para el plano es la rotación en sentido contrario al de las manecillas del reloj con respecto al eje vertical, viendo al plano xy hacia abajo desde la punta del vector unitario \mathbf{k} (figura 16.30). El valor de la densidad de circulación es el componente \mathbf{k} de un vector de circulación más general que definiremos en la sección 16.7, llamado el *rotacional* del campo vectorial \mathbf{F} . Para el teorema de Green sólo necesitamos el componente \mathbf{k} .

DEFINICIÓN La **densidad de circulación** de un campo vectorial $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ en el punto (x, y) es la expresión escalar

$$\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}. \quad (2)$$

Esta expresión también se llama **el componente \mathbf{k} del rotacional**, representado por $(\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k}$.

Si el agua se mueve sobre una región del plano xy en una capa delgada, entonces el componente k del rotacional en el punto (x_0, y_0) nos brinda una forma de medir la rapidez y dirección de giro de una pequeña rueda con paletas colocada en el agua en (x_0, y_0) con su eje perpendicular al plano, paralelo a \mathbf{k} (figura 16.30).

EJEMPLO 2 Encuentre la densidad de circulación e interprete lo que significa para todos los vectores del ejemplo 1.

Solución

(a) *Expansión uniforme:* $(\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} = \frac{\partial}{\partial x}(cy) - \frac{\partial}{\partial y}(cx) = 0$. El gas no circula a escalas muy pequeñas.

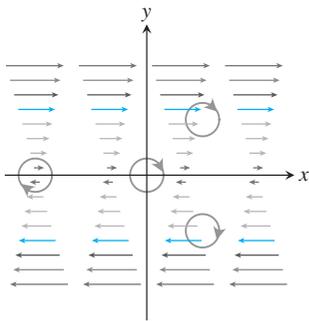


FIGURA 16.31 Un flujo cortante empuja el fluido en el sentido de las manecillas del reloj alrededor de cada punto (ejemplo 2c).

(b) *Rotación:* $(\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} = \frac{\partial}{\partial x}(cx) - \frac{\partial}{\partial y}(-cy) = 2c$. La densidad de circulación constante indica rotación en todos los puntos. Si $c > 0$, la rotación es en el sentido contrario al de las manecillas del reloj; si $c < 0$, la rotación es en el sentido de las manecillas del reloj.

(c) *Corte:* $(\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} = -\frac{\partial}{\partial y}(y) = -1$. La densidad de circulación es constante y negativa, de manera que un disco que flota en el agua experimenta algo como un flujo que lo corta en giros en el sentido de las manecillas del reloj. La tasa de rotación es la misma en cada punto. El efecto promedio del flujo del fluido es empujar el fluido en el sentido de las manecillas del reloj alrededor de cada uno de los pequeños círculos mostrados en la figura 16.31.

(d) *Remolino:*

$$(\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0.$$

La densidad de circulación es 0 en todos los puntos lejanos al origen (donde el campo vectorial es indefinido y tiene lugar el efecto remolino), y el gas no está circulando en los puntos donde el campo vectorial está definido. ■

Dos formas del teorema de Green

De alguna forma, el teorema de Green dice que en condiciones adecuadas, el flujo hacia fuera de un campo vectorial a través de una curva cerrada simple en el plano es igual a la doble integral de la divergencia del campo sobre la región encerrada por la curva. Recordemos las fórmulas para el flujo de las ecuaciones (3) y (4) de la sección 16.2 y que una curva simple no se cruza a sí misma.

TEOREMA 4: Teorema de Green (divergencia de flujo o forma normal) Sea C una curva suave por partes, cerrada simple y que encierra una región R en el plano. Sea $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ un campo vectorial donde M y N tienen primeras derivadas parciales en una región abierta que contiene a R . Entonces, el flujo hacia fuera de \mathbf{F} a través de C es igual a la doble integral de $\text{div } \mathbf{F}$ sobre la región R encerrada por C .

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds = \oint_C M \, dy - N \, dx = \iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \right) dx \, dy \quad (3)$$

Flujo hacia fuera Integral de divergencia

En la sección 16.3 introdujimos la notación \oint_C para la integración alrededor de una curva cerrada. Aquí daremos una explicación adicional acerca de la notación. La circulación en una curva cerrada simple C se da en dos direcciones. La curva es atravesada en el sentido contrario al de las manecillas del reloj y se dice que está *positivamente orientada*, si la región que encierra se encuentra siempre a la izquierda de un objeto cuando éste se desplaza a lo largo de la trayectoria. De lo contrario, la curva es recorrida en el sentido de las manecillas del reloj y está *negativamente orientada*. La integral de línea de un campo vectorial \mathbf{F} a lo largo de C invierte su signo si cambiamos la orientación. Nosotros usamos la notación

$$\oint_C \mathbf{F}(x, y) \cdot d\mathbf{r}$$

para la integral de línea cuando la curva cerrada simple C es atravesada en contra del movimiento de las manecillas del reloj, con su orientación positiva.

La segunda forma del teorema de Green dice que la circulación en sentido contrario al de las manecillas del reloj de un campo vectorial alrededor de una curva cerrada simple es la doble integral del componente \mathbf{k} del rotacional del campo sobre la región encerrada por la curva. Recordemos la ecuación (2) que define la circulación en la sección 16.2.

TEOREMA 5: Teorema de Green (circulación rotacional o forma tangencial)

Sea C una curva suave por partes, cerrada simple que encierra una región R en el plano. Sea $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ un campo vectorial donde M y N tienen primeras derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene a R . Entonces la circulación en contra de las manecillas del reloj de \mathbf{F} alrededor de C es la doble integral de $(\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k}$ sobre la región R .

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds = \oint_C M \, dx + N \, dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx \, dy \quad (4)$$

Circulación en sentido contrario
al de las manecillas del reloj

Integral del rotacional

Las dos formas del teorema de Green son equivalentes. Al aplicar la ecuación (3) al campo $\mathbf{G}_1 = N\mathbf{i} - M\mathbf{j}$ se obtiene la ecuación (4), y al aplicar la ecuación (4) a $\mathbf{G}_2 = -N\mathbf{i} + M\mathbf{j}$ se obtiene la ecuación (3).

Ambas formas del teorema de Green se consideran como dos generalizaciones bidimensionales del teorema del cambio neto de la sección 5.4. El flujo hacia fuera de \mathbf{F} a través de C , definido por la integral de línea del lado izquierdo de la ecuación (3), es la integral de su tasa de cambio (densidad de flujo) sobre la región R encerrada por C , la cual es la doble integral del lado derecho de la ecuación (3). Asimismo, la circulación de \mathbf{F} en contra de las manecillas del reloj alrededor de C , definida por la integral de línea del lado izquierdo de la ecuación (4), es la integral de línea de su tasa de cambio (densidad de circulación) sobre la región R encerrada por C , la cual es la doble integral del lado derecho de la ecuación (4).

EJEMPLO 3 Verifique las dos formas del teorema de Green para el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y) = (x - y)\mathbf{i} + x\mathbf{j}$$

y la región R acotada por el círculo unitario

$$C: \mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Solución La evaluación de $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ y la diferenciación de sus componentes nos dan

$$M = \cos t - \sin t, \quad dx = d(\cos t) = -\sin t \, dt,$$

$$N = \cos t, \quad dy = d(\sin t) = \cos t \, dt,$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial M}{\partial y} = -1, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial N}{\partial y} = 0.$$

Los dos lados de la ecuación (3) son

$$\oint_C M \, dy - N \, dx = \int_{t=0}^{t=2\pi} (\cos t - \sin t)(\cos t \, dt) - (\cos t)(-\sin t \, dt)$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt = \pi$$

$$\iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \right) dx \, dy = \iint_R (1 + 0) \, dx \, dy$$

$$= \iint_R dx \, dy = \text{área dentro del círculo unitario} = \pi.$$

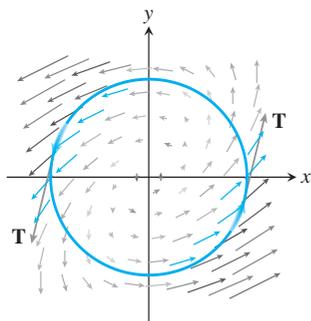


FIGURA 16.32 El campo vectorial del ejemplo 3 tiene una circulación en el sentido contrario al de las manecillas del reloj de 2π alrededor del círculo unitario.

Los dos lados de la ecuación (4) son

$$\begin{aligned} \oint_C M dx + N dy &= \int_{t=0}^{t=2\pi} (\cos t - \operatorname{sen} t)(-\operatorname{sen} t dt) + (\cos t)(\cos t dt) \\ &= \int_0^{2\pi} (-\operatorname{sen} t \cos t + 1) dt = 2\pi \\ \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy &= \iint_R (1 - (-1)) dx dy = 2 \iint_R dx dy = 2\pi. \end{aligned}$$

La figura 16.32 muestra el campo vectorial y la circulación alrededor de C . ■

Uso del teorema de Green para evaluar integrales de línea

Si construimos una curva cerrada C uniendo varias curvas por sus extremos, el proceso de evaluación de la integral de línea sobre C es laborioso, ya que habría que evaluar varias integrales de línea. Sin embargo, si C acota una región R para la que se aplica el teorema de Green, usamos este teorema para cambiar la integral de línea sobre C por una doble integral sobre R .

EJEMPLO 4 Evalúe la integral de línea

$$\oint_C xy dy - y^2 dx,$$

donde C es el cuadrado delimitado en el primer cuadrante por las rectas $x = 1$ y $y = 1$.

Solución Usamos cualquier forma del teorema de Green para cambiar la integral de línea por una doble integral sobre el cuadrado.

1. Con la forma normal, ecuación (3): si $M = xy$, $N = y^2$, y C y R son la frontera y el interior del cuadrado, entonces

$$\begin{aligned} \oint_C xy dy - y^2 dx &= \iint_R (y + 2y) dx dy = \int_0^1 \int_0^1 3y dx dy \\ &= \int_0^1 \left[3xy \right]_{x=0}^{x=1} dy = \int_0^1 3y dy = \left. \frac{3}{2}y^2 \right|_0^1 = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

2. Con la forma tangencial ecuación (4): si $M = -y^2$ y $N = xy$, tenemos el mismo resultado:

$$\oint_C -y^2 dx + xy dy = \iint_R (y - (-2y)) dx dy = \frac{3}{2}. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 5 Calcule el flujo hacia fuera del campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + y^2\mathbf{j}$ a través del cuadrado acotado por las rectas $x = \pm 1$ y $y = \pm 1$.

Solución El cálculo del flujo con una integral de línea requiere de cuatro integraciones, una por cada lado del cuadrado. Con el teorema de Green cambiamos la integral de línea por una integral doble. Si $M = x$, $N = y^2$, C es el cuadrado y R su interior, tenemos que

$$\begin{aligned} \text{Flujo} &= \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds = \oint_C M \, dy - N \, dx \\ &= \iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \right) dx \, dy \quad \text{Teorema de Green} \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (1 + 2y) \, dx \, dy = \int_{-1}^1 \left[x + 2xy \right]_{x=-1}^{x=1} dy \\ &= \int_{-1}^1 (2 + 4y) \, dy = \left[2y + 2y^2 \right]_{-1}^1 = 4. \end{aligned}$$

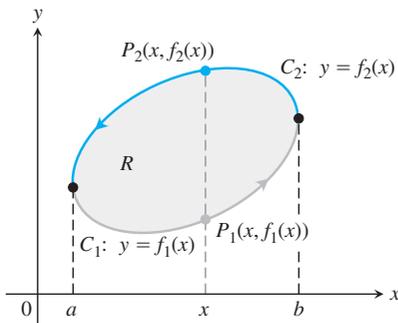


FIGURA 16.33 La curva frontera C está formada por C_1 , la gráfica de $y = f_1(x)$ y C_2 , la gráfica de $y = f_2(x)$.

Demostración del teorema de Green para regiones especiales

Sea C una curva suave cerrada simple en el plano xy , con la propiedad de que unas rectas paralelas a los ejes corten a la curva en no más de dos puntos. Sea R la región encerrada por C y supongamos que M , N y sus primeras derivadas parciales son continuas en todo punto de alguna región abierta que contiene tanto a C como a R . Queremos demostrar la forma de la circulación rotacional del teorema de Green,

$$\oint_C M \, dx + N \, dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx \, dy. \quad (5)$$

La figura 16.33 indica que C está formada por dos partes dirigidas:

$$C_1: y = f_1(x), \quad a \leq x \leq b, \quad C_2: y = f_2(x), \quad b \geq x \geq a.$$

Para cualquier x entre a y b , integramos $\partial M/\partial y$ con respecto a y desde $y = f_1(x)$ hasta $y = f_2(x)$, para obtener

$$\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial M}{\partial y} dy = M(x, y) \Big|_{y=f_1(x)}^{y=f_2(x)} = M(x, f_2(x)) - M(x, f_1(x)).$$

Luego integramos con respecto a x desde a hasta b :

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial M}{\partial y} dy \, dx &= \int_a^b [M(x, f_2(x)) - M(x, f_1(x))] \, dx \\ &= - \int_b^a M(x, f_2(x)) \, dx - \int_a^b M(x, f_1(x)) \, dx \\ &= - \int_{C_2} M \, dx - \int_{C_1} M \, dx \\ &= - \oint_C M \, dx. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\oint_C M \, dx = \iint_R \left(- \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx \, dy. \quad (6)$$

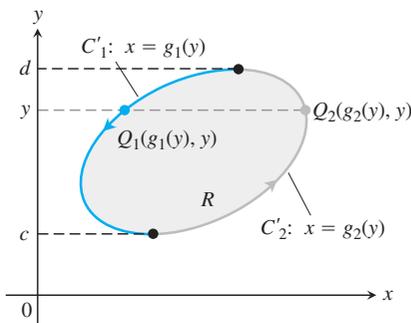


FIGURA 16.34 La curva frontera C está formada por C_1' , la gráfica de $x = g_1(y)$ y C_2' , la gráfica de $x = g_2(y)$.

La ecuación (6) es la mitad del resultado que necesitamos para la ecuación (5). Deducimos la otra mitad integrando $\partial N/\partial x$ primero con respecto a x y luego con respecto a y , como lo sugiere

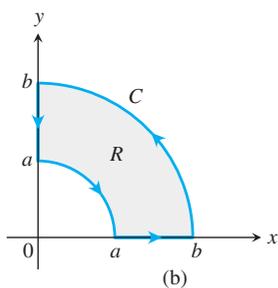
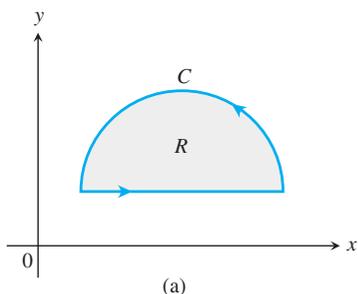


FIGURA 16.35 Otras regiones a las que se aplica el teorema de Green.

la figura 16.34. Esta figura muestra a la curva C de la figura 16.33, descompuesta en dos partes dirigidas $C_1: x = g_1(y), d \geq y \geq c$ y $C_2: x = g_2(y), c \leq y \leq d$. El resultado de esta doble integración es

$$\oint_C N dy = \iint_R \frac{\partial N}{\partial x} dx dy. \quad (7)$$

Al sumar las ecuaciones (6) y (7) obtenemos la ecuación (5) y esto concluye la demostración. ■

El teorema de Green también se aplica a otras regiones más generales, como las que se ilustran en las figuras 16.35 y 16.36, pero aquí no se hará la demostración. Observe que la región de la figura 16.36 no es simplemente conexa. Las curvas C_1 y C_h están orientadas en su frontera, de manera que la región R está siempre del lado izquierdo cuando las curvas son recorridas en las direcciones que se indican. Con esta convención, el teorema de Green es válido para regiones que no son simplemente conexas.

Así como definimos el teorema de Green para el plano xy , también se aplica para cualquier región R contenida en el plano limitado en el espacio por una curva C . Mostraremos cómo se expresa la doble integral sobre R para esta forma más generalizada del teorema de Green en la sección 16.7.

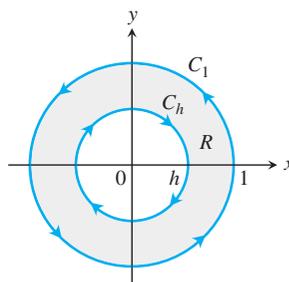


FIGURA 16.36 El teorema de Green se aplica a una región anular R sumando las integrales de línea a lo largo de las fronteras C_1 y C_h en la dirección mostrada.

Ejercicios 16.4

Verificación del teorema de Green

En los ejercicios 1 a 4, verifique la conclusión del teorema de Green, evaluando los dos lados de las ecuaciones (3) y (4) para el campo $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$. En cada caso, considere como dominio de integración al disco R dado por $x^2 + y^2 \leq a^2$ y a su circunferencia frontera C dada por $\mathbf{r} = (a \cos t)\mathbf{i} + (a \sin t)\mathbf{j}, 0 \leq t \leq 2\pi$.

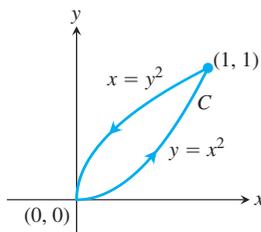
1. $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$
2. $\mathbf{F} = y\mathbf{i}$
3. $\mathbf{F} = 2x\mathbf{i} - 3y\mathbf{j}$
4. $\mathbf{F} = -x^2y\mathbf{i} + xy^2\mathbf{j}$

Circulación y flujo

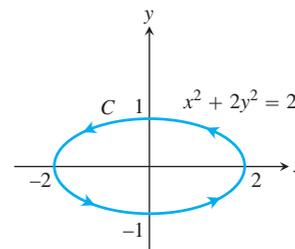
En los ejercicios 5 a 14, use el teorema de Green para calcular la circulación en sentido contrario al de las manecillas del reloj y el flujo hacia fuera para el campo \mathbf{F} y la curva C .

5. $\mathbf{F} = (x - y)\mathbf{i} + (y - x)\mathbf{j}$
 C : el cuadrado acotado por $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1$
6. $\mathbf{F} = (x^2 + 4y)\mathbf{i} + (x + y^2)\mathbf{j}$
 C : el cuadrado acotado por $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1$
7. $\mathbf{F} = (y^2 - x^2)\mathbf{i} + (x^2 + y^2)\mathbf{j}$
 C : el triángulo acotado por $y = 0, x = 3, y = x$
8. $\mathbf{F} = (x + y)\mathbf{i} - (x^2 + y^2)\mathbf{j}$
 C : el triángulo acotado por $y = 0, x = 1, y = x$

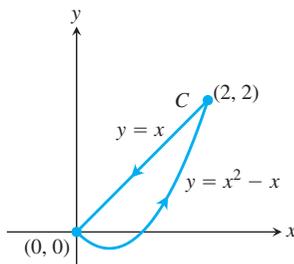
9. $\mathbf{F} = (xy + y^2)\mathbf{i} + (x - y)\mathbf{j}$



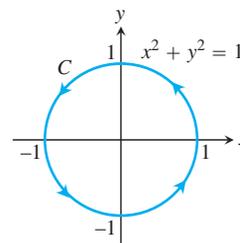
10. $\mathbf{F} = (x + 3y)\mathbf{i} + (2x - y)\mathbf{j}$



11. $\mathbf{F} = x^3y^2\mathbf{i} + \frac{1}{2}x^4y\mathbf{j}$



12. $\mathbf{F} = \frac{x}{1 + y^2}\mathbf{i} + (\tan^{-1}y)\mathbf{j}$



13. $\mathbf{F} = (x + e^x \operatorname{sen} y)\mathbf{i} + (x + e^x \cos y)\mathbf{j}$

C: el lazo a la derecha de la lemniscata $r^2 = \cos 2\theta$

14. $\mathbf{F} = \left(\tan^{-1} \frac{y}{x}\right)\mathbf{i} + \ln(x^2 + y^2)\mathbf{j}$

C: la frontera de la región definida por las desigualdades en coordenadas polares $1 \leq r \leq 2, \leq \theta \leq \pi$ 15. Calcule la circulación en contra de las manecillas del reloj y el flujo hacia fuera del campo $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + y^2\mathbf{j}$ alrededor y sobre la frontera de la región encerrada por las curvas $y = x^2$ y $y = x$ en el primer cuadrante.16. Calcule la circulación en contra de las manecillas del reloj y el flujo hacia fuera del campo $\mathbf{F} = (-\operatorname{sen} y)\mathbf{i} + (x \cos y)\mathbf{j}$ alrededor y sobre el cuadrado delimitado en el primer cuadrante por las líneas $x = \pi/2$ y $y = \pi/2$.

17. Calcule el flujo hacia fuera del campo

$$\mathbf{F} = \left(3xy - \frac{x}{1 + y^2}\right)\mathbf{i} + (e^x + \tan^{-1} y)\mathbf{j}$$

a través de la cardiode $r = a(1 + \cos \theta)$, $a > 0$.18. Calcule la circulación en sentido contrario al de las manecillas del reloj de $\mathbf{F} = (y + e^x \ln y)\mathbf{i} + (e^x/y)\mathbf{j}$ alrededor de la frontera de la región que está acotada arriba por la curva $y = 3 - x^2$ y abajo por la curva $y = x^4 + 1$.

Trabajo

En los ejercicios 19 y 20, determine el trabajo realizado por \mathbf{F} al mover una vez una partícula en contra de las manecillas del reloj, alrededor de la curva dada.

19. $\mathbf{F} = 2xy^3\mathbf{i} + 4x^2y^2\mathbf{j}$

C: la frontera de la región "triangular" en el primer cuadrante encerrada por el eje x , la recta $x = 1$ y la curva $y = x^3$.

20. $\mathbf{F} = (4x - 2y)\mathbf{i} + (2x - 4y)\mathbf{j}$

C: la circunferencia $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$

Uso del teorema de Green

Aplique el teorema de Green para evaluar las integrales de los ejercicios 21 a 24.

21. $\oint_C (y^2 dx + x^2 dy)$

C: el triángulo acotado por $x = 0$, $x + y = 1$, $y = 0$

22. $\oint_C (3y dx + 2x dy)$

C: la frontera de $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \operatorname{sen} x$

23. $\oint_C (6y + x) dx + (y + 2x) dy$

C: la circunferencia $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$

24. $\oint_C (2x + y^2) dx + (2xy + 3y) dy$

C: cualquier curva cerrada simple en el plano, para el cual se cumple el teorema de Green.

Cálculo de áreas con el teorema de Green Si una curva cerrada simple C en el plano y la región R que encierra satisfacen las hipótesis del teorema de Green, el área R está dada por

Fórmula del área con el teorema de Green

$$\text{Área de } R = \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx$$

La razón es que por la ecuación (3), utilizada hacia atrás,

$$\begin{aligned} \text{Área de } R &= \iint_R dy dx = \iint_R \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) dy dx \\ &= \oint_C \frac{1}{2} x dy - \frac{1}{2} y dx. \end{aligned}$$

Use la fórmula del área del teorema de Green, presentada arriba, para determinar el área de las regiones encerradas por las curvas de los ejercicios 25 a 28.

25. La circunferencia $\mathbf{r}(t) = (a \cos t)\mathbf{i} + (a \operatorname{sen} t)\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.26. La elipse $\mathbf{r}(t) = (a \cos t)\mathbf{i} + (b \operatorname{sen} t)\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.27. La astroide $\mathbf{r}(t) = (\cos^3 t)\mathbf{i} + (\operatorname{sen}^3 t)\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.28. Un arco de la cicloide $x = t - \operatorname{sen} t$, $y = 1 - \cos t$.29. Sea C la frontera de una región sobre la cual se cumple el teorema de Green. Use el teorema de Green para calcular

a. $\oint_C f(x) dx + g(y) dy$

b. $\oint_C ky dx + hx dy$ (k y h son constantes).

30. **Integral que sólo depende del área** Demuestre que el valor de

$$\oint_C xy^2 dx + (x^2y + 2x) dy$$

alrededor de cualquier cuadrado sólo depende del área del cuadrado y no de su localización en el plano.

31. ¿Qué tiene de especial la siguiente integral

$$\oint_C 4x^3y dx + x^4 dy?$$

Justifique su respuesta.

32. ¿Qué tiene de especial la siguiente integral

$$\oint_C -y^3 dy + x^3 dx?$$

Justifique su respuesta.

33. **Área como una integral de línea** Demuestre que si R es una región en el plano, acotada por una curva C simple, cerrada y suave por partes, entonces,

$$\text{Área de } R = \oint_C x dy = - \oint_C y dx.$$

34. **Integral definida como una integral de línea** Suponga que una función no negativa $y = f(x)$ tiene una primera derivada continua en $[a, b]$. Sea C la frontera de la región en el plano xy acotada por debajo por el eje x , por arriba por la gráfica de la función f y a los lados por las rectas $x = a$ y $x = b$. Demuestre que

$$\int_a^b f(x) dx = - \oint_C y dx.$$

35. Área y centroide Sea A el área y \bar{x} la coordenada x del centroide de la región R acotada por una pieza de una curva C simple cerrada suave por partes en el plano xy . Demuestre que

$$\frac{1}{2} \oint_C x^2 dy = - \oint_C xy dx = \frac{1}{3} \oint_C x^2 dy - xy dx = A\bar{x}.$$

36. Momento de inercia Sea I_y el momento de inercia con respecto al eje y de la región del ejercicio 35. Demuestre que

$$\frac{1}{3} \oint_C x^3 dy = - \oint_C x^2 y dx = \frac{1}{4} \oint_C x^3 dy - x^2 y dx = I_y.$$

37. Teorema de Green y ecuación de Laplace Suponiendo que todas las derivadas necesarias existen y son continuas, demuestre que si $f(x, y)$ satisface la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0,$$

entonces

$$\oint_C \frac{\partial f}{\partial y} dx - \frac{\partial f}{\partial x} dy = 0$$

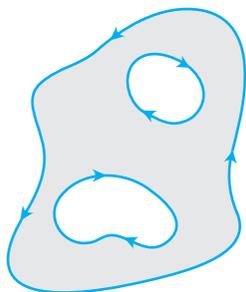
para todas las curvas cerradas C , a las cuales se aplica el teorema de Green. (Lo contrario es verdadero: si la integral de línea siempre se anula, entonces f satisface la ecuación de Laplace).

38. Maximización del trabajo Entre todas las curvas simples cerradas suaves en el plano, orientadas en sentido contrario a las manecillas del reloj, encuentre aquella para la cual el trabajo dado por

$$\mathbf{F} = \left(\frac{1}{4}x^2y + \frac{1}{3}y^3 \right) \mathbf{i} + x\mathbf{j}$$

es mayor. (Sugerencia: ¿Dónde es positivo el $(\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k}$?)

39. Región con muchos agujeros El teorema de Green se cumple para una región R con un número finito de agujeros, siempre que las curvas de la frontera sean simples cerradas y suaves, y que integremos sobre cada componente de la frontera en la dirección en que R se mantiene a la izquierda mientras avanzamos (véase la siguiente figura).



a. Sean $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ y C la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$. Evalúe la integral de flujo

$$\oint_C \nabla f \cdot \mathbf{n} ds.$$

b. Sea K una curva arbitraria suave simple cerrada en el plano, que no pase por el punto $(0, 0)$. Utilice el teorema de Green para demostrar que

$$\oint_K \nabla f \cdot \mathbf{n} ds$$

tiene dos posibles valores, dependiendo de que $(0, 0)$ esté adentro o afuera de K .

40. El criterio de Bendixson Las líneas de flujo de un flujo plano son las curvas suaves trazadas por las partículas individuales del fluido. Los vectores $\mathbf{F} = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$ del campo de velocidad del flujo son los vectores tangentes a las líneas de flujo. Demuestre que si el flujo ocurre en una región R simplemente conexa (sin agujeros ni puntos faltantes) y si $M_x + N_y \neq 0$ en todo R , entonces ninguna de las líneas de flujo en R es cerrada. En otras palabras, ninguna partícula del fluido tiene una trayectoria cerrada en R . El criterio $M_x + N_y \neq 0$ es el **criterio de Bendixson** para la inexistencia de trayectorias cerradas.

41. Demuestre la ecuación (7) para concluir la demostración del caso especial del teorema de Green.

42. Componente del rotacional para campos conservativos ¿Se puede decir algo acerca del componente del rotacional para un campo vectorial conservativo de dos dimensiones? Justifique su respuesta.

EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

En los ejercicios 43 a 46, utilice un SAC y el teorema de Green para calcular la circulación del campo \mathbf{F} en el sentido contrario al de las manecillas del reloj, alrededor de una curva cerrada simple C . Realice los siguientes pasos:

- a. Grafique C en el plano xy .
- b. Determine el integrando $(\partial N/\partial x) - (\partial M/\partial y)$ para la forma rotacional del teorema de Green.
- c. Determine los límites de integración (de la integral doble) a partir de la gráfica del inciso (a), y evalúe la integral rotacional para la circulación.

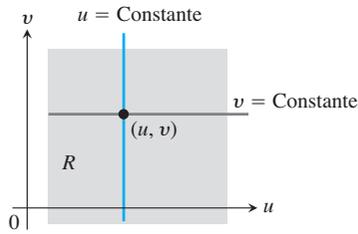
43. $\mathbf{F} = (2x - y)\mathbf{i} + (x + 3y)\mathbf{j}$, C : la elipse $x^2 + 4y^2 = 4$

44. $\mathbf{F} = (2x^3 - y^3)\mathbf{i} + (x^3 + y^3)\mathbf{j}$, C : la elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

45. $\mathbf{F} = x^{-1}e^y\mathbf{i} + (e^y \ln x + 2x)\mathbf{j}$,
 C : la frontera de la región definida por $y = 1 + x^4$ (abajo) y $y = 2$ (arriba)

46. $\mathbf{F} = xe^y\mathbf{i} + (4x^2 \ln y)\mathbf{j}$,
 C : el triángulo con vértices en $(0, 0)$, $(2, 0)$ y $(0, 4)$

16.5 Superficies y áreas



Parametrización

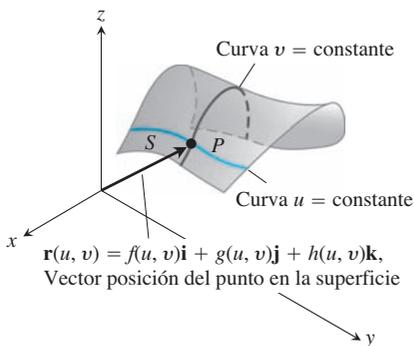


FIGURA 16.37 Una superficie parametrizada S expresada como una función vectorial de dos variables definidas en la región R .

Hemos definido de tres maneras las curvas en el plano:

- Forma explícita: $y = f(x)$
- Forma implícita: $F(x, y) = 0$
- Forma vectorial paramétrica: $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}, \quad a \leq t \leq b.$

Tenemos definiciones análogas para superficies en el espacio:

- Forma explícita: $z = f(x, y)$
- Forma implícita: $F(x, y, z) = 0.$

Existe también una forma paramétrica para superficies que dan la posición de un punto sobre una superficie como una función vectorial de dos variables. En esta sección estudiaremos esta nueva forma y la usaremos para obtener el área de una superficie mediante una integral doble. Las fórmulas de integrales dobles para áreas de superficies dadas de manera implícita o explícita se obtienen como casos especiales de la fórmula paramétrica más general.

Parametrizaciones de superficies

Sea

$$\mathbf{r}(u, v) = f(u, v)\mathbf{i} + g(u, v)\mathbf{j} + h(u, v)\mathbf{k} \tag{1}$$

una función vectorial continua definida en una región R en el plano uv y uno a uno en el interior de R (figura 16.37). El rango de \mathbf{r} es la **superficie** S definida o trazada por \mathbf{r} . La ecuación (1) junto con el dominio de R constituyen una **parametrización** de la superficie. Las variables u y v son los **parámetros**, y R es el **dominio de los parámetros**. Para simplificar nuestro análisis, tomemos a R como el rectángulo definido por desigualdades de la forma $a \leq u \leq b, c \leq v \leq d$. El hecho de que \mathbf{r} sea uno a uno en el interior de R , garantiza que S no se cruce a sí misma. Observe que la ecuación (1) es el equivalente vectorial de las tres ecuaciones paramétricas:

$$x = f(u, v), \quad y = g(u, v), \quad z = h(u, v).$$

EJEMPLO 1 Determine una parametrización del cono

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad 0 \leq z \leq 1.$$

Solución En este caso, las coordenadas cilíndricas dan una parametrización. Un punto cualquiera (x, y, z) en el cono (figura 16.38) tiene a $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ y $z = \sqrt{x^2 + y^2} = r$, con $0 \leq r \leq 1$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Al hacer $u = r$ y $v = \theta$ en la ecuación (1) se obtiene la parametrización

$$\mathbf{r}(r, \theta) = (r \cos \theta)\mathbf{i} + (r \sin \theta)\mathbf{j} + r\mathbf{k}, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

La parametrización es uno a uno en el interior del dominio de R , no así en la frontera de la punta del cono, donde $r = 0$.

EJEMPLO 2 Determine una parametrización para la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Solución Las coordenadas esféricas nos brindan lo que necesitamos. Un punto cualquiera (x, y, z) sobre la esfera (figura 16.39) tiene a $x = a \sin \phi \cos \theta, y = a \sin \phi \sin \theta$ y $z = a \cos \phi$,

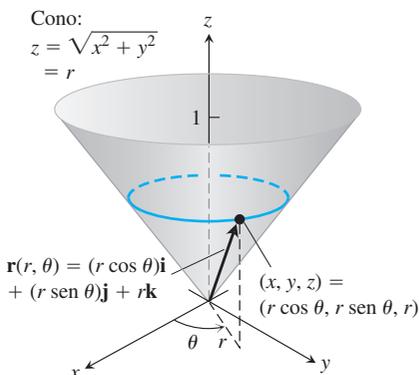


FIGURA 16.38 El cono del ejemplo 1 se parametriza usando coordenadas cilíndricas.

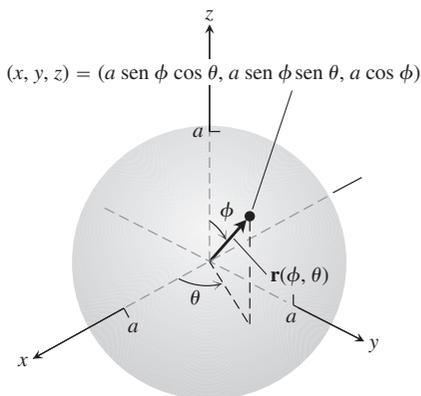


FIGURA 16.39 La esfera del ejemplo 2 se parametriza usando coordenadas esféricas.

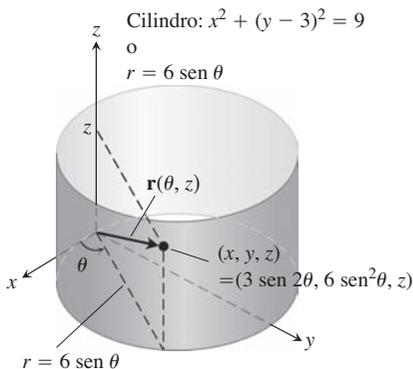


FIGURA 16.40 El cilindro del ejemplo 3 se parametriza usando coordenadas cilíndricas.

$0 \leq \phi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi$. Al hacer a $u = \phi$ y $v = \theta$ en la ecuación (1), se obtiene la parametrización

$$\mathbf{r}(\phi, \theta) = (a \text{ sen } \phi \cos \theta)\mathbf{i} + (a \text{ sen } \phi \text{ sen } \theta)\mathbf{j} + (a \cos \phi)\mathbf{k},$$

$$0 \leq \phi \leq \pi, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Otra vez, la parametrización es uno a uno en el interior del dominio de R , aun cuando no lo es en la frontera de los “polos” donde $\phi = 0$ o $\phi = \pi$. ■

EJEMPLO 3 Determine una parametrización para el cilindro

$$x^2 + (y - 3)^2 = 9, \quad 0 \leq z \leq 5.$$

Solución En coordenadas cilíndricas, un punto (x, y, z) tiene a $x = r \cos \theta, y = r \text{ sen } \theta$ y $z = z$. Para los puntos del cilindro $x^2 + (y - 3)^2 = 9$ (figura 16.40), la ecuación es la misma que la ecuación polar de la base del cilindro en el plano xy :

$$x^2 + (y^2 - 6y + 9) = 9$$

$$r^2 - 6r \text{ sen } \theta = 0 \qquad \begin{matrix} x^2 + y^2 = r^2, \\ y = r \text{ sen } \theta \end{matrix}$$

o

$$r = 6 \text{ sen } \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Por lo tanto, un punto típico del cilindro cumple con

$$x = r \cos \theta = 6 \text{ sen } \theta \cos \theta = 3 \text{ sen } 2\theta$$

$$y = r \text{ sen } \theta = 6 \text{ sen}^2 \theta$$

$$z = z.$$

Tomando a $u = \theta$ y $v = z$ en la ecuación (1) se obtiene la parametrización uno a uno

$$\mathbf{r}(\theta, z) = (3 \text{ sen } 2\theta)\mathbf{i} + (6 \text{ sen}^2 \theta)\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq z \leq 5. \quad \blacksquare$$

Área de una superficie

Nuestro objetivo es encontrar una integral doble para calcular el área de una superficie curva S , con base en la parametrización

$$\mathbf{r}(u, v) = f(u, v)\mathbf{i} + g(u, v)\mathbf{j} + h(u, v)\mathbf{k}, \quad a \leq u \leq b, \quad c \leq v \leq d.$$

Necesitamos que S sea suave para la construcción que realizaremos. La definición de suavidad implica las derivadas parciales de \mathbf{r} con respecto a u y v :

$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial u} \mathbf{i} + \frac{\partial g}{\partial u} \mathbf{j} + \frac{\partial h}{\partial u} \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_v = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial v} \mathbf{i} + \frac{\partial g}{\partial v} \mathbf{j} + \frac{\partial h}{\partial v} \mathbf{k}.$$

DEFINICIÓN Una superficie parametrizada $\mathbf{r}(u, v) = f(u, v)\mathbf{i} + g(u, v)\mathbf{j} + h(u, v)\mathbf{k}$ es **suave**, si \mathbf{r}_u y \mathbf{r}_v son continuas y $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ nunca se anula en el interior del dominio de los parámetros.

En la definición de suavidad, la condición de que $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ nunca se anule significa que ambos vectores \mathbf{r}_u y \mathbf{r}_v son diferentes de cero y que nunca están en la misma recta, de manera que siempre determinan un plano tangente a la superficie. En la frontera del dominio esta condición se vuelve más flexible, pero no afecta al cálculo del área.

Ahora considere un rectángulo pequeño ΔA_{uv} en R , con lados sobre las rectas $u = u_0$, $u = u_0 + \Delta u$, $v = v_0$, y $v = v_0 + \Delta v$ (figura 16.41). Cada lado de ΔA_{uv} se transforma en una curva sobre la superficie S y las cuatro curvas juntas acotan un “elemento de área curva” $\Delta\sigma_{uv}$. En la notación de la figura, el lado $v = v_0$ se transforma en la curva C_1 , el lado $u = u_0$ en C_2 y su vértice común (u_0, v_0) se transforma en el punto P_0 .

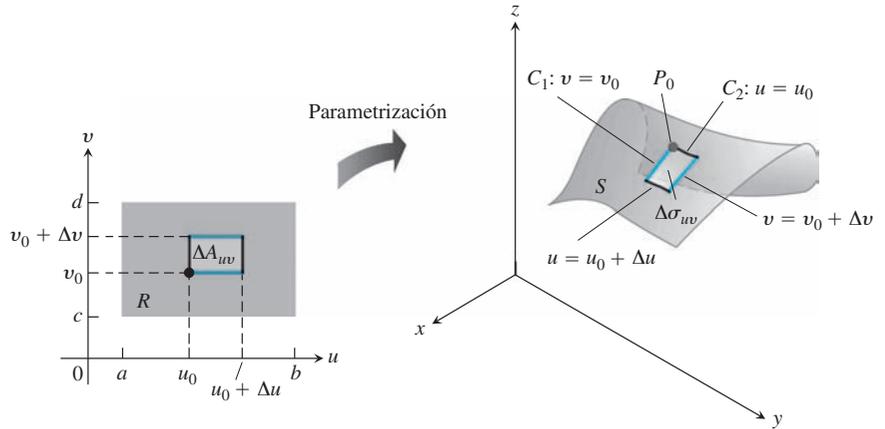


FIGURA 16.41 Un elemento de área rectangular ΔA_{uv} en el plano uv se convierte en un elemento de área curvado $\Delta\sigma_{uv}$ sobre S .

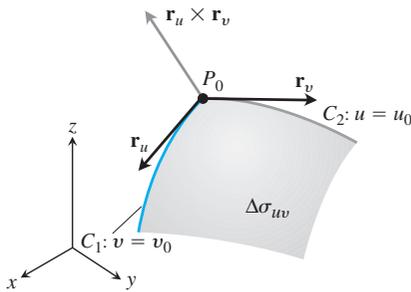


FIGURA 16.42 Una vista ampliada de un elemento de área de superficie $\Delta\sigma_{uv}$.

La figura 16.42 presenta una vista ampliada de $\Delta\sigma_{uv}$. El vector derivada parcial $\mathbf{r}_u(u_0, v_0)$ es tangente a C_1 en P_0 . Asimismo, $\mathbf{r}_v(u_0, v_0)$ es tangente a C_2 en P_0 . El producto cruz $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ es normal a la superficie en P_0 . (Aquí comenzamos a utilizar la hipótesis de que S es suave. Queremos garantizar que $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq \mathbf{0}$).

Ahora aproximamos el elemento de superficie $\Delta\sigma_{uv}$ al paralelogramo en el plano tangente, cuyos lados están determinados por los vectores $\Delta u \mathbf{r}_u$ y $\Delta v \mathbf{r}_v$ (figura 16.43). El área de este paralelogramo es

$$|\Delta u \mathbf{r}_u \times \Delta v \mathbf{r}_v| = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \Delta u \Delta v. \tag{2}$$

Una partición de la región R en el plano uv por regiones rectangulares ΔA_{uv} genera una partición de la superficie S en elementos de área de superficie $\Delta\sigma_{uv}$. Definimos el área de cada elemento de superficie $\Delta\sigma_{uv}$ como el área del paralelogramo de la ecuación (2) y sumamos todas estas áreas para calcular una aproximación del área de la superficie S :

$$\sum_n |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \Delta u \Delta v. \tag{3}$$

Cuando Δu y Δv tienden a cero de manera independiente, el número de elementos de área n tiende a ∞ y la continuidad de \mathbf{r}_u y \mathbf{r}_v garantiza que la suma de la ecuación (3) se aproxime a la integral doble $\int_c^d \int_a^b |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv$. Esta integral doble sobre la región R define el área de la superficie S .

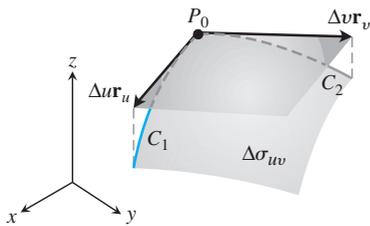


FIGURA 16.43 El área de un paralelogramo determinado por los vectores $\Delta u \mathbf{r}_u$ y $\Delta v \mathbf{r}_v$ se define como el área del elemento de área de superficie $\Delta\sigma_{uv}$.

DEFINICIÓN El área de la superficie suave

$$\mathbf{r}(u, v) = f(u, v)\mathbf{i} + g(u, v)\mathbf{j} + h(u, v)\mathbf{k}, \quad a \leq u \leq b, \quad c \leq v \leq d$$

es

$$A = \iint_R |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| dA = \int_c^d \int_a^b |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv. \tag{4}$$

Abreviamos la integral de la ecuación (4) si escribimos $d\sigma$ en lugar de $|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv$. El área diferencial de superficie $d\sigma$ es análoga a la diferencial de la longitud de arco ds de la sección 13.3.

Diferencial del área de una superficie para una superficie parametrizada

$$d\sigma = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv \quad \iint_S d\sigma \quad (5)$$

Diferencial del área de superficie
Fórmula diferencial para el área de la superficie

EJEMPLO 4 Determine el área de la superficie del cono del ejemplo 1 (figura 16.38).

Solución En el ejemplo 1 obtuvimos la parametrización

$$\mathbf{r}(r, \theta) = (r \cos \theta)\mathbf{i} + (r \sin \theta)\mathbf{j} + r\mathbf{k}, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Para aplicar la ecuación (4), primero determinamos $\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta$:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos \theta & \sin \theta & 1 \\ -r \sin \theta & r \cos \theta & 0 \end{vmatrix} \\ &= -(r \cos \theta)\mathbf{i} - (r \sin \theta)\mathbf{j} + \underbrace{(r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta)}_r \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Así, $|\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta| = \sqrt{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta + r^2} = \sqrt{2r^2} = \sqrt{2}r$. El área del cono es

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 |\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta| dr d\theta \quad \text{Ecuación (4) con } u = r, v = \theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{2}r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{2}}{2} d\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} (2\pi) = \pi\sqrt{2} \text{ unidades cuadradas. } \blacksquare \end{aligned}$$

EJEMPLO 5 Determine el área de la superficie de una esfera de radio a .

Solución Utilizamos la parametrización del ejemplo 2:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\phi, \theta) &= (a \sin \phi \cos \theta)\mathbf{i} + (a \sin \phi \sin \theta)\mathbf{j} + (a \cos \phi)\mathbf{k}, \\ 0 &\leq \phi \leq \pi, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi. \end{aligned}$$

Para $\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta$, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a \cos \phi \cos \theta & a \cos \phi \sin \theta & -a \sin \phi \\ -a \sin \phi \sin \theta & a \sin \phi \cos \theta & 0 \end{vmatrix} \\ &= (a^2 \sin^2 \phi \cos \theta)\mathbf{i} + (a^2 \sin^2 \phi \sin \theta)\mathbf{j} + (a^2 \sin \phi \cos \phi)\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta| &= \sqrt{a^4 \sin^4 \phi \cos^2 \theta + a^4 \sin^4 \phi \sin^2 \theta + a^4 \sin^2 \phi \cos^2 \phi} \\ &= \sqrt{a^4 \sin^4 \phi + a^4 \sin^2 \phi \cos^2 \phi} = \sqrt{a^4 \sin^2 \phi (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi)} \\ &= a^2 \sqrt{\sin^2 \phi} = a^2 \sin \phi, \end{aligned}$$

puesto que $\sin \phi \geq 0$ cuando $0 \leq \phi \leq \pi$. Por lo tanto, el área de la esfera es

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} a^2 \sin \phi \, d\phi \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[-a^2 \cos \phi \right]_0^{\pi} d\theta = \int_0^{2\pi} 2a^2 \, d\theta = 4\pi a^2 \quad \text{unidades cuadradas.} \end{aligned}$$

Esto concuerda con la fórmula conocida para el área de la superficie de una esfera. ■

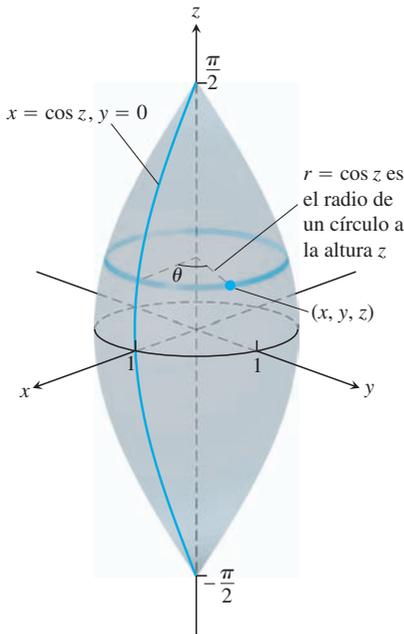


FIGURA 16.44 La superficie de un “balón de fútbol americano” del ejemplo 6 obtenida por la rotación de la curva $x = \cos z$ alrededor del eje z .

EJEMPLO 6 Sea S la superficie de un “balón de fútbol americano” formada por la rotación de la curva $x = \cos z$, $y = 0$, $-\pi/2 \leq z \leq \pi/2$ alrededor del eje z (figura 16.44). Determine una parametrización para S y calcule su área de su superficie.

Solución El ejemplo 2 sugiere la obtención de una parametrización de S con base en su rotación alrededor del eje z . Si hacemos girar un punto $(x, 0, z)$ de la curva $x = \cos z$, $y = 0$ alrededor del eje z , obtenemos una circunferencia a la altura z por encima del plano xy que tiene su centro en el eje z y tiene un radio $r = \cos z$ (figura 16.44). El punto barre la circunferencia a través de un ángulo de rotación θ , $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Dejamos que (x, y, z) sea un punto arbitrario sobre la circunferencia y definimos los parámetros $u = z$ y $v = \theta$. Así, tenemos que $x = r \cos \theta = \cos u \cos v$, $y = r \sin \theta = \cos u \sin v$, y $z = u$, lo que nos da una parametrización para S como

$$\mathbf{r}(u, v) = \cos u \cos v \mathbf{i} + \cos u \sin v \mathbf{j} + u \mathbf{k}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq v \leq 2\pi.$$

A continuación usamos la ecuación (5) para obtener el área de la superficie S . La derivación de la parametrización nos da

$$\mathbf{r}_u = -\sin u \cos v \mathbf{i} - \sin u \sin v \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

y

$$\mathbf{r}_v = -\cos u \sin v \mathbf{i} + \cos u \cos v \mathbf{j}$$

Al calcular el producto cruz tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\sin u \cos v & -\sin u \sin v & 1 \\ -\cos u \sin v & \cos u \cos v & 0 \end{vmatrix} \\ &= -\cos u \cos v \mathbf{i} - \cos u \sin v \mathbf{j} - (\sin u \cos u \cos^2 v + \cos u \sin u \sin^2 v) \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Al considerar la magnitud del producto cruz tenemos

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| &= \sqrt{\cos^2 u (\cos^2 v + \sin^2 v) + \sin^2 u \cos^2 u} \\ &= \sqrt{\cos^2 u (1 + \sin^2 u)} \\ &= \cos u \sqrt{1 + \sin^2 u}. \quad \cos u \geq 0 \text{ para } -\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

De acuerdo con la ecuación (4), el área de la superficie está dada por la integral

$$A = \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos u \sqrt{1 + \sin^2 u} \, du \, dv.$$

Para evaluar la integral, sustituimos $w = \text{sen } u$ y $dw = \cos u \, du$, $-1 \leq w \leq 1$. Como la superficie S es simétrica en el plano xy , sólo necesitamos integrar con respecto a w de 0 a 1, y multiplicar el resultado por 2. En resumen, tenemos

$$\begin{aligned} A &= 2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1+w^2} \, dw \, dv \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \left[\frac{w}{2} \sqrt{1+w^2} + \frac{1}{2} \ln \left(w + \sqrt{1+w^2} \right) \right]_0^1 \, dv \quad \text{Tabla de integrales, fórmula 35} \\ &= \int_0^{2\pi} 2 \left[\frac{1}{2} \sqrt{2} + \frac{1}{2} \ln(1 + \sqrt{2}) \right] \, dv. \\ &= 2\pi [\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})]. \end{aligned}$$

Superficies implícitas

A menudo las superficies se presentan como conjuntos de niveles de una función, descritas por la ecuación

$$F(x, y, z) = c,$$

para una constante c . Esta superficie de nivel no tiene una parametrización explícita y se conoce como una *superficie definida implícitamente*. Las superficies implícitas se presentan, por ejemplo, como superficies equipotenciales en los campos eléctricos o gravitacionales. La figura 16.45 muestra la porción de una superficie. Sería difícil encontrar fórmulas explícitas para las funciones f, g y h que describen la superficie en la forma $\mathbf{r}(u, v) = f(u, v)\mathbf{i} + g(u, v)\mathbf{j} + h(u, v)\mathbf{k}$. Por lo que ahora mostraremos cómo calcular el área diferencial $d\sigma$ para superficies implícitas.

La figura 16.45 muestra parte de una superficie implícita S que se encuentra arriba de su “sombra” R en el plano debajo de ella. La superficie está definida por la ecuación $F(x, y, z) = c$, y \mathbf{p} es un vector unitario normal a la región plana R . Suponemos que la superficie es suave (F es derivable y ∇F es no nula y continua en S) y que $\nabla F \cdot \mathbf{p} \neq 0$, de manera que la superficie nunca regresa sobre sí misma.

Suponga que el vector normal \mathbf{p} es el vector unitario \mathbf{k} , por lo que la región R de la figura 16.45 está en el plano xy . Por deducción, tenemos que $\nabla F \cdot \mathbf{p} = \nabla F \cdot \mathbf{k} = F_z \neq 0$ en S . Un teorema de cálculo avanzado, llamado el teorema de la función implícita, dice que S es entonces la gráfica de una función derivable $z = h(x, y)$, aun cuando la función $h(x, y)$ no sea conocida explícitamente. Definimos los parámetros u y v como $u = x$ y $v = y$. De esta forma, $z = h(u, v)$, y

$$\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + h(u, v)\mathbf{k} \tag{6}$$

nos da una parametrización de la superficie S . Usamos la ecuación (4) para encontrar el área de S .

Al calcular las derivadas parciales de \mathbf{r} tenemos

$$\mathbf{r}_u = \mathbf{i} + \frac{\partial h}{\partial u} \mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{r}_v = \mathbf{j} + \frac{\partial h}{\partial v} \mathbf{k}.$$

Si se aplica la regla de la cadena para la derivación implícita [véase la ecuación (2) de la sección 14.4] para $F(x, y, z) = c$, donde $x = u$, $y = v$ y $z = h(u, v)$, obtenemos las derivadas parciales

$$\frac{\partial h}{\partial u} = -\frac{F_x}{F_z} \quad \text{y} \quad \frac{\partial h}{\partial v} = -\frac{F_y}{F_z}.$$

La sustitución de estas derivadas en las derivadas de \mathbf{r} nos da

$$\mathbf{r}_u = \mathbf{i} - \frac{F_x}{F_z} \mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{r}_v = \mathbf{j} - \frac{F_y}{F_z} \mathbf{k}.$$

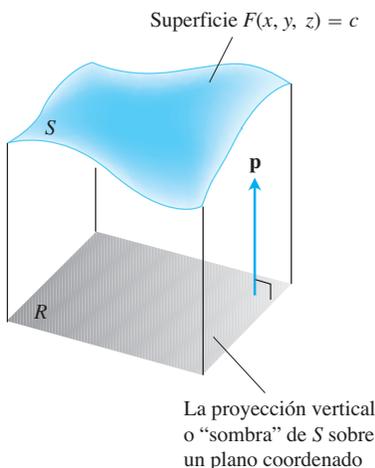


FIGURA 16.45 Como pronto veremos, el área de una superficie S en el espacio se calcula evaluando una integral doble sobre la proyección vertical o “sombra” de S sobre un plano coordenado. El vector unitario \mathbf{p} es normal al plano.

A partir de un cálculo rutinario de productos cruz tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v &= \frac{F_x}{F_z} \mathbf{i} + \frac{F_y}{F_z} \mathbf{j} + \mathbf{k} & F_z \neq 0 \\ &= \frac{1}{F_z} (F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}) \\ &= \frac{\nabla F}{F_z} = \frac{\nabla F}{\nabla F \cdot \mathbf{k}} \\ &= \frac{\nabla F}{\nabla F \cdot \mathbf{p}} & \mathbf{p} = \mathbf{k}\end{aligned}$$

Por lo tanto, el área diferencial de la superficie está dada por

$$d\sigma = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv = \frac{|\nabla F|}{|\nabla F \cdot \mathbf{p}|} dx dy. \quad u = x \quad v = y$$

Obtenemos cálculos similares si en lugar de que el vector $\mathbf{p} = \mathbf{j}$ sea normal al plano xy cuando $F_y \neq 0$ sobre S , el vector $\mathbf{p} = \mathbf{i}$ es normal al plano yz cuando $F_x \neq 0$ en S . La combinación de estos resultados con la ecuación (4) nos da la siguiente fórmula general.

Fórmula para el área de una superficie con una superficie implícita

El área de la superficie $F(x, y, z) = c$ sobre una región cerrada y acotada en una región plana R es

$$\text{Área de la superficie} = \iint_R \frac{|\nabla F|}{|\nabla F \cdot \mathbf{p}|} dA, \quad (7)$$

donde $\mathbf{p} = \mathbf{i}, \mathbf{j}$ o \mathbf{k} es normal a R y $\nabla F \cdot \mathbf{p} \neq 0$.

Así, el área es la integral doble sobre R de la magnitud de ∇F , dividida entre la magnitud del componente escalar de ∇F normal a R .

Bajo la hipótesis de que $\nabla F \cdot \mathbf{p} \neq 0$ en R y de que ∇F es continua, obtuvimos la ecuación (7). Sin embargo, mientras exista la integral, definimos su valor como el área de la porción de la superficie $F(x, y, z) = c$ que está sobre R . (Recuerde que supusimos que la proyección es uno a uno).

EJEMPLO 7 Determine el área de la superficie de la parte inferior del paraboloide $x^2 + y^2 - z = 0$ cortada por el plano $z = 4$.

Solución Trazamos la superficie S y la región R debajo en el plano xy (figura 16.46). La superficie S es parte de la superficie de nivel $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z = 0$ y R es el disco $x^2 + y^2 \leq 4$ en el plano xy . Para encontrar un vector unitario normal al plano de R , consideramos $\mathbf{p} = \mathbf{k}$.

En cualquier punto (x, y, z) sobre la superficie, tenemos

$$\begin{aligned}F(x, y, z) &= x^2 + y^2 - z \\ \nabla F &= 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - \mathbf{k} \\ |\nabla F| &= \sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + (-1)^2} \\ &= \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} \\ |\nabla F \cdot \mathbf{p}| &= |\nabla F \cdot \mathbf{k}| = |-1| = 1.\end{aligned}$$

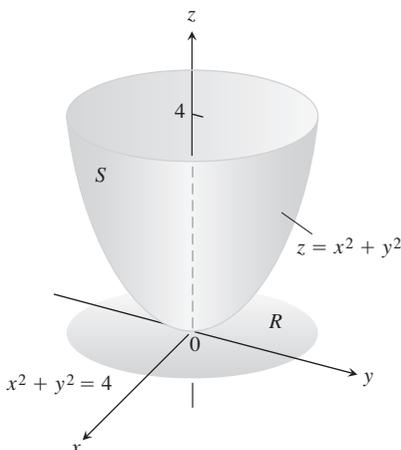


FIGURA 16.46 El área de esta superficie parabólica se calcula en el ejemplo 7.

En la región R , $dA = dx dy$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \text{Área de la superficie} &= \iint_R \frac{|\nabla F|}{|\nabla F \cdot \mathbf{p}|} dA && \text{Ecuación (7)} \\ &= \iint_{x^2+y^2 \leq 4} \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \sqrt{4r^2 + 1} r dr d\theta && \text{Coordenadas polares} \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{12} (4r^2 + 1)^{3/2} \right]_0^2 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{12} (17^{3/2} - 1) d\theta = \frac{\pi}{6} (17\sqrt{17} - 1). \end{aligned}$$

El ejemplo 7 muestra cómo se encuentra el área de la superficie para una función $z = f(x, y)$ sobre una región R en el plano xy . En realidad, el área diferencial de superficie se calcula de dos maneras, las cuales se muestran en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 8 Deduzca el área diferencial de superficie $d\sigma$ de la superficie $z = f(x, y)$ sobre una región R en el plano xy (a) paramétricamente, usando la ecuación (5), y (b) implícitamente, como en la ecuación (7).

Solución

(a) Parametizamos la superficie tomando $x = u$, $y = v$ y $z = f(x, y)$ sobre R . Esto nos da la parametrización

$$\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + f(u, v)\mathbf{k}$$

Al calcular las derivadas parciales tenemos $\mathbf{r}_u = \mathbf{i} + f_u\mathbf{k}$, $\mathbf{r}_v = \mathbf{j} + f_v\mathbf{k}$ y

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = -f_u\mathbf{i} - f_v\mathbf{j} + \mathbf{k} \quad \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & f_u \\ 0 & 1 & f_v \end{vmatrix}$$

De esta forma, $|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv = \sqrt{f_u^2 + f_v^2 + 1} du dv$. Al sustituir u y v tenemos el área diferencial de superficie

$$d\sigma = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} dx dy.$$

(b) Definimos la función implícita $F(x, y, z) = f(x, y) - z$. Como (x, y) pertenece a la región R , la normal unitaria al plano de R es $\mathbf{p} = \mathbf{k}$. Entonces $\nabla F = f_x\mathbf{i} + f_y\mathbf{j} - \mathbf{k}$ de manera que $|\nabla F \cdot \mathbf{p}| = |-1| = 1$, $|\nabla F| = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}$, y $|\nabla F|/|\nabla F \cdot \mathbf{p}| = |\nabla F|$. El área diferencial de superficie está dada otra vez por

$$d\sigma = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} dx dy. \quad \blacksquare$$

El área diferencial de superficie deducida en el ejemplo (8) nos da la siguiente fórmula para calcular el área de la superficie de la gráfica de una función definida explícitamente como $z = f(x, y)$.

Fórmula para el área de la superficie de una gráfica $z = f(x, y)$

Para una gráfica $z = f(x, y)$ sobre una región R en el plano xy , la fórmula del área de la superficie es

$$A = \iint_R \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} dx dy. \quad (8)$$

Ejercicios 16.5

Determinación de parametrizaciones

En los ejercicios 1 a 16, determine una parametrización para la superficie. (Hay muchas formas correctas para hacerlo, así que sus respuestas pueden no coincidir con las que se indican en la última parte del libro).

- El paraboloides $z = x^2 + y^2, z \leq 4$.
- El paraboloides $z = 9 - x^2 - y^2, z \geq 0$.
- Cono truncado** La porción en el primer octante del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}/2$ entre los planos $z = 0$ y $z = 3$.
- Cono truncado** La porción del cono $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$ entre los planos $z = 2$ y $z = 4$.
- Región esférica** La región de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ cortada por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- Región esférica** La región de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ en el primer octante, entre el plano xy y el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- Banda esférica** La porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ entre los planos $z = \sqrt{3}/2$ y $z = -\sqrt{3}/2$.
- Región esférica** La porción superior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ cortada por el plano $z = -2$.
- Cilindro parabólico entre planos** La superficie del cilindro parabólico $z = 4 - y^2$ cortada por los planos $x = 0, x = 2$ y $z = 0$.
- Cilindro parabólico entre planos** La superficie del cilindro parabólico $y = x^2$ cortada por los planos $z = 0, z = 3$ y $y = 2$.
- Banda cilíndrica circular** La porción del cilindro $y^2 + z^2 = 9$ entre los planos $x = 0$ y $x = 3$.
- Banda cilíndrica circular** La porción del cilindro $x^2 + z^2 = 4$ por encima del plano xy , entre los planos $y = -2$ y $y = 2$.
- Plano inclinado dentro de un cilindro** La porción del plano $x + y + z = 1$
 - Dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 9$
 - Dentro del cilindro $y^2 + z^2 = 9$.
- Plano inclinado dentro de un cilindro** La porción del plano $x - y + 2z = 2$
 - Dentro del cilindro $x^2 + z^2 = 3$
 - Dentro del cilindro $y^2 + z^2 = 2$.
- Banda cilíndrica circular** La porción del cilindro $(x - 2)^2 + z^2 = 4$ entre los planos $y = 0$ y $y = 3$.
- Banda cilíndrica circular** La porción del cilindro $y^2 + (z - 5)^2 = 25$ entre los planos $x = 0$ y $x = 10$.

Áreas de superficies parametrizadas

En los ejercicios 17 a 26, utilice una parametrización para expresar el área de la superficie como una integral doble. Después evalúe la integral. (Hay muchas formas correctas para establecer las integrales, así que éstas tal vez no sean iguales a las que aparecen en la última parte del libro. Sin embargo, deben tener el mismo valor).

- Plano inclinado dentro de un cilindro** La porción del plano $y + 2z = 2$ dentro del cilindro $x^2 + z^2 = 1$.

- Plano dentro de un cilindro** La porción del plano $z = -x$ dentro del cilindro $x^2 + z^2 = 4$.
- Cono truncado** La porción del cono $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$ entre los planos $z = 2$ y $z = 6$.
- Cono truncado** La porción del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}/3$ entre los planos $z = 1$ y $z = 4/3$.
- Banda cilíndrica circular** La porción del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ entre los planos $z = 1$ y $z = 4$.
- Banda cilíndrica circular** La porción del cilindro $x^2 + z^2 = 10$ entre los planos $y = -1$ y $y = 1$.
- Región parabólica** La porción del paraboloides $z = 2 - x^2 - y^2$ cortada por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- Banda parabólica** La porción del paraboloides $z = x^2 + y^2$ entre los planos $z = 1$ y $z = 4$.
- Esfera rebanada** La porción inferior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ cortada por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- Banda esférica** La porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ entre los planos $z = -1$ y $z = \sqrt{3}$.

Planos tangentes a superficies parametrizadas

El plano tangente en el punto $P_0(f(u_0, v_0), g(u_0, v_0), h(u_0, v_0))$ a una superficie parametrizada $\mathbf{r}(u, v) = f(u, v)\mathbf{i} + g(u, v)\mathbf{j} + h(u, v)\mathbf{k}$ es el plano que pasa por P_0 normal al vector $\mathbf{r}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{r}_v(u_0, v_0)$, el producto cruz de los vectores tangentes $\mathbf{r}_u(u_0, v_0)$ y $\mathbf{r}_v(u_0, v_0)$ en P_0 . En los ejercicios 27 a 30, encuentre una ecuación para el plano tangente a la superficie en P_0 . Después, encuentre una ecuación cartesiana para la superficie y dibuje juntos a la superficie y al plano tangente.

- Cono** $\mathbf{r}(r, \theta) = (r \cos \theta)\mathbf{i} + (r \sin \theta)\mathbf{j} + r\mathbf{k}, r \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ en el punto $P_0(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2)$ correspondiente a $(r, \theta) = (2, \pi/4)$.
- Hemisferio** La superficie hemisférica $\mathbf{r}(\phi, \theta) = (4 \sin \phi \cos \theta)\mathbf{i} + (4 \sin \phi \sin \theta)\mathbf{j} + (4 \cos \phi)\mathbf{k}, 0 \leq \phi \leq \pi/2, 0 \leq \theta \leq 2\pi$, en el punto $P_0(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2)$ correspondiente a $(\phi, \theta) = (\pi/6, \pi/4)$.
- Cilindro circular** El cilindro circular $\mathbf{r}(\theta, z) = (3 \sin 2\theta)\mathbf{i} + (6 \sin^2 \theta)\mathbf{j} + z\mathbf{k}, 0 \leq \theta \leq \pi$, en el punto $P_0(3\sqrt{3}/2, 9/2, 0)$ correspondiente a $(\theta, z) = (\pi/3, 0)$. (Véase el ejemplo 3).
- Cilindro parabólico** La superficie del cilindro parabólico $\mathbf{r}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - x^2\mathbf{k}, -\infty \leq x \leq \infty, -\infty \leq y \leq \infty$, en el punto $P_0(1, 2, -1)$ correspondiente a $(x, y) = (1, 2)$.

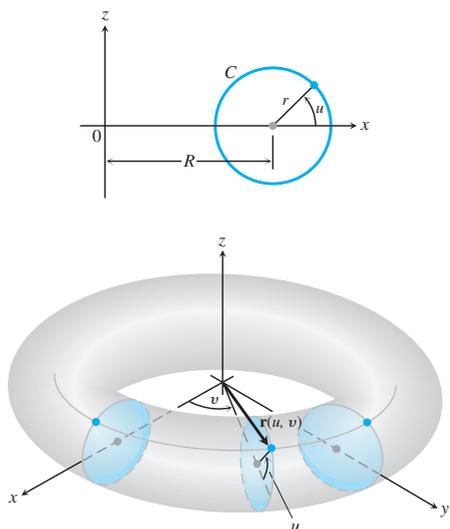
Más ejemplos de parametrizaciones para superficies

- a.** Un *toro de revolución* (en forma de rosquilla) se obtiene al hacer girar un círculo C en el plano xz alrededor del eje z en el espacio. (Véase la figura más adelante). Si C tiene un radio $r > 0$ y su centro es $(R, 0, 0)$, demuestre que una parametrización del toro es

$$\mathbf{r}(u, v) = ((R + r \cos u)\cos v)\mathbf{i} + ((R + r \cos u)\sin v)\mathbf{j} + (r \sin u)\mathbf{k},$$

donde $0 \leq u \leq 2\pi$ y $0 \leq v \leq 2\pi$ son los ángulos en la figura.

b. Demuestre que el área de la superficie del toro es $A = 4\pi^2 Rr$.

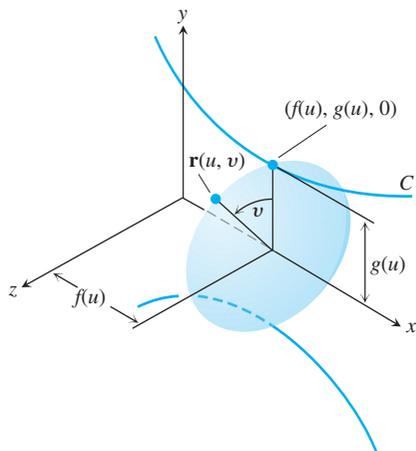


32. Parametrización de una superficie de revolución Suponga que la curva parametrizada $C: (f(u), g(u))$ gira alrededor del eje x , donde $g(u) > 0$ para $a \leq u \leq b$.

a. Demuestre que

$$\mathbf{r}(u, v) = f(u)\mathbf{i} + (g(u)\cos v)\mathbf{j} + (g(u)\sin v)\mathbf{k}$$

es una parametrización de la superficie de revolución resultante, donde $0 \leq v \leq 2\pi$ es el ángulo del plano xy al punto $\mathbf{r}(u, v)$ sobre la superficie. (Véase la figura). Observe que $f(u)$ mide la distancia a lo largo del eje de revolución y $g(u)$ mide la distancia al eje de revolución.



b. Encuentre una parametrización para la superficie obtenida al hacer girar la curva $x = y^2, y \geq 0$, alrededor del eje x .

33. a. Parametrización de un elipsoide Recuerde la parametrización $x = a \cos \theta, y = b \sin \theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ de la elipse $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ (sección 3.9, ejemplo 5). Con base en los ángulos θ y ϕ en coordenadas esféricas, demuestre que

$$\mathbf{r}(\theta, \phi) = (a \cos \theta \cos \phi)\mathbf{i} + (b \sin \theta \cos \phi)\mathbf{j} + (c \sin \phi)\mathbf{k}$$

es una parametrización del elipsoide $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) + (z^2/c^2) = 1$.

b. Escriba una integral para el área de la superficie del elipsoide, pero no evalúe la integral.

34. Hiperboloide de una hoja

a. Encuentre una parametrización para el hiperboloide de una hoja $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ en términos del ángulo θ asociado con el círculo $x^2 + y^2 = r^2$ y el parámetro hiperbólico u asociado con la función hiperbólica $r^2 - z^2 = 1$. (Sugerencia: Considere que $\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$).

b. Generalice el resultado del inciso a) al hiperboloide $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) - (z^2/c^2) = 1$.

35. (Continuación del ejercicio 34). Encuentre una ecuación cartesiana para el plano tangente al hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 25$ en el punto $(x_0, y_0, 0)$, donde $x_0^2 + y_0^2 = 25$.

36. Hiperboloide de dos hojas Encuentre una parametrización del hiperboloide de dos hojas $(z^2/c^2) - (x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$.

Área de una superficie para formas explícitas e implícitas

- 37.** Calcule el área de la superficie de la porción del paraboloide $x^2 + y^2 - z = 0$ cortada por el plano $z = 2$.
- 38.** Calcule el área de la banda del paraboloide $x^2 + y^2 - z = 0$ cortada por los planos $z = 2$ y $z = 6$.
- 39.** Calcule el área de la región del plano $x + 2y + 2z = 5$ cortada por el cilindro cuyas paredes son $x = y^2$ y $x = 2 - y^2$.
- 40.** Obtenga el área de la porción de la superficie $x^2 - 2z = 0$ que está sobre el triángulo acotado por las rectas $x = \sqrt{3}, y = 0$ y $y = x$ en el plano xy .
- 41.** Calcule el área de la superficie $x^2 - 2y - 2z = 0$ que está sobre el triángulo acotado por las rectas $x = 2, y = 0$ y $y = 3x$ en el plano xy .
- 42.** Calcule la superficie de la región recortada de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- 43.** Calcule el área de la elipse cortada del plano $z = cx$ (c es una constante) por el cilindro $x^2 + y^2 = 1$.
- 44.** Encuentre el área de la porción superior del cilindro $x^2 + z^2 = 1$ que está entre los planos $x = \pm 1/2$ y $y = \pm 1/2$.
- 45.** Calcule el área de la porción del paraboloide $x = 4 - y^2 - z^2$ que está arriba del anillo $1 \leq y^2 + z^2 \leq 4$ en el plano yz .
- 46.** Calcule el área de la superficie cortada del paraboloide $x^2 + y + z^2 = 2$ por el plano $y = 0$.
- 47.** Calcule el área de la superficie $x^2 - 2 \ln x + \sqrt{15}y - z = 0$ arriba del cuadrado $R: 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1$, en el plano xy .
- 48.** Calcule el área de la superficie $2x^{3/2} + 2y^{3/2} - 3z = 0$ arriba del cuadrado $R: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$, en el plano xy .

Calcule el área de las superficies en los ejercicios 49 a 54.

- 49.** La superficie cortada de la parte inferior del paraboloide $z = x^2 + y^2$ por el plano $z = 3$.
- 50.** La superficie cortada de la "nariz" del paraboloide $x = 1 - y^2 - z^2$ por el plano yz .
- 51.** La porción del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ que está en la región entre el círculo $x^2 + y^2 = 1$ y la elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$ en el plano xy . (Sugerencia: Utilice fórmulas geométricas para calcular el área de la región).
- 52.** El triángulo cortado del plano $2x + 6y + 3z = 6$ por los planos frontera del primer octante. Calcule el área de tres formas, aplicando formas explícitas diferentes.
- 53.** La superficie en el primer octante cortada del cilindro $y = (2/3)z^{3/2}$ por los planos $x = 1$ y $y = 16/3$.

54. La porción del plano $y + z = 4$ que está arriba de la región cortada del primer cuadrante del plano xz por la parábola $x = 4 - z^2$.
55. Use la parametrización

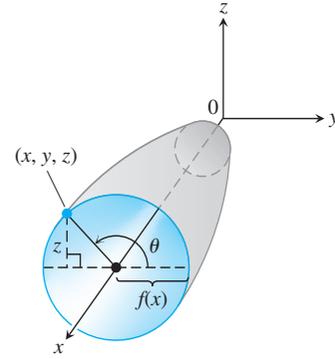
$$\mathbf{r}(x, z) = x\mathbf{i} + f(x, z)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

y la ecuación (5) para deducir la fórmula de $d\sigma$ asociada con la forma explícita $y = f(x, z)$.

56. Sea S la superficie obtenida por la rotación de la curva suave $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, alrededor del eje x , donde $f(x) \geq 0$.
- a. Demuestre que la función vectorial

$$\mathbf{r}(x, \theta) = x\mathbf{i} + f(x)\cos\theta\mathbf{j} + f(x)\sin\theta\mathbf{k}$$

es una parametrización de S , donde θ es el ángulo de rotación alrededor del eje x (vea la figura siguiente).



- b. Utilice la ecuación (4) para mostrar el área de la superficie de revolución dada por

$$A = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

16.6 | Integrales de superficie

Para calcular la cantidad del flujo de líquido que pasa a través de una membrana curva o la fuerza hacia arriba sobre un paracaídas que cae, necesitamos integrar una función sobre una superficie curva en el espacio. El concepto de *integral de superficie* es una ampliación del concepto de integral de línea de la integración sobre una curva.

Integrales de superficie

Consideremos una carga eléctrica distribuida sobre una superficie S , y que la función $G(x, y, z)$ nos indica la *densidad de carga* (carga por unidad de área) en cada punto de S . Calculamos, como una integral, la carga total en S de la siguiente manera.

Suponga, como en la sección 16.5, que la superficie S está definida paramétricamente en una región R en el plano uv ,

$$\mathbf{r}(u, v) = f(u, v)\mathbf{i} + g(u, v)\mathbf{j} + h(u, v)\mathbf{k}, \quad (u, v) \in R.$$

En la figura 16.47, vemos una de las porciones de R (por sencillez, considerada como un rectángulo) en las que se divide la superficie S dentro de los elementos de área curvos de la superficie

$$\Delta\sigma_{uv} \approx |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv.$$

Como hicimos en el caso de las subdivisiones de la definición de las integrales dobles de la sección 15.2, numeramos los elementos de superficie en algún orden como $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$. Para formar una suma de Riemann sobre S , elegimos un punto (x_k, y_k, z_k) en la k -ésima porción, multiplicando el valor de la función G en ese punto por el área $\Delta\sigma_k$, y sumamos todos los productos:

$$\sum_{k=1}^n G(x_k, y_k, z_k) \Delta\sigma_k.$$

Dependiendo de la elección de (x_k, y_k, z_k) en la k -ésima porción, obtenemos diferentes valores para la suma de Riemann. De esta forma, cuando el número de porciones de área se incrementa, sus áreas tienden a cero y tanto $\Delta u \rightarrow 0$ como $\Delta v \rightarrow 0$. Este límite, siempre que exista de manera independiente a las opciones elegidas, define la **integral de superficie de G sobre la superficie de S** como

$$\iint_S G(x, y, z) d\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n G(x_k, y_k, z_k) \Delta\sigma_k. \quad (1)$$

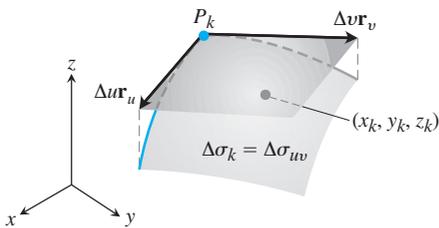


FIGURA 16.47 El área de la superficie $\Delta\sigma_k$ es el área del paralelogramo tangente determinado por los vectores $\Delta\mathbf{r}_u$ y $\Delta\mathbf{r}_v$. El punto (x_k, y_k, z_k) está sobre la superficie, debajo del paralelogramo ilustrado aquí.

Observe la analogía con la definición de integral doble (sección 15.2) y con la integral de línea (sección 16.1). Si S es una superficie suave por partes, y G es continua en S , entonces se demuestra que la integral de superficie definida por la ecuación (1) existe.

La fórmula para evaluar la integral de superficie depende de la manera como sea descrita S , de forma paramétrica, implícita o explícita, como se estudió en la sección 16.5.

Fórmulas de una integral de superficie

1. Para una superficie suave S definida **paraméricamente** como $\mathbf{r}(u, v) = f(u, v)\mathbf{i} + g(u, v)\mathbf{j} + h(u, v)\mathbf{k}$, $(u, v) \in R$, y una función continua $G(x, y, z)$ definida en S , la integral de superficie de G en S está dada por la doble integral en R

$$\iint_S G(x, y, z) d\sigma = \iint_R G(f(u, v), g(u, v), h(u, v)) |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv. \quad (2)$$

2. Para una superficie S definida **implícitamente** por $F(x, y, z) = c$, donde F es una función derivable continua, con S colocada arriba de su sombra cerrada y acotada en la región R en el plano coordenado debajo de ella, la integral de superficie de la función continua G en S está dada por la doble integral en R ,

$$\iint_S G(x, y, z) d\sigma = \iint_R G(x, y, z) \frac{|\nabla F|}{|\nabla F \cdot \mathbf{p}|} dA, \quad (3)$$

donde \mathbf{p} es el vector unitario normal a R y $\nabla F \cdot \mathbf{p} \neq 0$.

3. Para una superficie S definida **explícitamente** como la de la gráfica $z = f(x, y)$, donde f es una función derivable continua sobre una región R del plano xy , la integral de superficie de la función continua G sobre S está dada por la integral doble en R ,

$$\iint_S G(x, y, z) d\sigma = \iint_R G(x, y, f(x, y)) \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} dx dy. \quad (4)$$

La integral de superficie de la ecuación (1) tiene diferentes significados dependiendo de las aplicaciones. Si G tiene un valor constante de 1, la integral nos da el área de S . Si G es la densidad de masa de una capa delgada de material modelada por S , la integral nos da la masa de la capa. Si G es la densidad de carga de una capa delgada, la integral nos da la carga total.

EJEMPLO 1 Integre $G(x, y, z) = x^2$ sobre el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \leq z \leq 1$.

Solución De acuerdo con la ecuación (2) y los cálculos del ejemplo 4 de la sección 16.5, tenemos que $|\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta| = \sqrt{2}r$ y

$$\begin{aligned} \iint_S x^2 d\sigma &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r^2 \cos^2 \theta)(\sqrt{2}r) dr d\theta && x = r \cos \theta \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 \cos^2 \theta dr d\theta \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \frac{\sqrt{2}}{4} \left[\frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_0^{2\pi} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

Las integrales de superficie se comportan como las integrales dobles, la integral de la suma de dos funciones es la suma de sus integrales, etcétera. La propiedad de aditividad del dominio toma la forma

$$\iint_S G \, d\sigma = \iint_{S_1} G \, d\sigma + \iint_{S_2} G \, d\sigma + \cdots + \iint_{S_n} G \, d\sigma.$$

Cuando S está dividida por curvas suaves en un número finito de porciones suaves sin que se traslapen (por ejemplo, si S está formada por partes suaves), entonces la integral de S es la suma de las integrales de las porciones. Así, la integral de una función en la superficie de un cubo es la suma de las integrales sobre las caras del cubo. Integramos sobre el caparazón de una tortuga integrando cada una de las placas que lo forman y sumando los resultados.

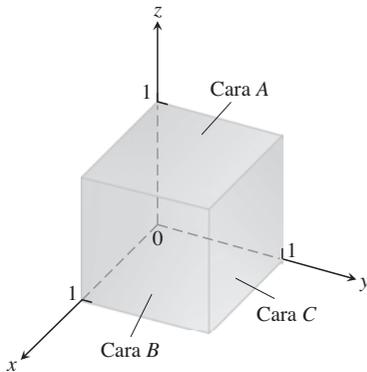


FIGURA 16.48 El cubo del ejemplo 2.

EJEMPLO 2 Integre $G(x, y, z) = xyz$ sobre la superficie del cubo cortado del primer octante por los planos $x = 1$, $y = 1$ y $z = 1$ (figura 16.48).

Solución Integramos xyz sobre cada una de las seis caras y sumamos los resultados. Como $xyz = 0$ en las caras sobre los planos coordenados, entonces, la integral sobre la superficie del cubo se reduce a

$$\iint_{\text{Superficie del cubo}} xyz \, d\sigma = \iint_{\text{Cara A}} xyz \, d\sigma + \iint_{\text{Cara B}} xyz \, d\sigma + \iint_{\text{Cara C}} xyz \, d\sigma.$$

La cara A es la superficie $f(x, y, z) = z = 1$ sobre la región del cuadrado R_{xy} : $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, en el plano xy . Para esta superficie y región,

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \mathbf{k}, & \nabla f &= \mathbf{k}, & |\nabla f| &= 1, & |\nabla f \cdot \mathbf{p}| &= |\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}| = 1 \\ d\sigma &= \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \mathbf{p}|} dA = \frac{1}{1} dx \, dy = dx \, dy \\ xyz &= xy(1) = xy \end{aligned}$$

y

$$\iint_{\text{Cara A}} xyz \, d\sigma = \iint_{R_{xy}} xy \, dx \, dy = \int_0^1 \int_0^1 xy \, dx \, dy = \int_0^1 \frac{y}{2} dy = \frac{1}{4}.$$

La simetría nos indica que las integrales de xyz de las caras B y C también son iguales a $1/4$. Por lo tanto,

$$\iint_{\text{Superficie del cubo}} xyz \, d\sigma = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 3 Integre $G(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ sobre la superficie de la “pelota de fútbol” S formada por la rotación de la curva $x = \cos z$, $y = 0$, $-\pi/2 \leq z \leq \pi/2$, alrededor del eje z .

Solución La superficie se ilustra en la figura 16.44, y en el ejemplo 6 de la sección 16.5 obtuvimos la parametrización

$$x = \cos u \cos v, \quad y = \cos u \sin v, \quad z = u, \quad -\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad 0 \leq v \leq 2\pi,$$

donde v representa el ángulo de rotación del plano xy alrededor del eje z . Al sustituir esta parametrización en la expresión para G tenemos

$$\sqrt{1 - x^2 - y^2} = \sqrt{1 - (\cos^2 u)(\cos^2 v + \sin^2 v)} = \sqrt{1 - \cos^2 u} = |\sin u|.$$

La diferencial del área de la superficie para la parametrización es (ejemplo 6, sección 16.5).

$$d\sigma = \cos u \sqrt{1 + \sin^2 u} \, du \, dv.$$

Estos cálculos nos dan la integral de superficie

$$\begin{aligned} \iint_S \sqrt{1-x^2-y^2} \, d\sigma &= \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\operatorname{sen} u| \cos u \sqrt{1+\operatorname{sen}^2 u} \, du \, dv \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} u \cos u \sqrt{1+\operatorname{sen}^2 u} \, du \, dv \\ &= \int_0^{2\pi} \int_1^2 \sqrt{w} \, dw \, dv && \begin{array}{l} w = 1 + \operatorname{sen}^2 u, \\ dw = 2 \operatorname{sen} u \cos u \, du \\ \text{Cuando } u = 0, w = 1. \\ \text{Cuando } u = \pi/2, w = 2. \end{array} \\ &= 2\pi \cdot \frac{2}{3} w^{3/2} \Big|_1^2 = \frac{4\pi}{3} (2\sqrt{2} - 1). \end{aligned}$$

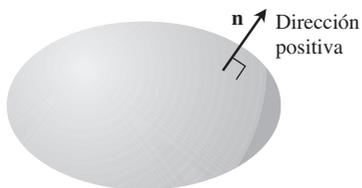


FIGURA 16.49 Las superficies suaves cerradas en el espacio son orientables. El vector unitario normal exterior define la dirección positiva de cada punto.

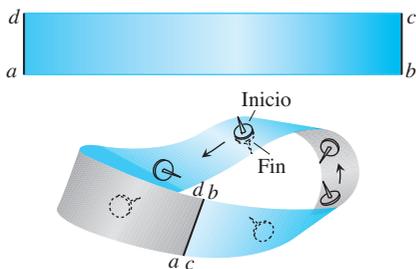


FIGURA 16.50 Para construir una banda de Möbius, tome una banda rectangular de papel $abcd$, dé un giro sencillo al extremo de bc , y pegue los extremos de la banda de forma que coincidan los extremos a con c y b con d . La banda de Möbius es una superficie de un solo lado, o no orientable.

Orientación

Una superficie suave S es **orientable** o de **dos lados** si es posible definir un campo \mathbf{n} de vectores unitarios normales a S que varíe continuamente con la posición. Cualquier porción de una superficie orientable también es orientable. Las esferas y otras superficies cerradas suaves en el espacio (superficies suaves que encierran sólidos) son orientables. Por convención, sobre una superficie cerrada elegimos a \mathbf{n} apuntando hacia fuera.

Una vez elegido \mathbf{n} , decimos que hemos **orientado** la superficie, y llamamos a la superficie junto con su campo normal una **superficie orientada**. El vector \mathbf{n} en cualquier punto se llama **dirección positiva** en ese punto (figura 16.49).

La banda de Möbius de la figura 16.50 no es orientable. No importa dónde se comience a construir un campo unitario normal continuo (representado en la figura como el eje de una tachuela), al mover al vector de manera continua alrededor de la superficie en la forma mostrada, éste regresará al punto de inicio con una dirección opuesta a la que tenía cuando comenzó a moverse. El vector en ese punto no puede apuntar a ambos lados, aunque debería hacerlo en virtud de la continuidad. Concluimos que no existe tal campo.

Integral de superficie para el flujo

Suponga que \mathbf{F} es un campo vectorial continuo definido sobre una superficie orientada S , y que \mathbf{n} es el campo unitario normal elegido en la superficie. Llamamos a la integral de $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ sobre S el flujo de \mathbf{F} a través de S en la dirección positiva. De esta forma, el flujo es la integral sobre S del componente escalar de \mathbf{F} en la dirección de \mathbf{n} .

DEFINICIÓN El **flujo** de un campo vectorial tridimensional \mathbf{F} a través de una superficie orientada S en la dirección de \mathbf{n} es

$$\text{Flujo} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma. \tag{5}$$

La definición es análoga a la del flujo de un campo bidimensional \mathbf{F} a través de una curva plana C . En el plano (sección 16.2), el flujo es

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds,$$

la integral del componente escalar de \mathbf{F} normal a la curva.

Si \mathbf{F} es el campo de velocidades del flujo de un fluido en tres dimensiones, el flujo de \mathbf{F} a través de S es la tasa neta con la que el fluido atraviesa S en la dirección positiva elegida. En la sección 16.7 analizaremos con mayor detalle estos flujos.

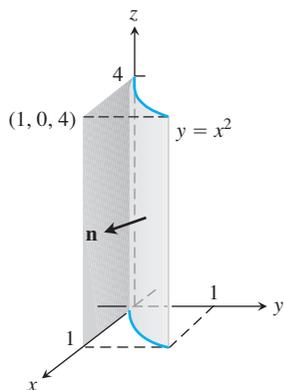


FIGURA 16.51 Cálculo del flujo a través de la superficie de un cilindro parabólico (ejemplo 4).

EJEMPLO 4 Determine el flujo de $\mathbf{F} = yz\mathbf{j} + x\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ a través del cilindro parabólico $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq z \leq 4$, en la dirección de \mathbf{n} indicada en la figura 16.51.

Solución Sobre la superficie tenemos que $x = x$, $y = x^2$, $yz = z$, de manera que automáticamente tenemos la parametrización $\mathbf{r}(x, z) = x\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq z \leq 4$. El producto cruz de los vectores tangentes es

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_z = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2x\mathbf{i} - \mathbf{j}.$$

Los vectores unitarios normales que apuntan hacia fuera desde la superficie como se indican en la figura 16.51 son

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_z}{|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_z|} = \frac{2x\mathbf{i} - \mathbf{j}}{\sqrt{4x^2 + 1}}.$$

Sobre la superficie, $y = x^2$, entonces el campo vectorial es

$$\mathbf{F} = yz\mathbf{i} + x\mathbf{j} - z^2\mathbf{k} = x^2z\mathbf{i} + x\mathbf{j} - z^2\mathbf{k}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} &= \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 1}} ((x^2z)(2x) + (x)(-1) + (-z^2)(0)) \\ &= \frac{2x^3z - x}{\sqrt{4x^2 + 1}}. \end{aligned}$$

El flujo de \mathbf{F} hacia fuera a través de la superficie es

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma &= \int_0^4 \int_0^1 \frac{2x^3z - x}{\sqrt{4x^2 + 1}} |\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_z| \, dx \, dz \\ &= \int_0^4 \int_0^1 \frac{2x^3z - x}{\sqrt{4x^2 + 1}} \sqrt{4x^2 + 1} \, dx \, dz \\ &= \int_0^4 \int_0^1 (2x^3z - x) \, dx \, dz = \int_0^4 \left[\frac{1}{2}x^4z - \frac{1}{2}x^2 \right]_{x=0}^{x=1} dz \\ &= \int_0^4 \frac{1}{2}(z - 1) \, dz = \frac{1}{4}(z - 1)^2 \Big|_0^4 \\ &= \frac{1}{4}(9) - \frac{1}{4}(1) = 2. \end{aligned}$$

Si S es parte de una superficie de nivel $g(x, y, z) = c$, entonces \mathbf{n} se toma como uno de dos campos

$$\mathbf{n} = \pm \frac{\nabla g}{|\nabla g|}, \quad (6)$$

dependiendo de cual nos dé la dirección preferida. El flujo correspondiente es

$$\begin{aligned} \text{Flujo} &= \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma \\ &= \iint_R \left(\mathbf{F} \cdot \frac{\pm \nabla g}{|\nabla g|} \right) \frac{|\nabla g|}{|\nabla g \cdot \mathbf{p}|} \, dA \quad \text{Ecuaciones (6) y (3)} \\ &= \iint_R \mathbf{F} \cdot \frac{\pm \nabla g}{|\nabla g \cdot \mathbf{p}|} \, dA. \end{aligned} \quad (7)$$

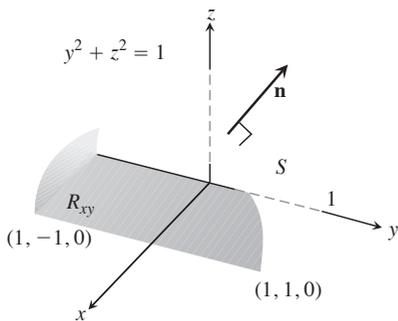


FIGURA 16.52 Cálculo del flujo de un campo vectorial hacia fuera a través de la superficie S . El área de la región sombreada R_{xy} es 2 (ejemplo 5).

EJEMPLO 5 Determine el flujo de $\mathbf{F} = yz\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ hacia fuera, a través de la superficie S cortada del cilindro $y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$, por los planos $x = 0$ y $x = 1$.

Solución El campo vectorial normal exterior en S (figura 16.52) se calcula a partir del gradiente de $g(x, y, z) = y^2 + z^2$ como

$$\mathbf{n} = + \frac{\nabla g}{|\nabla g|} = \frac{2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}}{\sqrt{4y^2 + 4z^2}} = \frac{2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}}{2\sqrt{1}} = y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Con $\mathbf{p} = \mathbf{k}$ tenemos

$$d\sigma = \frac{|\nabla g|}{|\nabla g \cdot \mathbf{k}|} dA = \frac{2}{|2z|} dA = \frac{1}{z} dA.$$

Eliminamos las barras de valor absoluto, ya que $z \geq 0$ en S .

El valor de $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ sobre la superficie es

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} &= (yz\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}) \cdot (y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \\ &= y^2z + z^3 = z(y^2 + z^2) \\ &= z. \end{aligned} \quad y^2 + z^2 = 1 \text{ en } S$$

La superficie proyecta la sombra rectangular sobre la región R_{xy} en el plano xy que se muestra en la figura 16.52. Por lo tanto, el flujo de \mathbf{F} hacia fuera a través de S es

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \iint_S (z) \left(\frac{1}{z} dA \right) = \iint_{R_{xy}} dA = \text{área}(R_{xy}) = 2. \quad \blacksquare$$

Momentos y masas de capas delgadas

Las capas delgadas de material, como vajillas, tambores metálicos y domos, se modelan con superficies. Sus momentos y sus masas se calculan con las fórmulas de la tabla 16.3. Las deducciones son similares a las de la sección 6.6. Las fórmulas son como las integrales de línea de la tabla 16.1, sección 16.1.

TABLA 16.3 Fórmulas de masa y momento para capas muy delgadas

Masa: $M = \iint_S \delta \, d\sigma$ $\delta = \delta(x, y, z) =$ densidad en (x, y, z) como masa por unidad de área

Primeros momentos con respecto a los planos coordenados:

$$M_{yz} = \iint_S x \delta \, d\sigma, \quad M_{xz} = \iint_S y \delta \, d\sigma, \quad M_{xy} = \iint_S z \delta \, d\sigma$$

Coordenadas del centro de masa:

$$\bar{x} = M_{yz}/M, \quad \bar{y} = M_{xz}/M, \quad \bar{z} = M_{xy}/M$$

Momentos de inercia con respecto a los ejes coordenados:

$$I_x = \iint_S (y^2 + z^2) \delta \, d\sigma, \quad I_y = \iint_S (x^2 + z^2) \delta \, d\sigma, \quad I_z = \iint_S (x^2 + y^2) \delta \, d\sigma,$$

$$I_L = \iint_S r^2 \delta \, d\sigma \quad r(x, y, z) = \text{distancia desde el punto } (x, y, z) \text{ a la recta } L$$

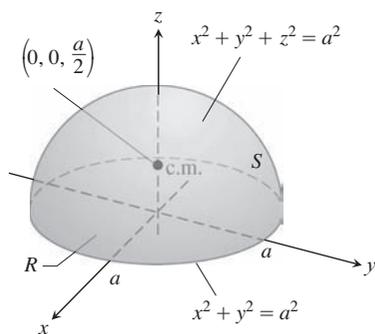


FIGURA 16.53 El centro de masa de una capa hemisférica delgada de densidad constante está en el eje de simetría, a la mitad entre la base y la parte superior (ejemplo 6).

EJEMPLO 6 Determine el centro de masa de una capa hemisférica delgada de radio a y densidad constante δ .

Solución Modelamos la capa con el hemisferio

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad z \geq 0$$

(figura 16.53). La simetría de la superficie con respecto al eje z nos dice que $\bar{x} = \bar{y} = 0$. Sólo falta determinar \bar{z} con la fórmula $\bar{z} = M_{xy}/M$.

La masa de la capa es

$$M = \iint_S \delta \, d\sigma = \delta \iint_S d\sigma = (\delta)(\text{área de } S) = 2\pi a^2 \delta. \quad \delta = \text{constante}$$

Para evaluar la integral de M_{xy} , hacemos a $\mathbf{p} = \mathbf{k}$ y calculamos

$$|\nabla f| = |2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}| = 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2a$$

$$|\nabla f \cdot \mathbf{p}| = |\nabla f \cdot \mathbf{k}| = |2z| = 2z$$

$$d\sigma = \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \mathbf{p}|} dA = \frac{a}{z} dA.$$

Así,

$$\begin{aligned} M_{xy} &= \iint_S z\delta \, d\sigma = \delta \iint_R z \frac{a}{z} dA = \delta a \iint_R dA = \delta a(\pi a^2) = \delta \pi a^3 \\ \bar{z} &= \frac{M_{xy}}{M} = \frac{\pi a^3 \delta}{2\pi a^2 \delta} = \frac{a}{2}. \end{aligned}$$

El centro de masa de la capa es el punto $(0, 0, a/2)$. ■

EJEMPLO 7 Calcule el centro de masa de una capa delgada de densidad $\delta = 1/z^2$ cortada del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ por los planos $z = 1$ y $z = 2$ (figura 16.54).

Solución La simetría de la superficie alrededor del eje z nos dice que $\bar{x} = \bar{y} = 0$. Calculamos $\bar{z} = M_{xy}/M$. Trabajando como en el ejemplo 4 de la sección 16.5, tenemos

$$\mathbf{r}(r, \theta) = (r \cos \theta)\mathbf{i} + (r \sin \theta)\mathbf{j} + r\mathbf{k}, \quad 1 \leq r \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

y

$$|\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta| = \sqrt{2}r.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} M &= \iint_S \delta \, d\sigma = \int_0^{2\pi} \int_1^2 \frac{1}{r^2} \sqrt{2}r \, dr \, d\theta \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} [\ln r]_1^2 \, d\theta = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \ln 2 \, d\theta \\ &= 2\pi \sqrt{2} \ln 2, \end{aligned}$$

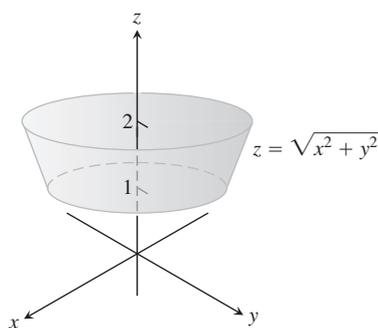


FIGURA 16.54 El cono truncado formado cuando el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ es cortado por los planos $z = 1$ y $z = 2$ (ejemplo 7).

$$\begin{aligned}
 M_{xy} &= \iint_S \delta z \, d\sigma = \int_0^{2\pi} \int_1^2 \frac{1}{r^2} r \sqrt{2} r \, dr \, d\theta \\
 &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_1^2 dr \, d\theta \\
 &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi\sqrt{2}, \\
 \bar{z} &= \frac{M_{xy}}{M} = \frac{2\pi\sqrt{2}}{2\pi\sqrt{2} \ln 2} = \frac{1}{\ln 2}.
 \end{aligned}$$

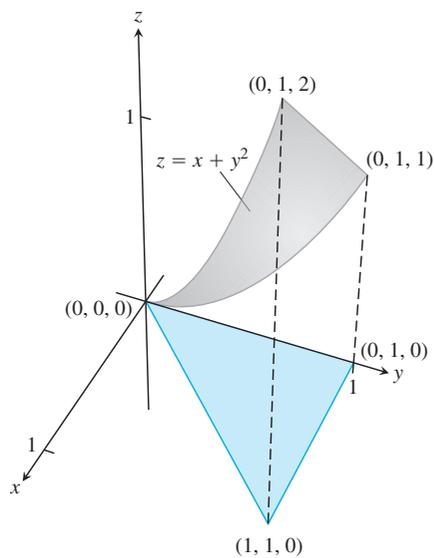
El centro de masa de la capa es el punto $(0, 0, 1/\ln 2)$. ■

Ejercicios 16.6

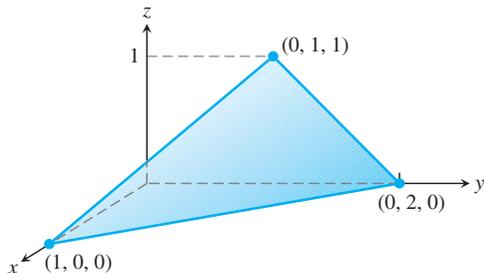
Integrales de superficie

En los ejercicios 1 a 8, integre la función dada sobre la superficie correspondiente.

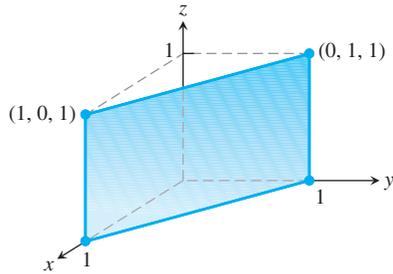
1. **Cilindro parabólico** $G(x, y, z) = x$, sobre el cilindro parabólico $y = x^2, 0 \leq x \leq 2, 0 \leq z \leq 3$.
2. **Cilindro circular** $G(x, y, z) = z$, sobre la superficie cilíndrica $y^2 + z^2 = 4, z \geq 0, 1 \leq x \leq 4$.
3. **Esfera** $G(x, y, z) = x^2$, sobre la esfera unitaria $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
4. **Hemisferio** $G(x, y, z) = z^2$, sobre el hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0$.
5. **Porción del plano** $F(x, y, z) = z$, sobre la porción del plano $x + y + z = 4$ que está sobre el cuadrado $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$, en el plano xy .
6. **Cono** $F(x, y, z) = z - x$, sobre el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}, 0 \leq z \leq 1$.
7. **Domo parabólico** $H(x, y, z) = x^2\sqrt{5 - 4z}$, sobre el domo parabólico $z = 1 - x^2 - y^2, z \geq 0$.
8. **Región esférica** $H(x, y, z) = yz$, sobre la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que está sobre el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.
9. Integre $G(x, y, z) = x + y + z$ sobre la superficie del cubo cortado del primer octante por los planos $x = a, y = a, z = a$.
10. Integre $G(x, y, z) = y + z$ sobre la superficie de la cuña en el primer octante, acotada por los planos coordenados y los planos $x = 2$ y $y + z = 1$.
11. Integre $G(x, y, z) = xyz$ sobre la superficie del sólido rectangular cortado en el primer octante por los planos $x = a, y = b, z = c$.
12. Integre $G(x, y, z) = xyz$ sobre la superficie del sólido rectangular acotado por los planos $x = \pm a, y = \pm b, z = \pm c$.
13. Integre $G(x, y, z) = x + y + z$ sobre la porción del plano $2x + 2y + z = 2$ que está en el primer octante.
14. Integre $G(x, y, z) = x\sqrt{y^2 + 4}$ sobre la superficie cortada del cilindro parabólico $y^2 + 4z = 16$ por el plano $x = 0, x = 1$ y $z = 0$.
15. Integre $G(x, y, z) = z - x$ sobre la porción de la gráfica de $z = x + y^2$ arriba del triángulo en el plano xy con vértices en $(0, 0, 0), (1, 1, 0)$ y $(0, 1, 0)$. (Véase la siguiente figura).



16. Integre $G(x, y, z) = x$ sobre la superficie dada por $z = x^2 + y$ para $0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$.
17. Integre $G(x, y, z) = xyz$ sobre la superficie triangular con vértices en $(1, 0, 0), (0, 2, 0)$ y $(0, 1, 1)$.



18. Integre $G(x, y, z) = x - y + z$ sobre la porción del plano $x + y = 1$ en el primer octante entre $z = 0$ y $z = 1$ (véase la siguiente figura).



Cálculo del flujo a través de superficies

En los ejercicios 19 a 28, utilice una parametrización para determinar el flujo $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$ a través de la superficie en la dirección dada.

19. **Cilindro parabólico** $\mathbf{F} = z^2\mathbf{i} + x\mathbf{j} - 3z\mathbf{k}$ hacia fuera (normal alejándose del eje x) a través de la superficie del cilindro parabólico $z = 4 - y^2$ cortada por los planos $x = 0$, $x = 1$ y $z = 0$.
20. **Cilindro parabólico** $\mathbf{F} = x^2\mathbf{j} - xz\mathbf{k}$ hacia fuera (normal alejándose del plano yz) a través de la superficie cortada del cilindro parabólico $y = x^2$, $-1 \leq x \leq 1$ por los planos $z = 0$ y $z = 2$.
21. **Esfera** $\mathbf{F} = z\mathbf{k}$ a través de la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ en el primer octante en la dirección que se aleja del origen.
22. **Esfera** $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ a través de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ en la dirección que se aleja del origen.
23. **Plano** $\mathbf{F} = 2xy\mathbf{i} + 2yz\mathbf{j} + 2xz\mathbf{k}$ hacia arriba, a través de la porción del plano $x + y + z = 2a$ que está sobre el cuadrado $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq a$, en el plano xy .
24. **Cilindro** $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ hacia fuera a través de la porción del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ cortada por los planos $z = 0$ y $z = a$.
25. **Cono** $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} - z\mathbf{k}$ hacia fuera (normal alejándose del eje z) a través del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \leq z \leq 1$.
26. **Cono** $\mathbf{F} = y^2\mathbf{i} + xz\mathbf{j} - \mathbf{k}$ hacia fuera (normal alejándose del eje z) a través del cono $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \leq z \leq 2$.
27. **Cono truncado** $\mathbf{F} = -x\mathbf{i} - y\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ hacia fuera (normal alejándose del eje z) a través de la porción del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ entre los planos $z = 1$ y $z = 2$.
28. **Paraboloide** $\mathbf{F} = 4x\mathbf{i} + 4y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$ hacia fuera (normal alejándose del eje z) a través de la superficie cortada de la parte inferior del paraboloide $z = x^2 + y^2$ por el plano $z = 1$.

En los ejercicios 29 y 30, calcule el flujo del campo \mathbf{F} a través de la porción de la superficie dada en la dirección especificada.

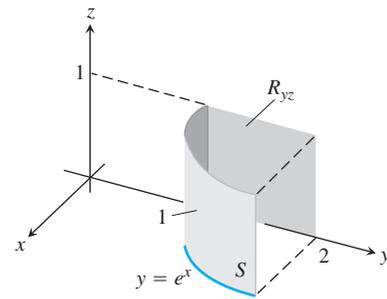
29. $\mathbf{F}(x, y, z) = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$
 S : superficie rectangular $z = 0$, $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 3$,
 en dirección de \mathbf{k} .
30. $\mathbf{F}(x, y, z) = yx^2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$
 S : superficie rectangular $y = 0$, $-1 \leq x \leq 2$, $2 \leq z \leq 7$,
 en dirección de $-\mathbf{j}$.

En los ejercicios 31 a 36, calcule el flujo del campo \mathbf{F} a través de la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ en el primer octante en la dirección más lejana del origen.

31. $\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{k}$
32. $\mathbf{F}(x, y, z) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$

33. $\mathbf{F}(x, y, z) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + \mathbf{k}$
34. $\mathbf{F}(x, y, z) = zx\mathbf{i} + zy\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$
35. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$
36. $\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

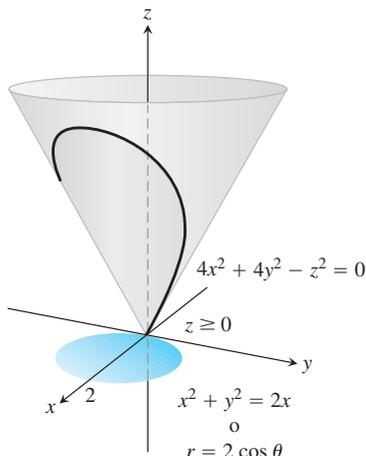
37. Calcule el flujo del campo $\mathbf{F}(x, y, z) = z^2\mathbf{i} + x\mathbf{j} - 3z\mathbf{k}$ hacia fuera a través de la superficie cortada del cilindro parabólico $z = 4 - y^2$ por los planos $x = 0$, $x = 1$ y $z = 0$.
38. Calcule el flujo del campo $\mathbf{F}(x, y, z) = 4x\mathbf{i} + 4y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$ hacia fuera (alejándose del eje z) a través de la superficie cortada de la parte inferior del paraboloide $z = x^2 + y^2$ por el plano $z = 1$.
39. Sea S la porción del cilindro $y = e^x$ en el primer octante que se proyecta de manera paralela al eje x sobre el rectángulo R_{xy} : $1 \leq y \leq 2$, $0 \leq z \leq 1$ en el plano yz (véase la figura). Sea \mathbf{n} el vector unitario normal a S que apunta alejándose del plano yz . Encuentre el flujo del campo $\mathbf{F}(x, y, z) = -2\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ a través de S en la dirección de \mathbf{n} .



40. Sea S la porción del cilindro $y = \ln x$ en el primer octante, cuya proyección paralela al eje y sobre el plano xz es el rectángulo R_{xz} : $1 \leq y \leq e$, $0 \leq z \leq 1$. Sea \mathbf{n} el vector unitario normal a S que apunta alejándose del plano xz . Encuentre el flujo del campo $\mathbf{F}(x, y, z) = 2y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ a través de S en la dirección de \mathbf{n} .
41. Calcule el flujo hacia fuera del campo $\mathbf{F} = 2xy\mathbf{i} + 2yz\mathbf{j} + 2xz\mathbf{k}$ a través de la superficie del cubo cortado del primer octante por los planos $x = a$, $y = a$, $z = a$.
42. Calcule el flujo hacia fuera del campo $\mathbf{F} = xz\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + \mathbf{k}$ a través de la superficie de la región superior cortada de la esfera sólida $x^2 + y^2 + z^2 \leq 25$ por el plano $z = 3$.

Momentos y masas

43. **Centroide** Determine el centroide de la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ que está en el primer octante.
44. **Centroide** Determine el centroide de la superficie cortada del cilindro $y^2 + z^2 = 9$, $z \geq 0$, por los planos $x = 0$ y $x = 3$ (parecida a la superficie del ejemplo 5).
45. **Capa delgada de densidad constante** Determine el centro de masa y el momento de inercia con respecto al eje z de una capa delgada de densidad constante δ cortada en el cono $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ por los planos $z = 1$ y $z = 2$.
46. **Superficie cónica con densidad constante** Determine el momento de inercia con respecto al eje z de una capa delgada de densidad constante δ cortada del cono $4x^2 + 4y^2 - z^2 = 0$, $z \geq 0$, por el cilindro circular $x^2 + y^2 = 2x$ (véase la figura más adelante).



47. Capas esféricas

- a. Determine el momento de inercia con respecto al diámetro de una capa delgada esférica de radio a y densidad constante δ . (Trabaje con una capa esférica y luego duplique el resultado).
- b. Con base en el teorema del eje paralelo (ejercicio 15.6) y el resultado del inciso (a), determine el momento de inercia con respecto a una recta tangente a la capa.

48. Superficie cónica Determine el centroide de la superficie lateral de un cono sólido con base de radio a y altura h (superficie del cono menos la base).

16.7 | Teorema de Stokes

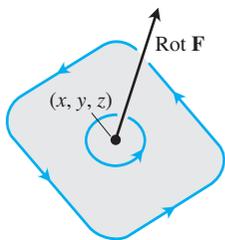


FIGURA 16.55 El vector circulación en el punto (x, y, z) de un plano en un flujo tridimensional. Observe la relación de mano derecha con respecto a la recta de circulación de las partículas en fluido.

Como vimos en la sección 16.4, la densidad de circulación o componente rotacional de un campo de dos dimensiones $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ en el punto (x, y) queda descrita por la cantidad escalar $(\partial N/\partial x - \partial M/\partial y)$. En tres dimensiones, la circulación alrededor de un punto P en el plano queda descrita por un vector.

Suponga que \mathbf{F} es el campo de velocidades de un fluido que fluye en el espacio. Las partículas próximas al punto (x, y, z) en el fluido tienden a girar alrededor de un eje que pasa por (x, y, z) y que es paralelo a cierto vector que estamos a punto de definir. Este vector apunta en la dirección en la cual la rotación va en sentido contrario a las manecillas del reloj cuando se mira el plano de circulación hacia abajo desde la punta de la flecha que representa al vector. Ésta es la dirección en que apunta el pulgar de la mano derecha cuando los dedos rodean el eje de rotación en el mismo sentido de rotación de las partículas en el fluido (figura 16.55). La longitud del vector mide la tasa de rotación. El vector se conoce como **vector rotacional** y para el campo vectorial $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ se define como

$$\text{rot } \mathbf{F} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \mathbf{k}. \tag{1}$$

Esta información es una consecuencia del teorema de Stokes, que es la generalización para el espacio de la forma de circulación rotacional del teorema de Green y la materia de esta sección.

Observe que $(\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} = (\partial N/\partial x - \partial M/\partial y)$ es congruente con nuestra definición de la sección 16.4, de $\mathbf{F} = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$. Con frecuencia, la fórmula para el rotacional de \mathbf{F} en la ecuación (1) se escribe utilizando el operador simbólico

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}. \tag{2}$$

(El símbolo ∇ se lee como “nabla”). El rotacional de \mathbf{F} es $\nabla \times \mathbf{F}$:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \mathbf{k} \\ &= \text{rot } \mathbf{F}. \end{aligned}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} \quad (3)$$

EJEMPLO 1 Determine el rotacional de $\mathbf{F} = (x^2 - y)\mathbf{i} + xe^z\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$.

Solución Usamos la ecuación (3) y la forma de determinantes, de manera que

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{F} &= \nabla \times \mathbf{F} \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 - z & xe^z & xy \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial y}(xy) - \frac{\partial}{\partial z}(xe^z) \right) \mathbf{i} - \left(\frac{\partial}{\partial x}(xy) - \frac{\partial}{\partial z}(x^2 - z) \right) \mathbf{j} \\ &\quad + \left(\frac{\partial}{\partial x}(xe^z) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - z) \right) \mathbf{k} \\ &= (x - xe^z)\mathbf{i} - (y + 1)\mathbf{j} + (e^z - 0)\mathbf{k} \\ &= x(1 - e^z)\mathbf{i} - (y + 1)\mathbf{j} + e^z\mathbf{k} \end{aligned}$$

Como veremos, el operador ∇ tiene varias aplicaciones. Por ejemplo, cuando se aplica a una función escalar $f(x, y, z)$, nos da el gradiente de f :

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}.$$

Éste se lee ahora como “nabla f ” o “gradiente de f ”.

Teorema de Stokes

El teorema de Stokes generaliza el teorema de Green para tres dimensiones. La forma rotacional de la circulación del teorema de Green relaciona la circulación, en el sentido contrario al de las manecillas de un reloj, de un campo vectorial alrededor de una curva cerrada simple C en el plano xy con una integral doble sobre la región plana R encerrada por C . El teorema de Stokes relaciona la circulación de un campo vectorial alrededor de la frontera C de una superficie orientada S en el espacio (figura 15.56) con una integral de superficie sobre la superficie S . Es necesario que la superficie sea **suave por partes**, lo cual significa que se trata de una unión finita de superficies suaves unidas a lo largo de curvas suaves.

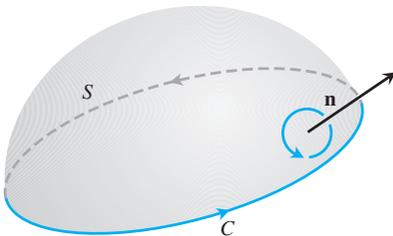


FIGURA 16.56 La orientación de la curva límite C da una relación de mano derecha al campo normal \mathbf{n} . Si el pulgar de la mano derecha apunta a lo largo de \mathbf{n} , los dedos se enrollan en la dirección de C .

TEOREMA 6: Teorema de Stokes Sea S una superficie orientada suave por partes que tiene como frontera una curva suave por partes C . Sea $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ un campo vectorial cuyos componentes tienen primeras derivadas parciales continuas sobre una región abierta que contiene a S . Así, la circulación de \mathbf{F} alrededor de C en la dirección contraria a las manecillas del reloj con respecto al vector unitario \mathbf{n} normal a la superficie es igual a la integral de $\nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ en S .

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma \quad (4)$$

Circulación en sentido contrario al de las manecillas del reloj Integral del rotacional

Observe en la ecuación (4) que si dos superficies orientadas diferentes, S_1 y S_2 , tienen la misma frontera C , las integrales de los rotacionales son iguales:

$$\iint_{S_1} \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_1 \, d\sigma = \iint_{S_2} \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_2 \, d\sigma.$$

Ambas integrales rotacionales son iguales a la integral de circulación en sentido contrario al de las manecillas del reloj, en el lado izquierdo de la ecuación (4), siempre que los vectores unitarios normales \mathbf{n}_1 y \mathbf{n}_2 orienten correctamente las superficies.

Si C es una curva en el plano xy , orientada en el sentido contrario al de las manecillas del reloj, y R es la región en el plano xy acotada por C , entonces $d\sigma = dx \, dy$ y

$$(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} = (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} = \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right).$$

En estas condiciones, la ecuación de Stokes se convierte en

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx \, dy,$$

que es la forma de circulación rotacional de la ecuación en el teorema de Green. De manera recíproca, al invertir estos pasos replanteamos la forma de circulación rotacional del teorema de Green para campos de dos dimensiones con la notación como

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} \, dA. \tag{5}$$

Véase la figura 16.57.

EJEMPLO 2 Evalúe la ecuación (4) para el hemisferio $S: x^2 + y^2 + z^2 = 9, z \geq 0$, su circunferencia frontera $C: x^2 + y^2 = 9, z = 0$, y el campo $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$.

Solución El hemisferio se parece mucho a la superficie de la figura 16.56 con el círculo frontera C sobre el plano xy (figura 16.58). Calculamos la circulación en sentido contrario al de las manecillas del reloj alrededor de C (visto desde arriba), utilizando la parametrización $\mathbf{r}(\theta) = (3 \cos \theta)\mathbf{i} + (3 \sin \theta)\mathbf{j}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$:

$$d\mathbf{r} = (-3 \sin \theta \, d\theta)\mathbf{i} + (3 \cos \theta \, d\theta)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} = (3 \sin \theta)\mathbf{i} - (3 \cos \theta)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -9 \sin^2 \theta \, d\theta - 9 \cos^2 \theta \, d\theta = -9 \, d\theta$$

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} -9 \, d\theta = -18\pi.$$

Para la integral del rotacional de F , tenemos

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z} \right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x} \right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right)\mathbf{k}$$

$$= (0 - 0)\mathbf{i} + (0 - 0)\mathbf{j} + (-1 - 1)\mathbf{k} = -2\mathbf{k}$$

$$\mathbf{n} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{3}$$

Normal unitario exterior

$$d\sigma = \frac{3}{z} \, dA$$

Sección 16.6, ejemplo 6, con $a = 3$

$$\nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = -\frac{2z}{3} \frac{3}{z} \, dA = -2 \, dA$$

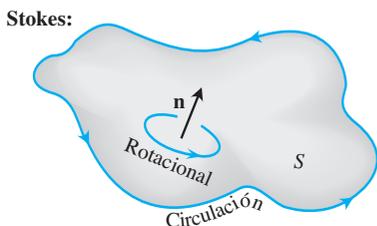
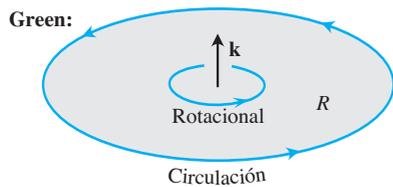


FIGURA 16.57 Comparación del teorema de Green y el teorema de Stokes.

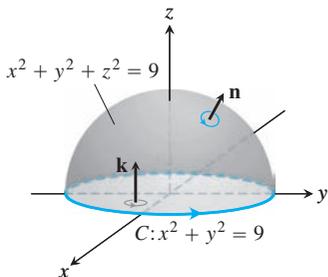


FIGURA 16.58 Un hemisferio y un disco, cada uno con frontera en C (ejemplos 2 y 3).

y

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \iint_{x^2+y^2 \leq 9} -2 \, dA = -18\pi.$$

La circulación alrededor del círculo es igual a la integral del rotacional sobre el hemisferio, como debe ser. ■

La integral de superficie en el teorema de Stokes se calcula usando cualquier superficie que tenga una curva C como frontera, siempre que la superficie esté orientada adecuadamente y permanezca dentro del dominio del campo \mathbf{F} . En el siguiente ejemplo se ilustra este hecho para la circulación alrededor de la curva C del ejemplo 2.

EJEMPLO 3 Determine la circulación alrededor de la circunferencia frontera C del ejemplo 2 usando un disco de radio 3 con centro en el origen en el plano xy como la superficie S (en lugar del hemisferio). Observe la figura 16.58.

Solución Como en el ejemplo 2, $\nabla \times \mathbf{F} = -2\mathbf{k}$. Para la superficie que ahora es el disco descrito en el plano xy , tenemos al vector normal $\mathbf{n} = \mathbf{k}$, de manera que

$$\nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = -2\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} \, dA = -2 \, dA$$

y

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \iint_{x^2+y^2 \leq 9} -2 \, dA = -18\pi,$$

un cálculo más sencillo que el anterior. ■

EJEMPLO 4 Determine la circulación del campo $\mathbf{F} = (x^2 - y)\mathbf{i} + 4z\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$ alrededor de la curva C en la cual el plano $z = 2$ corta al cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, en sentido contrario a las manecillas del reloj, vista desde arriba (figura 16.59).

Solución El teorema de Stokes nos permite encontrar la circulación integrando sobre la superficie del cono. El hecho de recorrer C en el sentido contrario al de las manecillas del reloj, visto desde arriba, corresponde a tomar la normal *interior* \mathbf{n} del cono, es decir, la normal con el componente \mathbf{k} positivo.

Parametrizamos el cono como

$$\mathbf{r}(r, \theta) = (r \cos \theta)\mathbf{i} + (r \sin \theta)\mathbf{j} + r\mathbf{k}, \quad 0 \leq r \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

De esta forma, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \frac{\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta}{|\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta|} = \frac{-(r \cos \theta)\mathbf{i} - (r \sin \theta)\mathbf{j} + r\mathbf{k}}{r\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-(\cos \theta)\mathbf{i} - (\sin \theta)\mathbf{j} + \mathbf{k} \right) \end{aligned}$$

Sección 16.5, Ejemplo 4

$$d\sigma = r\sqrt{2} \, dr \, d\theta$$

Sección 16.5, Ejemplo 4

$$\nabla \times \mathbf{F} = -4\mathbf{i} - 2x\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

Ejemplo 1

$$= -4\mathbf{i} - 2r \cos \theta \mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

 $x = r \cos \theta$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(4 \cos \theta + 2r \cos \theta \sin \theta + 1 \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(4 \cos \theta + r \sin 2\theta + 1 \right) \end{aligned}$$

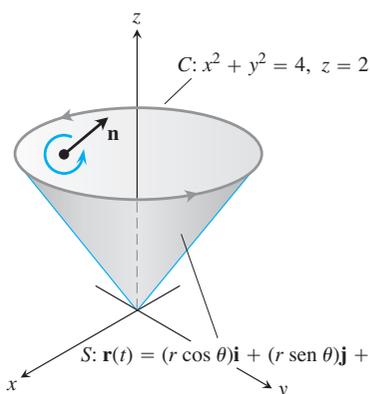


FIGURA 16.59 La curva C y el cono S del ejemplo 4.

y la circulación es

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma && \text{Teorema de Stokes, ecuación (4)} \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2}} (4 \cos \theta + r \operatorname{sen} 2\theta + 1) (r\sqrt{2} \, dr \, d\theta) = 4\pi. \end{aligned}$$

EJEMPLO 5 El cono usado en el ejemplo 4 no es la superficie más fácil para calcular la circulación alrededor del círculo frontera C que se encuentra en el plano $z = 3$. Si en su lugar usamos el disco plano de radio 3 con centro sobre el eje z y que está en el plano $z = 3$, entonces el vector normal a la superficie S es $\mathbf{n} = \mathbf{k}$. Exactamente como en el cálculo del ejemplo 4, tenemos que $\nabla \times \mathbf{F} = -4\mathbf{i} - 2x\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Sin embargo, ahora obtenemos a $\nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = 1$, de manera que

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \iint_{x^2+y^2 \leq 4} 1 \, dA = 4\pi. \quad \text{La sombra es el disco de radio 2 en el plano } xy.$$

Este resultado está de acuerdo con el valor de circulación del ejemplo 4. ■

Interpretación de $\nabla \times \mathbf{F}$ mediante la rueda con paletas

Suponga que \mathbf{F} es el campo de velocidades de un fluido que se mueve en una región R del espacio que contiene la curva cerrada C . Entonces

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

es la circulación del fluido alrededor de C . Por el teorema de Stokes, la circulación es igual al flujo de $\nabla \times \mathbf{F}$ a través de una superficie S orientada adecuadamente con frontera en C :

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma.$$

Suponga que fijamos un punto en la región R y con una dirección \mathbf{u} en Q . Sea C un círculo de radio ρ , con centro en Q , cuyo plano es normal a \mathbf{u} . Si $\nabla \times \mathbf{F}$ es continuo en Q , el valor promedio del componente \mathbf{u} de $\nabla \times \mathbf{F}$ sobre el disco circular S acotado por C se aproxima al componente \mathbf{u} de $\nabla \times \mathbf{F}$ en Q cuando $\rho \rightarrow 0$:

$$(\nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{u})_Q = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\pi\rho^2} \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} \, d\sigma.$$

Si aplicamos el teorema de Stokes y reemplazamos la integral de superficie por una integral de recta en C , obtenemos

$$(\nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{u})_Q = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\pi\rho^2} \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \tag{6}$$

El lado izquierdo de la ecuación (6) tiene su valor máximo cuando \mathbf{u} está en la dirección de $\nabla \times \mathbf{F}$. Cuando ρ es pequeño, el límite del lado derecho de la ecuación (6) es aproximadamente

$$\frac{1}{\pi\rho^2} \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

que es la circulación alrededor de C dividida entre el área del disco (densidad de circulación). Suponga que una rueda pequeña de radio ρ con paletas se introduce en el fluido en Q , con su eje dirigido a lo largo de \mathbf{u} (figura 16.60). La circulación del fluido alrededor de C afectará la

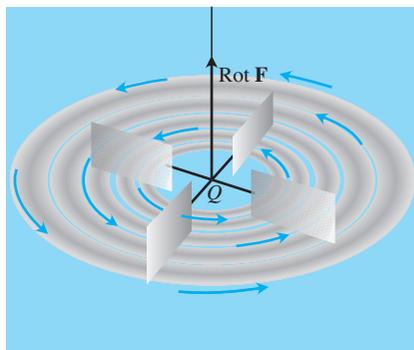


FIGURA 16.60 Interpretación del rotacional de \mathbf{F} mediante una rueda con paletas.

tasa de giro de la rueda con paletas. La rueda girará más rápido cuando la integral de circulación se maximice, y por lo tanto, girará más rápido cuando el eje de la rueda con paletas apunte en la dirección de $\nabla \times \mathbf{F}$.

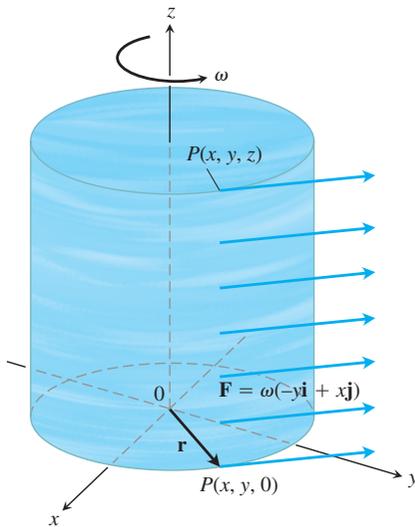


FIGURA 16.61 Un flujo rotacional estable paralelo al plano xy , con velocidad angular constante ω en la dirección positiva (sentido contrario a las manecillas del reloj) (ejemplo 6).

EJEMPLO 6 Un fluido de densidad constante gira alrededor del eje z con una velocidad $\mathbf{F} = \omega(-y\mathbf{i} + x\mathbf{j})$, donde ω es una constante positiva llamada *velocidad angular* de rotación (figura 16.61). Determine $\nabla \times \mathbf{F}$ y relacione esto con la densidad de circulación.

Solución Con $\mathbf{F} = -\omega y\mathbf{i} + \omega x\mathbf{j}$, obtenemos la rotacional

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{F} &= \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \mathbf{k} \\ &= (0 - 0)\mathbf{i} + (0 - 0)\mathbf{j} + (\omega - (-\omega))\mathbf{k} = 2\omega\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Por el teorema de Stokes, la circulación de \mathbf{F} alrededor del círculo C de radio ρ que acota a un disco S en un plano normal a $\nabla \times \mathbf{F}$, digamos el plano xy , es

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \iint_S 2\omega\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} \, dx \, dy = (2\omega)(\pi\rho^2).$$

Por lo tanto, al resolver esta última ecuación para 2ω , tenemos

$$(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} = 2\omega = \frac{1}{\pi\rho^2} \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

en concordancia con la ecuación (6) cuando $\mathbf{u} = \mathbf{k}$. ■

EJEMPLO 7 Utilice el teorema de Stokes para evaluar $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, si $\mathbf{F} = xz\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + 3xz\mathbf{k}$ y C es la frontera de la porción del plano $2x + y + z = 2$ en el primer octante, recorrida en sentido contrario al de las manecillas del reloj vista desde arriba (figura 16.62).

Solución El plano es la superficie de nivel $f(x, y, z) = 2$ de la función $f(x, y, z) = 2x + y + z$. El vector unitario normal

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \frac{(2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})}{|2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}|} = \frac{1}{\sqrt{6}} (2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$$

es congruente con el movimiento en el sentido contrario al de las manecillas del reloj alrededor de C . Al aplicar el teorema de Stokes, obtenemos

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & xy & 3xz \end{vmatrix} = (x - 3z)\mathbf{j} + y\mathbf{k}.$$

En el plano, $z = 2 - 2x - y$, por lo que

$$\nabla \times \mathbf{F} = (x - 3(2 - 2x - y))\mathbf{j} + y\mathbf{k} = (7x + 3y - 6)\mathbf{j} + y\mathbf{k}$$

y

$$\nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{6}} (7x + 3y - 6 + y) = \frac{1}{\sqrt{6}} (7x + 4y - 6).$$

El elemento de área de la superficie es

$$d\sigma = \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \mathbf{k}|} dA = \frac{\sqrt{6}}{1} dx \, dy.$$

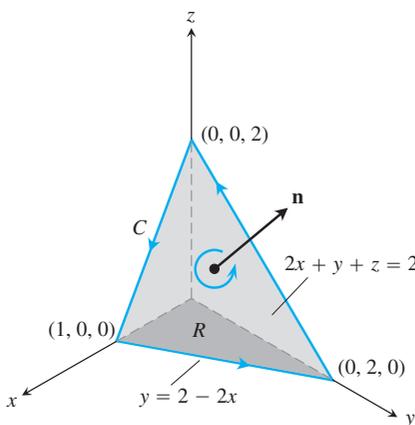


FIGURA 16.62 La superficie plana del ejemplo 7.

La circulación es

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma && \text{Teorema de Stokes, ecuación (4)} \\ &= \int_0^1 \int_0^{2-2x} \frac{1}{\sqrt{6}} (7x + 4y - 6) \sqrt{6} \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{2-2x} (7x + 4y - 6) \, dy \, dx = -1. \end{aligned}$$

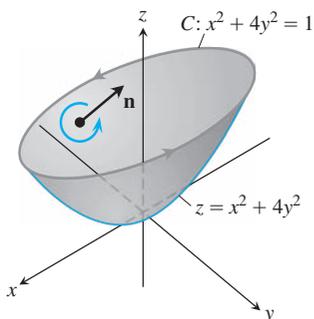


FIGURA 16.63 La porción del paraboloido elíptico del ejemplo 8, mostrando la curva de intersección C con el plano $z = 1$ y su orientación interior normal dada por \mathbf{n} .

EJEMPLO 8 Sea la superficie S el paraboloido elíptico $z = x^2 + 4y^2$ que está debajo del plano $z = 1$ (figura 16.63). Definimos la orientación de S tomando el vector normal *interior* \mathbf{n} de la superficie, el cual es la normal con el componente positivo \mathbf{k} . Encuentre el flujo del rotacional $\nabla \times \mathbf{F}$ a través de S en la dirección \mathbf{n} para el campo vectorial $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xz^2\mathbf{k}$.

Solución Usamos el teorema de Stokes para calcular la integral rotacional para determinar el equivalente de la circulación de \mathbf{F} en sentido contrario al de las manecillas del reloj alrededor de la curva de intersección C del paraboloido $z = x^2 + 4y^2 = 1$ y el plano $z = 1$, como se indica en la figura 16.63. Observe que la orientación de S es consistente con la dirección del recorrido de C en el sentido contrario al de las manecillas del reloj alrededor del eje z . La curva C es la elipse $x^2 + 4y^2 = 1$ en el plano $z = 1$. Podemos parametrizar la elipse por $x = \cos t$, $y = \frac{1}{2} \sin t$, $z = 1$, para $0 \leq t \leq 2\pi$, de manera que C está dada por

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + \frac{1}{2}(\sin t)\mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Para calcular la integral de circulación $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, evaluamos \mathbf{F} a lo largo de C y obtenemos el vector velocidad $d\mathbf{r}/dt$:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \frac{1}{2}(\sin t)\mathbf{i} - (\cos t)\mathbf{j} + (\cos t)\mathbf{k}$$

y

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -(\sin t)\mathbf{i} + \frac{1}{2}(\cos t)\mathbf{j}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{2} \sin^2 t - \frac{1}{2} \cos^2 t \right) dt \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} dt = -\pi. \end{aligned}$$

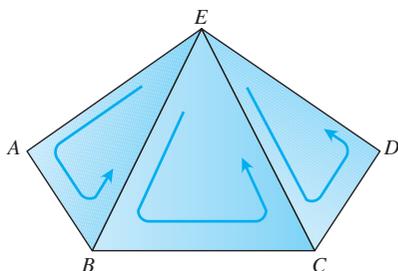
Por lo tanto, el flujo del rotacional a través de S en la dirección \mathbf{n} para el campo \mathbf{F} es

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = -\pi.$$

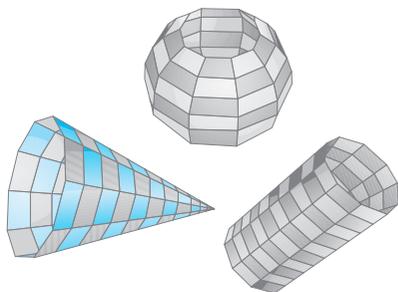
Demostración del teorema de Stokes para superficies poliédricas

Sea S una superficie poliédrica que consta de un número finito de regiones planas o caras. (Se presentan ejemplos en la figura 16.64). Aplicamos por separado el teorema de Green a cada cara de S . Hay dos tipos de caras:

1. Aquéllas rodeadas en todos sus lados por otras caras.
2. Aquéllas que tienen una o más aristas no adyacentes a otras caras.



(a)



(b)

FIGURA 16.64 (a) Parte de una superficie poliédrica. (b) Otras superficies poliédricas.

La frontera Δ de S consta de aquellas aristas de las caras del tipo 2 que no son adyacentes a otras caras. En la figura 16.64a, los triángulos EAB , BCE y CDE representan una parte de S , con $ABCD$ como parte de la frontera Δ . Aplicamos la forma tangencial generalizada del teorema de Green a cada uno de los tres triángulos de la figura 16.64a y luego sumamos los resultados para obtener

$$\left(\oint_{EAB} + \oint_{BCE} + \oint_{CDE} \right) \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \left(\iint_{EAB} + \iint_{BCE} + \iint_{CDE} \right) \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma. \quad (7)$$

En la forma generalizada, la integral de línea de \mathbf{F} alrededor de la curva que encierra la región plana R normal a \mathbf{n} es igual a la integral doble de $(\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}$ sobre R .

Las tres integrales de línea de la izquierda en la ecuación (7) se combinan en una sola integral de línea alrededor del perímetro $ABCDE$, ya que las integrales a lo largo de los segmentos interiores se cancelan por pares. Por ejemplo, la integral a lo largo del segmento BE del triángulo ABE tiene signo opuesto a la integral a lo largo del mismo segmento del triángulo EBC . Lo mismo se cumple para el segmento CE . De aquí que la ecuación (7) se reduce a

$$\oint_{ABCDE} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{ABCDE} \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma.$$

Cuando aplicamos la forma generalizada del teorema de Green a todas las caras y sumamos los resultados, obtenemos

$$\oint_{\Delta} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma.$$

Éste es el teorema de Stokes para la superficie poliédrica S de la figura 16.64a. En la figura 16.64b se muestran superficies poliédricas más generales y se puede extender la demostración a estas superficies. Se obtienen superficies suaves generales como límites de superficies poliédricas.

El teorema de Stokes para superficies con agujeros

El teorema de Stokes se cumple para una superficie orientada S que tiene uno o más agujeros (figura 16.65). La integral de superficie en S del componente normal de $\nabla \times \mathbf{F}$ es igual a la suma de las integrales de línea alrededor de todas las curvas frontera del componente tangencial de \mathbf{F} , donde las curvas se trazan en la dirección inducida por la orientación de S . Para tales superficies, el teorema es el mismo, pero se considera a C como una unión de curvas simples cerradas.

Una identidad importante

La siguiente identidad se presenta con frecuencia tanto en matemáticas como en las ciencias físicas.

$$\text{rot grad } f = \mathbf{0} \quad \text{o} \quad \nabla \times \nabla f = \mathbf{0} \quad (8)$$

Esta identidad se cumple para cualquier función $f(x, y, z)$, cuyas segundas derivadas parciales son continuas. La demostración es como sigue:

$$\nabla \times \nabla f = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} = (f_{zy} - f_{yz})\mathbf{i} - (f_{zx} - f_{xz})\mathbf{j} + (f_{yx} - f_{xy})\mathbf{k}.$$

Si las segundas derivadas parciales son continuas, las segundas derivadas cruzadas que se muestran entre paréntesis son iguales (teorema 2, sección 14.3) y el vector es igual a cero.

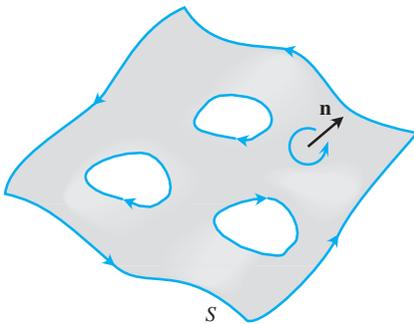


FIGURA 16.65 El teorema de Stokes también se cumple para superficies orientadas agujeradas.

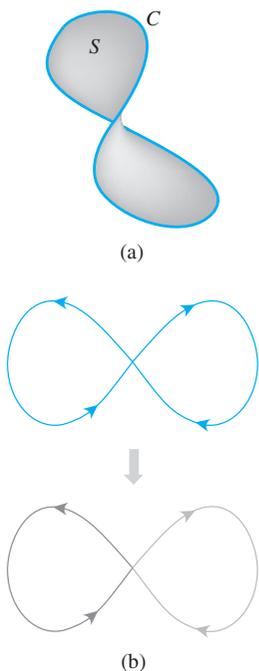


FIGURA 16.66 (a) En una región abierta simplemente conexa en el espacio, una curva simple cerrada C es la frontera de una superficie suave S . (b) Las curvas suaves que se cruzan a sí mismas se dividen en lazos donde se aplica el teorema de Stokes.

Campos conservativos y teorema de Stokes

En la sección 16.3 nos encontramos con el hecho de que un campo \mathbf{F} que es conservativo en una región abierta D en el espacio es equivalente a que la integral de \mathbf{F} alrededor de cada lazo cerrado en C se anule. Esto, a la vez, en regiones abiertas *simplemente conexas* equivale a decir que $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ (lo cual demuestra que \mathbf{F} es conservativo en estas regiones).

TEOREMA 7: Relación de $\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$ con la propiedad del lazo cerrado

Si $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ en cualquier punto de una región abierta simplemente conexa D en el espacio, entonces para cualquier trayectoria cerrada y suave por partes C en D ,

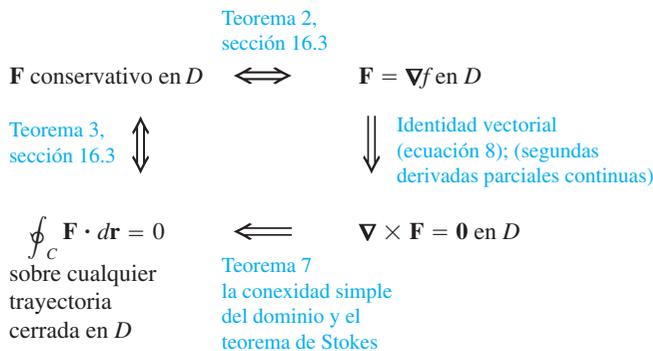
$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

Bosquejo de una demostración El teorema 7 se demuestra en dos pasos. El primer paso es para curvas cerradas simples (lazos que no se cruzan), como el de la figura 16.66a. Un teorema de topología, una rama de las matemáticas avanzadas, establece que toda curva cerrada suave simple C en una región abierta simplemente conexa D es la frontera de una superficie suave con dos lados S , que también está en D . Así, por el teorema de Stokes,

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = 0.$$

El segundo paso se refiere a las curvas que se cruzan, como la de la figura 16.66b. La idea es descomponerlas en lazos simples generados por superficies orientables, aplicar el teorema de Stokes a un lazo a la vez y sumar los resultados. ■

El siguiente diagrama resume los resultados para campos conservativos definidos en regiones abiertas conexas y simplemente conexas.



Ejercicios 16.7

Uso del teorema de Stokes para calcular las integrales de línea

En los ejercicios 1 a 6, utilice la integral de superficie del teorema de Stokes para calcular la circulación del campo \mathbf{F} alrededor de la curva C en la dirección indicada.

1. $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + 2x\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$

C : la elipse $4x^2 + y^2 = 4$ en el plano xy , en el sentido contrario al de las manecillas del reloj, vista desde arriba.

2. $\mathbf{F} = 2y\mathbf{i} + 3x\mathbf{j} - z^2\mathbf{k}$

C : la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$ en el plano xy , en el sentido contrario al de las manecillas del reloj, vista desde arriba.

3. $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$

C : la frontera del triángulo cortado del plano $x + y + z = 1$ por el primer octante, en el sentido contrario al de las manecillas del reloj, visto desde arriba.

$$4. \mathbf{F} = (y^2 + z^2)\mathbf{i} + (x^2 + z^2)\mathbf{j} + (x^2 + y^2)\mathbf{k}$$

C : la frontera del triángulo cortado del plano $x + y + z = 1$ por el primer octante, en el sentido contrario al de las manecillas del reloj, visto desde arriba.

$$5. \mathbf{F} = (y^2 + z^2)\mathbf{i} + (x^2 + y^2)\mathbf{j} + (x^2 + y^2)\mathbf{k}$$

C : el cuadrado acotado por las rectas $x = \pm 1$ y $y = \pm 1$ en el plano xy , en contra de las manecillas del reloj, visto desde arriba.

$$6. \mathbf{F} = x^2y^3\mathbf{i} + \mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

C : la intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y el hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $z \geq 0$, en el sentido contrario al de las manecillas del reloj, visto desde arriba.

Flujo del rotacional

7. Sea \mathbf{n} el vector unitario normal exterior de la capa elíptica

$$S: 4x^2 + 9y^2 + 36z^2 = 36, \quad z \geq 0,$$

y sea

$$\mathbf{F} = y\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + (x^2 + y^4)^{3/2} \operatorname{sen} e^{\sqrt{xyz}} \mathbf{k}.$$

Calcule el valor de

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma.$$

(Sugerencia: Considere que una parametrización de la elipse en la base de la capa es $x = 3 \cos t$, $y = 2 \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$).

8. Sea \mathbf{n} el vector unitario normal exterior (normal alejándose del origen) de la capa parabólica

$$S: 4x^2 + y + z^2 = 4, \quad y \geq 0,$$

y sea

$$\mathbf{F} = \left(-z + \frac{1}{2+x}\right)\mathbf{i} + (\tan^{-1} y)\mathbf{j} + \left(x + \frac{1}{4+z}\right)\mathbf{k}.$$

Calcule el valor de

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma.$$

9. Sea C el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$, $0 \leq z \leq h$, junto con su tapa superior, $x^2 + y^2 \leq a^2$, $z = h$. Sea $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$. Utilice el teorema de Stokes para encontrar el flujo de $\nabla \times \mathbf{F}$ hacia fuera a través de S .

10. Evalúe

$$\iint_S \nabla \times (y\mathbf{i}) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma,$$

donde S es el hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$.

11. **Flujo del rotacional de \mathbf{F}** Demuestre que

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$$

tiene el mismo valor para todas las superficies orientadas S que genera C , y que inducen la misma dirección positiva en C .

12. Sea \mathbf{F} un campo vectorial derivable definido en una región que contiene una superficie orientada cerrada suave S y su interior. Sea \mathbf{n} el campo vectorial unitario normal sobre S . Suponga que S es la unión de dos superficies, S_1 y S_2 , unidas a lo largo de una curva cerrada simple suave C . ¿Se puede decir algo acerca de

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma?$$

Justifique su respuesta.

El teorema de Stokes para superficies parametrizadas

En los ejercicios 13 a 18, utilice la integral de superficie del teorema de Stokes para calcular el flujo del rotacional del campo \mathbf{F} a través de la superficie S , en la dirección del vector unitario normal exterior \mathbf{n} .

$$13. \mathbf{F} = 2z\mathbf{i} + 3x\mathbf{j} + 5y\mathbf{k}$$

$$S: \mathbf{r}(r, \theta) = (r \cos \theta)\mathbf{i} + (r \sin \theta)\mathbf{j} + (4 - r^2)\mathbf{k}, \\ 0 \leq r \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$14. \mathbf{F} = (y - z)\mathbf{i} + (z - x)\mathbf{j} + (x + z)\mathbf{k}$$

$$S: \mathbf{r}(r, \theta) = (r \cos \theta)\mathbf{i} + (r \sin \theta)\mathbf{j} + (9 - r^2)\mathbf{k}, \\ 0 \leq r \leq 3, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$15. \mathbf{F} = x^2y\mathbf{i} + 2y^3z\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$$

$$S: \mathbf{r}(r, \theta) = (r \cos \theta)\mathbf{i} + (r \sin \theta)\mathbf{j} + r\mathbf{k}, \\ 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$16. \mathbf{F} = (x - y)\mathbf{i} + (y - z)\mathbf{j} + (z - x)\mathbf{k}$$

$$S: \mathbf{r}(r, \theta) = (r \cos \theta)\mathbf{i} + (r \sin \theta)\mathbf{j} + (5 - r)\mathbf{k}, \\ 0 \leq r \leq 5, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$17. \mathbf{F} = 3y\mathbf{i} + (5 - 2x)\mathbf{j} + (z^2 - 2)\mathbf{k}$$

$$S: \mathbf{r}(\phi, \theta) = (\sqrt{3} \operatorname{sen} \phi \cos \theta)\mathbf{i} + (\sqrt{3} \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta)\mathbf{j} + \\ (\sqrt{3} \cos \phi)\mathbf{k}, \quad 0 \leq \phi \leq \pi/2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$18. \mathbf{F} = y^2\mathbf{i} + z^2\mathbf{j} + x\mathbf{k}$$

$$S: \mathbf{r}(\phi, \theta) = (2 \operatorname{sen} \phi \cos \theta)\mathbf{i} + (2 \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta)\mathbf{j} + (2 \cos \phi)\mathbf{k}, \\ 0 \leq \phi \leq \pi/2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Teoría y ejemplos

19. **Circulación nula** Utilice la identidad $\nabla \times \nabla f = 0$ [ecuación (8) del texto] y el teorema de Stokes para demostrar que las circulaciones de los siguientes campos alrededor de la frontera de cualquier superficie orientable suave en el espacio son cero.

$$\mathbf{a. F} = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k} \quad \mathbf{b. F} = \nabla(xy^2z^3)$$

$$\mathbf{c. F} = \nabla \times (xi + yj + zk) \quad \mathbf{d. F} = \nabla f$$

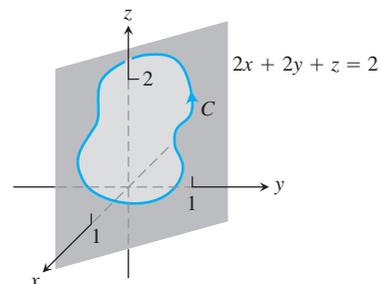
20. **Circulación nula** Sea $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$. Demuestre que la circulación en el sentido de las manecillas del reloj del campo $\mathbf{F} = \nabla f$, alrededor de la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ en el plano xy es igual a cero,

a. considerando a $\mathbf{r} = (a \cos t)\mathbf{i} + (a \operatorname{sen} t)\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, e integrando $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ sobre la circunferencia.

b. aplicando el teorema de Stokes.

21. Sea C una curva suave cerrada simple en el plano $2x + 2y + z = 2$, orientada como se indica aquí. Demuestre que

$$\oint_C 2y \, dx + 3z \, dy - x \, dz$$



depende sólo del área de la región encerrada por C y no de la posición o de la forma de C .

22. Demuestre que si $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, entonces $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$.

- 23. Encuentre un campo vectorial con componentes dos veces derivables, cuyo rotacional sea $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, o bien, demuestre que no hay tales campos.
- 24. ¿Dice algo el teorema de Stokes acerca de la circulación en un campo con rotacional nulo? Justifique su respuesta.
- 25. Sea R una región del plano xy acotada por una curva cerrada simple suave por partes C y suponga que sabe que los momentos de inercia de R con respecto a los ejes x y y son I_x e I_y . Evalúe la integral

$$\oint_C \nabla(r^4) \cdot \mathbf{n} \, ds,$$

donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, en términos de I_x e I_y .

- 26. **Rotacional nulo y un campo no conservativo** Demuestre que el rotacional de

$$\mathbf{F} = \frac{-y}{x^2 + y^2} \mathbf{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

es igual a cero, pero que

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

es diferente de cero si C es la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ en el plano xy . (El teorema 7 no se aplica aquí porque el dominio de \mathbf{F} no es simplemente conexo. El campo \mathbf{F} no está definido a lo largo del eje z , así que no hay forma de contraer a C a un punto sin salir del dominio de \mathbf{F}).

16.8

El teorema de la divergencia y una teoría unificada

La forma de divergencia del teorema de Green en el plano establece que el flujo neto hacia fuera de un campo vectorial a través de una curva cerrada simple se calcula al integrar la divergencia del campo sobre la región encerrada por la curva. El teorema correspondiente en tres dimensiones se llama teorema de la divergencia y establece que el flujo neto hacia fuera de un campo vectorial a través de una superficie cerrada en el espacio se calcula al integrar la divergencia del campo sobre la región encerrada por la superficie. En esta sección demostraremos el teorema de la divergencia y mostraremos cómo simplifica el cálculo de los flujos. También deduciremos la ley de Gauss para el flujo en un campo eléctrico y la ecuación de continuidad en hidrodinámica. Por último, unificaremos los teoremas de integrales vectoriales del capítulo en un solo teorema fundamental.

Divergencia en tres dimensiones

La **divergencia** de un campo vectorial $\mathbf{F} = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + P(x, y, z)\mathbf{k}$ es la función escalar

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}. \tag{1}$$

El símbolo “ $\operatorname{div} \mathbf{F}$ ” se lee “divergencia de \mathbf{F} ” o “ $\operatorname{div} \mathbf{F}$ ”. La notación $\nabla \cdot \mathbf{F}$ se lee “nabla punto \mathbf{F} ”.

$\operatorname{Div} \mathbf{F}$ tiene la misma interpretación física en tres y dos dimensiones. Si \mathbf{F} es el campo de velocidad de un gas que fluye, el valor de $\operatorname{div} \mathbf{F}$ en el punto (x, y, z) es la tasa a la que el gas se comprime o se expande en (x, y, z) . La divergencia es el flujo por unidad de volumen o la densidad del flujo en el punto.

EJEMPLO 1 Los siguientes campos vectoriales representan la velocidad de un gas que fluye en el espacio. Calcule la divergencia de cada campo vectorial e interprete su significado físico. La figura 16.67 presenta los campos vectoriales.

- (a) Expansión: $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$
- (b) Compresión: $\mathbf{F}(x, y, z) = -x\mathbf{i} - y\mathbf{j} - z\mathbf{k}$

(c) Rotación alrededor del eje z : $\mathbf{F}(x, y, z) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$

(d) Cizallamiento a lo largo de planos horizontales: $\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{j}$

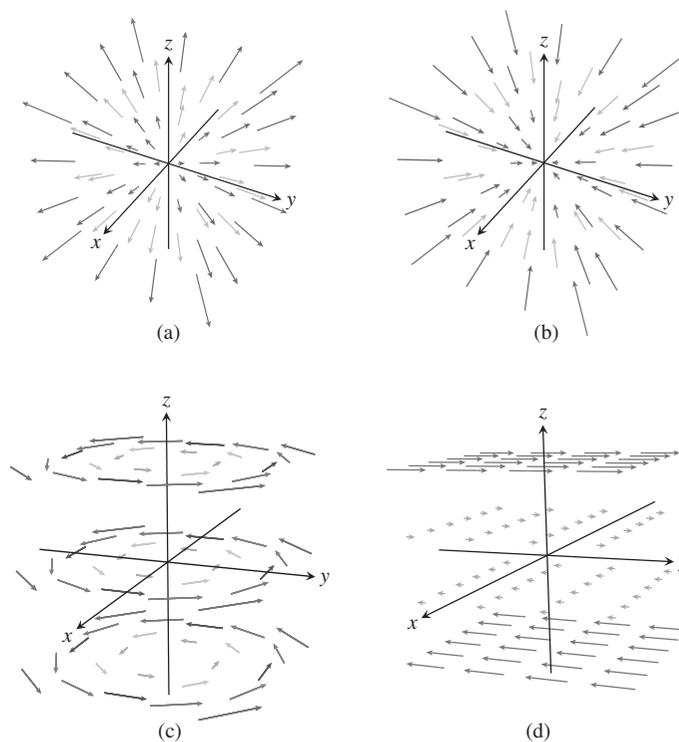


FIGURA 16.67 Campos de velocidad de un gas que fluye en el espacio (ejemplo 1).

Solución

(a) $\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = 3$: el gas experimenta una expansión uniforme en todos los puntos.

(b) $\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(-x) + \frac{\partial}{\partial y}(-y) + \frac{\partial}{\partial z}(-z) = -3$: el gas experimenta una compresión uniforme en todos los puntos.

(c) $\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(-y) + \frac{\partial}{\partial y}(x) = 0$: el gas no se expande ni se comprime en ningún punto.

(d) $\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial y}(z) = 0$: de nuevo, la divergencia es nula en todos los puntos del dominio del campo de velocidad, de manera que el gas no se expande ni se comprime en ningún punto. ■

Teorema de la divergencia

El teorema de la divergencia dice que en ciertas condiciones, el flujo hacia fuera de un campo vectorial a través de una superficie cerrada es igual a la integral triple de la divergencia del campo sobre la región encerrada por la superficie.

TEOREMA 8: Teorema de la divergencia Sea \mathbf{F} un campo vectorial cuyos componentes tienen primeras derivadas parciales, y sea S una superficie cerrada, orientada, suave por partes. El flujo de \mathbf{F} a través de S en la dirección del campo unitario normal exterior \mathbf{n} es igual a la integral de $\nabla \cdot \mathbf{F}$ sobre la región D encerrada por la superficie:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV. \quad (2)$$

Flujo hacia fuera
Integral de divergencia

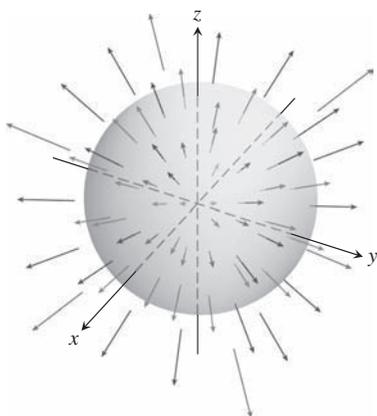


FIGURA 16.68 Un campo vectorial que se expande uniformemente y una esfera (ejemplo 2).

EJEMPLO 2 Evalúe ambos lados de la ecuación (2) para el campo vectorial en expansión $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ sobre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ (figura 16.68).

Solución El vector unitario exterior normal a S , calculado a partir del gradiente de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2$, es

$$\mathbf{n} = \frac{2(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})}{\sqrt{4(x^2 + y^2 + z^2)}} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{a}. \quad x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \text{ en } S$$

Por lo que,

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{a} \, d\sigma = \frac{a^2}{a} \, d\sigma = a \, d\sigma.$$

Por lo tanto,

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \iint_S a \, d\sigma = a \iint_S d\sigma = a(4\pi a^2) = 4\pi a^3. \quad \text{El área de } S \text{ es } 4\pi a^2.$$

La divergencia de \mathbf{F} es

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = 3,$$

así que

$$\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV = \iiint_D 3 \, dV = 3\left(\frac{4}{3}\pi a^3\right) = 4\pi a^3. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 3 Determine el flujo de $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$ hacia fuera a través de la superficie del cubo cortado del primer octante por los planos $x = 1, y = 1$ y $z = 1$.

Solución En vez de calcular el flujo como una suma de seis integrales separadas, una por cada cara del cubo, calculamos el flujo integrando la divergencia

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}(yz) + \frac{\partial}{\partial z}(xz) = y + z + x$$

sobre el interior del cubo:

$$\begin{aligned} \text{Flujo} &= \iint_{\text{Superficie del cubo}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \iiint_{\text{Interior del cubo}} \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV && \text{Teorema de la divergencia} \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (x + y + z) \, dx \, dy \, dz = \frac{3}{2}. && \text{Integración rutinaria} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

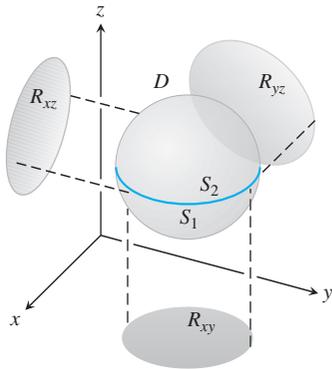


FIGURA 16.69 Demostraremos el teorema de la divergencia para el tipo de regiones tridimensionales que se ilustra aquí.

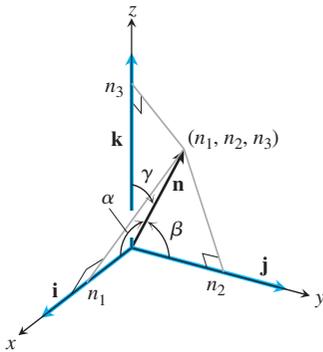


FIGURA 16.70 Los componentes de \mathbf{n} son los cosenos de los ángulos α , β y γ que forma con \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} .

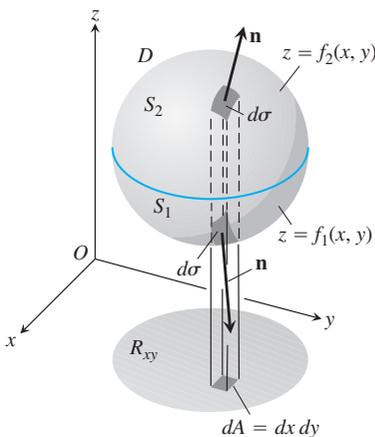


FIGURA 16.71 La región tridimensional D encerrada por la superficie S_1 y S_2 se proyecta en forma vertical en R_{xy} en el plano xy .

Demostración del teorema de divergencia para regiones especiales

Para demostrar el teorema de la divergencia, supongamos que los componentes de \mathbf{F} tienen primeras derivadas parciales continuas. También supongamos que D es una región convexa sin agujeros o burbujas, como una esfera sólida, un cubo o un elipsoide, y que S es una superficie suave por partes. Además, suponemos que cualquier recta perpendicular al plano xy en un punto interior de la región R_{xy} que es la proyección de D en el plano xy , interseca a la superficie S en exactamente dos puntos, formando las superficies

$$S_1: z = f_1(x, y), \quad (x, y) \text{ en } R_{xy}$$

$$S_2: z = f_2(x, y), \quad (x, y) \text{ en } R_{xy},$$

con $f_1 \leq f_2$. Hacemos suposiciones similares acerca de la proyección de D sobre los otros planos coordenados. Observe la figura 16.69.

Los componentes del vector unitario normal $\mathbf{n} = n_1\mathbf{i} + n_2\mathbf{j} + n_3\mathbf{k}$ son los cosenos de los ángulos α , β y γ que \mathbf{n} forma con \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} (figura 16.70). Esto es cierto ya que todos los vectores en cuestión son unitarios. Tenemos

$$n_1 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{i} = |\mathbf{n}| |\mathbf{i}| \cos \alpha = \cos \alpha$$

$$n_2 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{j} = |\mathbf{n}| |\mathbf{j}| \cos \beta = \cos \beta$$

$$n_3 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{k} = |\mathbf{n}| |\mathbf{k}| \cos \gamma = \cos \gamma.$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{n} = (\cos \alpha)\mathbf{i} + (\cos \beta)\mathbf{j} + (\cos \gamma)\mathbf{k}$$

y

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = M \cos \alpha + N \cos \beta + P \cos \gamma.$$

En la forma de componentes, el teorema de la divergencia establece que

$$\iint_S \underbrace{(M \cos \alpha + N \cos \beta + P \cos \gamma)}_{\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}} d\sigma = \iiint_D \underbrace{\left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \right)}_{\text{div } \mathbf{F}} dx dy dz.$$

Demostramos el teorema al probar las tres siguientes igualdades:

$$\iint_S M \cos \alpha d\sigma = \iiint_D \frac{\partial M}{\partial x} dx dy dz \tag{3}$$

$$\iint_S N \cos \beta d\sigma = \iiint_D \frac{\partial N}{\partial y} dx dy dz \tag{4}$$

$$\iint_S P \cos \gamma d\sigma = \iiint_D \frac{\partial P}{\partial z} dx dy dz \tag{5}$$

Demostración de la ecuación (5) Demostraremos la ecuación (5) al convertir la integral de superficie de la izquierda en una integral doble sobre la proyección R_{xy} de D en el plano xy (figura 16.71). La superficie S consta de una parte superior S_2 cuya ecuación es $z = f_2(x, y)$ y una parte inferior S_1 cuya ecuación es $z = f_1(x, y)$. En S_2 , el vector normal exterior \mathbf{n} tiene un componente \mathbf{k} positivo y

$$\cos \gamma d\sigma = dx dy \quad \text{porque} \quad d\sigma = \frac{dA}{|\cos \gamma|} = \frac{dx dy}{\cos \gamma}.$$

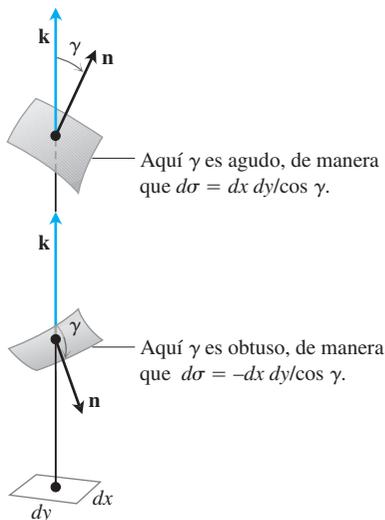


FIGURA 16.72 Una ampliación de las regiones de la figura 16.71. Las relaciones $d\sigma = \pm dx dy / \cos \gamma$ se deducen de la ecuación (7) en la sección 16.5.

Observe la figura 16.72. En S_1 , el vector normal exterior \mathbf{n} tiene un componente \mathbf{k} negativo y

$$\cos \gamma \, d\sigma = -dx \, dy.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \iint_S P \cos \gamma \, d\sigma &= \iint_{S_2} P \cos \gamma \, d\sigma + \iint_{S_1} P \cos \gamma \, d\sigma \\ &= \iint_{R_{xy}} P(x, y, f_2(x, y)) \, dx \, dy - \iint_{R_{xy}} P(x, y, f_1(x, y)) \, dx \, dy \\ &= \iint_{R_{xy}} [P(x, y, f_2(x, y)) - P(x, y, f_1(x, y))] \, dx \, dy \\ &= \iint_{R_{xy}} \left[\int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} \frac{\partial P}{\partial z} \, dz \right] \, dx \, dy = \iiint_D \frac{\partial P}{\partial z} \, dz \, dx \, dy. \end{aligned}$$

Esto demuestra la ecuación (5). Las demostraciones de las ecuaciones (3) y (4) siguen el mismo patrón; o bien, basta permutar $x, y, z; M, N, P, \alpha, \beta, \gamma$, en orden, y obtener esos resultados a partir de la ecuación (5). Esto demuestra el teorema de la divergencia para estas regiones especiales. ■

Teorema de la divergencia para otras regiones

El teorema de la divergencia se extiende a regiones que es posible dividir en un número finito de regiones simples del tipo recién analizado y a regiones que se definen como límites de regiones más simples en ciertas formas. Por ejemplo, suponga que D es la región entre dos esferas concéntricas y que \mathbf{F} tiene componentes continuamente derivables en D y en las superficies frontera. Divida a D en dos partes mediante un plano ecuatorial y aplique el teorema de la divergencia a cada mitad por separado. La mitad inferior, D_1 , aparece en la figura 16.73. La superficie S_1 que acota a D_1 consta de un hemisferio exterior, una base plana en forma de corona y un hemisferio interior. El teorema de la divergencia dice que

$$\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_1 \, d\sigma_1 = \iiint_{D_1} \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV_1. \tag{6}$$

El vector unitario normal \mathbf{n}_1 , que apunta hacia fuera desde D_1 y se aleja del origen a lo largo de la superficie exterior, es igual a \mathbf{k} a lo largo de la base plana y apunta hacia el origen a lo largo de la superficie interior. A continuación aplicamos el teorema de la divergencia a D_2 , y a su superficie S_2 (figura 16.74):

$$\iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_2 \, d\sigma_2 = \iiint_{D_2} \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV_2. \tag{7}$$

Si seguimos a \mathbf{n}_2 sobre S_2 , que apunta hacia fuera de D_2 , vemos que \mathbf{n}_2 es igual a $-\mathbf{k}$ a lo largo de la base en forma de corona en el plano xy , apunta alejándose del origen en la esfera exterior y apunta hacia el origen en la esfera interior. Al sumar las ecuaciones (6) y (7), las integrales sobre la superficie plana se cancelan, ya que los signos de \mathbf{n}_1 y \mathbf{n}_2 son opuestos. Así, llegamos al resultado

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV,$$

donde D es la región entre las esferas, S es la frontera de D que consta de dos esferas y \mathbf{n} es el vector unitario normal a S dirigido hacia fuera de D .

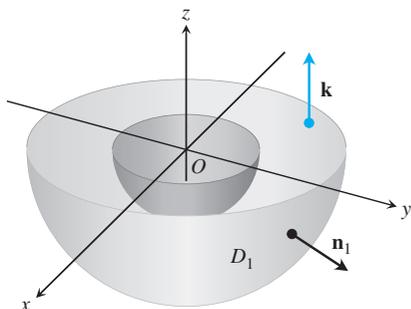


FIGURA 16.73 La mitad inferior de la región sólida entre dos esferas concéntricas.

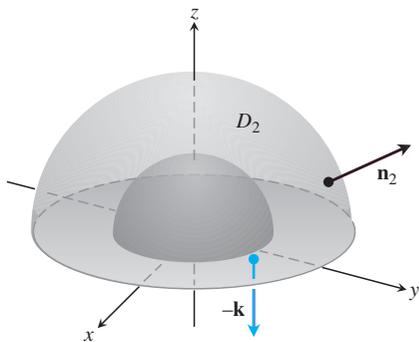


FIGURA 16.74 La mitad superior de la región sólida entre dos esferas concéntricas.

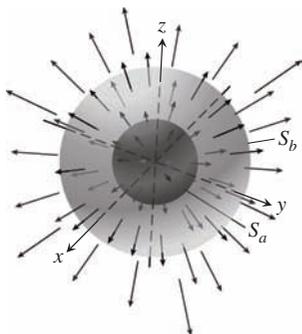


FIGURA 16.75 Dos esferas concéntricas en un campo vectorial en expansión.

EJEMPLO 4 Determine el flujo neto hacia fuera del campo

$$\mathbf{F} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\rho^3}, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

a través de la frontera de la región D : $0 < a^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq b^2$ (figura 16.75).

Solución El flujo se calcula al integrar $\nabla \cdot \mathbf{F}$ sobre D . Tenemos

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}(2x) = \frac{x}{\rho}$$

y

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x\rho^{-3}) = \rho^{-3} - 3x\rho^{-4}\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{1}{\rho^3} - \frac{3x^2}{\rho^5}.$$

De manera similar,

$$\frac{\partial N}{\partial y} = \frac{1}{\rho^3} - \frac{3y^2}{\rho^5} \quad \text{y} \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{1}{\rho^3} - \frac{3z^2}{\rho^5}.$$

Por lo tanto,

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{3}{\rho^3} - \frac{3}{\rho^5}(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{3}{\rho^3} - \frac{3\rho^2}{\rho^5} = 0$$

y

$$\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV = 0. \quad \nabla \cdot \mathbf{F} = \operatorname{div} \mathbf{F}$$

De esta forma, la integral de $\nabla \cdot \mathbf{F}$ sobre D es igual a cero y el flujo neto hacia fuera a través de la frontera de D también es igual a cero. Pero hay más que aprender de este ejemplo. El flujo que sale de D a través de la esfera interior S_a es el negativo del flujo que sale de D a través de la esfera exterior S_b (pues la suma de estos flujos es cero). Así, el flujo de \mathbf{F} a través de S_a alejándose del origen es igual al flujo de \mathbf{F} a través de S_b alejándose del origen. Entonces, el flujo de \mathbf{F} a través de una esfera con centro en el origen es independiente del radio de la esfera. ¿Cuál es el valor de este flujo?

Para determinarlo, calculamos la integral del flujo de manera directa. El vector unitario normal hacia fuera sobre la esfera de radio a es

$$\mathbf{n} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{a}.$$

De aquí que, sobre la esfera,

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{a^3} \cdot \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{a} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{a^4} = \frac{a^2}{a^4} = \frac{1}{a^2}$$

y

$$\iint_{S_a} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \frac{1}{a^2} \iint_{S_a} d\sigma = \frac{1}{a^2} (4\pi a^2) = 4\pi.$$

El flujo de \mathbf{F} hacia fuera a través de cualquier esfera con centro en el origen es 4π . ■

Ley de Gauss: Una de las cuatro grandes leyes de la teoría electromagnética

Todavía hay más que aprender del ejemplo 4. En la teoría electromagnética, el campo eléctrico debido a la carga q de un punto localizado en el origen es

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{r}|^2} \left(\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\rho^3},$$

donde ϵ_0 es una constante física, \mathbf{r} es el vector posición del punto (x, y, z) y $\rho = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. En la notación del ejemplo 4,

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{F}.$$

Los cálculos del ejemplo 4 indican que el flujo de \mathbf{E} hacia fuera a través de cualquier esfera con centro en el origen es q/ϵ_0 , pero este resultado no sólo es válido para esferas. El flujo de \mathbf{E} hacia fuera a través de cualquier superficie cerrada S que encierra al origen (y donde se aplica el teorema de la divergencia) también es q/ϵ_0 . Para ver por qué, basta imaginar una esfera grande S_a con centro en el origen y que encierre a la superficie S (figura 16.76). Puesto que

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \nabla \cdot \mathbf{F} = 0$$

donde $\rho > 0$, la integral de $\nabla \cdot \mathbf{E}$ sobre la región D entre S y S_a es cero. Por el teorema de la divergencia,

$$\iint_{\text{Frontera de } D} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = 0,$$

y el flujo de \mathbf{E} a través de S alejándose del origen debe ser igual al flujo de \mathbf{E} a través de S_a alejándose del origen, que es q/ϵ_0 . Esta afirmación, llamada *ley de Gauss*, también se aplica a distribuciones de carga más generales que la presentada aquí, como el lector observará casi en cualquier texto de física.

$$\text{Ley de Gauss: } \iint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Ecuación de continuidad de la hidrodinámica

Sea D una región en el espacio, acotada por una superficie orientada cerrada S . Si $\mathbf{v}(x, y, z)$ es el campo de velocidad de un fluido que pasa suavemente a través de D , $\delta = \delta(t, x, y, z)$ es la densidad del fluido en (x, y, z) en el instante t , y $\mathbf{F} = \delta\mathbf{v}$, entonces la **ecuación de continuidad** de la hidrodinámica establece que

$$\nabla \cdot \mathbf{F} + \frac{\partial \delta}{\partial t} = 0.$$

Si las funciones en cuestión tienen primeras derivadas parciales continuas, la ecuación surge de manera natural del teorema de la divergencia, como veremos ahora.

En primer lugar, la integral

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$$

es la tasa con la que la masa sale de D a través de S (se aleja, ya que \mathbf{n} es el vector normal exterior). Para ver por qué, considere un elemento de área $\Delta\sigma$ en la superficie (figura 16.77). En un intervalo corto de tiempo Δt , el volumen ΔV del fluido que pasa por la región es aproximadamente igual al volumen de un cilindro con área de la base igual a $\Delta\sigma$ y altura $(\mathbf{v} \Delta t) \cdot \mathbf{n}$, donde \mathbf{v} es un vector de velocidad anclado en un punto de la región:

$$\Delta V \approx \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, \Delta\sigma \, \Delta t.$$

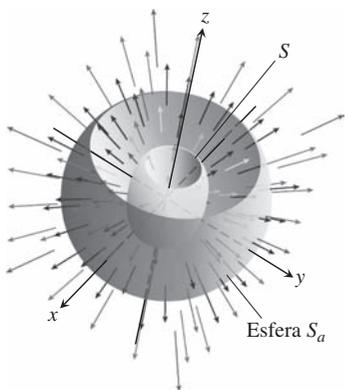


FIGURA 16.76 Una esfera S_a que rodea otra superficie S . Se han removido las partes superiores de las superficies para efectos de visualización.

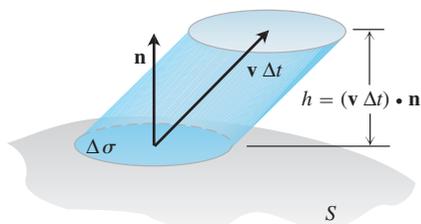


FIGURA 16.77 El fluido que fluye a través de la región $\Delta\sigma$ en un periodo corto de tiempo Δt llena un “cilindro” cuyo volumen es aproximadamente base \times altura = $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, \Delta\sigma \, \Delta t$.

La masa de este volumen de fluido es aproximadamente

$$\Delta m \approx \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \Delta \sigma \Delta t,$$

de manera que la tasa a la que la masa sale de D a través del elemento de área superficial es aproximadamente

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} \approx \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \Delta \sigma.$$

Esto lleva a la aproximación

$$\frac{\sum \Delta m}{\Delta t} \approx \sum \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \Delta \sigma$$

como una estimación de la tasa promedio con que la masa sale de S . Por último, al hacer que $\Delta \sigma \rightarrow 0$ y $\Delta t \rightarrow 0$ obtenemos la tasa instantánea con la que la masa sale de D a través de S como

$$\frac{dm}{dt} = \iint_S \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma,$$

que para flujo particular en el caso que analizamos es

$$\frac{dm}{dt} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma.$$

Ahora, sea B una esfera sólida con centro en el punto Q del flujo. El valor promedio de $\nabla \cdot \mathbf{F}$ sobre B es

$$\frac{1}{\text{volumen de } B} \iiint_B \nabla \cdot \mathbf{F} dV.$$

Como consecuencia de la continuidad de la divergencia, $\nabla \cdot \mathbf{F}$ asume este valor en algún punto P en B . Así,

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \mathbf{F})_P &= \frac{1}{\text{volumen de } B} \iiint_B \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \frac{\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma}{\text{volumen de } B} \\ &= \frac{\text{Tasa a la que la masa sale de } B \text{ a través de una superficie } S}{\text{volumen de } B}. \end{aligned} \quad (8)$$

El último término de la ecuación describe la disminución de la masa por unidad de volumen.

Ahora dejamos que el radio de B tienda a cero mientras el centro Q está fijo. El lado izquierdo de la ecuación (8) converge en $(\nabla \cdot \mathbf{F})_Q$, y el lado derecho en $(-\partial\delta/\partial t)_Q$. La igualdad de estos dos límites es la ecuación de continuidad

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = -\frac{\partial\delta}{\partial t}.$$

La ecuación de continuidad “explica” $\nabla \cdot \mathbf{F}$: la divergencia de \mathbf{F} en un punto es la tasa a la que la densidad del flujo disminuye ahí. El teorema de la divergencia

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F} dV$$

indica ahora que la disminución neta en la densidad del fluido en la región D se explica por la masa transportada a través de la superficie S . Por ello, el teorema es una afirmación acerca de la conservación de la masa (ejercicio 31).

Unificación de los teoremas integrales

Si consideramos un campo bidimensional $\mathbf{F} = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$ como un campo de tres dimensiones cuyo componente \mathbf{k} es cero, entonces $\nabla \cdot \mathbf{F} = (\partial M/\partial x) + (\partial N/\partial y)$, por lo que la forma normal del teorema de Green se escribe como

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds = \iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \right) dx \, dy = \iint_R \nabla \cdot \mathbf{F} \, dA.$$

De manera similar, $\nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} = (\partial N/\partial x) - (\partial M/\partial y)$, por lo que la forma tangencial del teorema de Green se escribe como

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx \, dy = \iint_R \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} \, dA.$$

Con las ecuaciones del teorema de Green escritas en notación nablá, podemos ver su relación con las ecuaciones del teorema de Stokes y del teorema de la divergencia.

Teorema de Green y su generalización a tres dimensiones

Forma normal del teorema de Green: $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds = \iint_R \nabla \cdot \mathbf{F} \, dA$

Teorema de la divergencia: $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV$

Forma tangencial del teorema de Green: $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} \, dA$

Teorema de Stokes: $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$

Observe que el teorema de Stokes generaliza la forma tangencial (rotacional) del teorema de Green, desde una superficie en el plano hasta una superficie en el espacio tridimensional. En cada caso, la integral del componente normal del rotacional de \mathbf{F} sobre el interior de la superficie es igual a la circulación de \mathbf{F} alrededor de la frontera.

De manera similar, el teorema de la divergencia generaliza la forma normal del teorema de Green, de una región bidimensional en el plano a una región tridimensional en el espacio. En cada caso, la integral de $\nabla \cdot \mathbf{F}$ sobre el interior de la región es igual al flujo total del campo a través de la frontera.

Todavía hay más que aprender. Todos estos resultados se ven como formas de un *teorema único fundamental*. Piense otra vez en el teorema fundamental del cálculo de la sección 5.4. Este nos dice que si $f(x)$ es diferenciable en (a, b) y es continua en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b \frac{df}{dx} dx = f(b) - f(a).$$

Si $\mathbf{F} = f(x)\mathbf{i}$ a través de $[a, b]$, entonces $(df/dx) = \nabla \cdot \mathbf{F}$. Si establecemos que el campo vectorial unitario \mathbf{n} normal a la frontera de $[a, b]$ es \mathbf{i} en b y $-\mathbf{i}$ en a (figura 16.78), entonces

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= f(b)\mathbf{i} \cdot (\mathbf{i}) + f(a)\mathbf{i} \cdot (-\mathbf{i}) \\ &= \mathbf{F}(b) \cdot \mathbf{n} + \mathbf{F}(a) \cdot \mathbf{n} \\ &= \text{flujo total hacia fuera de } \mathbf{F} \text{ a través de la frontera de } [a, b]. \end{aligned}$$



FIGURA 16.78 Los vectores normales unitarios exteriores en la frontera de $[a, b]$ en un espacio unidimensional.

El teorema fundamental nos dice ahora que

$$\mathbf{F}(b) \cdot \mathbf{n} + \mathbf{F}(a) \cdot \mathbf{n} = \int_{[a,b]} \nabla \cdot \mathbf{F} \, dx.$$

El teorema fundamental del cálculo, la forma normal del teorema de Green y el teorema de la divergencia nos dicen que la integral del operador diferencial $\nabla \cdot$ que opera en un campo \mathbf{F} sobre una región es igual a la suma de los componentes del campo normal sobre la frontera de la región. (Aquí interpretamos la integral de línea del teorema de Green y la integral de superficie del teorema de la divergencia como “sumas” sobre la frontera).

El teorema de Stokes y la forma tangencial del teorema de Green dicen que, cuando las cosas están orientadas de forma adecuada, la integral del componente normal del operador rotacional de un campo es igual a la suma de los componentes del campo tangencial en la frontera de la superficie.

La belleza de estas interpretaciones obedece a un solo principio de unificación que establece lo siguiente.

El teorema fundamental unificador

La integral de un operador diferencial que actúa en un campo sobre una región es igual a la suma de los componentes del campo adecuados al operador sobre la frontera de la región.

Ejercicios 16.8

Cálculo de la divergencia

En los ejercicios 1 a 4, determine la divergencia del campo.

1. El campo giratorio de la figura 16.12.
2. El campo radial de la figura 16.11.
3. El campo gravitacional de la figura 16.8 y el ejercicio 38a de la sección 16.3.
4. El campo velocidad de la figura 16.13.

Uso del teorema de la divergencia para calcular el flujo hacia fuera

En los ejercicios 5 a 16, utilice el teorema de la divergencia para encontrar el flujo de \mathbf{F} hacia fuera y a través de la frontera de la región D .

5. **Cubo** $\mathbf{F} = (y - x)\mathbf{i} + (z - y)\mathbf{j} + (y - x)\mathbf{k}$
 D : el cubo acotado por los planos $x = \pm 1, y = \pm 1$ y $z = \pm 1$
6. $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$
 - a. **Cubo** D : el cubo del primer octante cortado por los planos $x = 1, y = 1$ y $z = 1$
 - b. **Cubo** D : el cubo acotado por los planos $x = \pm 1, y = \pm 1$ y $z = \pm 1$
 - c. **Lata cilíndrica** D : la región del cilindro sólido $x^2 + y^2 \leq 4$ cortada por los planos $z = 0$ y $z = 1$
7. **Cilindro y paraboloides** $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + xy\mathbf{j} - z\mathbf{k}$
 D : la región dentro del cilindro sólido $x^2 + y^2 \leq 4$ entre el plano $z = 0$ y el paraboloides $z = x^2 + y^2$.
8. **Esfera** $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$
 D : la esfera sólida $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$

9. **Porción de la esfera** $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} - 2xy\mathbf{j} + 3xz\mathbf{k}$
 D : la región del primer octante cortada por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$
10. **Lata cilíndrica** $\mathbf{F} = (6x^2 + 2xy)\mathbf{i} + (2y + x^2z)\mathbf{j} + 4x^2y^3\mathbf{k}$
 D : la región del primer octante cortada por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y el plano $z = 3$
11. **Cuña** $\mathbf{F} = 2xz\mathbf{i} - xy\mathbf{j} - z^2\mathbf{k}$
 D : la cuña del primer octante cortada por el plano $y + z = 4$ y el cilindro elíptico $4x^2 + y^2 = 16$
12. **Esfera** $\mathbf{F} = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$
 D : la esfera sólida $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$
13. **Corteza esférica** $\mathbf{F} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$
 D : la región $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 2$
14. **Corteza esférica** $\mathbf{F} = (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
 D : la región $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$
15. **Corteza esférica** $\mathbf{F} = (5x^3 + 12xy^2)\mathbf{i} + (y^3 + e^y \sin z)\mathbf{j} + (5z^3 + e^y \cos z)\mathbf{k}$
 D : la región sólida entre las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 2$
16. **Corteza cilíndrica** $\mathbf{F} = \ln(x^2 + y^2)\mathbf{i} - \left(\frac{2z}{x} \tan^{-1} \frac{y}{x}\right)\mathbf{j} + z\sqrt{x^2 + y^2}\mathbf{k}$
 D : el cilindro grueso $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2, -1 \leq z \leq 2$.

Propiedades del rotacional y la divergencia

17. div (rotacional \mathbf{G}) es cero

- a. Demuestre que si las derivadas parciales necesarias de los componentes del campo $\mathbf{G} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ son continuas, entonces $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{G} = 0$.
 - b. ¿Qué puede concluir acerca del flujo de campo $\nabla \times \mathbf{G}$ a través de una superficie cerrada? Justifique su respuesta.
18. Sean \mathbf{F}_1 y \mathbf{F}_2 campos vectoriales derivables, y a y b constantes reales arbitrarias. Verifique las siguientes identidades.
- a. $\nabla \cdot (a\mathbf{F}_1 + b\mathbf{F}_2) = a\nabla \cdot \mathbf{F}_1 + b\nabla \cdot \mathbf{F}_2$
 - b. $\nabla \times (a\mathbf{F}_1 + b\mathbf{F}_2) = a\nabla \times \mathbf{F}_1 + b\nabla \times \mathbf{F}_2$
 - c. $\nabla \cdot (\mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2) = \mathbf{F}_2 \cdot \nabla \times \mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_1 \cdot \nabla \times \mathbf{F}_2$
19. Sean \mathbf{F} un campo vectorial derivable y $g(x, y, z)$ una función escalar derivable. Verifique las siguientes identidades.
- a. $\nabla \cdot (g\mathbf{F}) = g\nabla \cdot \mathbf{F} + \nabla g \cdot \mathbf{F}$
 - b. $\nabla \times (g\mathbf{F}) = g\nabla \times \mathbf{F} + \nabla g \times \mathbf{F}$
20. Si $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ es un campo vectorial derivable, definimos la notación $\mathbf{F} \cdot \nabla$ como

$$M \frac{\partial}{\partial x} + N \frac{\partial}{\partial y} + P \frac{\partial}{\partial z}.$$

Para campos vectoriales derivables \mathbf{F}_1 y \mathbf{F}_2 , verifique las siguientes identidades.

- a. $\nabla \times (\mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2) = (\mathbf{F}_2 \cdot \nabla)\mathbf{F}_1 - (\mathbf{F}_1 \cdot \nabla)\mathbf{F}_2 + (\nabla \cdot \mathbf{F}_2)\mathbf{F}_1 - (\nabla \cdot \mathbf{F}_1)\mathbf{F}_2$
- b. $\nabla(\mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{F}_2) = (\mathbf{F}_1 \cdot \nabla)\mathbf{F}_2 + (\mathbf{F}_2 \cdot \nabla)\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_1 \times (\nabla \times \mathbf{F}_2) + \mathbf{F}_2 \times (\nabla \times \mathbf{F}_1)$

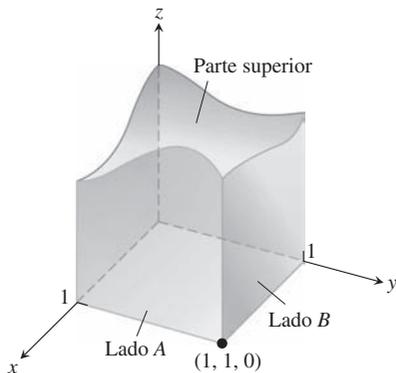
Teoría y ejemplos

21. Sea \mathbf{F} un campo cuyos componentes tienen primeras derivadas parciales continuas en un subconjunto del espacio que contiene una región D acotada por una superficie cerrada suave S . Si $|\mathbf{F}| \leq 1$, ¿se puede acotar el tamaño de

$$\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV?$$

Justifique su respuesta.

22. La base de la superficie cúbica cerrada representada aquí es el cuadrado unitario en el plano xy . Los cuatro lados están en los planos $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ y $y = 1$. La parte superior es una superficie suave arbitraria cuya identidad se desconoce. Sea $\mathbf{F} = x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + (z + 3)\mathbf{k}$ y suponga que el flujo de \mathbf{F} hacia fuera a través del lado A es 1, y a través del lado B es -3 . ¿Podría concluir algo acerca del flujo hacia fuera a través de la parte superior? Justifique su respuesta.



23. a. Demuestre que el flujo del campo vectorial de posición $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ hacia fuera a través de una superficie cerrada suave S es el triple del volumen de la región encerrada por la superficie.
- b. Sea \mathbf{n} el campo vectorial unitario normal exterior en S . Demuestre que \mathbf{F} no puede ser ortogonal a \mathbf{n} en cada punto de S .
24. **Flujo máximo** Entre todos los sólidos rectangulares definidos por las desigualdades $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $0 \leq z \leq 1$, encuentre aquél para el que el flujo total de $\mathbf{F} = (-x^2 - 4xy)\mathbf{i} - 6yz\mathbf{j} + 12z\mathbf{k}$ hacia fuera a través de los seis lados sea máximo. ¿Cuál es el flujo máximo?
25. **Volumen de una región sólida** Sea $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ y suponga que la superficie S y la región D satisfacen las hipótesis del teorema de divergencia. Demuestre que el volumen de D está dado por la fórmula

$$\text{Volumen de } D = \frac{1}{3} \iiint_D \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma.$$

26. **Flujo de un campo constante hacia fuera** Demuestre que el flujo hacia fuera de un campo vectorial constante $\mathbf{F} = \mathbf{C}$ a través de cualquier superficie cerrada a la que se aplique el teorema de divergencia es igual a cero.
27. **Funciones armónicas** Una función $f(x, y, z)$ es armónica en una región D en el espacio si satisface la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

en D .

- a. Suponga que f es armónica en una región acotada D encerrada por una superficie suave S y que \mathbf{n} es el vector unitario normal a S elegido. Demuestre que la integral sobre S de $\nabla f \cdot \mathbf{n}$, la derivada de f en la dirección de \mathbf{n} , es igual a cero.
- b. Demuestre que si f es armónica en D , entonces

$$\iint_S f \nabla f \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \iiint_D |\nabla f|^2 \, dV.$$

28. **Flujo de un campo gradiente hacia fuera** Sean S la superficie de la parte de la esfera sólida $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ que se encuentra en el primer octante y $f(x, y, z) = \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Calcule

$$\iint_S \nabla f \cdot \mathbf{n} \, d\sigma.$$

($\nabla f \cdot \mathbf{n}$ es la derivada de f en la dirección de \mathbf{n}).

29. **Primera fórmula de Green** Suponga que f y g son funciones escalares con derivadas parciales de primero y segundo órdenes, continuas en una región D acotada por una superficie cerrada suave por partes S . Demuestre que

$$\iint_S f \nabla g \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \iiint_D (f \nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g) \, dV. \quad (9)$$

La ecuación (9) es la **primera fórmula de Green**. (Sugerencia: Aplique el teorema de divergencia al campo $\mathbf{F} = f \nabla g$).

30. **Segunda fórmula de Green** (continuación del ejercicio 29). Intercambie f y g en la ecuación (9) para encontrar una fórmula similar. Luego, reste esta fórmula de la ecuación (9) para demostrar que

$$\iint_S (f \nabla g - g \nabla f) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \iiint_D (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f) \, dV. \quad (10)$$

Esta ecuación es la segunda fórmula de Green.

31. Conservación de la masa Sea $\mathbf{v}(t, x, y, z)$ un campo vectorial continuamente derivable en la región D en el espacio, y sea $p(t, x, y, z)$ una función escalar continuamente derivable. La variable t representa el dominio tiempo. La ley de conservación de la masa asegura que

$$\frac{d}{dt} \iiint_D p(t, x, y, z) dV = - \iint_S p\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma,$$

donde S es la superficie que encierra a D .

- Dé una interpretación física de la ley de la conservación de la masa si \mathbf{v} es un campo de velocidades de un fluido y p representa la densidad del fluido en el punto (x, y, z) en el instante t .
- Utilice el teorema de la divergencia y la regla de Leibniz,

$$\frac{d}{dt} \iiint_D p(t, x, y, z) dV = \iiint_D \frac{\partial p}{\partial t} dV,$$

para demostrar que la ley de la conservación de la masa es equivalente a la ecuación de continuidad

$$\nabla \cdot p\mathbf{v} + \frac{\partial p}{\partial t} = 0.$$

[En el primer término, $\nabla \cdot p\mathbf{v}$, la variable t se mantiene fija, y en el segundo $\partial p/\partial t$, se supone que el punto (x, y, z) en D se mantiene fijo].

32. La ecuación de difusión de calor Sea $T(t, x, y, z)$ una función con segundas derivadas continuas que da la temperatura en el instante t en el punto (x, y, z) de un sólido que ocupa una región D en el espacio. Si la capacidad de calor del sólido y la densidad de masa se denotan por las constantes c y ρ , respectivamente, la cantidad de $c\rho T$ es la **energía de calor por unidad de volumen del sólido**.

- Explique por qué $-\nabla T$ apunta en la dirección del flujo de calor.
- Sea $-k\nabla T$ el **vector de flujo de energía**. (La constante k se llama **conductividad**). Suponiendo la ley de conservación de masa con $-k\nabla T = \mathbf{v}$ y $c\rho T = p$ del ejercicio 31, deduzca la fórmula de difusión (del calor)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K \nabla^2 T,$$

donde $K = k/(c\rho) > 0$ es la constante de *difusividad*.

[Observe que si $T(t, x)$ representa la temperatura en el instante t en la posición x de una barra de conducción uniforme con sus lados aislados perfectamente, entonces $\nabla^2 T = \partial^2 T/\partial x^2$ y la ecuación de difusión se reduce a la ecuación unidimensional del calor de los ejercicios adicionales del capítulo 14].

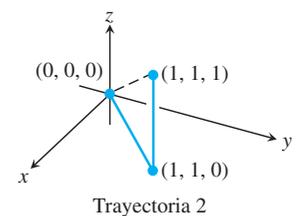
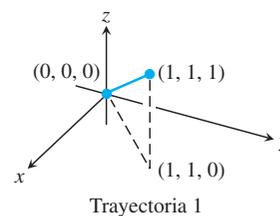
Capítulo 16 Preguntas de repaso

- ¿Qué son las integrales de línea? ¿Cómo se evalúan? Dé ejemplos.
- ¿Cómo se utilizan las integrales de línea para encontrar los centros de masa de los resortes? Explique.
- ¿Qué es un campo vectorial? ¿Un campo gradiente? Dé ejemplos.
- ¿Cómo calcula el trabajo realizado por una fuerza al mover una partícula a lo largo de una curva? Dé un ejemplo.
- ¿Qué son la circulación y el flujo?
- ¿Qué tienen de especial los campos que son independientes de la trayectoria?
- ¿Cuándo se puede decir que un campo es conservativo?
- ¿Qué es una función potencial? Dé un ejemplo de cómo encontrar una función potencial para un campo conservativo.
- ¿Qué es una forma diferencial? ¿Qué significa que esta forma sea exacta? ¿Cómo puede probar la exactitud? Dé ejemplos.
- ¿Qué es la divergencia de un campo vectorial? ¿Cómo se interpreta?
- ¿Qué es el rotacional de un campo vectorial? ¿Cómo se interpreta?
- ¿Qué es el teorema de Green? ¿Cómo se interpreta?
- ¿Cómo se calcula el área de una superficie parametrizada en el espacio? ¿De una superficie $F(x, y, z) = 0$ definida implícitamente? ¿De una superficie cuya gráfica es $z = f(x, y)$? Dé ejemplos.
- ¿Cómo se integra una función sobre una superficie parametrizada en el espacio? ¿Sobre superficies que están definidas de manera implícita o explícita? ¿Qué se puede calcular con las integrales de superficie? Dé ejemplos.
- ¿Qué es una superficie orientada? ¿Cómo se calcula el flujo de un campo vectorial tridimensional a través de una superficie orientada? Dé un ejemplo.
- ¿Qué es el teorema de Stokes? ¿Cómo se interpreta?
- Elabore un resumen de los resultados del capítulo acerca de campos conservativos.
- ¿Qué es el teorema de la divergencia? ¿Cómo se interpreta?
- ¿De qué manera se generaliza el teorema de la divergencia al teorema de Green?
- ¿De qué manera se generaliza el teorema de Stokes al teorema de Green?
- ¿Cómo se visualizan los teoremas de Green, Stokes y divergencia como formas particulares de un teorema fundamental único?

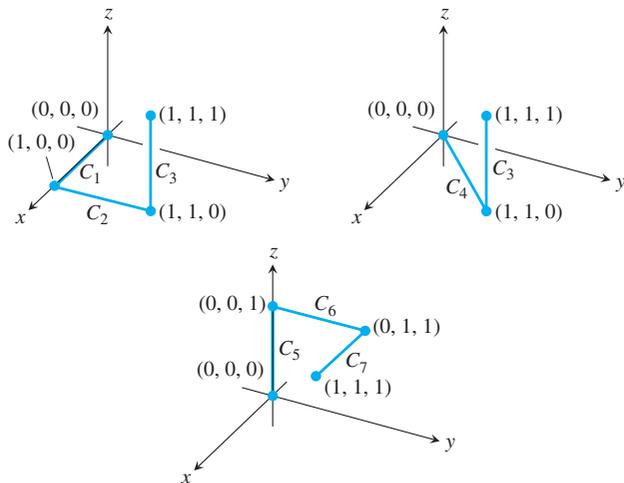
Capítulo 16 Ejercicios de práctica

Evaluación de integrales de línea

- La siguiente figura muestra dos trayectorias poligonales en el espacio que unen el origen con el punto $(1, 1, 1)$. Integre $f(x, y, z) = 2x - 3y^2 - 2z + 3$ sobre cada trayectoria.



2. La siguiente figura muestra tres trayectorias poligonales en el espacio que unen el origen con el punto $(1, 1, 1)$. Integre $f(x, y, z) = x^2 + y - z$ sobre cada trayectoria.



3. Integre $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + z^2}$ sobre el círculo
 $\mathbf{r}(t) = (a \cos t)\mathbf{j} + (a \sin t)\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$
4. Integre $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$ sobre la curva involuta
 $\mathbf{r}(t) = (\cos t + t \sin t)\mathbf{i} + (\sin t - t \cos t)\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq \sqrt{3}.$

Evalúe las integrales de los ejercicios 5 y 6.

5. $\int_{(-1,1,1)}^{(4,-3,0)} \frac{dx + dy + dz}{\sqrt{x + y + z}}$

6. $\int_{(1,1,1)}^{(10,3,3)} dx - \sqrt{\frac{z}{y}} dy - \sqrt{\frac{y}{z}} dz$

7. Integre $\mathbf{F} = -(y \sin z)\mathbf{i} + (x \sin z)\mathbf{j} + (xy \cos z)\mathbf{k}$ alrededor del círculo cortado en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ por el plano $z = -1$, en el sentido de las manecillas del reloj, visto desde arriba.
8. Integre $\mathbf{F} = 3x^2y\mathbf{i} + (x^3 + 1)\mathbf{j} + 9z^2\mathbf{k}$ alrededor de la circunferencia cortada de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ por el plano $x = 2$.

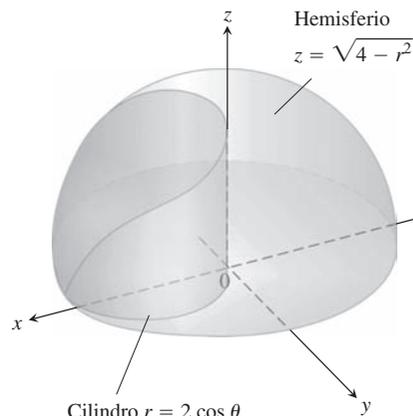
Evalúe las integrales de los ejercicios 9 y 10.

9. $\int_C 8x \sin y \, dx - 8y \cos x \, dy$
 C es el cuadrado cortado en el primer cuadrante por las rectas $x = \pi/2$ y $y = \pi/2$.
10. $\int_C y^2 \, dx + x^2 \, dy$
 C es el círculo $x^2 + y^2 = 4$.

Evaluación de integrales de superficie

11. **Área de una región elíptica** Determine el área de una región elíptica del plano $x + y + z = 1$ cortada por el cilindro $x^2 + y^2 = 1$.
12. **Área de una región parabólica** Determine el área de la parte del paraboloides $y^2 + z^2 = 3x$ cortada por el plano $x = 1$.
13. **Área de un casquete esférico** Determine el área del casquete de la parte superior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ cortada por el plano $z = \sqrt{2}/2$.

14. a. **Hemisferio cortado por un cilindro** Determine el área de la superficie del hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 0$, cortada por el cilindro $x^2 + y^2 = 2x$.
- b. Determine el área de la porción del cilindro que se encuentra dentro del hemisferio. (Sugerencia: Projete sobre el plano xz . O evalúe la integral $\int h \, ds$, donde h es la altura del cilindro y ds es el elemento de longitud de arco en la circunferencia $x^2 + y^2 = 2x$ en el plano xy).



15. **Área de un triángulo** Determine el área del triángulo en el que el plano $(x/a) + (y/b) + (z/c) = 1, (a, b, c > 0)$ corta al primer octante. Verifique su respuesta con un cálculo vectorial adecuado.
16. **Cilindro parabólico cortado por planos** Integre
- a. $g(x, y, z) = \frac{yz}{\sqrt{4y^2 + 1}}$
- b. $g(x, y, z) = \frac{z}{\sqrt{4y^2 + 1}}$
- sobre la superficie del cilindro parabólico $y^2 - z = 1$ cortada por los planos $x = 0, x = 3$ y $z = 0$.
17. **Cilindro circular cortado por planos** Integre $g(x, y, z) = x^4y(y^2 + z^2)$ sobre la parte del cilindro $y^2 + z^2 = 25$ que se encuentra en el primer octante, entre los planos $x = 0$ y $x = 1$ y sobre el plano $z = 3$.
18. **Área de Wyoming** El estado de Wyoming está acotado por los meridianos $111^\circ 3'$ y $104^\circ 3'$ longitud oeste y por los paralelos 41° y 45° latitud norte. Suponga que la Tierra es una esfera de radio $R = 3959$ millas y determine el área de Wyoming.

Superficies parametrizadas

- Determine las parametrizaciones de las superficies de los ejercicios 19 a 24. (Hay muchas formas de hacerlo, por lo que quizá sus respuestas difieran de las que aparecen al final del libro).
19. **Banda esférica** La porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ entre los planos $z = -3$ y $z = 3$.
20. **Capa parabólica** La porción del paraboloides $z = -(x^2 + y^2)/2$ encima del plano $z = -2$.
21. **Cono** El cono $z = 1 + \sqrt{x^2 + y^2}, z \leq 3$
22. **Plano encima de un cuadrado** La porción del plano $4x + 2y + 4z = 12$ que se encuentra encima del cuadrado $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2$ en el primer cuadrante.

23. Porción de un paraboloides La porción del paraboloides $y = 2(x^2 + z^2)$, $y \leq 2$, que se encuentra encima del plano xy .

24. Porción de un hemisferio La porción del hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = 10$, $y \geq 0$, en el primer octante.

25. Área de una superficie Determine el área de la superficie

$$\mathbf{r}(u, v) = (u + v)\mathbf{i} + (u - v)\mathbf{j} + v\mathbf{k},$$

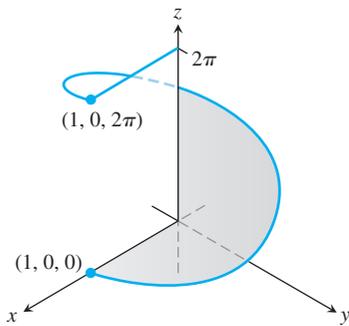
$$0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1.$$

26. Integral de superficie Integre $f(x, y, z) = xy - z^2$ sobre la superficie del ejercicio 25.

27. Área de un helicoides Determine el área de la superficie del helicoides

$$\mathbf{r}(r, \theta) = (r \cos \theta)\mathbf{i} + (r \sin \theta)\mathbf{j} + \theta\mathbf{k}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq 1,$$

de la siguiente figura.



28. Integral de superficie Evalúe la integral $\iint_S \sqrt{x^2 + y^2 + 1} \, d\sigma$, donde S es el helicoides del ejercicio 27.

Campos conservativos

¿Cuáles de los campos de los ejercicios 29 a 32 son conservativos y cuáles no?

- 29. $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$
- 30. $\mathbf{F} = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})/(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$
- 31. $\mathbf{F} = xe^{y\mathbf{i}} + ye^{z\mathbf{j}} + ze^{x\mathbf{k}}$
- 32. $\mathbf{F} = (\mathbf{i} + z\mathbf{j} + y\mathbf{k})/(x + yz)$

Determine funciones potenciales para los campos de los ejercicios 33 y 34.

- 33. $\mathbf{F} = 2\mathbf{i} + (2y + z)\mathbf{j} + (y + 1)\mathbf{k}$
- 34. $\mathbf{F} = (z \cos xz)\mathbf{i} + e^y\mathbf{j} + (x \cos xz)\mathbf{k}$

Trabajo y circulación

En los ejercicios 35 y 36, determine el trabajo realizado por cada campo a lo largo de las trayectorias de $(0, 0, 0)$ a $(1, 1, 1)$ del ejercicio 1.

- 35. $\mathbf{F} = 2xy\mathbf{i} + \mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$
- 36. $\mathbf{F} = 2xy\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + \mathbf{k}$

37. Cálculo del trabajo de dos maneras Determine el trabajo realizado por

$$\mathbf{F} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

sobre la curva plana $\mathbf{r}(t) = (e^t \cos t)\mathbf{i} + (e^t \sin t)\mathbf{j}$ del punto $(1, 0)$ al punto $(e^{2\pi}, 0)$, de dos maneras distintas:

- a. Utilizando la parametrización de la curva para evaluar la integral de trabajo.
- b. Evaluando una función potencial para \mathbf{F} .

38. Flujo a lo largo de diferentes trayectorias Determine el flujo del campo $\mathbf{F} = \nabla(x^2ze^{y^2})$

- a. Una vez alrededor de la elipse C en la que el plano $x + y + z = 1$ corta al cilindro $x^2 + z^2 = 25$, en el sentido de las manecillas del reloj, visto desde el eje y positivo.
- b. A lo largo de la frontera curva del helicoides del ejercicio 27 desde $(1, 0, 0)$ a $(1, 0, 2\pi)$.

En los ejercicios 39 y 40, utilice la integral de superficie del teorema de Stokes para encontrar la circulación del campo \mathbf{F} alrededor de la curva C en la dirección indicada.

39. Circulación alrededor de una elipse $\mathbf{F} = y^2\mathbf{i} - y\mathbf{j} + 3z^2\mathbf{k}$

C : la elipse en la que el plano $2x + 6y - 3z = 6$ corta al cilindro $x^2 + y^2 = 1$, en el sentido contrario al de las manecillas del reloj, visto desde arriba.

40. Circulación alrededor de un círculo $\mathbf{F} = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j} + (4y^2 - z)\mathbf{k}$

C : el círculo en el que el plano $z = -y$ corta a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, en el sentido contrario al de las manecillas del reloj, visto desde arriba.

Masa y momentos

41. Alambre con diferentes densidades Determine la masa de un alambre delgado que está a lo largo de la curva $\mathbf{r}(t) = \sqrt{2}t\mathbf{i} + \sqrt{2}t\mathbf{j} + (4 - t^2)\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 1$, si la densidad en t es (a) $\delta = 3t$ y (b) $\delta = 1$.

42. Alambre con densidad variable Determine el centro de masa de un alambre delgado que se encuentra a lo largo de la curva $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + (2/3)t^{3/2}\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 2$, si la densidad en t es $\delta = 3\sqrt{5} + t$.

43. Alambre con densidad variable Determine el centro de masa, así como los momentos de inercia alrededor de los ejes coordenados de un alambre delgado que se encuentra a lo largo de la curva

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \frac{2\sqrt{2}}{3}t^{3/2}\mathbf{j} + \frac{t^2}{2}\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 2,$$

si la densidad en t es $\delta = 1/(t + 1)$.

44. Centro de masa de un arco Un arco delgado de metal se encuentra a lo largo del semicírculo $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ en el plano xy . La densidad en el punto (x, y) del arco es $\delta(x, y) = 2a - y$. Determine el centro de masa.

45. Alambre con densidad constante Un alambre con densidad constante $\delta = 1$ se encuentra a lo largo de la curva $\mathbf{r}(t) = (e^t \cos t)\mathbf{i} + (e^t \sin t)\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq \ln 2$. Encuentre \bar{x} , \bar{y} , \bar{z} .

46. Alambre helicoidal (en forma de hélice) con densidad constante Encuentre la masa y el centro de masa de un alambre de densidad constante δ que se encuentra a lo largo de la hélice $\mathbf{r}(t) = (2 \sin t)\mathbf{i} + (2 \cos t)\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

47. Inercia y centro de masa de una capa Determine I_z y el centro de masa de una capa delgada de densidad $\delta(x, y, z) = z$ de la parte superior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ cortada por el plano $z = 3$.

48. Momento de inercia de un cubo Determine el momento de inercia con respecto al eje z de la superficie del cubo cortado en el primer octante por los planos $x = 1$, $y = 1$ y $z = 1$ si la densidad es $\delta = 1$.

Flujo a través de una curva plana o una superficie

Utilice el teorema de Green para determinar la circulación en el sentido contrario al de las manecillas del reloj y el flujo hacia fuera de los campos y las curvas de los ejercicios 49 y 50.

49. Cuadrado $\mathbf{F} = (2xy + x)\mathbf{i} + (xy - y)\mathbf{j}$

C : el cuadrado acotado por $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$

50. Triángulo $\mathbf{F} = (y - 6x^2)\mathbf{i} + (x + y^2)\mathbf{j}$
 C: el triángulo formado por las rectas $y = 0, y = x, x = 1$

51. Integral de línea nula Demuestre que

$$\oint_C \ln x \sin y \, dy - \frac{\cos y}{x} \, dx = 0$$

para cualquier curva cerrada C a la que pueda aplicarse el teorema de Green.

52. a. Flujo hacia fuera y área Demuestre que el flujo hacia fuera del campo vectorial de posición $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ a través de cualquier curva cerrada a la que pueda aplicarse el teorema de Green es el doble del área de la región encerrada por la curva.

b. Sea \mathbf{n} el vector unitario normal exterior de una curva cerrada a la que puede aplicarse el teorema de Green. Demuestre que no es posible que $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ sea ortogonal a \mathbf{n} en todos los puntos de C .

En los ejercicios 53 a 56, encuentre el flujo hacia fuera de \mathbf{F} a través de la frontera de D .

53. Cubo $\mathbf{F} = 2xy\mathbf{i} + 2yz\mathbf{j} + 2zx\mathbf{k}$
 D: el cubo cortado en el primer octante por los planos $x = 1, y = 1, z = 1$

54. Capa esférica $\mathbf{F} = xz\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + \mathbf{k}$
 D: toda la superficie de la capa superior de la esfera sólida $x^2 + y^2 + z^2 \leq 25$ cortada por el plano $z = 3$

55. Tapa esférica $\mathbf{F} = -2x\mathbf{i} - 3y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$
 D: la región superior de la esfera sólida $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2$ cortada por el paraboloides $z = x^2 + y^2$

56. Cono y cilindro $\mathbf{F} = (6x + y)\mathbf{i} - (x + z)\mathbf{j} + 4yz\mathbf{k}$
 D: la región en el primer octante acotada por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y los planos coordenados.

57. Hemisferio, cilindro y plano Sea S la superficie acotada del lado izquierdo por el hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, y \leq 0$, en la mitad por el cilindro $x^2 + z^2 = a^2, 0 \leq y \leq a$ y del lado derecho por el plano $y = a$. Determine el flujo hacia fuera de $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$ a través de S .

58. Cilindro y planos Determine el flujo hacia fuera del campo $\mathbf{F} = 3xz^2\mathbf{i} + y\mathbf{j} - z^3\mathbf{k}$ a través de la superficie del sólido del primer octante acotado por el cilindro $x^2 + 4y^2 = 16$ y los planos $y = 2z, x = 0, yz = 0$.

59. Lata cilíndrica Utilice el teorema de la divergencia para determinar el flujo hacia fuera de $\mathbf{F} = xy^2\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j} + y\mathbf{k}$ a través de la superficie de la región encerrada por el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y los planos $z = 1$ y $z = -1$.

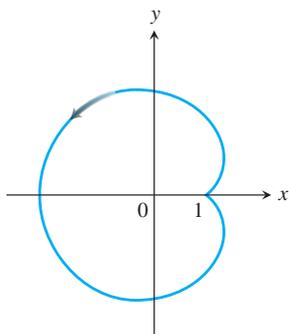
60. Hemisferio Encuentre el flujo hacia arriba de $\mathbf{F} = (3z + 1)\mathbf{k}$ a través del hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0$ (a) con el teorema de la divergencia y (b) por la evaluación de la integral del flujo de manera directa.

Capítulo 16 Ejercicios adicionales y avanzados

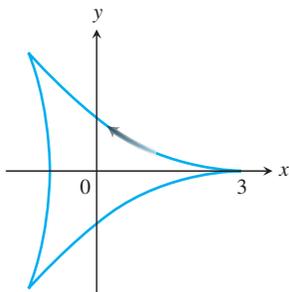
Cálculo de áreas con el teorema de Green

Utilice la fórmula del área del teorema de Green de los ejercicios de la sección 16.4 para calcular las áreas de las regiones encerradas por las curvas de los ejercicios 1 a 4.

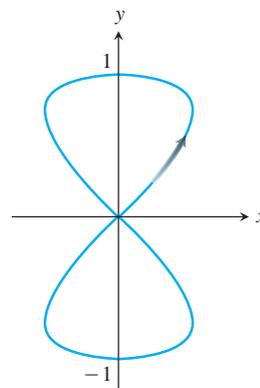
1. El limaçon $x = 2 \cos t - \cos 2t, y = 2 \sin t - \sin 2t, 0 \leq t \leq 2\pi$.



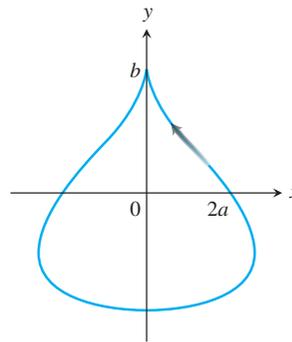
2. La deltoide $x = 2 \cos t + \cos 2t, y = 2 \sin t - \sin 2t, 0 \leq t \leq 2\pi$.



3. La curva en forma de ocho $x = (1/2) \sin 2t, y = \sin t, 0 \leq t \leq \pi$ (un lazo).



4. La lágrima $x = 2a \cos t - a \sin 2t, y = b \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$.



Teoría y aplicaciones

5. a. Dé un ejemplo de un campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z)$ con valor $\mathbf{0}$ en un solo punto tal que el rotacional de \mathbf{F} sea distinto de cero en todas partes. Asegúrese de identificar el punto y calcular el rotacional.
- b. Dé un ejemplo de un campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z)$ con valor $\mathbf{0}$ en exactamente una recta y tal que el rotacional de \mathbf{F} sea distinto de cero en todas partes. Asegúrese de identificar la recta y calcular el rotacional.
- c. Dé un ejemplo de un campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z)$ con valor $\mathbf{0}$ en una superficie y tal que el rotacional de \mathbf{F} sea distinto de cero en todas partes. Asegúrese de identificar la superficie y calcular el rotacional.
6. Encuentre todos los puntos (a, b, c) de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ donde el campo vectorial $\mathbf{F} = yz^2\mathbf{i} + xz^2\mathbf{j} + 2xyz\mathbf{k}$ sea normal a la superficie y $\mathbf{F}(a, b, c) \neq \mathbf{0}$.
7. Calcule la masa de una capa esférica de radio R tal que en cada punto (x, y, z) de la superficie, la densidad de masa $\delta(x, y, z)$ sea su distancia a algún punto fijo (a, b, c) de la superficie.
8. Determine la masa de un helicoides

$$\mathbf{r}(r, \theta) = (r \cos \theta)\mathbf{i} + (r \sin \theta)\mathbf{j} + \theta\mathbf{k},$$

$$0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$
 si la función de densidad es $\delta(x, y, z) = 2\sqrt{x^2 + y^2}$. Vea la figura del ejercicio de práctica 27.
9. Entre todas las regiones rectangulares $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$, determine aquella para la cual el flujo total de $\mathbf{F} = (x^2 + 4xy)\mathbf{i} - 6y\mathbf{j}$ hacia fuera a través de sus cuatro lados sea la menor. ¿Cuál es el flujo menor?
10. Determine una ecuación para el plano que pasa por el origen tal que la circulación del flujo del campo $\mathbf{F} = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$ alrededor de la circunferencia de intersección del plano con la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ sea máxima.
11. Una cuerda se encuentra a lo largo de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ desde $(2, 0)$ a $(0, 2)$ en el primer cuadrante. La densidad de la cuerda es $\rho(x, y) = xy$.

- a. Divida la cuerda en un número finito de subarcos para demostrar que el trabajo realizado por la gravedad para hacer coincidir la cuerda con el eje x está dado por

$$\text{Trabajo} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n g x_k y_k^2 \Delta s_k = \int_C g x y^2 ds,$$

donde g es la constante gravitacional.

- b. Determine el trabajo total realizado, evaluando la integral de línea del inciso (a).
- c. Demuestre que el trabajo total realizado es igual al trabajo requerido para mover al centro de masa de la cuerda (\bar{x}, \bar{y}) directamente hacia abajo del eje x .
12. Una hoja delgada se encuentra a lo largo de la porción del plano $x + y + z = 1$ en el primer octante; la densidad de la hoja es $\delta(x, y) = xy$.
 - a. Divida la hoja en un número finito de partes para demostrar que el trabajo realizado por la gravedad para enderezar la lámina y llevarla al plano xy está dado por

$$\text{Trabajo} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n g x_k y_k z_k \Delta \sigma_k = \iint_S g x y z d\sigma,$$

donde g es la constante gravitacional.

- b. Determine el trabajo total realizado evaluando la integral de superficie del inciso (a).
- c. Demuestre que el trabajo total realizado es igual al trabajo requerido para mover al centro de masa de la hoja $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ hacia abajo hasta el plano xy .

13. **Principio de Arquímedes** Si un objeto como una pelota se coloca en un líquido, se puede sumergir hacia el fondo, flotar o sumergirse a cierta profundidad y permanecer suspendido en el líquido. Suponga que un fluido tiene una densidad de peso constante w y que la superficie del fluido coincide con el plano $z = 4$. Una pelota esférica permanece suspendida en el fluido y ocupa la región $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 \leq 1$.

- a. Demuestre que la integral de superficie que da la magnitud de la fuerza total sobre la pelota, debida a la presión del fluido, es

$$\text{Fuerza} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n w(4 - z_k) \Delta \sigma_k = \iint_S w(4 - z) d\sigma.$$

- b. Como la pelota no se mueve, está suspendida por la fuerza de flotación del líquido. Demuestre que la magnitud de la fuerza de flotación sobre la esfera es

$$\text{Fuerza de flotación} = \iint_S w(z - 4)\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} d\sigma,$$

donde \mathbf{n} es el vector unitario normal exterior en (x, y, z) . Esto ilustra el principio de Arquímedes: la magnitud de la fuerza de flotación en un sólido sumergido es igual al peso del fluido desplazado.

- c. Utilice el teorema de la divergencia para determinar la magnitud de la fuerza de flotación del inciso (b).
14. **Fuerza del fluido en una superficie curva** Un cono con la forma de la superficie $z = \sqrt{x^2 + y^2}, 0 \leq z \leq 2$, se llena con un líquido de densidad de peso constante w . Suponga que el plano xy es el "nivel del piso", y demuestre que la fuerza total sobre la porción del cono desde $z = 1$ hasta $z = 2$ debida a la presión del líquido está dada por la integral de superficie

$$F = \iint_S w(2 - z) d\sigma.$$

Evalúe la integral.

15. **Ley de Faraday** Si $\mathbf{E}(t, x, y, z)$ y $\mathbf{B}(t, x, y, z)$ representan los campos eléctrico y magnético en el punto (x, y, z) en el instante t , un principio básico de la teoría electromagnética dice que $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$. En esta expresión, $\nabla \times \mathbf{E}$ se calcula con t fijo y $\partial \mathbf{B} / \partial t$ se calcula con (x, y, z) fijo. Utilice el teorema de Stokes para deducir la ley de Faraday

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} d\sigma,$$

donde C representa un lazo de alambre por el que fluye corriente en el sentido contrario al de las manecillas del reloj con respecto al vector unitario normal \mathbf{n} a la superficie, dando lugar al voltaje

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$

alrededor de C . La integral de superficie del lado derecho de la ecuación se llama flujo magnético, y S es cualquier superficie orientada con frontera C .

16. Sea

$$\mathbf{F} = -\frac{GmM}{|\mathbf{r}|^3} \mathbf{r}$$

el campo de fuerza gravitacional definido para $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$. Utilice la ley de Gauss de la sección 16.8 para demostrar que no existe un campo vectorial continuamente derivable \mathbf{H} tal que $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{H}$.

17. Si $f(x, y, z)$ y $g(x, y, z)$ son funciones escalares continuamente derivables definidas sobre la superficie orientada S con curva frontera C , demuestre que

$$\iint_S (\nabla f \times \nabla g) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \oint_C f \nabla g \cdot d\mathbf{r}.$$

18. Suponga que $\nabla \cdot \mathbf{F}_1 = \nabla \cdot \mathbf{F}_2$ y $\nabla \times \mathbf{F}_1 = \nabla \times \mathbf{F}_2$ sobre una región D encerrada por la superficie orientada S con vector unitario normal hacia fuera \mathbf{n} y que $\mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{n}$ en S . Demuestre que $\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_2$ en D .
19. Demuestre o refute que si $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ y $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{F} = \mathbf{0}$.
20. Sea S una superficie orientada parametrizada por $\mathbf{r}(u, v)$. Defina la notación $d\sigma = \mathbf{r}_u du \times \mathbf{r}_v dv$ de manera que $d\sigma$ sea un vector normal a la superficie. Además, la magnitud $d\sigma = |d\sigma|$ es el elemento de área

de la superficie (por la ecuación 5 de la sección 16.5). Deduzca la identidad

$$d\sigma = (EG - F^2)^{1/2} du dv$$

donde

$$E = |\mathbf{r}_u|^2, \quad F = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v, \quad \text{y} \quad G = |\mathbf{r}_v|^2.$$

21. Demuestre que el volumen V de una región D en el espacio encerrada por la superficie orientada S con normal hacia fuera \mathbf{n} satisface la identidad

$$V = \frac{1}{3} \iint_S \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma,$$

donde \mathbf{r} es el vector posición del punto (x, y, z) en D .

Capítulo 16 Proyectos de aplicación tecnológica

Módulo Matemática/Maple

Trabajo en campos de fuerza conservativos y no conservativos

Explore la integración sobre campos vectoriales y experimente con funciones conservativas y no conservativas a lo largo de diferentes trayectorias en el campo.

¿Cómo puede visualizarse el teorema de Green?

Explore la integración sobre campos vectoriales y utilice parametrizaciones para calcular integrales de línea. Se exploran ambas formas del teorema de Green.

Visualizar e interpretar el teorema de la divergencia

Verifique el teorema de la divergencia formulando y evaluando ciertas divergencias e integrales de superficie.



17

ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN

INTRODUCCIÓN En este capítulo ampliaremos nuestro estudio a las ecuaciones diferenciales de *segundo orden*. Las ecuaciones diferenciales de segundo orden se presentan en muchas aplicaciones de las ciencias y la ingeniería. Por ejemplo, se aplican en el estudio de resortes y circuitos eléctricos. El estudiante aprenderá en este capítulo cómo resolver estas ecuaciones utilizando varios métodos.

17.1 Ecuaciones lineales de segundo orden

Una ecuación de la forma

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = G(x), \quad (1)$$

es lineal en y y sus derivadas, y se le conoce como **ecuación diferencial lineal de segundo orden**. Suponemos que P , Q , R y G son continuas en algún intervalo abierto I . Si $G(x)$ es igual a cero en I , se dice que la ecuación es **homogénea**, de lo contrario, es **no homogénea**. Por lo tanto, la forma de una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden es

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0. \quad (2)$$

También se supone que $P(x)$ nunca es cero para cualquier $x \in I$.

Dos resultados fundamentales son importantes en la solución de la ecuación (2). El primero de éstos dice que si conocemos dos soluciones y_1 y y_2 de la ecuación lineal homogénea, entonces cualquier **combinación lineal** $y = c_1y_1 + c_2y_2$ también es una solución para constantes c_1 y c_2 cualesquiera.

TEOREMA 1: Principio de superposición Si $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son soluciones de la ecuación lineal homogénea (2), entonces para constantes c_1 y c_2 cualesquiera, la función

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

también es una solución de la ecuación (2).

Demostración Al sustituir y en la ecuación (2), tenemos

$$\begin{aligned}
 P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y &= P(x)(c_1y_1 + c_2y_2)'' + Q(x)(c_1y_1 + c_2y_2)' + R(x)(c_1y_1 + c_2y_2) \\
 &= P(x)(c_1y_1'' + c_2y_2'') + Q(x)(c_1y_1' + c_2y_2') + R(x)(c_1y_1 + c_2y_2) \\
 &= c_1(P(x)y_1'' + Q(x)y_1' + R(x)y_1) + c_2(P(x)y_2'' + Q(x)y_2' + R(x)y_2) \\
 &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{= 0, y_1 \text{ es una solución}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{= 0, y_2 \text{ es una solución}} \\
 &= c_1(0) + c_2(0) = 0.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $y = c_1y_1 + c_2y_2$ es una solución de la ecuación (2). ■

Del teorema 1 se desprenden de inmediato las siguientes consecuencias relacionadas con la solución de la ecuación lineal homogénea.

1. Una suma de dos soluciones $y_1 + y_2$ de la ecuación (2) también es una solución. (Se elige $c_1 = c_2 = 1$).
2. Un múltiplo constante ky_1 de cualquier solución y_1 de la ecuación (2) también es una solución. (Se elige $c_1 = k$ y $c_2 = 0$).
3. La **solución trivial** $y(x) = 0$ siempre es una solución de la ecuación lineal homogénea. (Se elige $c_1 = c_2 = 0$).

El segundo resultado fundamental relacionado con las soluciones de la ecuación lineal homogénea tiene que ver con su **solución general**, es decir, una solución que contiene todas las soluciones. Esta consecuencia nos dice que hay dos soluciones y_1 y y_2 tales que cualquier solución es una combinación lineal de ellas para valores adecuados de las constantes c_1 y c_2 . Sin embargo, no cualquier par de soluciones tiene esta propiedad. Las soluciones deben ser **linealmente independientes**, lo que significa que ni y_1 ni y_2 son un múltiplo constante una de la otra. Por ejemplo, las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = xe^x$ son linealmente independientes, mientras que $f(x) = x^2$ y $g(x) = 7x^2$ no lo son (puesto que son linealmente dependientes). Los resultados sobre independencia lineal y el siguiente teorema son materia de cursos más avanzados.

TEOREMA 2 Si P , Q y R son continuas en el intervalo abierto I , y $P(x)$ nunca es igual a cero en I , entonces la ecuación diferencial lineal homogénea (2) tiene dos soluciones en I linealmente independientes, y_1 y y_2 . Aún más, si y_1 y y_2 son dos soluciones cualesquiera linealmente independientes de la ecuación (2), entonces la solución general está dada por

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x),$$

donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias.

Ahora pondremos atención a la obtención de dos soluciones linealmente independientes para un caso especial de la ecuación (2), donde P , Q y R son funciones constantes.

Ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes

Suponga que deseamos resolver la ecuación diferencial homogénea de segundo orden

$$ay'' + by' + cy = 0, \tag{3}$$

donde a , b y c son constantes. Para resolver la ecuación (3), buscamos una función que multiplicada por una constante y sumada a un múltiplo de su primera derivada más un múltiplo de su segunda derivada sume exactamente cero. Una función que se comporta de este modo es la función exponencial $y = e^{rx}$, cuando r es una constante. Derivando dos veces esta función exponencial nos da $y' = re^{rx}$ y $y'' = r^2e^{rx}$, las cuales son múltiplos constantes de la exponencial original. Si sustituimos a $y = e^{rx}$ en la ecuación (3), obtenemos

$$ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0.$$

Como la función exponencial nunca es cero, dividimos esta última ecuación entre e^{rx} . Por lo tanto, $y = e^{rx}$ es una solución de la ecuación (3), si y sólo si r es una solución de la ecuación algebraica

$$ar^2 + br + c = 0. \quad (4)$$

La ecuación (4) se conoce como **ecuación característica** de la ecuación diferencial $ay'' + by' + cy = 0$. La ecuación característica es una ecuación cuadrática con las raíces

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Hay tres casos a considerar, los cuales dependen del valor del discriminante $b^2 - 4ac$.

Caso 1: $b^2 - 4ac > 0$. En este caso, la ecuación característica tiene dos soluciones reales diferentes r_1 y r_2 . Entonces, $y_1 = e^{r_1x}$ y $y_2 = e^{r_2x}$ son dos soluciones linealmente independientes de la ecuación (3) porque e^{r_2x} no es un múltiplo constante de e^{r_1x} (véase el ejercicio 61). Del teorema 2 concluimos lo siguiente.

TEOREMA 3 Si r_1 y r_2 son dos raíces reales y diferentes de la ecuación característica $ar^2 + br + c = 0$, entonces

$$y = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x}$$

es la solución general de $ay'' + by' + cy = 0$.

EJEMPLO 1 Determine la solución general de la ecuación diferencial

$$y'' - y' - 6y = 0.$$

Solución La sustitución de $y = e^{rx}$ en la ecuación diferencial nos da la ecuación característica

$$r^2 - r - 6 = 0,$$

que se factoriza como

$$(r - 3)(r + 2) = 0.$$

Las raíces son $r_1 = 3$ y $r_2 = -2$. Por lo tanto, la solución general es

$$y = c_1e^{3x} + c_2e^{-2x}. \quad \blacksquare$$

Caso 2: $b^2 - 4ac = 0$. En este caso, $r_1 = r_2 = -b/2a$. Para simplificar la notación, hagamos a $r = -b/2a$. Entonces tenemos la solución $y_1 = e^{rx}$ con $2ar + b = 0$. Como la multiplicación de e^{rx} por una constante no produce una segunda solución linealmente independiente, en vez de eso tratamos de multiplicarla por una *función*. La función más simple sería $u(x) = x$, entonces veamos si $y_2 = xe^{rx}$ es también una solución. Al sustituir y_2 en la ecuación diferencial tenemos

$$\begin{aligned} ay_2'' + by_2' + cy_2 &= a(2re^{rx} + r^2xe^{rx}) + b(e^{rx} + rxe^{rx}) + cxe^{rx} \\ &= (2ar + b)e^{rx} + (ar^2 + br + c)xe^{rx} \\ &= 0(e^{rx}) + (0)xe^{rx} = 0. \end{aligned}$$

El primer término es cero porque $r = -b/2a$; el segundo término es cero porque r resuelve la ecuación característica. Las funciones $y_1 = e^{rx}$ y $y_2 = xe^{rx}$ son linealmente independientes (véase el ejercicio 62). Del teorema 2 concluimos el siguiente resultado.

TEOREMA 4 Si r es la única raíz real (repetida) de la ecuación característica $ar^2 + br + c = 0$, entonces

$$y = c_1e^{rx} + c_2xe^{rx}$$

es la solución general de $ay'' + by' + cy = 0$.

EJEMPLO 2 Obtenga la solución general de

$$y'' + 4y' + 4y = 0.$$

Solución La ecuación característica es

$$r^2 + 4r + 4 = 0,$$

la cual se factoriza como

$$(r + 2)^2 = 0.$$

Por lo tanto, $r = -2$ es una raíz doble. De esta manera, la solución es

$$y = c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x}. \quad \blacksquare$$

Caso 3: $b^2 - 4ac < 0$. En este caso, la ecuación característica tiene dos raíces complejas $r_1 = \alpha + i\beta$ y $r_2 = \alpha - i\beta$, donde α y β son números reales e $i^2 = -1$. (Estos números reales son $\alpha = -b/2a$ y $\beta = \sqrt{4ac - b^2}/2a$.) Estas dos raíces complejas dan lugar a dos soluciones linealmente independientes

$$y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \operatorname{sen} \beta x) \quad \text{y} \quad y_2 = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x - i \operatorname{sen} \beta x).$$

(Las expresiones con términos de seno y coseno provienen de la identidad de Euler de la sección 9.9). Sin embargo, las soluciones y_1 y y_2 son *valores complejos* en vez de valores reales. No obstante, por el principio de superposición (teorema 1), obtenemos de ellos las soluciones con valores reales

$$y_3 = \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 = e^{\alpha x} \cos \beta x \quad \text{y} \quad y_4 = \frac{1}{2i}y_1 - \frac{1}{2i}y_2 = e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x.$$

Las funciones y_3 y y_4 son linealmente independientes (véase el ejercicio 63). Del teorema 2 concluimos el siguiente resultado.

TEOREMA 5 Si $r_1 = \alpha + i\beta$ y $r_2 = \alpha - i\beta$ son dos raíces complejas de la ecuación característica $ar^2 + br + c = 0$, entonces

$$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \operatorname{sen} \beta x)$$

es la solución general de $ay'' + by' + cy = 0$.

EJEMPLO 3 Determine la solución general de la ecuación diferencial

$$y'' - 4y' + 5y = 0.$$

Solución La ecuación característica es

$$r^2 - 4r + 5 = 0.$$

Las raíces son el par de números complejos $r = (4 \pm \sqrt{16 - 20})/2$ o $r_1 = 2 + i$ y $r_2 = 2 - i$. Por lo tanto, $\alpha = 2$ y $\beta = 1$ dan la solución general

$$y = e^{2x}(c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x). \quad \blacksquare$$

Problemas de valor inicial y valor frontera

Para obtener una solución única de una ecuación diferencial lineal de primer orden, fue suficiente especificar el valor de la solución en un punto específico. Puesto que la solución general de una ecuación diferencial de segundo orden tiene dos constantes arbitrarias, es necesario especificar dos condiciones. Una manera de hacerlo es especificar el valor de la función solución y el valor de su derivada en un punto específico: $y(x_0) = y_0$ y $y'(x_0) = y_1$. Estas condiciones se llaman **condiciones iniciales**. El siguiente resultado se demuestra en textos más avanzados y garantiza la existencia de una solución única tanto para problemas de valor inicial lineal de segundo orden homogéneos como no homogéneos.

TEOREMA 6 Si P , Q , R y G son continuas en un intervalo abierto I , entonces existe una y solo una función $y(x)$ que satisface tanto la ecuación diferencial

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = G(x)$$

en el intervalo I , como las condiciones iniciales

$$y(x_0) = y_0 \quad \text{y} \quad y'(x_0) = y_1$$

en un punto específico $x_0 \in I$.

Es importante darse cuenta de que es posible asignar valores reales cualesquiera a y_0 y y_1 y el teorema 6 se cumple. A continuación se incluye un problema de valor inicial para una ecuación homogénea.

EJEMPLO 4 Encuentre la solución particular para el problema de valor inicial

$$y'' - 2y' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1.$$

Solución La ecuación característica es

$$r^2 - 2r + 1 = (r - 1)^2 = 0.$$

La raíz real es $r = 1$ de multiplicidad 2 y nos da la solución general

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x.$$

De esta forma,

$$y' = c_1 e^x + c_2(x + 1)e^x.$$

A partir de las condiciones iniciales tenemos

$$1 = c_1 + c_2 \cdot 0 \quad \text{y} \quad -1 = c_1 + c_2 \cdot 1.$$

Por lo tanto, $c_1 = 1$ y $c_2 = -2$. La solución única que satisface la condición inicial es

$$y = e^x - 2xe^x.$$

La curva solución se muestra en la figura 17.1. ■

Otro enfoque para determinar el valor de las dos constantes arbitrarias en la solución general de una ecuación diferencial de segundo orden es especificar los valores de la función solución en dos *puntos diferentes* del intervalo I . Es decir, resolvemos la ecuación diferencial en cuestión para los **valores frontera**

$$y(x_1) = y_1 \quad \text{y} \quad y(x_2) = y_2,$$

donde x_1 y x_2 pertenecen a I . De nuevo, los valores de y_1 y y_2 pueden ser números reales cualesquiera. La ecuación diferencial, junto con los valores frontera, se conoce como **problema con valores de frontera**. A diferencia de lo establecido en el teorema 6, los problemas con valores de frontera no siempre tienen una solución, o es posible que haya más de una solución (véase el ejercicio 65). Estos problemas se estudian en textos más avanzados, pero aquí se presenta un ejemplo para el cual hay una solución única.

EJEMPLO 5 Resuelva el problema con valores de frontera

$$y'' + 4y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1.$$

Solución La ecuación característica es $r^2 + 4 = 0$, la cual tiene las raíces complejas $r = \pm 2i$. La solución general de la ecuación diferencial es

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sen 2x.$$

Las condiciones de frontera se satisfacen si

$$y(0) = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = 0$$

$$y\left(\frac{\pi}{12}\right) = c_1 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + c_2 \sen\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1.$$

Se deduce que $c_1 = 0$ y $c_2 = 2$. La solución del problema con valores de frontera es

$$y = 2 \sen 2x. \quad \text{■}$$

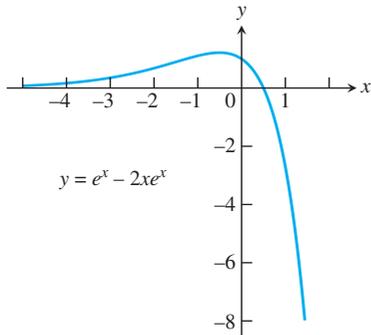


FIGURA 17.1 Curva solución particular del ejemplo 4.

Ejercicios 17.1

En los ejercicios 1 a 30, obtenga la solución general de la ecuación dada.

1. $y'' - y' - 12y = 0$
2. $3y'' - y' = 0$
3. $y'' + 3y' - 4y = 0$
4. $y'' - 9y = 0$
5. $y'' - 4y = 0$
6. $y'' - 64y = 0$
7. $2y'' - y' - 3y = 0$
8. $9y'' - y = 0$
9. $8y'' - 10y' - 3y = 0$
10. $3y'' - 20y' + 12y = 0$
11. $y'' + 9y = 0$
12. $y'' + 4y' + 5y = 0$
13. $y'' + 25y = 0$
14. $y'' + y = 0$
15. $y'' - 2y' + 5y = 0$
16. $y'' + 16y = 0$
17. $y'' + 2y' + 4y = 0$
18. $y'' - 2y' + 3y = 0$
19. $y'' + 4y' + 9y = 0$
20. $4y'' - 4y' + 13y = 0$
21. $y'' = 0$
22. $y'' + 8y' + 16y = 0$
23. $\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 4y = 0$
24. $\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 9y = 0$
25. $\frac{d^2y}{dx^2} + 6\frac{dy}{dx} + 9y = 0$
26. $4\frac{d^2y}{dx^2} - 12\frac{dy}{dx} + 9y = 0$
27. $4\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + y = 0$
28. $4\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + y = 0$
29. $9\frac{d^2y}{dx^2} + 6\frac{dy}{dx} + y = 0$
30. $9\frac{d^2y}{dx^2} - 12\frac{dy}{dx} + 4y = 0$

En los ejercicios 31 a 40, obtenga la única solución del problema con valor inicial de segundo orden.

31. $y'' + 6y' + 5y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 3$
32. $y'' + 16y = 0, y(0) = 2, y'(0) = -2$
33. $y'' + 12y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1$
34. $12y'' + 5y' - 2y = 0, y(0) = 1, y'(0) = -1$
35. $y'' + 8y = 0, y(0) = -1, y'(0) = 2$
36. $y'' + 4y' + 4y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1$
37. $y'' - 4y' + 4y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0$
38. $4y'' - 4y' + y = 0, y(0) = 4, y'(0) = 4$
39. $4\frac{d^2y}{dx^2} + 12\frac{dy}{dx} + 9y = 0, y(0) = 2, \frac{dy}{dx}(0) = 1$
40. $9\frac{d^2y}{dx^2} - 12\frac{dy}{dx} + 4y = 0, y(0) = -1, \frac{dy}{dx}(0) = 1$

En los ejercicios 41 a 55, obtenga la solución general.

41. $y'' - 2y' - 3y = 0$
42. $6y'' - y' - y = 0$
43. $4y'' + 4y' + y = 0$
44. $9y'' + 12y' + 4y = 0$
45. $4y'' + 20y = 0$
46. $y'' + 2y' + 2y = 0$
47. $25y'' + 10y' + y = 0$
48. $6y'' + 13y' - 5y = 0$
49. $4y'' + 4y' + 5y = 0$
50. $y'' + 4y' + 6y = 0$
51. $16y'' - 24y' + 9y = 0$
52. $6y'' - 5y' - 6y = 0$
53. $9y'' + 24y' + 16y = 0$
54. $4y'' + 16y' + 52y = 0$
55. $6y'' - 5y' - 4y = 0$

En los ejercicios 56 a 60, resuelva el problema de valor inicial.

56. $y'' - 2y' + 2y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 2$
57. $y'' + 2y' + y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 1$
58. $4y'' - 4y' + y = 0, y(0) = -1, y'(0) = 2$
59. $3y'' + y' - 14y = 0, y(0) = 2, y'(0) = -1$
60. $4y'' + 4y' + 5y = 0, y(\pi) = 1, y'(\pi) = 0$
61. Demuestre que las dos funciones solución del teorema 3 son linealmente independientes.
62. Demuestre que las dos funciones solución del teorema 4 son linealmente independientes.
63. Demuestre que las dos funciones solución del teorema 5 son linealmente independientes.
64. Demuestre que si y_1 y y_2 son soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea (2), entonces las funciones $y_3 = y_1 + y_2$ y $y_4 = y_1 - y_2$ también son soluciones linealmente independientes.
65. a. Demuestre que no hay una solución para el problema del valor a la frontera

$$y'' + 4y = 0, y(0) = 0, y(\pi) = 1.$$
 b. Demuestre que hay un número infinito de soluciones para el problema con valores de frontera

$$y'' + 4y = 0, y(0) = 0, y(\pi) = 0.$$
66. Demuestre que si a, b y c son constantes positivas, entonces todas las soluciones de la ecuación diferencial homogénea

$$ay'' + by' + cy = 0$$
 tienden a cero cuando $x \rightarrow \infty$.

17.2 Ecuaciones lineales no homogéneas

En esta sección estudiaremos dos métodos para resolver ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas de segundo orden con coeficientes constantes. Estos métodos son el de *coeficientes indeterminados* y el de *variación de parámetros*. Iniciaremos considerando la forma de la solución general.

Forma de la solución general

Suponga que deseamos resolver la ecuación no homogénea

$$ay'' + by' + cy = G(x), \quad (1)$$

donde a , b y c son constantes, y G es continua sobre algún intervalo abierto I . Sea $y_c = c_1y_1 + c_2y_2$ la solución general de la **ecuación diferencial homogénea** asociada

$$ay'' + by' + cy = 0. \quad (2)$$

(Aprendimos cómo encontrar y_c en la sección 17.1). Ahora suponga que de alguna manera se obtiene una función particular y_p que resuelve la ecuación no homogénea (1). Entonces la suma

$$y = y_c + y_p \quad (3)$$

también resuelve la ecuación no homogénea (1) puesto que

$$\begin{aligned} a(y_c + y_p)'' + b(y_c + y_p)' + c(y_c + y_p) &= (ay_c'' + by_c' + cy_c) + (ay_p'' + by_p' + cy_p) \\ &= 0 + G(x) \quad y_c \text{ resuelve la ecuación (2) y } y_p \text{ resuelve la ecuación (1)} \\ &= G(x). \end{aligned}$$

Aún más, si $y(x)$ es la solución de la ecuación no homogénea (1), debe tener la forma de la ecuación (3). La razón de este último enunciado se deduce de la observación de que para que cualquier función y_p que satisfaga la ecuación (1), tenemos

$$\begin{aligned} a(y - y_p)'' + b(y - y_p)' + c(y - y_p) &= (ay'' + by' + cy) - (ay_p'' + by_p' + cy_p) \\ &= G(x) - G(x) = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $y_c = y - y_p$ es la solución general de la ecuación homogénea (2). Hemos llegado al siguiente teorema.

TEOREMA 7 La solución general $y = y(x)$ de la ecuación diferencial no homogénea (1) tiene la forma

$$y = y_c + y_p,$$

donde la **solución** y_c es la solución general de la ecuación homogénea asociada (2), y y_p es cualquier **solución particular** de la ecuación no homogénea (1).

Método de los coeficientes indeterminados

Este método para obtener una solución particular y_p de la ecuación no homogénea (1) se aplica a casos especiales en los que $G(x)$ es la suma de los términos de varios polinomios $p(x)$ multiplicados por un exponencial y con posibles factores de senos o cosenos. Es decir, $G(x)$ es la suma de términos como los siguientes:

$$p_1(x)e^{\alpha x}, \quad p_2(x)e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad p_3(x)e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Por ejemplo, $1 - x$, e^{2x} , xe^x , $\cos x$ y $5e^x - \sin 2x$ representan funciones de esta clase. (Éstas son funciones que, en esencia, resuelven ecuaciones diferenciales lineales homogéneas con coeficientes constantes, pero las ecuaciones pueden tener un orden mayor de dos). En seguida representamos varios ejemplos que ilustran este método.

EJEMPLO 1 Resuelva la ecuación no homogénea $y'' - 2y' - 3y = 1 - x^2$.

Solución La ecuación característica de la ecuación homogénea $y'' - 2y' - 3y = 0$ es

$$r^2 - 2r - 3 = (r + 1)(r - 3) = 0.$$

Sus raíces $r = -1$ y $r = 3$ dan la solución de la homogénea

$$y_c = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x}.$$

Ahora, $G(x) = 1 - x^2$ es un polinomio de segundo grado. Sería razonable suponer que una solución particular para la ecuación no homogénea es también un polinomio de segundo grado porque si y es un polinomio de segundo grado, entonces $y'' - 2y' - 3y$ también es un polinomio de segundo grado. Así que buscamos una solución particular de la forma

$$y_p = Ax^2 + Bx + C.$$

Necesitamos determinar los coeficientes desconocidos A , B y C . Cuando se sustituye el polinomio y_p y sus derivadas en la ecuación no homogénea dada, tenemos

$$2A - 2(2Ax + B) - 3(Ax^2 + Bx + C) = 1 - x^2$$

al agrupar los términos de acuerdo con las potencias de x ,

$$-3Ax^2 + (-4A - 3B)x + (2A - 2B - 3C) = 1 - x^2.$$

Esta última ecuación se cumple para todos los valores de x si sus dos lados son polinomios idénticos de segundo grado. Así, igualamos los coeficientes de las potencias correspondientes de x para obtener

$$-3A = -1, \quad -4A - 3B = 0 \quad \text{y} \quad 2A - 2B - 3C = 1.$$

Estas ecuaciones implican a la vez que $A = 1/3$, $B = -4/9$ y $C = 5/27$. Al sustituir estos valores en la expresión cuadrática de la solución particular, tenemos

$$y_p = \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{9}x + \frac{5}{27}.$$

Por el teorema 7, la solución general de la ecuación no homogénea es

$$y = y_c + y_p = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} + \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{9}x + \frac{5}{27}. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 2 Obtenga una solución particular para $y'' - y' = 2 \operatorname{sen} x$.

Solución Si intentamos encontrar una solución particular de la forma

$$y_p = A \operatorname{sen} x$$

y sustituimos las derivadas de y_p en la ecuación dada, encontramos que A debe satisfacer la ecuación

$$-A \operatorname{sen} x + A \cos x = 2 \operatorname{sen} x$$

para todos los valores de x . Como esto requiere que A sea igual a -2 y a 0 al mismo tiempo, concluimos que la ecuación diferencial no homogénea no tiene una solución de la forma $A \operatorname{sen} x$.

Esto implica la posibilidad de que la forma requerida sea la suma

$$y_p = A \operatorname{sen} x + B \cos x.$$

El resultado de la sustitución de las derivadas de este nuevo intento de solución en la ecuación diferencial es

$$-A \operatorname{sen} x - B \cos x - (A \cos x - B \operatorname{sen} x) = 2 \operatorname{sen} x$$

o bien,

$$(B - A) \operatorname{sen} x - (A + B) \cos x = 2 \operatorname{sen} x.$$

Esta última ecuación debe ser una identidad. Al igualar los coeficientes de los términos semejantes en cada lado de la igualdad tenemos

$$B - A = 2 \quad \text{y} \quad A + B = 0.$$

La solución simultánea de estas dos ecuaciones da $A = -1$ y $B = 1$. La solución particular es

$$y_p = \cos x - \operatorname{sen} x. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 3 Obtenga una solución particular de $y'' - 3y' + 2y = 5e^x$.

Solución Si sustituimos

$$y_p = Ae^x$$

y sus derivadas en la ecuación diferencial, tenemos que

$$Ae^x - 3Ae^x + 2Ae^x = 5e^x$$

o bien,

$$0 = 5e^x.$$

Sin embargo, la función exponencial nunca debe ser cero. El problema es atribuible a que $y = e^x$ ya es una solución de la ecuación homogénea asociada

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

La ecuación característica es

$$r^2 - 3r + 2 = (r - 1)(r - 2) = 0,$$

la cual tiene a $r = 1$ como una raíz. Entonces esperaríamos que Ae^x fuera cero cuando se sustituye en el lado izquierdo de la ecuación diferencial.

La manera correcta de modificar el intento de solución en este caso es multiplicar Ae^x por x . Así, nuestro intento de solución es

$$y_p = Axe^x.$$

El resultado de la sustitución de las derivadas de este nuevo prospecto en la ecuación diferencial es

$$(Axe^x + 2Ae^x) - 3(Axe^x + Ae^x) + 2Axe^x = 5e^x$$

o bien,

$$-Ae^x = 5e^x.$$

Así, $A = -5$ nos da nuestra deseada solución particular

$$y_p = -5xe^x. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 4 Determine una solución particular de $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$.

Solución La ecuación característica de la ecuación homogénea

$$r^2 - 6r + 9 = (r - 3)^2 = 0$$

tiene a $r = 3$ como raíz repetida. La elección adecuada de y_p en este caso no es ni Ae^{3x} ni Axe^{3x} porque la solución de la homogénea ya contiene los dos términos. Por lo tanto, elegimos un término que contenga como factor la siguiente potencia más alta de x . Cuando sustituimos

$$y_p = Ax^2e^{3x}$$

y sus derivadas en la ecuación diferencial dada, obtenemos

$$(9Ax^2e^{3x} + 12Axe^{3x} + 2Ae^{3x}) - 6(3Ax^2e^{3x} + 2Axe^{3x}) + 9Ax^2e^{3x} = e^{3x}$$

o bien,

$$2Ae^{3x} = e^{3x}.$$

Entonces, $A = 1/2$, y la solución particular es

$$y_p = \frac{1}{2}x^2e^{3x}. \quad \blacksquare$$

Cuando deseamos encontrar una solución particular de la ecuación (1) y la función $G(x)$ es la suma de dos o más términos, elegimos una función de prueba para cada término de $G(x)$ y las sumamos.

EJEMPLO 5 Obtenga la solución general de $y'' - y' = 5e^x - \sin 2x$.

Solución Primero resolvemos la ecuación característica

$$r^2 - r = 0.$$

Sus raíces son $r = 1$ y $r = 0$. Por lo tanto, la solución de la ecuación homogénea asociada es

$$y_c = c_1e^x + c_2.$$

Buscamos ahora una solución particular y_p . Es decir, buscamos una función que produzca $5e^x - \sin 2x$ cuando se sustituya en el lado izquierdo de la ecuación diferencial dada. Una parte de y_p debe producir $5e^x$, la otra $-\sin 2x$.

Como cualquier función de la forma c_1e^x es una solución de la ecuación homogénea asociada, seleccionamos que nuestra solución de prueba y_p sea la suma

$$y_p = Axe^x + B \cos 2x + C \sin 2x,$$

incluyendo xe^x donde podríamos haber incluido sólo e^x . Cuando las derivadas de y_p se sustituyen en la ecuación diferencial, la ecuación resultante es

$$\begin{aligned} (Axe^x + 2Ae^x - 4B \cos 2x - 4C \sin 2x) \\ - (Axe^x + Ae^x - 2B \sin 2x + 2C \cos 2x) = 5e^x - \sin 2x \end{aligned}$$

o bien,

$$Ae^x - (4B + 2C) \cos 2x + (2B - 4C) \sin 2x = 5e^x - \sin 2x.$$

Esta ecuación es válida si

$$A = 5, \quad 4B + 2C = 0, \quad 2B - 4C = -1,$$

o bien, $A = 5, B = -1/10$ y $C = 1/5$. Nuestra solución particular es

$$y_p = 5xe^x - \frac{1}{10} \cos 2x + \frac{1}{5} \sin 2x.$$

La solución general de la ecuación diferencial es

$$y = y_c + y_p = c_1e^x + c_2 + 5xe^x - \frac{1}{10} \cos 2x + \frac{1}{5} \sin 2x. \quad \blacksquare$$

Le será de utilidad la siguiente tabla para resolver los problemas al final de esta sección.

TABLA 17.1 Método de coeficientes indeterminados para ecuaciones seleccionadas de la forma

$$ay'' + by' + cy = G(x).$$

| Si $G(x)$ tiene un término que es un múltiplo constante de ... | Y si | Entonces incluya esta expresión en la función de prueba para y_p . |
|--|--|--|
| e^{rx} | r no es una raíz de la ecuación característica | Ae^{rx} |
| | r es una raíz simple de la ecuación característica | Axe^{rx} |
| | r es una raíz doble de la ecuación característica | Ax^2e^{rx} |
| $\sin kx, \cos kx$ | ki no es una raíz de la ecuación característica | $B \cos kx + C \sin kx$ |
| $px^2 + qx + m$ | 0 no es una raíz de la ecuación característica | $Dx^2 + Ex + F$ |
| | 0 es una raíz simple de la ecuación característica | $Dx^3 + Ex^2 + Fx$ |
| | 0 es una doble raíz de la ecuación característica | $Dx^4 + Ex^3 + Fx^2$ |

Método de variación de parámetros

Éste es un método general para la obtención de una solución particular de la ecuación no homogénea (1) una vez que se conoce la solución general de la ecuación homogénea asociada. El método consiste en sustituir las constantes c_1 y c_2 en la solución complementaria por las funciones $v_1 = v_1(x)$ y $v_2 = v_2(x)$ garantizando (de una manera que se explicará luego) que la

expresión resultante satisfaga la ecuación no homogénea (1). Son dos funciones las que deben determinarse, y el requerimiento de que se satisfaga la ecuación (1) es sólo una condición. Como segunda condición, también requerimos que

$$v_1'y_1 + v_2'y_2 = 0. \quad (4)$$

Entonces tenemos

$$\begin{aligned} y &= v_1y_1 + v_2y_2, \\ y' &= v_1y_1' + v_2y_2', \\ y'' &= v_1y_1'' + v_2y_2'' + v_1'y_1' + v_2'y_2'. \end{aligned}$$

Si sustituimos estas expresiones en el lado izquierdo de la ecuación (1), obtenemos

$$v_1(ay_1'' + by_1' + cy_1) + v_2(ay_2'' + by_2' + cy_2) + a(v_1'y_1' + v_2'y_2') = G(x).$$

Los primeros dos términos entre paréntesis son cero, puesto que y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación homogénea asociada (2). Entonces la ecuación no homogénea (1) se satisface si, además de la ecuación (4), requerimos que

$$a(v_1'y_1' + v_2'y_2') = G(x). \quad (5)$$

Las ecuaciones (4) y (5) se resuelven simultáneamente

$$\begin{aligned} v_1'y_1 + v_2'y_2 &= 0, \\ v_1'y_1' + v_2'y_2' &= \frac{G(x)}{a} \end{aligned}$$

para las funciones desconocidas v_1' y v_2' . El procedimiento usual para resolver este sistema simple es usar el *método de determinantes* (también conocido como *regla de Kramer*), el cual se mostrará en los ejemplos que siguen. Una vez que las funciones derivadas v_1' y v_2' son conocidas, las dos funciones $v_1 = v_1(x)$ y $v_2 = v_2(x)$ se obtienen mediante integración. A continuación se presenta un resumen de ese método.

Procedimiento de variación de parámetros

Para aplicar el método de variación de parámetros para obtener una solución particular de la ecuación no homogénea

$$ay'' + by' + cy = G(x),$$

trabajamos en forma directa con las ecuaciones (4) y (5). No es necesario derivarlas otra vez. Los pasos son los siguientes:

1. Resuelva la ecuación homogénea asociada

$$ay'' + by' + cy = 0$$

para encontrar las funciones y_1 y y_2 .

2. Resuelva las ecuaciones

$$\begin{aligned} v_1'y_1 + v_2'y_2 &= 0, \\ v_1'y_1' + v_2'y_2' &= \frac{G(x)}{a} \end{aligned}$$

en forma simultánea para las funciones derivadas v_1' y v_2' .

3. Integre v_1' y v_2' para obtener las funciones $v_1 = v_1(x)$ y $v_2 = v_2(x)$.
4. Escriba la solución particular de la ecuación no homogénea (1) como

$$y_p = v_1y_1 + v_2y_2.$$

EJEMPLO 6 Encuentre la solución general de la ecuación

$$y'' + y = \tan x.$$

Solución La solución de la ecuación homogénea

$$y'' + y = 0$$

está dada por

$$y_c = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

Puesto que $y_1(x) = \cos x$ y $y_2(x) = \sin x$, las condiciones que deben satisfacerse en las ecuaciones (4) y (5) son

$$\begin{aligned} v_1' \cos x + v_2' \sin x &= 0, \\ -v_1' \sin x + v_2' \cos x &= \tan x. \quad a = 1 \end{aligned}$$

La solución de este sistema nos da

$$v_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \tan x & \cos x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}} = \frac{-\tan x \sin x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x}{\cos x}.$$

Asimismo,

$$v_2' = \frac{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \tan x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}} = \sin x.$$

Después de integrar v_1' y v_2' , tenemos

$$\begin{aligned} v_1(x) &= \int \frac{-\sin^2 x}{\cos x} dx \\ &= -\int (\sec x - \cos x) dx \\ &= -\ln |\sec x + \tan x| + \sin x, \end{aligned}$$

y

$$v_2(x) = \int \sin x dx = -\cos x.$$

Observe que hemos omitido las constantes de integración en la determinación de v_1 y v_2 porque serían absorbidas por las constantes arbitrarias de la solución homogénea.

Al sustituir v_1 y v_2 en la expresión para y_p en el paso 4 tenemos

$$\begin{aligned} y_p &= [-\ln |\sec x + \tan x| + \sin x] \cos x + (-\cos x) \sin x \\ &= (-\cos x) \ln |\sec x + \tan x|. \end{aligned}$$

La solución general es

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - (\cos x) \ln |\sec x + \tan x|. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 7 Resuelva la ecuación no homogénea

$$y'' + y' - 2y = xe^x.$$

Solución La ecuación característica es

$$r^2 + r - 2 = (r + 2)(r - 1) = 0$$

lo que da la solución homogénea

$$y_c = c_1 e^{-2x} + c_2 e^x.$$

Las condiciones que se deben satisfacer en las ecuaciones (4) y (5) son

$$\begin{aligned} v_1' e^{-2x} + v_2' e^x &= 0, \\ -2v_1' e^{-2x} + v_2' e^x &= xe^x. \quad a = 1 \end{aligned}$$

Al despejar v_1' y v_2' en el sistema de arriba obtenemos

$$v_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^x \\ xe^x & e^x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-2x} & e^x \\ -2e^{-2x} & e^x \end{vmatrix}} = \frac{-xe^{2x}}{3e^{-x}} = -\frac{1}{3}xe^{3x}.$$

Asimismo,

$$v_2' = \frac{\begin{vmatrix} e^{-2x} & 0 \\ -2e^{-2x} & xe^x \end{vmatrix}}{3e^{-x}} = \frac{xe^{-x}}{3e^{-x}} = \frac{x}{3}.$$

Integramos para obtener las funciones parámetro y obtenemos

$$\begin{aligned} v_1(x) &= \int -\frac{1}{3}xe^{3x} dx \\ &= -\frac{1}{3} \left(\frac{xe^{3x}}{3} - \int \frac{e^{3x}}{3} dx \right) \\ &= \frac{1}{27}(1 - 3x)e^{3x}, \end{aligned}$$

y

$$v_2(x) = \int \frac{x}{3} dx = \frac{x^2}{6}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} y_p &= \left[\frac{(1 - 3x)e^{3x}}{27} \right] e^{-2x} + \left(\frac{x^2}{6} \right) e^x \\ &= \frac{1}{27} e^x - \frac{1}{9} xe^x + \frac{1}{6} x^2 e^x. \end{aligned}$$

La solución general de la ecuación diferencial es

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^x - \frac{1}{9} xe^x + \frac{1}{6} x^2 e^x,$$

donde el término $(1/27)e^x$ en y_p se ha integrado al término $c_2 e^x$ en la solución homogénea. ■

Ejercicios 17.2

Resuelva las ecuaciones de los ejercicios 1 a 16 por el método de los coeficientes indeterminados.

1. $y'' - 3y' - 10y = -3$
2. $y'' - 3y' - 10y = 2x - 3$
3. $y'' - y' = \sin x$
4. $y'' + 2y' + y = x^2$
5. $y'' + y = \cos 3x$
6. $y'' + y = e^{2x}$
7. $y'' - y' - 2y = 20 \cos x$
8. $y'' + y = 2x + 3e^x$
9. $y'' - y = e^x + x^2$
10. $y'' + 2y' + y = 6 \sin 2x$
11. $y'' - y' - 6y = e^{-x} - 7 \cos x$
12. $y'' + 3y' + 2y = e^{-x} + e^{-2x} - x$
13. $\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} = 15x^2$
14. $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = -8x + 3$
15. $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} = e^{3x} - 12x$
16. $\frac{d^2y}{dx^2} + 7\frac{dy}{dx} = 42x^2 + 5x + 1$

Resuelva las ecuaciones de los ejercicios 17 a 28 por variación de parámetros.

17. $y'' + y' = x$
18. $y'' + y = \tan x, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$
19. $y'' + y = \sin x$
20. $y'' + 2y' + y = e^x$
21. $y'' + 2y' + y = e^{-x}$
22. $y'' - y = x$
23. $y'' - y = e^x$
24. $y'' - y = \sin x$
25. $y'' + 4y' + 5y = 10$
26. $y'' - y' = 2^x$
27. $\frac{d^2y}{dx^2} + y = \sec x, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$
28. $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = e^x \cos x, \quad x > 0$

En cada uno de los ejercicios 29 a 32, la ecuación diferencial tiene su correspondiente solución particular y_p . Determine los coeficientes de y_p . Luego resuelva la ecuación diferencial.

29. $y'' - 5y' = xe^{5x}, \quad y_p = Ax^2e^{5x} + Bxe^{5x}$
30. $y'' - y' = \cos x + \sin x, \quad y_p = A \cos x + B \sin x$
31. $y'' + y = 2 \cos x + \sin x, \quad y_p = Ax \cos x + Bx \sin x$
32. $y'' + y' - 2y = xe^x, \quad y_p = Ax^2e^x + Bxe^x$

En los ejercicios 33 a 36, resuelva las ecuaciones diferenciales (a) por variación de parámetros y (b) por el método de coeficientes indeterminados.

33. $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = e^x + e^{-x}$
34. $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = 2e^{2x}$
35. $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} - 5y = e^x + 4$
36. $\frac{d^2y}{dx^2} - 9\frac{dy}{dx} = 9e^{9x}$

Resuelva las ecuaciones diferenciales de los ejercicios 37 a 46. Algunas de las ecuaciones se resuelven por el método de coeficientes indeterminados, pero otras no.

37. $y'' + y = \cot x, \quad 0 < x < \pi$
38. $y'' + y = \csc x, \quad 0 < x < \pi$
39. $y'' - 8y' = e^{8x}$
40. $y'' + 4y = \sin x$
41. $y'' - y' = x^3$
42. $y'' + 4y' + 5y = x + 2$
43. $y'' + 2y' = x^2 - e^x$
44. $y'' + 9y = 9x - \cos x$
45. $y'' + y = \sec x \tan x, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$
46. $y'' - 3y' + 2y = e^x - e^{2x}$

El método de coeficientes indeterminados se usa algunas veces para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. Use este método para resolver las ecuaciones de los ejercicios 47-50.

47. $y' - 3y = e^x$
48. $y' + 4y = x$
49. $y' - 3y = 5e^{3x}$
50. $y' + y = \sin x$

Resuelva las ecuaciones diferenciales de los ejercicios 51 y 52, de acuerdo con las condiciones iniciales indicadas.

51. $\frac{d^2y}{dx^2} + y = \sec^2 x, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}; \quad y(0) = y'(0) = 1$
52. $\frac{d^2y}{dx^2} + y = e^{2x}; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = \frac{2}{5}$

En los ejercicios 53 a 58, verifique que la función es una solución particular de la ecuación no homogénea especificada. Obtenga la solución general y evalúe sus constantes arbitrarias para encontrar la solución única que satisfaga la ecuación y las condiciones iniciales dadas.

53. $y'' + y' = x, \quad y_p = \frac{x^2}{2} - x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$
54. $y'' + y = x, \quad y_p = 2 \sin x + x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$
55. $\frac{1}{2}y'' + y' + y = 4e^x(\cos x - \sin x),$
 $y_p = 2e^x \cos x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
56. $y'' - y' - 2y = 1 - 2x, \quad y_p = x - 1, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
57. $y'' - 2y' + y = 2e^x, \quad y_p = x^2e^x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
58. $y'' - 2y' + y = x^{-1}e^x, \quad x > 0,$
 $y_p = xe^x \ln x, \quad y(1) = e, \quad y'(1) = 0$

En los ejercicios 59 y 60 se dan dos soluciones linealmente independientes y_1 y y_2 a la ecuación homogénea asociada de la ecuación no homogénea de coeficientes variables. Use el método de variación de parámetros para obtener una solución particular de la ecuación no homogénea. Suponga a $x > 0$ en cada ejercicio.

59. $x^2y'' + 2xy' - 2y = x^2, \quad y_1 = x^{-2}, \quad y_2 = x$
60. $x^2y'' + xy' - y = x, \quad y_1 = x^{-1}, \quad y_2 = x$

17.3 Aplicaciones

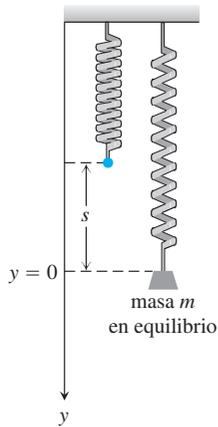


FIGURA 17.2 La masa m estira un resorte una longitud s hasta la posición de equilibrio en $y = 0$.

En esta sección aplicaremos las ecuaciones diferenciales de segundo orden al estudio de resortes vibratorios y circuitos eléctricos.

Vibraciones

Un resorte tiene su extremo superior sujeto a un soporte rígido, como se muestra en la figura 17.2. Un objeto de masa m está suspendido del resorte y lo estira una longitud s hasta que el resorte llega a una posición de equilibrio. De acuerdo con la ley de Hook (sección 6.5), la fuerza de tensión en el resorte es ks , donde k es la constante del resorte. La fuerza debida a la gravedad que tira del resorte hacia abajo es mg , y para efectos de equilibrio se requiere que

$$ks = mg. \quad (1)$$

Suponga que el objeto es halado hacia abajo una distancia adicional y_0 a partir de la posición de equilibrio y luego se libera. Queremos estudiar el movimiento del objeto, es decir, la posición vertical de su centro de masa en cualquier instante futuro.

Sea y , con la dirección positiva hacia abajo, el desplazamiento del objeto a partir de la posición de equilibrio $y = 0$ en cualquier instante t después de iniciado el movimiento. Entonces las fuerzas que actúan sobre el objeto son (figura 17.3).

$$\begin{aligned} F_p &= mg, && \text{la fuerza de propulsión debida a la gravedad,} \\ F_s &= k(s + y), && \text{la fuerza de restauración de la tensión del resorte,} \\ F_r &= \delta \frac{dy}{dt}, && \text{la fuerza de fricción, que se supone proporcional a la} \\ &&& \text{velocidad.} \end{aligned}$$

La fuerza de fricción tiende a retardar el movimiento del objeto. La resultante de estas fuerzas es $F = F_p - F_s - F_r$, y de acuerdo con la segunda ley de Newton $F = ma$, tenemos entonces

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = mg - ks - ky - \delta \frac{dy}{dt}.$$

Por la ecuación (1), $mg - ks = 0$, de manera que esta última ecuación se convierte en

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + \delta \frac{dy}{dt} + ky = 0, \quad (2)$$

de acuerdo con las condiciones iniciales $y(0) = y_0$, y $y'(0) = 0$. (Aquí usamos la notación prima para representar la derivada con respecto al tiempo t).

Se puede esperar que el movimiento predicho por la ecuación (2) sea oscilatorio alrededor del punto de equilibrio $y = 0$ y al final se extinga debido a la fuerza de fricción retardadora. De hecho, éste es el caso y mostraremos cómo las constantes m , δ y k determinan la naturaleza de la extinción. También veremos que si no hay fricción (de manera que $\delta = 0$), entonces el objeto sencillamente oscilará de forma indefinida.

Movimiento armónico simple

Primero suponemos que hay una fuerza de fricción retardadora. Entonces $\delta = 0$ y el movimiento no se amortigua. Si sustituimos $\omega = \sqrt{k/m}$ para simplificar nuestros cálculos, entonces la ecuación de segundo grado (2) se convierte en

$$y'' + \omega^2 y = 0, \quad \text{con} \quad y(0) = y_0 \quad \text{y} \quad y'(0) = 0.$$

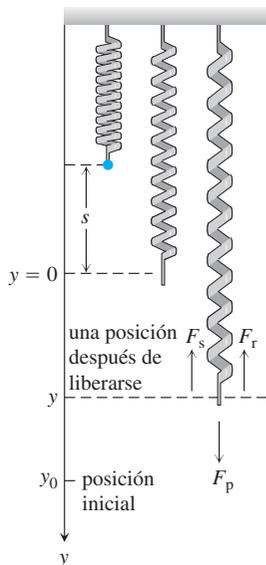


FIGURA 17.3 La fuerza de propulsión (peso) F_p tira de la masa hacia abajo, pero la fuerza restauradora del resorte F_s y la fuerza de fricción F_r tiran de la masa hacia arriba. El movimiento inicia en $y = y_0$ y la masa se mueve hacia arriba y hacia abajo.

La ecuación característica es

$$r^2 + \omega^2 = 0,$$

la cual tiene las raíces imaginarias $r = \pm \omega i$. La solución general de la ecuación diferencial en la ecuación (2) es

$$y = c_1 \cos \omega t + c_2 \sen \omega t. \tag{3}$$

Para adaptarla a las condiciones iniciales, calculamos

$$y' = -c_1 \omega \sen \omega t + c_2 \omega \cos \omega t$$

y luego sustituimos las condiciones. Esto nos da $c_1 = y_0$ y $c_2 = 0$. La solución particular

$$y = y_0 \cos \omega t \tag{4}$$

describe el movimiento del objeto. La ecuación (4) representa al **movimiento armónico simple** de amplitud y_0 y periodo $T = 2\pi/\omega$.

La solución general dada por la ecuación (3) se puede reducir a un solo término utilizando la identidad trigonométrica

$$\sen(\omega t + \phi) = \cos \omega t \sen \phi + \sen \omega t \cos \phi.$$

Para aplicar la identidad usamos (véase la figura 17.4)

$$c_1 = C \sen \phi \quad \text{y} \quad c_2 = C \cos \phi,$$

donde

$$C = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \quad \text{y} \quad \phi = \tan^{-1} \frac{c_1}{c_2}.$$

Entonces la solución general de la ecuación (3) se escribe de la forma alternativa

$$y = C \sen(\omega t + \phi). \tag{5}$$

Aquí, C y ϕ se toman como dos nuevas constantes arbitrarias, que sustituyen a las constantes c_1 y c_2 . La ecuación (5) representa un movimiento armónico simple de amplitud C y periodo $T = 2\pi/\omega$. El ángulo $\omega t + \phi$ se conoce como **ángulo de fase** y ϕ se interpreta como su valor inicial. En la figura 17.5 se presenta la gráfica de un movimiento armónico simple representado por la ecuación (5).

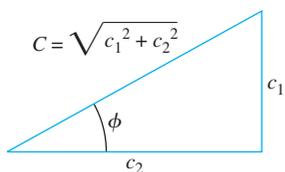


FIGURA 17.4 $c_1 = C \sen \phi$ y $c_2 = C \cos \phi$.

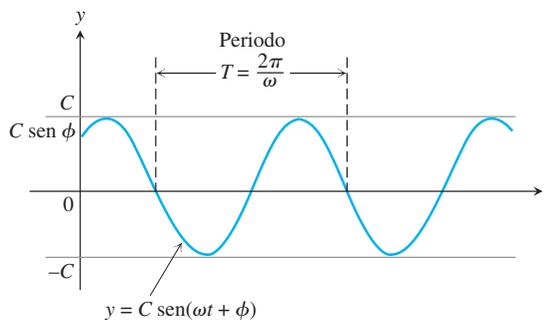


FIGURA 17.5 Movimiento armónico simple de amplitud C y periodo T con un ángulo de fase inicial ϕ (ecuación 5).

Movimiento amortiguado

Ahora suponga que existe fricción en el sistema del resorte, entonces $\delta \neq 0$. Si sustituimos $\omega = \sqrt{k/m}$ y $2b = \delta/m$, entonces la ecuación diferencial (2) es

$$y'' + 2by' + \omega^2 y = 0. \quad (6)$$

La ecuación característica es

$$r^2 + 2br + \omega^2 = 0,$$

con las raíces $r = -b \pm \sqrt{b^2 - \omega^2}$. En seguida se presentan tres casos diferentes, dependiendo de los tamaños relativos de b y ω .

Caso 1: $b = \omega$. La doble raíz de la ecuación característica es real e igual $r = -\omega$. La solución general de la ecuación (6) es

$$y = (c_1 + c_2 t)e^{-\omega t}.$$

Este tipo de movimiento se llama **amortiguamiento crítico** y no es oscilatorio. La figura 17.6a ilustra un ejemplo de esta clase de movimiento amortiguado.

Caso 2: $b > \omega$. Las raíces de la ecuación característica son reales y diferentes, y están dadas por $r_1 = -b + \sqrt{b^2 - \omega^2}$ y $r_2 = -b - \sqrt{b^2 - \omega^2}$. La solución general de la ecuación (6) está dada por

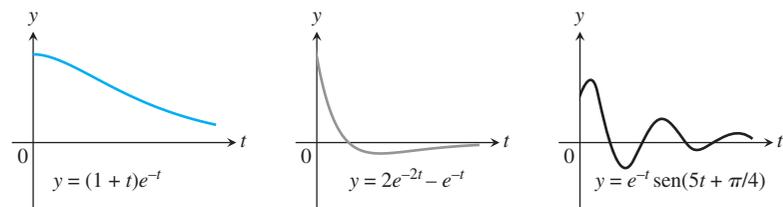
$$y = c_1 e^{(-b + \sqrt{b^2 - \omega^2})t} + c_2 e^{(-b - \sqrt{b^2 - \omega^2})t}.$$

De nuevo, el movimiento no es oscilatorio y tanto r_1 como r_2 son negativos. De esta manera, y tiende a cero cuando el tiempo transcurre. Este movimiento se conoce como **sobreamortiguado** (figura 17.6b).

Caso 3: $b < \omega$. Las raíces de la ecuación característica son complejas y están dadas por $r = -b \pm i\sqrt{\omega^2 - b^2}$. La solución general de la ecuación (6) está dada por

$$y = e^{-bt}(c_1 \cos \sqrt{\omega^2 - b^2} t + c_2 \sin \sqrt{\omega^2 - b^2} t).$$

Este movimiento, llamado **subamortiguado**, representa el movimiento **oscilatorio** amortiguado. Es análogo al movimiento armónico simple de periodo $T = 2\pi/\sqrt{\omega^2 - b^2}$ excepto que la amplitud no es constante, sino amortiguada por el factor e^{-bt} . Por lo tanto, el movimiento tiende a cero cuando t aumenta, de manera que las vibraciones tienden a extinguirse cuando el tiempo transcurre. Observe que el periodo $T = 2\pi/\sqrt{\omega^2 - b^2}$ es mayor que el periodo $T_0 = 2\pi/\omega$ en un sistema libre de fricción. Aún más, cuanto mayor es el valor de $b = \delta/2m$ en el factor exponencial de amortiguamiento, más rápido dejan de notarse las vibraciones. La figura 17.6c muestra una curva que representa el movimiento subamortiguado.



(a) Amortiguamiento crítico (b) Sobreamortiguamiento (c) Subamortiguamiento

FIGURA 17.6 Tres ejemplos de movimiento vibratorio amortiguado para un sistema de resorte con fricción, $\delta \neq 0$.

También puede agregarse al sistema de resorte una fuerza externa $F(t)$ modelada por la ecuación (2). La función de fuerza provocaría un disturbio externo en el sistema. Por ejemplo, si la ecuación modela un sistema de suspensión de un automóvil, la función de fuerza puede representar una sacudida o un bache en el camino de forma periódica en el desempeño del sistema de suspensión o podría representar los efectos del viento cuando modela el movimiento vertical de un puente suspendido. La inclusión de una función de fuerza resulta en la ecuación no homogénea de segundo orden

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + \delta \frac{dy}{dt} + ky = F(t). \quad (7)$$

Dejamos el estudio de estos sistemas de resortes para cursos más avanzados.

Circuitos eléctricos

La unidad básica de electricidad es la **carga** q (análoga a la idea de masa). En un campo eléctrico usamos el flujo de carga, o **corriente** $I = dq/dt$, como podríamos usar la velocidad en un campo gravitacional. Hay muchas similitudes entre el movimiento en un campo gravitacional y el flujo de electrones (transportadores de carga) en un campo eléctrico.

Considere el circuito eléctrico mostrado en la figura 17.7. Consta de cuatro componentes: fuente de voltaje, resistor, inductor y capacitor. Visualice el campo eléctrico como el flujo de un fluido, donde la fuente de voltaje es la bomba, y el resistor, inductor y capacitor tienden a bloquear el flujo. Un ejemplo de fuente es una batería o un generador, el cual produce un voltaje que causa que la corriente fluya a través del circuito cuando el interruptor está encendido. Un foco o un electrodoméstico darían la resistencia. La inducción se debe a un campo magnético que se opone a cualquier cambio en la corriente cuando fluye a través de una bobina. La capacitancia es creada por dos placas de metal que alternan las cargas y, de este modo, invierten el flujo de corriente. Los siguientes símbolos representan las cantidades relevantes en el circuito:

- q : carga en la sección transversal de un conductor medida en **coulombs** (se abrevia c);
- I : corriente o tasa de cambio de la carga dq/dt (flujo de electrones) en la sección transversal de un conductor medida en **amperes** (A);
- E : fuente de electricidad (potencial) medida en **volts** (V);
- V : diferencia de potencial entre dos puntos a lo largo del conductor medida en **volts** (V).

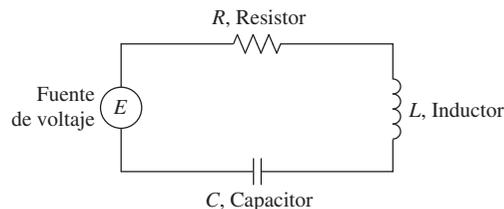


FIGURA 17.7 Un circuito eléctrico.

Ohm observó que cuando la corriente I fluye a través de un resistor, a causa de una diferencia de potencial a través de él, es (aproximadamente) proporcional a la diferencia de potencial (caída de voltaje). La constante de proporcionalidad se define como $1/R$ y se llama **resistencia** (R). De esta forma, la *ley de Ohm* es

$$I = \frac{1}{R} V.$$

De forma análoga, en física se sabe que las caídas de voltaje a través de un inductor y un capacitor son

$$L \frac{dI}{dt} \quad \text{y} \quad \frac{q}{C},$$

donde L es la **inductancia** y C es la **capacitancia** (con la carga q en el capacitor).

El físico alemán Gustav R. Kirchhoff (1824-1887) formuló la ley que establece que la suma de las caídas de voltaje en un circuito cerrado es igual al voltaje alimentado $E(t)$. De manera simbólica, esto se expresa como

$$RI + L \frac{dI}{dt} + \frac{q}{C} = E(t).$$

Puesto que $I = dq/dt$, la ley de Kirchhoff se convierte en

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = E(t). \quad (8)$$

La ecuación diferencial de segundo orden (8), la cual modela un circuito eléctrico, tiene exactamente la misma forma de la ecuación (7) que modela el movimiento vibratorio. Ambos modelos se resuelven usando los métodos desarrollados en la sección 17.2.

Resumen

La siguiente tabla resume las analogías de la física del movimiento de un objeto en un sistema de resorte contra el flujo de partículas cargadas en un circuito eléctrico.

Modelos lineales de coeficientes constantes de segundo orden

Sistema mecánico

$$my'' + \delta y' + ky = F(t)$$

y : desplazamiento

y' : velocidad

y'' : aceleración

m : masa

δ : constante de amortiguamiento

k : constante del resorte

$F(t)$: función de fuerza

Sistema eléctrico

$$Lq'' + Rq' + \frac{1}{C}q = E(t)$$

q : carga

q' : corriente

q'' : cambio en la corriente

L : inductancia

R : resistencia

$1/C$: donde C es la capacitancia

$E(t)$: fuente de voltaje

Ejercicios 17.3

- Un peso de 16 libras es atado a la parte inferior de un resorte suspendido del techo y tiene una constante de 1 libra/ft. La resistencia en el sistema resorte-masa es numéricamente igual a la velocidad instantánea. En el instante $t = 0$ el peso se pone en movimiento desde una posición 2 ft por debajo de su posición de equilibrio imprimiéndole una velocidad hacia abajo de 2 ft/seg. Escriba un problema de valor inicial que modele la situación explicada
- Un peso de 8 libras estira un resorte 4 ft. El sistema masa-resorte está en un medio que ofrece una resistencia al movimiento que es numéricamente igual a 1.5 veces la velocidad instantánea. Si el peso se libera en una posición de 2 ft por encima de su posición de equilibrio con una velocidad hacia abajo de 3 ft/seg, escriba un problema de valor inicial que modele esta situación

3. Un peso de 20 lb cuelga de un resorte de 18 in y lo estira 6 in. El peso es halado hacia abajo 5 in y se agregan 5 lb a su peso. Si el peso se libera ahora con una velocidad hacia abajo de v_0 in/seg, escriba un problema de valor inicial que modele el desplazamiento vertical.
4. Un peso de 10 lb es suspendido por un resorte que se estira 2 in debido al peso. Suponga que la magnitud de la resistencia es igual a $20/\sqrt{g}$ libras multiplicada por la velocidad instantánea v en ft por segundo. Si el peso es halado hacia abajo 3 in por debajo de su posición de equilibrio y luego se le libera, formule un problema de valor inicial que modele el comportamiento del sistema masa-resorte.
5. Un circuito eléctrico (abierto) consta de un inductor, un resistor y un capacitor. Existe una carga de 2 coulombs en el capacitor. En el instante en que el circuito se cierra, se presenta una corriente de 3 amperes y se aplica un voltaje $E(t) = 20 \cos t$. En este circuito, la caída del voltaje a través del resistor es 4 veces el cambio instantáneo de la carga, la caída del voltaje a través del capacitor es 10 veces la carga, y la caída de voltaje a través del inductor es dos veces el cambio instantáneo en la corriente. Escriba un problema de valor inicial que modele este circuito.
6. Un inductor de dos henrys se conecta en serie con un resistor de 12 ohms, un capacitor de $1/16$ farads y una batería de 300 volts. De inicio, la carga en el capacitor es cero y la corriente también es cero. Formule un problema de valor inicial que modele este circuito.

Las unidades mecánicas en los sistemas inglés y métrico son útiles en la solución de los siguientes problemas.

| Unidad | Sistema inglés | Sistema MKS |
|--------------------|-----------------------|------------------------|
| Distancia | Pie (ft) | Metros (m) |
| Masa | Slugs | Kilogramos (kg) |
| Tiempo | Segundos (seg) | Segundos (seg) |
| Fuerza | Libras (lb) | Newtons (N) |
| g (de la Tierra) | 32 ft/seg^2 | 9.81 m/seg^2 |

7. Un peso de 16 lb es atado a la parte inferior de un resorte suspendido del techo que tiene una constante de 1 ft/pie. La resistencia en el sistema resorte-masa es numéricamente igual a la velocidad instantánea. En el instante $t = 0$, el peso se pone en movimiento desde una posición 2 ft por debajo de su posición de equilibrio imprimiéndole una velocidad hacia abajo de 2 ft/seg. Al cabo de π seg, determine si la masa está arriba o abajo de la posición de equilibrio y a qué distancia.
8. Un peso de 8 libras estira un resorte 4 ft. El sistema masa-resorte está en un medio que ofrece una resistencia al movimiento igual a 1.5 veces la velocidad instantánea. Si el peso se libera en una posición de 2 ft por encima de su posición de equilibrio con una velocidad hacia abajo de 3 ft/seg, determine su posición en relación con la posición de equilibrio 2 segundos más tarde.
9. Un peso de 20 lb cuelga de un resorte de 18 in y lo estira 6 in. El peso es halado hacia abajo 5 in y se agregan 5 lb a su peso. Si el peso se libera ahora con una velocidad hacia abajo de v_0 in/s, determine la posición de la masa en relación con el equilibrio en términos de v_0 y válido para cualquier instante $t \geq 0$.

10. Una masa de 1 slug se ata a un resorte cuya constante es $25/4$ lb/ft. Inicialmente, la masa se libera 1 ft por encima de la posición de equilibrio con una velocidad hacia abajo de 3 ft/seg, y el movimiento posterior tiene lugar en un medio que ofrece una fuerza de amortiguación numéricamente igual a tres veces la velocidad instantánea. Una fuerza externa $f(t)$ está siendo aplicada al sistema, pero suponga que al principio, $f(t) = 0$. Formule y resuelva un problema de valor inicial que modele el sistema descrito. Interprete sus resultados.
11. Un peso de 10 libras es suspendido por un resorte que se estira 2 in debido al peso. Suponga la magnitud de la resistencia igual a $40/\sqrt{g}$ lb multiplicada por la velocidad instantánea en ft por segundo. Si el peso es halado hacia abajo tres in por debajo de su posición de equilibrio y luego se libera, determine el tiempo requerido para alcanzar la posición de equilibrio por primera vez.
12. Un peso estira un resorte 6 in. Se pone en movimiento en un punto que está 2 in por debajo de su posición de equilibrio con una velocidad hacia abajo de 2 in/seg.
 - a. ¿Cuándo regresa la pesa a su posición inicial?
 - b. ¿Cuándo alcanza la pesa el punto más alto?
 - c. Demuestre que la velocidad máxima es $2\sqrt{2g + 1}$ in/seg.
13. Un peso de 10 lb alarga un resorte 10 in. El peso es arrastrado 2 in debajo de su posición de equilibrio y adquiere una velocidad de 4 in/seg. Un resorte idéntico tiene atado un peso diferente. Este segundo peso es arrastrado debajo de su posición de equilibrio una distancia igual a la amplitud del primer movimiento a una velocidad inicial de 2 ft/seg. Si la amplitud del segundo movimiento es 2 veces la del primero, ¿cuál es el peso atado al segundo resorte?
14. Un peso alarga un resorte 3 in y un segundo peso alarga otro resorte 9 in. Si ambos pesos se halan de forma simultánea hacia abajo 1 in debajo de sus respectivas posiciones de equilibrio y luego se liberan, determine el primer tiempo después del instante $t = 0$ en que sus velocidades son iguales.
15. Un peso de 16 lb estira un resorte 4 ft. El peso es halado 5 ft por debajo de su posición de equilibrio y luego se libera. ¿Qué velocidad inicial v_0 tendría el efecto de duplicar la amplitud de la vibración?
16. Un peso de 8 lb estira un resorte 3 in. El sistema masa-resorte está en un medio con una constante de amortiguación de 2 lb-seg/ft. Si la masa se libera de su posición de equilibrio con una velocidad hacia abajo de 4 in/seg, determine el tiempo requerido para que la masa regrese a su posición de equilibrio por primera vez.
17. Un peso suspendido de un resorte realiza vibraciones amortiguadas con un periodo de 2 segundos. Si el factor de amortiguación disminuye 90% en 10 segundos, determine la aceleración del peso cuando está a 3 in debajo de su posición de equilibrio y se mueve hacia arriba con una velocidad de 2 ft/seg.
18. Un peso de 10 lb estira un resorte 2 ft. Si el peso es halado 6 in por debajo de su posición de equilibrio y luego se libera, determine el punto más alto que alcanza el peso. Suponga que el sistema resorte-masa está en un medio que ofrece una resistencia de $10/\sqrt{g}$ lb multiplicada por la velocidad instantánea en ft por segundo.

19. Un circuito *LRC* tiene una inductancia de $1/5$ henry, una resistencia de 1 ohm y una capacitancia de $5/6$ farads. Suponiendo que la carga inicial es de 2 coulombs y la corriente inicial de 4 amperes, determine la función solución que describe la carga del capacitor en cualquier instante. ¿Cuál es la carga en el capacitor después de un largo periodo?
20. Un circuito eléctrico (abierto) consta de un inductor, un resistor y un capacitor. Existe una carga inicial de 2 coulombs en el capacitor. En el instante en que el circuito se cierra, se presenta una corriente de 3 amperes sin que se aplique un voltaje externo. En este circuito el voltaje cae en tres puntos que numéricamente están relacionados como sigue: a través del capacitor, 10 veces la carga; a través del resistor, 4 veces el cambio instantáneo de la carga, y a través del inductor, 2 veces el cambio instantáneo de la corriente. Determine la carga en el capacitor como una función del tiempo.
21. Un peso de 16 lb estira un resorte 4 ft. El sistema masa-resorte está en un medio con una constante de amortiguación de 4.5 lb-seg/ft y se aplica una fuerza externa en lb dada por $f(t) = 4 + e^{-2t}$. ¿Cuál es la función solución que describe la posición de la masa en cualquier instante si la masa se libera a 2 ft por debajo de la posición de equilibrio con una velocidad inicial hacia abajo de 4 ft/seg?
22. Una masa de 10 kg es atada a un resorte que tiene una constante de 140 N/m. La masa inicia un movimiento a partir de la posición de equilibrio con una velocidad inicial hacia arriba de 1 m/s y con una fuerza externa aplicada dada por $f(t) = 5 \sin t$ (en newtons). La masa está en un medio viscoso con un coeficiente de resistencia igual a 90 N-seg/m. Formule un problema de valor inicial que modele el sistema dado; resuelva el modelo e interprete los resultados.
23. Una masa de 2 kg se ata al extremo inferior de un resorte suspendido del techo. La masa alcanza su posición de equilibrio alargando de ese modo el resorte 1.96 m. La masa está en un medio viscoso que ofrece una resistencia en newtons numéricamente igual a cuatro veces la velocidad instantánea medida en metros por segundo. La masa es entonces halada hacia abajo dos metros por debajo de su punto de equilibrio y se libera con una velocidad hacia abajo de 3 m/seg. En este mismo instante se aplica al sistema una fuerza externa, dada por $f(t) = 20 \cos t$ (en newtons). Determine si la masa al final de π seg está arriba o debajo de su punto de equilibrio y a qué distancia.
24. Un peso de 8 lb estira un resorte 4 ft. El sistema masa-resorte está en un medio que opone una resistencia al movimiento igual a 1.5 veces la velocidad instantánea y se aplica una fuerza externa (en lb) dada por $f(t) = 6 + e^{-t}$. Si el peso se libera en una posición de 2 ft arriba de su posición de equilibrio con una velocidad hacia abajo de 3 ft/seg, obtenga su posición en relación con el punto de equilibrio cuando han transcurrido 2 segundos.
25. Suponga que $L = 10$ henrys, $R = 10$ ohms, $C = 1/500$ farads, $E = 100$ volts, $q(0) = 10$ coulombs y $q'(0) = i(0) = 0$. Formule y resuelva un problema de valor inicial que modele el circuito *LRC* descrito. Interprete sus resultados.
26. Un circuito en serie que consta de un inductor, un resistor y un capacitor está abierto. En el capacitor existe una carga inicial de 2 coulombs y hay una corriente de 3 amperes en el circuito en el instante en que el circuito se cierra. Se aplica un voltaje dado por $E(t) = 20 \cos t$. En este circuito las caídas de voltaje son numéricamente iguales a: cuatro veces el cambio instantáneo de carga a través del resistor, 10 veces la carga a través del capacitor, y dos veces el cambio instantáneo de la corriente en el inductor. Determine la carga en el capacitor como una función del tiempo. Calcule la carga en el capacitor y la corriente en el instante $t = 10$.

17.4 Ecuaciones de Euler

En la sección 17.1 presentamos la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = 0$$

y mostramos cómo resolver esta ecuación cuando P , Q y R son constantes. Si los coeficientes no son constantes, por lo regular no podemos resolver esta ecuación diferencial en términos de las funciones elementales que hemos estudiado en cálculo. En esta sección aprenderá cómo resolver la ecuación cuando los coeficientes tienen la forma especial

$$P(x) = ax^2, \quad Q(x) = bx, \quad \text{y} \quad R(x) = c,$$

donde a , b y c son constantes. Esta clase de ecuaciones especiales se conocen como **ecuaciones de Euler**, en honor a Leonhard Euler, quien las estudió y, además, demostró cómo resolverlas. Tales ecuaciones se presentan en el estudio de las vibraciones mecánicas.

Solución general de las ecuaciones de Euler

Considere la ecuación de Euler

$$ax^2y'' + bxy' + cy = 0, \quad x > 0. \quad (1)$$

Para resolver la ecuación (1), primero hacemos el cambio de variables

$$z = \ln x \quad y \quad y(x) = Y(z).$$

A continuación, usamos la regla de la cadena para obtener las derivadas $y'(x)$ y $y''(x)$:

$$y'(x) = \frac{d}{dx} Y(z) = \frac{d}{dz} Y(z) \frac{dz}{dx} = Y'(z) \frac{1}{x}$$

y

$$y''(x) = \frac{d}{dx} y'(x) = \frac{d}{dx} Y'(z) \frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2} Y'(z) + \frac{1}{x} Y''(z) \frac{dz}{dx} = -\frac{1}{x^2} Y'(z) + \frac{1}{x^2} Y''(z).$$

Al sustituir estas dos derivadas en el lado izquierdo de la ecuación (1), tenemos

$$\begin{aligned} ax^2 y'' + bxy' + cy &= ax^2 \left(-\frac{1}{x^2} Y'(z) + \frac{1}{x^2} Y''(z) \right) + bx \left(\frac{1}{x} Y'(z) \right) + cY(z) \\ &= aY''(z) + (b - a)Y'(z) + cY(z). \end{aligned}$$

Por lo tanto, las sustituciones nos dan la ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes

$$aY''(z) + (b - a)Y'(z) + cY(z) = 0. \quad (2)$$

Resolvemos la ecuación (2) usando el método de la sección 17.1. Es decir, obtenemos las raíces de la ecuación característica asociada

$$ar^2 + (b - a)r + c = 0 \quad (3)$$

para encontrar la solución general de $Y(z)$. Después de obtener $Y(z)$, determinamos $y(x)$ a partir de la sustitución de $z = \ln x$.

EJEMPLO 1 Determine la solución general de la ecuación $x^2 y'' + 2xy' - 2y = 0$.

Solución Ésta es una ecuación de Euler con $a = 1$, $b = 2$ y $c = -2$. La ecuación característica (3) para $Y(z)$ es

$$r^2 + (2 - 1)r - 2 = (r - 1)(r + 2) = 0,$$

con raíces $r = -2$ y $r = 1$. La solución para $Y(z)$ está dada por

$$Y(z) = c_1 e^{-2z} + c_2 e^z.$$

Al sustituir $z = \ln x$ tenemos la solución general para $y(x)$:

$$y(x) = c_1 e^{-2 \ln x} + c_2 e^{\ln x} = c_1 x^{-2} + c_2 x. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 2 Resuelva la ecuación de Euler $x^2 y'' - 5xy' + 9y = 0$.

Solución Puesto que $a = 1$, $b = -5$ y $c = 9$, la ecuación característica (3) para $Y(z)$ es

$$r^2 + (-5 - 1)r + 9 = (r - 3)^2 = 0.$$

La ecuación característica tiene la doble raíz $r = 3$ dando

$$Y(z) = c_1 e^{3z} + c_2 z e^{3z}.$$

La sustitución de $z = \ln x$ en esta expresión nos da la solución general

$$y(x) = c_1 e^{3 \ln x} + c_2 \ln x e^{3 \ln x} = c_1 x^3 + c_2 x^3 \ln x. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 3 Determine la solución particular de $x^2y'' - 3xy' + 68y = 0$ que satisface las condiciones iniciales $y(1) = 0$ y $y'(1) = 1$.

Solución En este caso $a = 1$, $b = -3$ y $c = 68$ se sustituyen en la ecuación característica (3) y tenemos

$$r^2 - 4r + 68 = 0.$$

Las raíces son $r = 2 + 8i$ y $r = 2 - 8i$, lo que da la solución

$$Y(z) = e^{2z}(c_1 \cos 8z + c_2 \operatorname{sen} 8z).$$

Al sustituir $z = \ln x$ en esta expresión, tenemos

$$y(x) = e^{2 \ln x}(c_1 \cos(8 \ln x) + c_2 \operatorname{sen}(8 \ln x)).$$

Por la condición inicial $y(1) = 0$, vemos que $c_1 = 0$ y

$$y(x) = c_2 x^2 \operatorname{sen}(8 \ln x).$$

Para adecuar la segunda condición inicial, necesitamos derivar

$$y'(x) = c_2(8x \cos(8 \ln x) + 2x \operatorname{sen}(8 \ln x)).$$

Puesto que $y'(1) = 1$, obtenemos de inmediato $c_2 = 1/8$. Por lo tanto, la solución particular que satisface ambas condiciones iniciales es

$$y(x) = \frac{1}{8} x^2 \operatorname{sen}(8 \ln x).$$

Dado que $-1 \leq \operatorname{sen}(8 \ln x) \leq 1$, la solución satisface

$$-\frac{x^2}{8} \leq y(x) \leq \frac{x^2}{8}.$$

La gráfica de la solución se presenta en la figura 17.8. ■

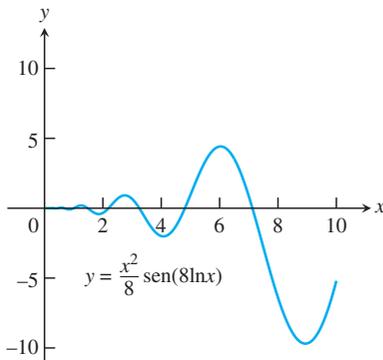


FIGURA 17.8 Gráfica de la solución del ejemplo 3.

Ejercicios 17.4

En los ejercicios 1 a 24, determine la solución general para la ecuación de Euler dada. Suponga que $x > 0$.

1. $x^2y'' + 2xy' - 2y = 0$
2. $x^2y'' + xy' - 4y = 0$
3. $x^2y'' - 6y = 0$
4. $x^2y'' + xy' - y = 0$
5. $x^2y'' - 5xy' + 8y = 0$
6. $2x^2y'' + 7xy' + 2y = 0$
7. $3x^2y'' + 4xy' = 0$
8. $x^2y'' + 6xy' + 4y = 0$
9. $x^2y'' - xy' + y = 0$
10. $x^2y'' - xy' + 2y = 0$
11. $x^2y'' - xy' + 5y = 0$
12. $x^2y'' + 7xy' + 13y = 0$
13. $x^2y'' + 3xy' + 10y = 0$
14. $x^2y'' - 5xy' + 10y = 0$
15. $4x^2y'' + 8xy' + 5y = 0$
16. $4x^2y'' - 4xy' + 5y = 0$
17. $x^2y'' + 3xy' + y = 0$
18. $x^2y'' - 3xy' + 9y = 0$
19. $x^2y'' + xy' = 0$
20. $4x^2y'' + y = 0$

21. $9x^2y'' + 15xy' + y = 0$
22. $16x^2y'' - 8xy' + 9y = 0$
23. $16x^2y'' + 56xy' + 25y = 0$
24. $4x^2y'' - 16xy' + 25y = 0$

En los ejercicios 25 a 30, resuelva el problema de valor inicial solicitado.

25. $x^2y'' + 3xy' - 3y = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = -1$
26. $6x^2y'' + 7xy' - 2y = 0$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 1$
27. $x^2y'' - xy' + y = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 1$
28. $x^2y'' + 7xy' + 9y = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$
29. $x^2y'' - xy' + 2y = 0$, $y(1) = -1$, $y'(1) = 1$
30. $x^2y'' + 3xy' + 5y = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$

17.5 Soluciones en series de potencias

En esta sección ampliaremos el estudio de las ecuaciones homogéneas lineales de segundo orden con coeficientes variables. En las ecuaciones de Euler de la sección 17.4 la potencia de la variable x de coeficiente variable tenía que coincidir con el orden de la derivada con la cual se asociaba: x_2 con y'' , x_1 con y' , y $x_0 (= 1)$ con y . Aquí ignoramos ese requerimiento, de manera que podamos resolver ecuaciones más generales.

Método de solución

El **método de las series de potencias** para resolver ecuaciones diferenciales homogéneas de segundo orden consiste en la obtención de los coeficientes de la serie de potencias

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots \tag{1}$$

lo cual resuelve la ecuación. En la aplicación del método sustituimos la serie y sus derivadas en la ecuación diferencial para determinar los coeficientes c_0, c_1, c_2, \dots . La técnica para la obtención de los coeficientes es parecida a la usada en el método de los coeficientes indeterminados presentada en la sección 17.2.

En el primer ejemplo comprobaremos el método con el establecimiento de una ecuación simple cuya solución general ya conocemos. Esto hace más accesibles las soluciones expresadas en forma de series.

EJEMPLO 1 Resuelva la ecuación $y'' + y = 0$ por el método de las series de potencias.

Solución Suponemos que la solución de la serie toma la forma de

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

y calculamos las derivadas

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} \quad \text{y} \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}.$$

La sustitución de estas formas en la ecuación de segundo orden nos da

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0.$$

En seguida, igualamos los coeficientes de cada potencia de x con cero, como se resume en la siguiente tabla.

| Potencia de x | Coeficiente de la ecuación | | |
|-----------------|----------------------------|---|-----------------------------------|
| x^0 | $2(1)c_2 + c_0 = 0$ | o | $c_2 = -\frac{1}{2} c_0$ |
| x^1 | $3(2)c_3 + c_1 = 0$ | o | $c_3 = -\frac{1}{3 \cdot 2} c_1$ |
| x^2 | $4(3)c_4 + c_2 = 0$ | o | $c_4 = -\frac{1}{4 \cdot 3} c_2$ |
| x^3 | $5(4)c_5 + c_3 = 0$ | o | $c_5 = -\frac{1}{5 \cdot 4} c_3$ |
| x^4 | $6(5)c_6 + c_4 = 0$ | o | $c_6 = -\frac{1}{6 \cdot 5} c_4$ |
| \vdots | \vdots | | \vdots |
| x^{n-2} | $n(n-1)c_n + c_{n-2} = 0$ | o | $c_n = -\frac{1}{n(n-1)} c_{n-2}$ |

En la tabla observamos que los coeficientes con índices pares ($n = 2k$, $k = 1, 2, 3, \dots$) se relacionan unos con otros y los coeficientes con índices impares ($n = 2k + 1$) también están relacionados. Intentamos con cada grupo en su momento.

Índices pares: Aquí $n = 2k$, de manera que la potencia es x^{2k-2} . A partir de la última línea de la tabla, tenemos

$$2k(2k - 1)c_{2k} + c_{2k-2} = 0$$

o bien,

$$c_{2k} = -\frac{1}{2k(2k - 1)} c_{2k-2}.$$

De esta relación recurrente, tenemos

$$\begin{aligned} c_{2k} &= \left[-\frac{1}{2k(2k - 1)} \right] \left[-\frac{1}{(2k - 2)(2k - 3)} \right] \cdots \left[-\frac{1}{4(3)} \right] \left[-\frac{1}{2} \right] c_0 \\ &= \frac{(-1)^k}{(2k)!} c_0. \end{aligned}$$

Índices impares: Aquí $n = 2k + 1$, de manera que la potencia es x^{2k-1} . Al sustituir esto en la última línea de la tabla se produce

$$(2k + 1)(2k)c_{2k+1} + c_{2k-1} = 0$$

o bien,

$$c_{2k+1} = -\frac{1}{(2k + 1)(2k)} c_{2k-1}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} c_{2k+1} &= \left[-\frac{1}{(2k + 1)(2k)} \right] \left[-\frac{1}{(2k - 1)(2k - 2)} \right] \cdots \left[-\frac{1}{5(4)} \right] \left[-\frac{1}{3(2)} \right] c_1 \\ &= \frac{(-1)^k}{(2k + 1)!} c_1. \end{aligned}$$

Al escribir la serie de potencias agrupando las potencias pares e impares y sustituir los coeficientes resulta

$$\begin{aligned} y &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k} x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1} x^{2k+1} \\ &= c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + c_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k + 1)!} x^{2k+1}. \end{aligned}$$

De la tabla 9.1 en la sección 9.10, vemos que la primera serie del lado derecho de la última ecuación representa la función coseno y la segunda serie representa el seno. Así, la solución general de $y'' + y = 0$ es

$$y = c_0 \cos x + c_1 \sin x. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 2 Encuentre la solución general de $y'' + xy' + y = 0$.

Solución Suponemos que la solución es la serie de la forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

y calculamos las derivadas

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} \quad \text{y} \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}.$$

La sustitución de estas series en la ecuación de segundo orden nos da

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0.$$

Iguamos los coeficientes de cada potencia de x con cero como se resume en la siguiente tabla.

| Potencia de x | Ecuación del coeficiente |
|-----------------|---|
| x^0 | $2(1)c_2 + c_0 = 0 \quad \text{o} \quad c_2 = -\frac{1}{2}c_0$ |
| x^1 | $3(2)c_3 + c_1 + c_1 = 0 \quad \text{o} \quad c_3 = -\frac{1}{3}c_1$ |
| x^2 | $4(3)c_4 + 2c_2 + c_2 = 0 \quad \text{o} \quad c_4 = -\frac{1}{4}c_2$ |
| x^3 | $5(4)c_5 + 3c_3 + c_3 = 0 \quad \text{o} \quad c_5 = -\frac{1}{5}c_3$ |
| x^4 | $6(5)c_6 + 4c_4 + c_4 = 0 \quad \text{o} \quad c_6 = -\frac{1}{6}c_4$ |
| \vdots | \vdots |
| x^n | $(n+2)(n+1)c_{n+2} + (n+1)c_n = 0 \quad \text{o} \quad c_{n+2} = -\frac{1}{n+2}c_n$ |

En la tabla se observa que los coeficientes con índice par están relacionados y los coeficientes con índice impar también lo están.

Índices pares: Aquí $n = 2k - 2$, de manera que la potencia es x^{2k-2} . A partir de la última línea de la tabla tenemos

$$c_{2k} = -\frac{1}{2k} c_{2k-2}.$$

De esta relación recurrente obtenemos

$$\begin{aligned} c_{2k} &= \left(-\frac{1}{2k}\right) \left(-\frac{1}{2k-2}\right) \cdots \left(-\frac{1}{6}\right) \left(-\frac{1}{4}\right) \left(-\frac{1}{2}\right) c_0 \\ &= \frac{(-1)^k}{(2)(4)(6) \cdots (2k)} c_0. \end{aligned}$$

Índices impares: Aquí $n = 2k - 1$, entonces la potencia es x^{2k-1} . De la última línea de la tabla tenemos

$$c_{2k+1} = -\frac{1}{2k+1} c_{2k-1}.$$

A partir de esta relación recurrente obtenemos

$$\begin{aligned} c_{2k+1} &= \left(-\frac{1}{2k+1}\right) \left(-\frac{1}{2k-1}\right) \cdots \left(-\frac{1}{5}\right) \left(-\frac{1}{3}\right) c_1 \\ &= \frac{(-1)^k}{(3)(5) \cdots (2k+1)} c_1. \end{aligned}$$

Al escribir la serie de potencias para agrupar sus potencias pares e impares y sustituir los coeficientes tenemos

$$\begin{aligned}
 y &= \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k}x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1}x^{2k+1} \\
 &= c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2)(4)\cdots(2k)} x^{2k} + c_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(3)(5)\cdots(2k+1)} x^{2k+1}.
 \end{aligned}$$

EJEMPLO 3 Obtenga la solución general de

$$(1 - x^2)y'' - 6xy' - 4y = 0, \quad |x| < 1.$$

Solución Observe que el coeficiente de la mayor derivada es cero cuando $x = \pm 1$. De esta manera, suponemos que el intervalo solución es $I: -1 < x < 1$. Al sustituir en la serie de la forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

y sus derivadas nos da

$$\begin{aligned}
 (1 - x^2) \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - 6 \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n - 4 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n &= 0, \\
 \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^n - 6 \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n - 4 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n &= 0.
 \end{aligned}$$

Luego, igualamos los coeficientes de cada potencia de x con cero, como se resume en la siguiente tabla.

| Potencia de x | Ecuación del coeficiente |
|-----------------|--|
| x^0 | $2(1)c_2 - 4c_0 = 0 \quad \circ \quad c_2 = \frac{4}{2}c_0$ |
| x^1 | $3(2)c_3 - 6(1)c_1 - 4c_1 = 0 \quad \circ \quad c_3 = \frac{5}{3}c_1$ |
| x^2 | $4(3)c_4 - 2(1)c_2 - 6(2)c_2 - 4c_2 = 0 \quad \circ \quad c_4 = \frac{6}{4}c_2$ |
| x^3 | $5(4)c_5 - 3(2)c_3 - 6(3)c_3 - 4c_3 = 0 \quad \circ \quad c_5 = \frac{7}{5}c_3$ |
| \vdots | \vdots |
| x^n | $(n+2)(n+1)c_{n+2} - [n(n-1) + 6n + 4]c_n = 0$ |
| | $(n+2)(n+1)c_{n+2} - (n+4)(n+1)c_n = 0 \quad \circ \quad c_{n+2} = \frac{n+4}{n+2}c_n$ |

Observe otra vez que los coeficientes con índices pares están interrelacionados, así como los coeficientes con índices impares.

Índices pares: Aquí $n = 2k - 2$, de manera que la potencia es x^{2k} . A partir de la columna de la derecha y de la última línea de la tabla tenemos

$$\begin{aligned}
 c_{2k} &= \frac{2k+2}{2k} c_{2k-2} \\
 &= \left(\frac{2k+2}{2k}\right) \left(\frac{2k}{2k-2}\right) \left(\frac{2k-2}{2k-4}\right) \cdots \frac{6}{4} \left(\frac{4}{2}\right) c_0 \\
 &= (k+1)c_0.
 \end{aligned}$$

Índices impares: Aquí $n = 2k - 1$. De esta manera, la potencia es x^{2k+1} . A partir de la columna de la derecha y la última línea de la tabla tenemos

$$\begin{aligned} c_{2k+1} &= \frac{2k+3}{2k+1} c_{2k-1} \\ &= \left(\frac{2k+3}{2k+1}\right) \left(\frac{2k+1}{2k-1}\right) \left(\frac{2k-1}{2k-3}\right) \cdots \frac{7}{5} \left(\frac{5}{3}\right) c_1 \\ &= \frac{2k+3}{3} c_1. \end{aligned}$$

La solución general es

$$\begin{aligned} y &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k} x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1} x^{2k+1} \\ &= c_0 \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) x^{2k} + c_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+3}{3} x^{2k+1}. \end{aligned}$$

EJEMPLO 4 Encuentre la solución general de $y'' - 2xy' + y = 0$.

Solución Suponiendo que

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

Al sustituir en la ecuación diferencial tenemos

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0.$$

Enseguida determinamos los coeficientes, listándolos en la siguiente tabla.

| Potencia de x | Ecuación del coeficiente |
|-----------------|--|
| x^0 | $2(1)c_2 + c_0 = 0$ o $c_2 = -\frac{1}{2}c_0$ |
| x^1 | $3(2)c_3 - 2c_1 + c_1 = 0$ o $c_3 = \frac{1}{3 \cdot 2}c_1$ |
| x^2 | $4(3)c_4 - 4c_2 + c_2 = 0$ o $c_4 = \frac{3}{4 \cdot 3}c_2$ |
| x^3 | $5(4)c_5 - 6c_3 + c_3 = 0$ o $c_5 = \frac{5}{5 \cdot 4}c_3$ |
| x^4 | $6(5)c_6 - 8c_4 + c_4 = 0$ o $c_6 = \frac{7}{6 \cdot 5}c_4$ |
| \vdots | \vdots |
| x^n | $(n+2)(n+1)c_{n+2} - (2n-1)c_n = 0$ o $c_{n+2} = \frac{2n-1}{(n+2)(n+1)}c_n$ |

De la relación recurrente

$$c_{n+2} = \frac{2n-1}{(n+2)(n+1)} c_n,$$

escribimos los primeros términos de cada serie para la solución general:

$$y = c_0 \left(1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4!}x^4 - \frac{21}{6!}x^6 - \dots \right) \\ + c_1 \left(x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{5}{5!}x^5 + \frac{45}{7!}x^7 + \dots \right).$$

■

Ejercicios 17.5

En los ejercicios 1 a 18, use las series de potencia para obtener la solución general de la ecuación diferencial.

1. $y'' + 2y' = 0$
2. $y'' + 2y' + y = 0$
3. $y'' + 4y = 0$
4. $y'' - 3y' + 2y = 0$
5. $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$
6. $y'' - xy' + y = 0$
7. $(1+x)y'' - y = 0$
8. $(1-x^2)y'' - 4xy' + 6y = 0$
9. $(x^2-1)y'' + 2xy' - 2y = 0$
10. $y'' + y' - x^2y = 0$
11. $(x^2-1)y'' - 6y = 0$
12. $xy'' - (x+2)y' + 2y = 0$
13. $(x^2-1)y'' + 4xy' + 2y = 0$
14. $y'' - 2xy' + 4y = 0$
15. $y'' - 2xy' + 3y = 0$
16. $(1-x^2)y'' - xy' + 4y = 0$
17. $y'' - xy' + 3y = 0$
18. $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$



APÉNDICES

A.1

Los números reales y las rectas reales

Esta sección revisa los números reales, las desigualdades, los intervalos y los valores absolutos.

Números reales

La mayor parte del cálculo se basa en las propiedades del sistema de los números reales. Los **números reales** son números que pueden expresarse como decimales, tales como

$$-\frac{3}{4} = -0.75000\dots$$

$$\frac{1}{3} = 0.33333\dots$$

$$\sqrt{2} = 1.4142\dots$$

Los puntos suspensivos ... en cada caso indican que la sucesión de dígitos decimales continúa indefinidamente. Toda expansión decimal concebible representa un número real, aunque algunos números tienen dos representaciones. Por ejemplo, los decimales infinitos .999... y 1.000... representan el mismo número real 1. Un enunciado similar se cumple para cualquier número con una sucesión infinita de nueves.

Los números reales pueden representarse de manera geométrica como puntos en una recta numérica denominada **recta real**.

Reglas para desigualdades

Si a, b y c son números reales, entonces:

1. $a < b \Rightarrow a + c < b + c$

2. $a < b \Rightarrow a - c < b - c$

3. $a < b$ y $c > 0 \Rightarrow ac < bc$

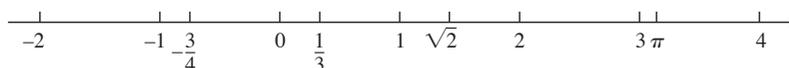
4. $a < b$ y $c < 0 \Rightarrow bc < ac$

Caso especial: $a < b \Rightarrow -b < -a$

5. $a > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > 0$

6. Si a y b son ambos positivos o ambos negativos, entonces

$$a < b \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$$



El símbolo \mathbb{R} denota el sistema de los números reales o, de manera equivalente, la recta real.

Las propiedades del sistema de los números reales caen en tres categorías: propiedades algebraicas, propiedades de orden y completéz. Las **propiedades algebraicas** indican que los números reales pueden sumarse, restarse, multiplicarse y dividirse (excepto entre 0) para producir más números reales bajo las reglas usuales de la aritmética. *Nunca se puede dividir entre 0.*

Las **propiedades de orden** de los números reales se presentan en el apéndice 6. Las reglas útiles de la izquierda pueden deducirse a partir de ellas; el símbolo \Rightarrow significa “implica”.

Observe las reglas para la multiplicación de una desigualdad por un número. Al multiplicar por un número positivo se conserva la desigualdad; al multiplicar por un número negativo la desigualdad se invierte. Además, para números con el mismo signo, los recíprocos invierten el sentido de la desigualdad. Por ejemplo, $2 < 5$, pero $-2 > -5$ y $1/2 > 1/5$.

La **propiedad de completéz** del sistema de los números reales es más profunda y difícil de definir de manera precisa. Sin embargo, la propiedad es esencial para la idea de límite (capítulo 2). De manera informal, eso dice que existen suficientes números reales para “completar” la recta real, en el sentido de que no existen “agujeros” o “huecos” en ella. Muchos teoremas del cálculo no se cumplirían si el sistema de los números reales no fuera completo. El tema se resuelve mejor en un curso más avanzado, pero el apéndice 6 sugiere lo que está incluido y cómo se construyen los números reales.

Distinguiamos tres subconjuntos especiales de números reales.

1. Los **números naturales**, a saber, 1, 2, 3, 4, ...
2. Los **enteros**, a saber, 0, ±1, ±2, ±3, ...
3. Los **números racionales**, aquellos números que pueden expresarse en la forma de una fracción m/n , donde m y n son enteros y $n \neq 0$. Algunos ejemplos son

$$\frac{1}{3}, \quad -\frac{4}{9} = \frac{-4}{9} = \frac{4}{-9}, \quad \frac{200}{13} \quad \text{y} \quad 57 = \frac{57}{1}.$$

Los números racionales son precisamente los números reales con desarrollo decimal que

- (a) terminan (es decir, finalizan con una cadena infinita de ceros); por ejemplo,

$$\frac{3}{4} = 0.75000\dots = 0.75 \quad \text{o bien}$$

- (b) se repiten (terminan con un bloque de dígitos que se repiten una y otra vez); por ejemplo,

$$\frac{23}{11} = 2.090909\dots = 2.\overline{09} \quad \text{La barra indica el bloque de dígitos que se repiten.}$$

Un desarrollo decimal que termina es un tipo especial de un decimal que se repite, ya que termina con ceros que se repiten.

El conjunto de los números racionales tienen todas las propiedades algebraicas y de orden, pero carecen de la propiedad de completitud. Por ejemplo, no existe número racional cuyo cuadrado sea 2; existe un “agujero” en la recta racional donde debería estar $\sqrt{2}$.

Los números reales que no son racionales se denominan **números irracionales**. Se caracterizan por desarrollos decimales que no terminan y no se repiten. Algunos ejemplos son π , $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$ y $\log_{10} 3$. Como cada desarrollo decimal representa un número real, es evidente que existe una cantidad infinita de números irracionales. Tanto los números racionales como los irracionales se encuentran arbitrariamente cerca de algún punto en la recta real.

La notación de conjuntos es muy útil para especificar un subconjunto particular de números reales. Un conjunto es una colección de objetos, y éstos son los **elementos** del conjunto. Si S es un conjunto, la notación $a \in S$ significa que a es un elemento de S , mientras que $a \notin S$ significa que a no es un elemento de S . Si S y T son conjuntos, entonces $S \cup T$ es su **unión**, la cual consiste en todos los elementos que pertenecen a S o a T (o a los dos, S y T). La **intersección** $S \cap T$ consiste en todos los elementos que pertenecen tanto a S como a T . El **conjunto vacío** \emptyset es el conjunto que no contiene elementos. Por ejemplo, la intersección de los números racionales y los números irracionales es el conjunto vacío.

Algunos conjuntos pueden describirse *listando* a s elementos entre llaves “{}”. Por ejemplo, el conjunto A , que consiste de los números naturales (o enteros positivos) menores que 6, puede expresarse como

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

El conjunto de todos los enteros se escribe como

$$\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}.$$

Otra forma de describir un conjunto es escribir entre llaves una regla que genere a todos los elementos del conjunto. Por ejemplo, el conjunto

$$A = \{x \mid x \text{ es un entero y } 0 < x < 6\}$$

es el conjunto de enteros positivos menores que 6.

Intervalos

Un subconjunto de la recta real se denomina un **intervalo** si contiene al menos dos números y a todos los números reales que están entre cualesquiera dos de estos elementos. Por ejemplo, el conjunto de todos los números reales x tales que $x > 6$ es un intervalo, al igual que el conjunto de todas las x , tales que $-2 \leq x \leq 5$. El conjunto de todos los números reales diferentes de cero no es un intervalo; ya que 0 no está allí, el conjunto no contiene a todo número real entre -1 y 1 (por ejemplo).

De manera geométrica, los intervalos corresponden a rayos y segmentos de recta de la recta real, junto con la recta real misma. Los intervalos de números corresponden a segmentos de recta que son **intervalos finitos**; los intervalos que corresponden a rayos y la recta real son **intervalos infinitos**.

Se dice que un intervalo finito es **cerrado** si contiene a los dos puntos extremos, **semiaabierto** si contiene un punto extremo, pero no el otro, y **abierto** si no contiene a los puntos extremos. Los puntos extremos también se denominan **puntos frontera**; éstos constituyen la **frontera** del intervalo. Los puntos restantes del intervalo son **puntos interiores** y juntos constituyen el **interior** del intervalo. Los intervalos infinitos son cerrados si contienen un extremo finito; de otra forma, se denominan abiertos. La recta real \mathbb{R} es un intervalo infinito que es tanto abierto como cerrado. La tabla A.1 resume los diferentes tipos de intervalos.

TABLA A.1 Tipos de intervalos

| Notación | Descripción del conjunto | Tipo | Dibujo |
|---------------------|--|-----------------------------|--------|
| (a, b) | $\{x a < x < b\}$ | Abierto | |
| $[a, b]$ | $\{x a \leq x \leq b\}$ | Cerrado | |
| $[a, b)$ | $\{x a \leq x < b\}$ | Semiaabierto | |
| $(a, b]$ | $\{x a < x \leq b\}$ | Semiaabierto | |
| (a, ∞) | $\{x x > a\}$ | Abierto | |
| $[a, \infty)$ | $\{x x \geq a\}$ | Cerrado | |
| $(-\infty, b)$ | $\{x x < b\}$ | Abierto | |
| $(-\infty, b]$ | $\{x x \leq b\}$ | Cerrado | |
| $(-\infty, \infty)$ | \mathbb{R} (el conjunto de todos los números reales) | Abierto y cerrado a la vez. | |

Resolución de desigualdades

El proceso de determinar el intervalo o los intervalos de números que satisfacen una desigualdad en x se denomina **resolución** de la desigualdad.

EJEMPLO 1 Resuelva las siguientes desigualdades y muestre sus conjuntos solución en la recta real.

(a) $2x - 1 < x + 3$ (b) $-\frac{x}{3} < 2x + 1$ (c) $\frac{6}{x - 1} \geq 5$

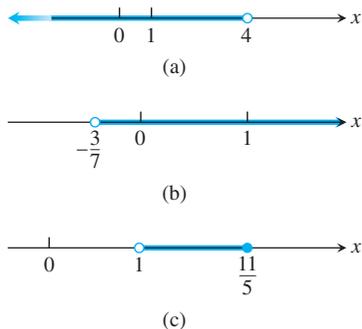


FIGURA A.1 Conjuntos solución para las desigualdades del ejemplo 1.

Solución

(a) $2x - 1 < x + 3$
 $2x < x + 4$ Sumar 1 a ambos lados
 $x < 4$ Restar x de ambos lados.

El conjunto solución es el intervalo abierto $(-\infty, 4)$ (figura A.1a).

(b) $-\frac{x}{3} < 2x + 1$
 $-x < 6x + 3$ Multiplicar ambos lados por 3.
 $0 < 7x + 3$ Sumar x a ambos lados.
 $-3 < 7x$ Restar 3 de ambos lados.
 $-\frac{3}{7} < x$ Dividir entre 7.

El conjunto solución es el intervalo abierto $(-3/7, \infty)$ (figura A.1b).

(c) La desigualdad $6/(x - 1) \geq 5$ se cumple sólo si $x > 1$, ya que de otra forma $6/(x - 1)$ sería negativo o estaría indefinido. Por lo tanto, $(x - 1)$ es positivo y la desigualdad se preservará si multiplicamos ambos lados por $(x - 1)$; de esta forma, tenemos

$$\frac{6}{x - 1} \geq 5$$

$$6 \geq 5x - 5 \quad \text{Multiplicar ambos lados por } (x - 1).$$

$$11 \geq 5x \quad \text{Sumar 5 a ambos lados.}$$

$$\frac{11}{5} \geq x. \quad \text{O bien } x \leq \frac{11}{5}.$$

El conjunto solución es el intervalo semiabierto $(1, 11/5]$ (figura A.1c). ■

Valor absoluto

El **valor absoluto** de un número x , denotado por $|x|$, se define mediante la fórmula

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

EJEMPLO 2 $|3| = 3, |0| = 0, |-5| = -(-5) = 5, |-|a|| = |a|$ ■

De forma geométrica, el valor absoluto de x es la distancia de x a 0 en la recta de los números reales. Puesto que las distancias siempre son positivas o cero, vemos que $|x| \geq 0$ para todo número real x , y $|x| = 0$ si y sólo si $x = 0$. Además,

$$|x - y| = \text{distancia entre } x \text{ y } y$$

en la recta real (figura A.2).

Como el símbolo \sqrt{a} siempre denota a la raíz cuadrada *no negativa* de a , una definición alternativa de $|x|$ es

$$|x| = \sqrt{x^2}.$$

Es importante recordar que $\sqrt{a^2} = |a|$. No escriba $\sqrt{a^2} = a$ a menos que sepa que $a \geq 0$.

El valor absoluto tiene las siguientes propiedades. (En los ejercicios se le pedirá que demuestre tales propiedades).

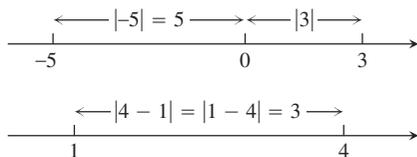


FIGURA A.2 Los valores absolutos dan las distancias entre puntos en la recta numérica.

Propiedades del valor absoluto

1. $|-a| = |a|$ Un número y su inverso aditivo o negativo tienen el mismo valor absoluto.
2. $|ab| = |a||b|$ El valor absoluto de un producto es el producto de los valores absolutos.
3. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ El valor absoluto de un cociente es el cociente de los valores absolutos.
4. $|a + b| \leq |a| + |b|$ La **desigualdad del triángulo**. El valor absoluto de la suma de dos números es menor o igual a la suma de sus valores absolutos.

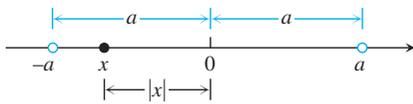


FIGURA A.3 $|x| < a$ significa que x está entre $-a$ y a .

Valores absolutos e intervalos

Si a es cualquier número positivo, entonces

5. $|x| = a \iff x = \pm a$
6. $|x| < a \iff -a < x < a$
7. $|x| > a \iff x > a \text{ o } x < -a$
8. $|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$
9. $|x| \geq a \iff x \geq a \text{ o } x \leq -a$

Observe que $|-a| \neq -|a|$. Por ejemplo, $|-3| = 3$, mientras que $-|3| = -3$. Si a y b difieren en el signo, entonces $|a + b|$ es menor que $|a| + |b|$. En los demás casos, $|a + b|$ es igual a $|a| + |b|$. Las barras de valor absoluto en expresiones como $|-3 + 5|$ funcionan como paréntesis. Hacemos la aritmética dentro *antes* de tomar el valor absoluto.

EJEMPLO 3

$$\begin{aligned} |-3 + 5| &= |2| = 2 < |-3| + |5| = 8 \\ |3 + 5| &= |8| = 8 = |3| + |5| \\ |-3 - 5| &= |-8| = 8 = |-3| + |-5| \end{aligned}$$

La desigualdad $|x| < a$ dice que la distancia de x a 0 es menor que el número positivo a . Esto significa que x debe estar entre $-a$ y a , como se observa en la figura A.3.

Todas las proposiciones en la tabla son consecuencia de la definición del valor absoluto y con frecuencia son útiles cuando se resuelven ecuaciones o desigualdades que incluyen valores absolutos.

Los matemáticos comúnmente utilizan el símbolo \iff para denotar la relación lógica “si y sólo si”. También significa “implica y es implicado por”.

EJEMPLO 4 Resuelva la ecuación $|2x - 3| = 7$.

Solución Por la propiedad 5, $2x - 3 = \pm 7$, por lo que hay dos posibilidades:

$$\begin{array}{lll} 2x - 3 = 7 & 2x - 3 = -7 & \text{Ecuaciones equivalentes sin valor absoluto} \\ 2x = 10 & 2x = -4 & \text{Resolver de la forma usual.} \\ x = 5 & x = -2 & \end{array}$$

Las soluciones de $|2x - 3| = 7$ son $x = 5$ y $x = -2$.

EJEMPLO 5 Resuelva la desigualdad $\left|5 - \frac{2}{x}\right| < 1$.

Solución Tenemos

$$\begin{aligned} \left|5 - \frac{2}{x}\right| < 1 &\iff -1 < 5 - \frac{2}{x} < 1 && \text{Propiedad 6.} \\ &\iff -6 < -\frac{2}{x} < -4 && \text{Restar 5.} \\ &\iff 3 > \frac{1}{x} > 2 && \text{Multiplicar por } -\frac{1}{2}. \\ &\iff \frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}. && \text{Tomar recíprocos.} \end{aligned}$$

Observe cómo se utilizaron aquí las diferentes reglas para las desigualdades. Al multiplicar por un número negativo, se invierte el sentido de la desigualdad. Así también ocurre al tomar recíprocos de una desigualdad en la que ambos lados son positivos. La desigualdad original se cumple si y sólo si $(1/3) < x < (1/2)$. El conjunto solución es el intervalo abierto $(1/3, 1/2)$. ■

Ejercicios A.1

- Expresar $1/9$ como un decimal que se repite; para ello, utilice una barra para indicar los dígitos que se repiten. ¿Cuáles son las representaciones decimales de $2/9, 3/9, 8/9, 9/9$?
- Si $2 < x < 6$, ¿cuál o cuáles de las siguientes proposiciones son necesariamente verdaderas? ¿Cuáles no necesariamente son verdaderas?
 - $0 < x < 4$
 - $0 < x - 2 < 4$
 - $1 < \frac{x}{2} < 3$
 - $\frac{1}{6} < \frac{1}{x} < \frac{1}{2}$
 - $1 < \frac{6}{x} < 3$
 - $|x - 4| < 2$
 - $-6 < -x < 2$
 - $-6 < -x < -2$

En los ejercicios 3 a 6, resuelva las desigualdades y muestre los conjuntos solución en la recta real.

- $-2x > 4$
- $5x - 3 \leq 7 - 3x$
- $2x - \frac{1}{2} \geq 7x + \frac{7}{6}$
- $\frac{4}{5}(x - 2) < \frac{1}{3}(x - 6)$

Resuelva las ecuaciones en los ejercicios 7 a 9.

- $|y| = 3$
- $|2t + 5| = 4$
- $|8 - 3s| = \frac{9}{2}$

En los ejercicios 10 a 17, resuelva las desigualdades expresando los conjuntos solución como intervalos o uniones de intervalos. Además, muestre cada conjunto en la recta real.

- $|x| < 2$
- $|t - 1| \leq 3$
- $|3y - 7| < 4$
- $\left| \frac{z}{5} - 1 \right| \leq 1$
- $\left| 3 - \frac{1}{x} \right| < \frac{1}{2}$
- $|2s| \geq 4$
- $|1 - x| > 1$
- $\left| \frac{r + 1}{2} \right| \geq 1$

En los ejercicios 18 a 21, resuelva las desigualdades. Expresar los conjuntos solución como intervalos o uniones de intervalos y muéstrelas en la recta real. Utilice el resultado $\sqrt{a^2} = |a|$ cuando sea apropiado.

- $x^2 < 2$
- $4 < x^2 < 9$
- $(x - 1)^2 < 4$
- $x^2 - x < 0$
- No caiga en el error de pensar que $|-a| = a$. ¿Para qué números reales a es verdadera esta ecuación? ¿Para cuáles números reales es falsa?
- Resuelva la ecuación $|x - 1| = 1 - x$.
- Una demostración de la desigualdad del triángulo** Dé la razón que justifique cada uno de los pasos numerados en la siguiente demostración de la desigualdad del triángulo.

$$|a + b|^2 = (a + b)^2 \quad (1)$$

$$= a^2 + 2ab + b^2$$

$$\leq a^2 + 2|a||b| + b^2 \quad (2)$$

$$= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 \quad (3)$$

$$= (|a| + |b|)^2$$

$$|a + b| \leq |a| + |b| \quad (4)$$

- Demuestre que $|ab| = |a||b|$ para cualquier número a y b .
- Si $|x| \leq 3$ y $x > -1/2$, ¿qué puede decir acerca de x ?
- Grafique la desigualdad $|x| + |y| \leq 1$.
- Demuestre que para cualquier número a , se cumple $|-a| = |a|$.
- Sea a cualquier número positivo. Demuestre que $|x| > a$ si y sólo si $x > a$ o $x < -a$.
- a.** Si b es un número real distinto de cero, demuestre que $|1/b| = 1/|b|$.
- b.** Demuestre que $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$ para cualesquiera números reales a y $b \neq 0$.

A.2

Inducción matemática

Es posible demostrar que muchas fórmulas como

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n + 1)}{2},$$

se cumplen para todo entero positivo n aplicando un axioma denominado *principio de inducción matemática*. Una demostración que utilice tal axioma se denomina *demostración mediante inducción matemática* o *demostración por inducción*.

Los pasos para demostrar una fórmula por inducción son los siguientes:

- Verifique que la fórmula se cumple para $n = 1$.
- Demuestre que si la fórmula se cumple para cualquier entero positivo $n = k$, entonces también se cumple para el entero que sigue, $n = k + 1$.

El axioma de inducción dice que una vez que los pasos se han completado, la fórmula se cumple para todos los enteros positivos n . Por el paso 1 se cumple para $n = 1$. Por el paso 2 se cumple para $n = 2$; por lo tanto, por el paso 2 también para $n = 3$ y nuevamente, por el paso 2, para $n = 4$ y así sucesivamente. Si la primera ficha de dominó cae y la k -ésima ficha golpea a la $(k + 1)$ -ésima para que caiga, entonces todas las fichas de dominó caerán.

Desde otro punto de vista, suponga que tiene una sucesión de proposiciones $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$, una para cada entero positivo. Piense en que es posible demostrar que al suponer que es verdadera cualquiera de las proposiciones se implica que la siguiente proposición en la línea es verdadera. Suponga que también podemos demostrar que S_1 es verdadera. Entonces concluiríamos que las proposiciones son verdaderas a partir de S_1 .

EJEMPLO 1 Utilice inducción matemática para probar que para todo entero positivo n ,

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n + 1)}{2}.$$

Solución Realizamos la demostración llevando a cabo los dos pasos anteriores.

1. La fórmula se cumple para $n = 1$, ya que

$$1 = \frac{1(1 + 1)}{2}.$$

2. Si la fórmula se cumple para $n = k$, ¿también se cumple para $n = k + 1$? La respuesta es sí, como demostramos ahora. Si

$$1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k + 1)}{2},$$

entonces

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + k + (k + 1) &= \frac{k(k + 1)}{2} + (k + 1) = \frac{k^2 + k + 2k + 2}{2} \\ &= \frac{(k + 1)(k + 2)}{2} = \frac{(k + 1)((k + 1) + 1)}{2}. \end{aligned}$$

La última expresión en esta cadena de igualdades es la expresión $n(n + 1)/2$ para $n = (k + 1)$.

Ahora, el principio de inducción matemática garantiza la fórmula original para todos los enteros positivos n . ■

En el ejemplo 4 de la sección 5.2 dimos otra demostración para la fórmula que da la suma de los primeros n enteros. Sin embargo, la prueba mediante inducción matemática es más general. Puede utilizarse para determinar las sumas de los cuadrados y los cubos de los primeros n enteros (ejercicios 9 y 10). A continuación se presenta otro ejemplo.

EJEMPLO 2 Demuestre mediante inducción matemática que para todos los enteros positivos n ,

$$\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

Solución Hacemos la demostración llevando a cabo los dos pasos de la inducción matemática.

1. La fórmula se cumple para $n = 1$, ya que

$$\frac{1}{2^1} = 1 - \frac{1}{2^1}.$$

2. Si

$$\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^k},$$

entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} &= 1 - \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} = 1 - \frac{1 \cdot 2}{2^k \cdot 2} + \frac{1}{2^{k+1}} \\ &= 1 - \frac{2}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} = 1 - \frac{1}{2^{k+1}}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la fórmula original se cumple para $n = (k + 1)$ siempre que se satisfaga para $n = k$.

Ahora, con estos pasos verificados, el principio de inducción matemática garantiza la fórmula para todo entero positivo n . ■

Otros enteros iniciales

En vez de iniciar en $n = 1$, algunos argumentos de inducción empiezan en otro entero. Los pasos para ello son los siguientes.

1. Verifique que la fórmula se cumpla para $n = n_1$ (el primer entero apropiado).
2. Demuestre que si la fórmula se cumple para cualquier entero $n = k \geq n_1$, también se cumple para $n = (k + 1)$.

Una vez que se completan dichos pasos, el principio de inducción matemática garantiza la fórmula para toda $n \geq n_1$.

EJEMPLO 3 Demuestre que $n! > 3n$ si n es suficientemente grande.

Solución ¿Qué tan grande es suficientemente grande? Experimentamos:

| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|-------|---|---|----|----|-----|-----|------|
| $n!$ | 1 | 2 | 6 | 24 | 120 | 720 | 5040 |
| 3^n | 3 | 9 | 27 | 81 | 243 | 729 | 2187 |

Parece como si $n! > 3n$ para $n \geq 7$. Para asegurarnos, aplicamos inducción matemática. Tomamos $n_1 = 7$ en el paso 1 y completamos el paso 2.

Suponga que $k! > 3k$ para algún $k \geq 7$. Entonces

$$(k + 1)! = (k + 1)(k!) > (k + 1)3^k > 7 \cdot 3^k > 3^{k+1}.$$

Entonces, para $k \geq 7$,

$$k! > 3^k \text{ implica } (k + 1)! > 3^{k+1}.$$

El principio de inducción matemática ahora garantiza que $n! \geq 3^n$ para toda $n \geq 7$. ■

Demostración de la regla de la derivada de una suma para sumas de un número finito de funciones

Demostramos la proposición

$$\frac{d}{dx}(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = \frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dx} + \cdots + \frac{du_n}{dx}$$

mediante inducción matemática. La proposición es verdadera para $n = 2$, como demostramos en la sección 3.3. Éste es el paso 1 de la demostración por inducción.

El paso 2 consiste en demostrar que si la proposición es verdadera para cualquier entero positivo $n = k$, donde $k \geq n_0 = 2$, entonces también es verdadera para $n = k + 1$. Así que suponga que

$$\frac{d}{dx}(u_1 + u_2 + \dots + u_k) = \frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dx} + \dots + \frac{du_k}{dx}. \quad (1)$$

Entonces

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx}(u_1 + u_2 + \dots + u_k + u_{k+1}) \\ & \quad \text{Llame } u \text{ a la función} \quad \text{Llame } v \text{ a} \\ & \quad \text{definida por esta suma.} \quad \text{esta función.} \\ & = \frac{d}{dx}(u_1 + u_2 + \dots + u_k) + \frac{du_{k+1}}{dx} \quad \text{Regla de la suma para } \frac{d}{dx}(u + v) \\ & = \frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dx} + \dots + \frac{du_k}{dx} + \frac{du_{k+1}}{dx}. \quad \text{Ecuación (1)} \end{aligned}$$

Con estos pasos verificados, ahora el principio de inducción matemática garantiza la regla de la suma para todo entero $n \geq 2$.

Ejercicios A.2

1. Suponiendo que la desigualdad del triángulo $|a + b| \leq |a| + |b|$ cumple para cualesquiera dos números a y b , demuestre que

$$|x_1 + x_2 + \dots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$$

para cualesquiera n números.

2. Demuestre que si $r \neq 1$, entonces

$$1 + r + r^2 + \dots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

para todo entero positivo n .

3. Utilice la regla del producto, $\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$, y el hecho de que $\frac{d}{dx}(x) = 1$, para demostrar que $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ para todo entero positivo n .

4. Suponga que una función $f(x)$ tiene la propiedad que $f(x_1 x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ para cualesquiera dos números positivos x_1 y x_2 . Demuestre que

$$f(x_1 x_2 \dots x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)$$

para el producto de cualesquiera n números positivos x_1, x_2, \dots, x_n .

5. Demuestre que

$$\frac{2}{3^1} + \frac{2}{3^2} + \dots + \frac{2}{3^n} = 1 - \frac{1}{3^n}$$

para todos los enteros positivos n .

6. Demuestre que $n! > n^3$ si n es suficientemente grande.

7. Demuestre que $2^n > n^2$ si n es suficientemente grande.

8. Demuestre que $2^n \geq 1/8$ para $n \geq -3$.

9. **Suma de cuadrados** Demuestre que la suma de los cuadrados de los primeros n enteros positivos es

$$\frac{n(n + \frac{1}{2})(n + 1)}{3}.$$

10. **Suma de cubos** Demuestre que la suma de los cuadrados de los primeros n enteros positivos es $(n(n + 1)/2)^2$.

11. **Reglas para sumas finitas** Demuestre que las siguientes reglas para sumas finitas se cumplen para todos los enteros positivos. (Véase la sección 5.2).

a. $\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k$

b. $\sum_{k=1}^n (a_k - b_k) = \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^n b_k$

c. $\sum_{k=1}^n ca_k = c \cdot \sum_{k=1}^n a_k$ (cualquier número c)

d. $\sum_{k=1}^n a_k = n \cdot c$ (si a_k tiene el valor constante c)

12. Demuestre que $|x^n| = |x|^n$ para todo entero positivo n y todo número real x .

A.3

Rectas, circunferencias y parábolas

Esta sección revisa coordenadas, rectas, distancia, circunferencias y parábolas en el plano. También se analiza la noción de incremento.

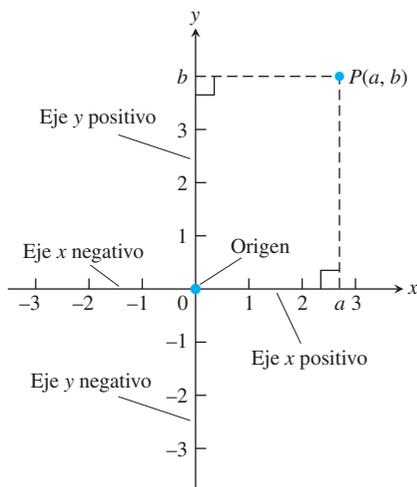


FIGURA A.4 Las coordenadas cartesianas en el plano tienen como base dos ejes perpendiculares que se cortan en el origen.

Coordenadas cartesianas en el plano

En el apéndice 1 identificamos puntos en la recta con números reales, a los que asignamos coordenadas. Los puntos en el plano pueden identificarse con parejas ordenadas de números reales. Para iniciar, dibujamos dos rectas coordenadas perpendiculares que se intersecan en el punto 0 de cada una de ellas. Tales rectas se denominan **ejes coordenados** en el plano. En el eje x horizontal, los números se denotan con x y aumentan hacia la derecha. En el eje y vertical, los números se denotan con y y aumentan hacia arriba (figura A.4). Por lo tanto, “hacia arriba” y “hacia la derecha” son direcciones positivas, mientras que “hacia abajo” y “hacia la izquierda” se consideran direcciones negativas. El **origen** O , también marcado con 0, del sistema de coordenadas es el punto en el plano donde x y y son ambos cero.

Si P es cualquier punto en el plano, puede localizarse en forma exacta por un par ordenado de números reales de la siguiente manera. Dibuje rectas que pasen por P y que sean perpendiculares a los dos ejes de coordenadas. Estas rectas intersecan a los ejes en los puntos con coordenadas a y b (figura A.4). El par ordenado (a, b) se asigna al punto P y se denomina su **pareja ordenada** (o par ordenado). El primer número a es la **coordenada x** (o **abscisa**) de P ; el segundo número b es la **coordenada y** (u **ordenada**) de P . La abscisa x de cada punto en el eje y es 0. La coordenada y de cada punto en el eje x es 0. El origen es el punto $(0, 0)$.

Iniciando con un par ordenado (a, b) , es posible revertir el proceso y llegar al punto P correspondiente en el plano. Con frecuencia identificamos a P con la pareja ordenada y escribimos $P(a, b)$. En ocasiones también nos referimos al “punto (a, b) ” y será claro a partir del contexto cuando (a, b) se refiera al punto en el plano, no al intervalo abierto en la recta real. En la figura A.5 se muestran varios puntos indicados mediante sus coordenadas.

El sistema de coordenadas se denomina **sistema de coordenadas rectangulares** o **sistema de coordenadas cartesianas** (en honor del matemático del siglo XVII René Descartes). Los ejes de coordenadas de este plano coordenado o plano cartesiano lo dividen en cuatro regiones denominadas **cuadrantes**, numerados en contra de las manecillas del reloj, como se indica en la figura A.5.

La **gráfica** de una ecuación o desigualdad en las variables x y y es el conjunto de todos los puntos $P(x, y)$ en el plano, cuyas coordenadas satisfacen la ecuación o desigualdad. Cuando trazamos datos en el plano de coordenadas o graficamos fórmulas cuyas variables tienen diferentes unidades de medición, no necesitamos utilizar la misma escala en los dos ejes. Por ejemplo, si graficamos tiempo contra empuje para el motor de un cohete, no hay razón para colocar la marca que muestra 1 seg en el eje del tiempo a la misma distancia del origen que la marca que muestra 1 lb en el eje del empuje.

Por lo común, cuando graficamos funciones cuyas variables no representan medidas físicas y cuando dibujamos figuras en el plano coordenado para estudiar su geometría y su trigonometría, tratamos de hacer idénticas las escalas en los ejes. Entonces una unidad de distancia vertical se ve igual que una unidad horizontal. Como en el mapa de un agrimensor o en una escala de dibujo, los segmentos de recta que se supone tienen la misma longitud se ven como si fueran iguales, lo que también sucede con los ángulos que se suponen congruentes.

Las pantallas de las computadoras y de las calculadoras son otra cosa. Por lo regular, la escala horizontal y la vertical difieren en las gráficas generadas por una máquina; por lo tanto, hay una distorsión en las distancias, las pendientes y los ángulos. Las circunferencias parecen elipses, los rectángulos podrían verse como cuadrados, los ángulos rectos tal vez parezcan agudos u obtusos, etcétera. Analizamos dichas pantallas y sus distorsiones con mayor profundidad en la sección 1.4.

BIOGRAFÍA HISTÓRICA

René Descartes
(1596–1650)

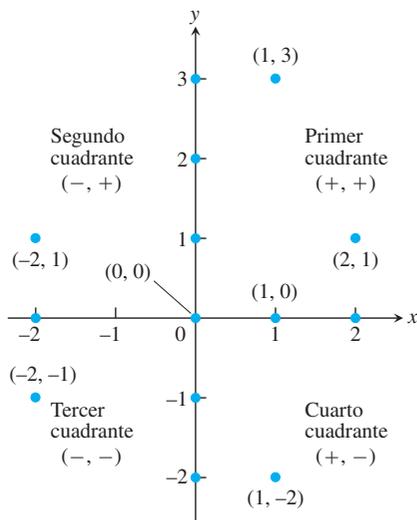


FIGURA A.5 Puntos etiquetados en el plano de coordenadas xy o plano cartesiano. Todos los puntos en los ejes tienen un par de coordenadas, pero por lo regular se marcan con un solo número real [por ejemplo, $(1, 0)$ en el eje x se marca con 1]. Observe los patrones de signos de las coordenadas de los cuadrantes.

Incrementos y rectas

Cuando una partícula se mueve desde un punto en el plano a otro, el cambio neto en sus coordenadas se denomina **incremento**. Éste se calcula restando las coordenadas del punto inicial de

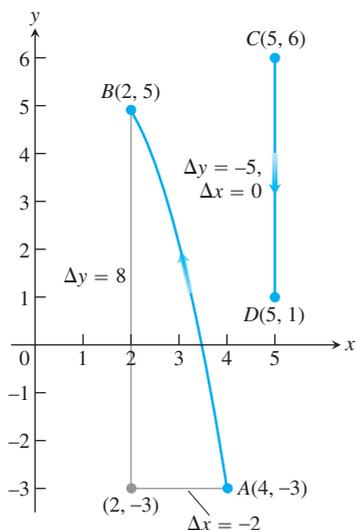


FIGURA A.6 Los incrementos en las coordenadas pueden ser positivos, negativos o cero (ejemplo 1).

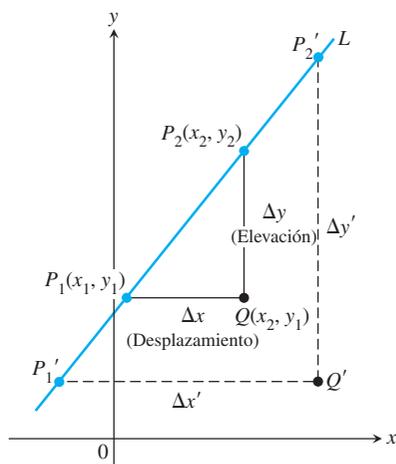


FIGURA A.7 Los triángulos P_1QP_2 y $P_1'Q'P_2'$ son semejantes, por lo que la razón de sus lados tiene el mismo valor para cualesquiera dos puntos en la recta. Este valor común es la pendiente de la recta.

las coordenadas del punto final. Si x cambia de x_1 a x_2 , el **incremento** en x es

$$\Delta x = x_2 - x_1.$$

EJEMPLO 1 Al ir del punto $A(4, -3)$ al punto $B(2, 5)$, los incrementos en las coordenadas x y y son

$$\Delta x = 2 - 4 = -2, \quad \Delta y = 5 - (-3) = 8.$$

De $C(5, 6)$ a $D(5, 1)$, los incrementos en las coordenadas son

$$\Delta x = 5 - 5 = 0, \quad \Delta y = 1 - 6 = -5.$$

Véase la figura A.6. ■

Dados dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ en el plano, llamamos a los incrementos $\Delta x = x_2 - x_1$ y $\Delta y = y_2 - y_1$, el **desplazamiento** y la **elevación**, respectivamente, entre P_1 y P_2 . Dos de tales puntos siempre determinan una única línea recta (generalmente, denominada sólo recta) que pasa por ambos puntos. Decimos la recta P_1P_2 .

Cualquier recta no vertical en el plano tiene la propiedad de que la razón

$$m = \frac{\text{elevación}}{\text{desplazamiento}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

tiene el mismo valor para toda elección de los dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ en la recta (figura A.7). Esto es porque las razones de lados correspondientes de triángulos semejantes son iguales.

DEFINICIÓN La razón constante

$$m = \frac{\text{elevación}}{\text{desplazamiento}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

es la pendiente de la recta no vertical P_1P_2 .

La pendiente nos indica la dirección (hacia arriba o hacia abajo) y la inclinación de una recta. Una recta con pendiente positiva asciende hacia la derecha, una con pendiente negativa desciende cuando nos movemos hacia la derecha (figura A.8). Cuanto mayor sea el valor absoluto de la pendiente, más rápido asciende o desciende. La pendiente de una recta vertical *no está definida*. Como el desplazamiento Δx es cero para una recta vertical, no podemos formar la razón de la pendiente m .

La dirección y la inclinación de una recta también pueden medirse con un ángulo. El **ángulo de inclinación** de una recta que cruza el eje x es el menor ángulo medido en contra de las manecillas del reloj, a partir del eje x a la recta (figura A.9). La inclinación horizontal es 0° . La inclinación de una recta vertical es 90° . Si ϕ (letra griega fi) es la inclinación de una recta, entonces $0 \leq \phi < 180^\circ$.

La relación entre la pendiente m de una recta no vertical y su ángulo de inclinación ϕ se muestra en la figura A.10:

$$m = \tan \phi.$$

Las rectas tienen ecuaciones relativamente sencillas. Todos los puntos en la *recta vertical* que pasan por el punto a en el eje x tienen coordenadas x iguales a a . Por lo tanto, $x = a$ es una ecuación para la recta vertical. De forma análoga, $y = b$ es una ecuación para la *recta horizontal* que corta al eje y en b . (Véase la figura A.11).

Es posible escribir una ecuación para una recta vertical L si conocemos su pendiente y las coordenadas de un punto $P_1(x_1, y_1)$ en ella. Si $P(x, y)$ es *cualquier* otro punto en L , entonces

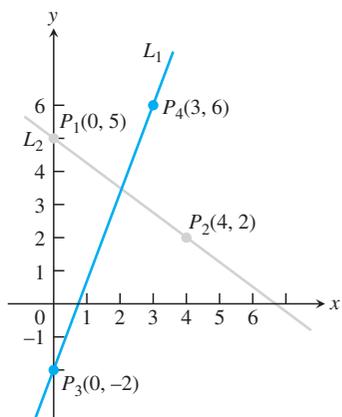


FIGURA A.8 La pendiente de L_1 es

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6 - (-2)}{3 - 0} = \frac{8}{3}.$$

Esto es, y aumenta 8 unidades cada vez que x aumenta 3 unidades. La pendiente de L_2 es

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 - 5}{4 - 0} = \frac{-3}{4}.$$

Esto es, y disminuye 3 unidades cada vez que x aumenta 4 unidades.

podemos utilizar los dos puntos P_1 y P para calcular la pendiente,

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

de manera que

$$y - y_1 = m(x - x_1), \quad \text{o} \quad y = y_1 + m(x - x_1).$$

La ecuación

$$y = y_1 + m(x - x_1)$$

es la **ecuación punto pendiente** de la recta que pasa por el punto (x_1, y_1) y tiene pendiente m .

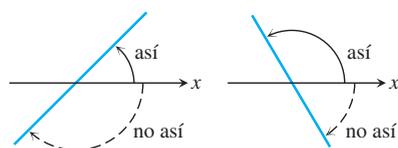


FIGURA A.9 Los ángulos de inclinación se miden en contra de las manecillas del reloj, a partir del eje x .

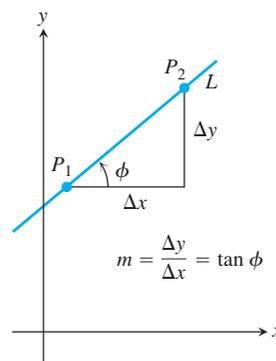


FIGURA A.10 La pendiente de una recta no vertical es la tangente de su ángulo de inclinación.

EJEMPLO 2 Escriba una ecuación para la recta que pasa por el punto $(2, 3)$ con pendiente $-3/2$.

Solución Sustituimos $x_1 = 2, y_1 = 3$ y $m = -3/2$ en la ecuación punto pendiente y obtenemos

$$y = 3 - \frac{3}{2}(x - 2), \quad \text{o} \quad y = -\frac{3}{2}x + 6.$$

Cuando $x = 0, y = 6$, por lo que la recta interseca al eje y en $y = 6$. ■

EJEMPLO 3 Escriba una ecuación para la recta que pasa por $(-2, -1)$ y $(3, 4)$.

Solución La pendiente de la recta es

$$m = \frac{-1 - 4}{-2 - 3} = \frac{-5}{-5} = 1.$$

Es posible utilizar tal pendiente con cualquiera de los dos puntos dados en la ecuación punto pendiente:

Con $(x_1, y_1) = (-2, -1)$

$$y = -1 + 1 \cdot (x - (-2))$$

$$y = -1 + x + 2$$

$$y = x + 1$$

Con $(x_1, y_1) = (3, 4)$

$$y = 4 + 1 \cdot (x - 3)$$

$$y = 4 + x - 3$$

$$y = x + 1$$

Mismo resultado

De cualquier manera, $y = x + 1$ es una ecuación para la recta (figura A.12). ■

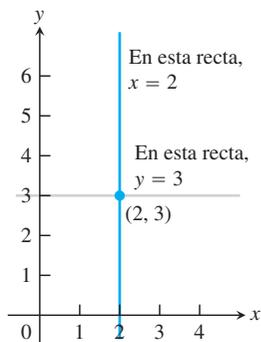


FIGURA A.11 Las ecuaciones estándar para las rectas vertical y horizontal que pasan por el punto $(2, 3)$, son $x = 2$ y $y = 3$.

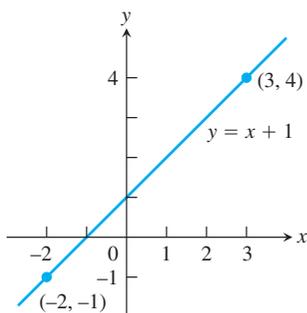


FIGURA A.12 La recta del ejemplo 3.

La coordenada y del punto donde una recta no vertical interseca al eje y se denomina **intersección con el eje y** (o ordenada al origen) de la recta. De forma análoga, la **intersección con el eje x** (o abscisa al origen) de una recta no horizontal es la coordenada x del punto donde la recta corta al eje x (figura A.13). Una recta con pendiente m e intersección con el eje y igual a b pasa por el punto $(0, b)$, por lo que tiene ecuación

$$y = b + m(x - 0), \quad \text{o, de manera más sencilla,} \quad y = mx + b.$$

La ecuación

$$y = mx + b$$

se denomina **ecuación pendiente ordenada** al origen (o pendiente intersección) de la recta con pendiente m e intersección con el eje y en b .

Las rectas con ecuaciones de la forma $y = mx$ tienen intersección con el eje y igual a 0, por lo que pasan por el origen. Las ecuaciones de las rectas se denominan ecuaciones **lineales**.

La ecuación

$$Ax + By = C \quad (A \text{ y } B \text{ no son iguales a cero})$$

se denomina **ecuación lineal general** en x y y , ya que su gráfica siempre representa una línea recta, y toda recta tiene una ecuación de esta forma (incluyendo rectas con pendiente no definida).

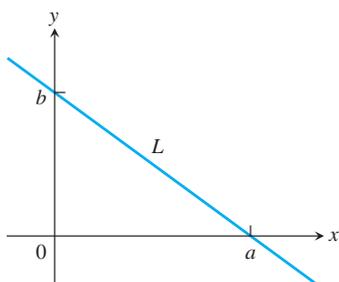


FIGURA A.13 La recta L tiene intersección con el eje x en a e intersección con el eje y en b .

Rectas paralelas y rectas perpendiculares

Las rectas que son paralelas tienen ángulos de inclinación iguales, así que cuentan con la misma pendiente (si no son verticales). De manera recíproca, rectas con pendientes iguales tienen ángulos de inclinación iguales y, por lo tanto, son paralelas.

Si dos rectas no verticales L_1 y L_2 son perpendiculares, sus pendientes m_1 y m_2 satisfacen $m_1 m_2 = -1$, por lo que cada pendiente es el **recíproco negativo** de la otra:

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}, \quad m_2 = -\frac{1}{m_1}.$$

Para ver esto, observe mediante una inspección de triángulos semejantes de la figura A.14 que $m_1 = a/h$ y $m_2 = -h/a$. Por consiguiente, $m_1 m_2 = (a/h)(-h/a) = -1$.

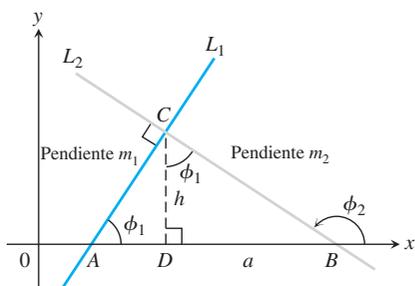


FIGURA A.14 ADC es semejante al $\triangle CDB$. Por lo que ϕ_1 también es el ángulo superior en el $\triangle CDB$. Con base en los lados del $\triangle CDB$, leemos $\tan \phi_1 = a/h$.

Distancia y circunferencias en el plano

La distancia entre los puntos en el plano se calcula con una fórmula que proviene del teorema de Pitágoras (figura A.15).

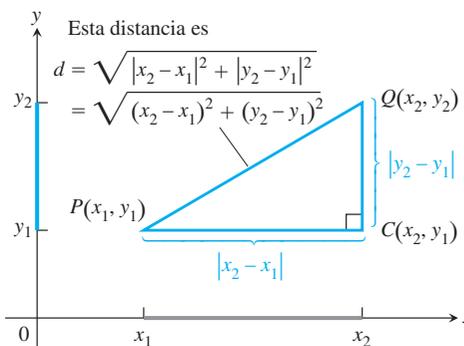


FIGURA A.15 Para calcular la distancia entre $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$, aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo PCQ .

Fórmula de distancia para puntos en el plano

La distancia entre $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ es

$$d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

EJEMPLO 4

(a) La distancia entre $P(-1, 2)$ y $Q(3, 4)$ es

$$\sqrt{(3 - (-1))^2 + (4 - 2)^2} = \sqrt{(4)^2 + (2)^2} = \sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5}.$$

(b) La distancia del origen a $P(x, y)$ es

$$\sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad \blacksquare$$

Por definición, una **circunferencia** de radio a es el conjunto de todos los puntos $P(x, y)$ cuya distancia al centro $C(h, k)$ es igual a a (figura A.16). Con base en la fórmula de la distancia, P está en la circunferencia si y sólo si

$$\sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2} = a,$$

por lo que

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = a^2. \quad (1)$$

La ecuación (1) es la **ecuación estándar** de una circunferencia con centro (h, k) y radio a . La circunferencia de radio $a = 1$, con centro en el origen, es la **circunferencia unitaria** con ecuación

$$x^2 + y^2 = 1.$$

EJEMPLO 5

(a) La ecuación estándar para la circunferencia de radio 2 con centro en $(3, 4)$ es

$$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 2^2 = 4.$$

(b) La circunferencia

$$(x - 1)^2 + (y + 5)^2 = 3$$

tiene $h = 1$, $k = -5$ y $a = \sqrt{3}$. El centro es el punto $(h, k) = (1, -5)$ y el radio es $a = \sqrt{3}$. ■

Si una ecuación para una circunferencia no está en la forma estándar, podemos determinar el centro y el radio de la circunferencia transformando la ecuación a la forma estándar. La técnica algebraica para hacerlo es la de *completar cuadrados*.

EJEMPLO 6 Determine el centro y el radio de la circunferencia

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0.$$

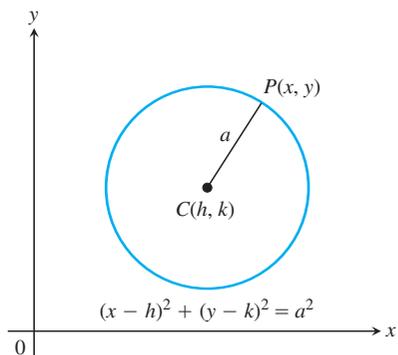


FIGURA A.16 Una circunferencia de radio a en el plano xy , con centro en (h, k) .

Solución Transformamos la ecuación a la forma estándar completando los cuadrados en x y y :

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$$

$$(x^2 + 4x) + (y^2 - 6y) = 3$$

$$\left(x^2 + 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2\right) + \left(y^2 - 6y + \left(\frac{-6}{2}\right)^2\right) = 3 + \left(\frac{4}{2}\right)^2 + \left(\frac{-6}{2}\right)^2$$

$$(x^2 + 4x + 4) + (y^2 - 6y + 9) = 3 + 4 + 9$$

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$$

Iniciar con la ecuación dada.

Agrupar términos. Pasar la constante al lado derecho.

Sumar el cuadrado de la mitad del coeficiente de x a cada lado de la ecuación. Hacer lo mismo para y . Ahora, las expresiones entre paréntesis en el lado izquierdo son cuadrados perfectos.

Escribir cada cuadrática como una expresión lineal al cuadrado.

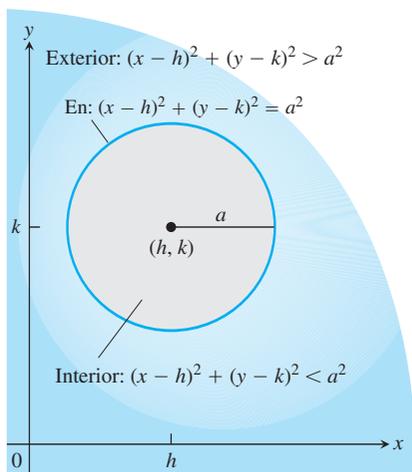


FIGURA A.17 El interior y el exterior de la circunferencia $(x - h)^2 + (y - k)^2 = a^2$.

El centro es $(-2, 3)$ y el radio es $a = 4$.

Los puntos (x, y) que satisfacen la desigualdad

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 < a^2$$

constituyen la región **interior** de la circunferencia con centro (h, k) y radio a (figura A.17). El **exterior** de la circunferencia consiste en los puntos (x, y) que satisfacen

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 > a^2.$$

Parábolas

La definición geométrica y las propiedades de parábolas generales se revisaron en la sección 11.6. Aquí ponemos nuestra atención en parábolas que surgen como gráficas de ecuaciones de la forma $y = ax^2 + bx + c$.

EJEMPLO 7 Considere la ecuación $y = x^2$. Algunos puntos cuyas coordenadas satisfacen dicha ecuación son $(0, 0)$, $(1, 1)$, $\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$, $(-1, 1)$, $(2, 4)$, y $(-2, 4)$. Estos puntos (todos los demás que satisfacen la ecuación) configuran una curva suave denominada parábola (figura A.18).

La gráfica de una ecuación de la forma

$$y = ax^2$$

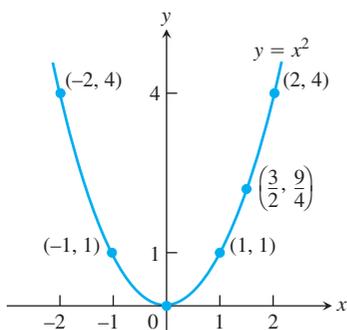


FIGURA A.18 La parábola $y = x^2$ (ejemplo 7).

es una **parábola** cuyo **eje** (de simetría) es el eje y . El **vértice** de la parábola (punto donde la parábola cruza a su eje) está en el origen. La parábola abre hacia arriba si $a > 0$ y hacia abajo si $a < 0$. Cuanto mayor sea el valor de $|a|$, más angosta será la parábola (figura A.19).

Por lo general, la gráfica de $y = ax^2 + bx + c$ es una versión desplazada y cambiada de tamaño de la parábola $y = x^2$. Analizamos los desplazamientos y el cambio de tamaño de gráficas con mayor profundidad en la sección 1.2.

La gráfica de $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$

La gráfica de la ecuación $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$, es una parábola. La parábola abre hacia arriba si $a > 0$ y hacia abajo si $a < 0$. El **eje** es la recta

$$x = -\frac{b}{2a}. \tag{2}$$

El vértice de la parábola es el punto donde el eje y y la parábola se intersecan. Su coordenada x es $x = -b/2a$; su coordenada y se determina sustituyendo $x = -b/2a$ en la ecuación de la parábola.

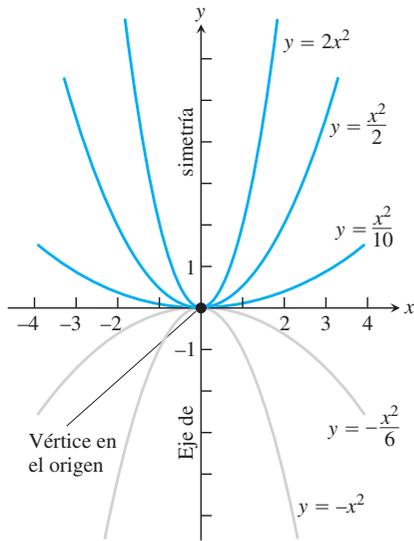


FIGURA A.19 Además de determinar la dirección en la que abre la parábola $y = ax^2$, el número a es un factor de escala. La parábola es más ancha cuando a tiende a cero y más angosta cuando $|a|$ se hace grande.

Observe que si $a = 0$, entonces tenemos $y = bx + c$, que es una ecuación para una recta. El eje dado por la ecuación (2) puede determinarse completando el cuadrado.

EJEMPLO 8 Grafique la ecuación $y = -\frac{1}{2}x^2 - x + 4$.

Solución Al comparar la ecuación con $y = ax^2 + bx + c$ vemos que

$$a = -\frac{1}{2}, \quad b = -1, \quad c = 4.$$

Como $a < 0$, la parábola abre hacia abajo. Con base en la ecuación (2), el eje es la recta vertical

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-1)}{2(-1/2)} = -1.$$

Cuando $x = -1$, tenemos

$$y = -\frac{1}{2}(-1)^2 - (-1) + 4 = \frac{9}{2}.$$

El vértice es $(-1, 9/2)$.

Las intersecciones con el eje x son donde $y = 0$:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}x^2 - x + 4 &= 0 \\ x^2 + 2x - 8 &= 0 \\ (x - 2)(x + 4) &= 0 \\ x &= 2, \quad x = -4 \end{aligned}$$

Graficamos algunos puntos, hacemos un bosquejo del eje y utilizamos la dirección de apertura para completar la gráfica en la figura A.20. ■

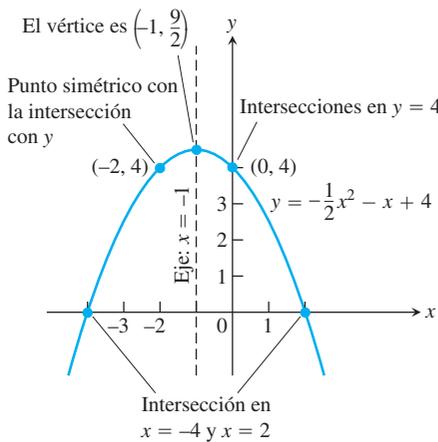


FIGURA A.20 La parábola del ejemplo 8.

Ejercicios A.3

Distancia, pendientes y rectas

En los ejercicios 1 y 2, una partícula se mueve en el plano coordenado de A a B . Determine los incrementos Δx y Δy en las coordenadas de la partícula. Además determine la distancia de A a B .

1. $A(-3, 2), B(-1, -2)$
2. $A(-3.2, -2), B(-8.1, -2)$

Describa las gráficas de las ecuaciones en los ejercicios 3 y 4.

3. $x^2 + y^2 = 1$
4. $x^2 + y^2 \leq 3$

Trace los puntos en los ejercicios 5 y 6, y determine la pendiente (si ésta existe) de la recta que éstos determinan. También determine la pendiente común (si existe) de las rectas perpendiculares a AB .

5. $A(-1, 2), B(-2, -1)$
6. $A(2, 3), B(-1, 3)$

En los ejercicios 7 y 8, determine una ecuación para (a) la recta vertical y (b) la recta horizontal que pasa por el punto dado.

7. $(-1, 4/3)$
8. $(0, -\sqrt{2})$

En los ejercicios 9 a 15, escriba una ecuación para cada recta que se describe.

9. Pasa por $(-1, 1)$ con pendiente -1 .
10. Pasa por $(3, 4)$ y $(-2, 5)$.
11. Tiene pendiente $-5/4$ e intersección con el eje y igual a 6.
12. Pasa por $(-12, -9)$ y tiene pendiente 0.
13. Tiene intersección con el eje y en 4 y con el eje x en -1 .
14. Pasa por $(5, -1)$ y es paralela a la recta $2x + 5y = 15$.
15. Pasa por $(4, 10)$ y es perpendicular a la recta $6x - 3y = 5$

En los ejercicios 16 y 17, determine las intersecciones con el eje x y el eje y de la recta y utilice esta información para graficar la recta.

16. $3x + 4y = 12$ 17. $\sqrt{2}x - \sqrt{3}y = \sqrt{6}$
18. ¿Existe alguna relación especial entre las rectas $Ax + By = C_1$ y $Bx - Ay = C_2$ ($A \neq 0, B \neq 0$)? Justifique su respuesta.
19. Una partícula inicia en $A(-2, 3)$ y sus coordenadas cambian en incrementos $\Delta x = 5, \Delta y = -6$. Determine su nueva posición.
20. Las coordenadas de una partícula cambian en $\Delta x = 5$ y $\Delta y = 6$, cuando se mueve de $A(x, y)$ hacia $B(3, -3)$. Determine x y y .

Circunferencias

En los ejercicios 21 a 23, determine una ecuación para la circunferencia con centro $C(h, k)$ y radio a dados. Luego elabore un bosquejo en el plano xy . En su bosquejo, incluya el centro de la circunferencia. Además, si existen, indique las intersecciones con los ejes x y y , con sus pares de coordenadas.

21. $C(0, 2), a = 2$ 22. $C(-1, 5), a = \sqrt{10}$
23. $C(-\sqrt{3}, -2), a = 2$

Grafique las circunferencias cuyas ecuaciones se dan en los ejercicios 24 a 26. Indique, con sus pares de coordenadas, el centro de la circunferencia y, si las hay, las intersecciones con los ejes.

24. $x^2 + y^2 + 4x - 4y + 4 = 0$
25. $x^2 + y^2 - 3y - 4 = 0$ 26. $x^2 + y^2 - 4x + 4y = 0$

Parábolas

En los ejercicios 27 a 30, grafique las parábolas. En cada caso, marque el vértice, el eje y las intersecciones.

27. $y = x^2 - 2x - 3$ 28. $y = -x^2 + 4x$
29. $y = -x^2 - 6x - 5$ 30. $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 4$

Desigualdades

En los ejercicios 31 a 34, describa las regiones definidas por las desigualdades y las parejas de desigualdades.

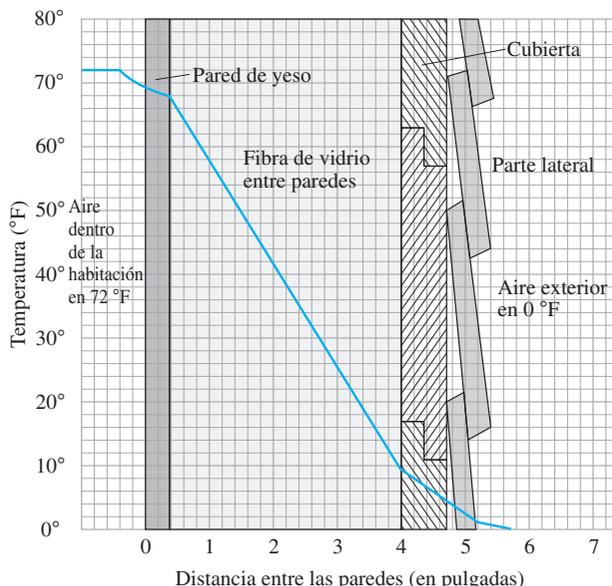
31. $x^2 + y^2 > 7$ 32. $(x - 1)^2 + y^2 \leq 4$
33. $x^2 + y^2 > 1, x^2 + y^2 < 4$
34. $x^2 + y^2 + 6y < 0, y > -3$
35. Escriba una desigualdad que describa los puntos que están dentro de la circunferencia con centro en $(-2, 1)$ y radio $\sqrt{6}$.
36. Escriba un par de desigualdades que describan los puntos que están dentro o en la circunferencia con centro en $(0, 0)$ y radio $\sqrt{2}$, y en la recta vertical que pasa por $(1, 0)$ o a la derecha de ésta.

Teoría y ejemplos

En los ejercicios 37 a 40, grafique las dos ecuaciones y determine los puntos en los que se intersecan las gráficas.

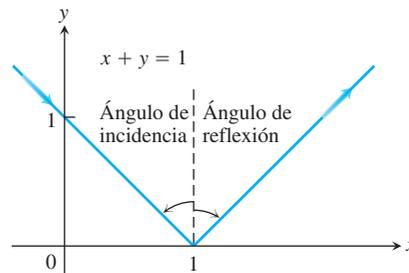
37. $y = 2x, x^2 + y^2 = 1$ 38. $y - x = 1, y = x^2$
39. $y = -x^2, y = 2x^2 - 1$
40. $x^2 + y^2 = 1, (x - 1)^2 + y^2 = 1$

41. **Aislante** Por medio de la medición de las pendientes en la siguiente figura, estime el cambio de temperatura en grados por pulgada para (a) la pared de yeso; (b) el aislante de fibra de vidrio, (c) la cubierta de madera.



La temperatura cambia en la pared en los ejercicios 41 y 42.

42. **Aislante** De acuerdo con la figura del ejercicio 41, ¿cuál de los materiales es el mejor aislante? Explique.
43. **Presión bajo el agua** La presión p que experimenta un buzo bajo el agua está relacionada con la profundidad d del buzo mediante una ecuación de la forma $p = kd + 1$ (k es una constante). En la superficie, la presión es de 1 atmósfera. La presión en 100 metros es de alrededor de 10.94 atmósferas. Determine la presión en 50 metros.
44. **Luz que se refleja** Un haz de luz llega a lo largo de la recta $x + y = 1$, desde el segundo cuadrante y se refleja en el eje x (véase la figura). El ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión. Escriba una ecuación para la recta a lo largo de la cual sale el haz de luz.



Trayectoria del haz de luz en el ejercicio 44. Los ángulos de incidencia y reflexión se miden con respecto a la perpendicular.

45. **Fahrenheit versus Celsius** En el plano FC , elabore un bosquejo de la gráfica de la ecuación

$$C = \frac{5}{9}(F - 32)$$

la cual relaciona las temperaturas medidas en grados Fahrenheit y en grados Celsius. En la misma gráfica trace un bosquejo de la recta $C = F$. ¿Existe una temperatura en la que un termómetro en grados Celsius dé la misma lectura numérica que un termómetro en grados Fahrenheit? Si es así, determínela.

46. **Vía férrea en el Monte Washington** Los ingenieros civiles calculan la pendiente de una vía de tren como la razón entre la distancia que se eleva o desciende y la distancia que recorre horizontalmente. Esta razón se conoce como nivel de la vía, y por lo regular es menor al 2 por ciento. En las montañas, puede aumentar hasta al 4 por ciento. Comúnmente los niveles en las autopistas son menores del 5 por ciento.

La parte más inclinada de la vía férrea en el Monte Washington en Nueva Hampshire, tiene un nivel excepcional del 37.1 por ciento. A lo largo de este tramo, los asientos en el frente del vagón están 14 ft por arriba de los asientos de atrás. ¿Aproximadamente qué tan alejados están entre sí las filas de adelante y de atrás?

47. Por medio del cálculo de sus lados, demuestre que el triángulo con vértices en los puntos $A(1, 2)$, $B(5, 5)$ y $C(4, -2)$ es isósceles pero no equilátero.
48. Demuestre que el triángulo con vértices $A(0, 0)$, $B(1, \sqrt{3})$, y $C(2, 0)$ es equilátero.
49. Demuestre que los puntos $A(2, -1)$, $B(1, 3)$ y $C(-3, 2)$ son vértices de un cuadrado y determine el cuarto vértice.
50. Tres paralelogramos diferentes tienen vértices en $(-1, 1)$, $(2, 0)$ y $(2, 3)$. Elabore un bosquejo y determine las coordenadas del cuarto vértice de cada uno de ellos.
51. ¿Para cuáles valores de k , la recta $2x + ky = 3$ es perpendicular a la recta $4x + y = 1$? ¿Para cuáles valores de k las rectas son paralelas?
52. **Punto medio de un segmento de recta** Demuestre que el punto con coordenadas

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

es el punto medio del segmento de recta que une a $P(x_1, y_1)$ con $Q(x_2, y_2)$.

A.4

Demostraciones de los teoremas de límites

Este apéndice demuestra el teorema 1, partes 2 a 5, y el teorema 4 de la sección 2.2.

TEOREMA 1: Leyes de límites Si L, M, c y k son números reales y

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow c} g(x) = M, \quad \text{entonces}$$

1. *Regla de la suma:* $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x)) = L + M$
2. *Regla de la diferencia:* $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) - g(x)) = L - M$
3. *Regla del múltiplo constante:* $\lim_{x \rightarrow c} (k \cdot f(x)) = k \cdot L$
4. *Regla del producto:* $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$
5. *Regla del cociente:* $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}, \quad M \neq 0$
6. *Regla de la potencia:* $\lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^n = L^n, n$ es un entero positivo
7. *Regla de la raíz:* $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L} = L^{1/n}, n$ es un entero positivo

(Si n es par, suponemos que $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L > 0$.)

Demostramos la regla de la suma en la sección 2.3, mientras que las reglas de la potencia y de la raíz se demuestran en cursos más avanzados. Obtenemos la regla de la diferencia reemplazando $g(x)$ por $-g(x)$ y M por $-M$ en la regla de la suma. La regla del múltiplo constante es el caso especial $g(x) = k$ de la regla del producto. Lo anterior deja sólo las reglas del producto y de la diferencia.

Demostración de la regla del límite de un producto Demostramos que para cualquier $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$, tal que para toda x en la intersección D , del dominio de f y del de g ,

$$0 < |x - c| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x)g(x) - LM| < \epsilon.$$

Entonces suponga que ϵ es un número positivo, luego escribimos $f(x)$ y $g(x)$ como

$$f(x) = L + (f(x) - L), \quad g(x) = M + (g(x) - M).$$

Al multiplicar estas expresiones y restar LM :

$$\begin{aligned} f(x) \cdot g(x) - LM &= (L + (f(x) - L))(M + (g(x) - M)) - LM \\ &= LM + L(g(x) - M) + M(f(x) - L) \\ &\quad + (f(x) - L)(g(x) - M) - LM \\ &= L(g(x) - M) + M(f(x) - L) + (f(x) - L)(g(x) - M). \end{aligned} \quad (1)$$

Como f y g tienen límites L y M cuando $x \rightarrow c$, hay números positivos δ_1 , δ_2 , δ_3 y δ_4 tales que para toda x en D

$$\begin{aligned} 0 < |x - c| < \delta_1 &\Rightarrow |f(x) - L| < \sqrt{\epsilon/3} \\ 0 < |x - c| < \delta_2 &\Rightarrow |g(x) - M| < \sqrt{\epsilon/3} \\ 0 < |x - c| < \delta_3 &\Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon/(3(1 + |M|)) \\ 0 < |x - c| < \delta_4 &\Rightarrow |g(x) - M| < \epsilon/(3(1 + |L|)). \end{aligned} \quad (2)$$

Si tomamos δ como el menor de los números δ_1 a δ_4 , las desigualdades del lado derecho de las implicaciones (2) se cumplen de forma simultánea para $0 < |x - c| < \delta$. Por lo tanto, para toda x en D , $0 < |x - c| < \delta$ implica

$$\begin{aligned} |f(x) \cdot g(x) - LM| &\quad \text{La desigualdad del triángulo aplicada a la ecuación (1).} \\ &\leq |L||g(x) - M| + |M||f(x) - L| + |f(x) - L||g(x) - M| \\ &\leq (1 + |L|)|g(x) - M| + (1 + |M|)|f(x) - L| + |f(x) - L||g(x) - M| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \sqrt{\frac{\epsilon}{3}}\sqrt{\frac{\epsilon}{3}} = \epsilon. \quad \text{Valores de (2)} \end{aligned}$$

Lo anterior completa la demostración de la regla del límite de un producto. ■

Demostración de la regla del límite de un cociente Demostraremos que $\lim_{x \rightarrow c}(1/g(x)) = 1/M$. Entonces es posible concluir que

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \left(f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow c} \frac{1}{g(x)} = L \cdot \frac{1}{M} = \frac{L}{M}$$

por la regla del límite de un producto.

Sea $\epsilon > 0$ dado. Para mostrar que $\lim_{x \rightarrow c}(1/g(x)) = 1/M$, necesitamos demostrar que hay una $\delta > 0$ tal que para toda x

$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M} \right| < \epsilon.$$

Como $|M| > 0$, existe un número positivo δ_1 tal que para toda x

$$0 < |x - c| < \delta_1 \Rightarrow |g(x) - M| < \frac{M}{2}. \quad (3)$$

Para cualesquiera números A y B , puede demostrarse que $|A| - |B| \leq |A - B|$ y $|B| - |A| \leq |A - B|$, de lo que se deduce que $||A| - |B|| \leq |A - B|$. Con $A = g(x)$ y $B = M$, esto se transforma en

$$||g(x)| - |M|| \leq |g(x) - M|,$$

lo que se puede combinar con la desigualdad de la derecha de la implicación (3) para obtener, a la vez,

$$\begin{aligned}
 & \left| |g(x)| - |M| \right| < \frac{|M|}{2} \\
 & -\frac{|M|}{2} < |g(x)| - |M| < \frac{|M|}{2} \\
 & \frac{|M|}{2} < |g(x)| < \frac{3|M|}{2} \\
 & |M| < 2|g(x)| < 3|M| \\
 & \frac{1}{|g(x)|} < \frac{2}{|M|} < \frac{3}{|g(x)|}. \tag{4}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $0 < |x - c| < \delta_1$ implica que

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M} \right| &= \left| \frac{M - g(x)}{Mg(x)} \right| \leq \frac{1}{|M|} \cdot \frac{1}{|g(x)|} \cdot |M - g(x)| \\
 &< \frac{1}{|M|} \cdot \frac{2}{|M|} \cdot |M - g(x)|. \quad \text{Desigualdad (4)} \tag{5}
 \end{aligned}$$

Como $(1/2)|M|^2\epsilon > 0$, existe un número $\delta_2 > 0$ tal que para toda x

$$0 < |x - c| < \delta_2 \implies |M - g(x)| < \frac{\epsilon}{2}|M|^2. \tag{6}$$

Si tomamos δ como el menor de δ_1 y δ_2 , la conclusión en (5) y (6) se cumple para toda x , tal que $0 < |x - c| < \delta$. Al combinar estas conclusiones, se obtiene

$$0 < |x - c| < \delta \implies \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M} \right| < \epsilon.$$

Así termina la demostración de la regla del límite de un cociente. ■

TEOREMA 4: El teorema de la compresión (o del sándwich) Suponga que $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para toda x en algún intervalo abierto I que contiene a c , excepto posiblemente en $x = c$ mismo. También suponga que $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = \lim_{x \rightarrow c} h(x) = L$. Entonces $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$.

Demostración para límites por la derecha Suponga que $\lim_{x \rightarrow c^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} h(x) = L$. Así, para cualquier $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para toda x el intervalo $c < x < c + \delta$ está contenido en I y la desigualdad implica

$$L - \epsilon < g(x) < L + \epsilon \quad \text{y} \quad L - \epsilon < h(x) < L + \epsilon.$$

Tales desigualdades, combinadas con la desigualdad $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ dan

$$\begin{aligned}
 L - \epsilon &< g(x) \leq f(x) \leq h(x) < L + \epsilon, \\
 L - \epsilon &< f(x) < L + \epsilon, \\
 -\epsilon &< f(x) - L < \epsilon.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, para toda x , la desigualdad $c < x < c + \delta$ implica $|f(x) - L| < \epsilon$.

Demostración para límites por la izquierda

Suponga que $\lim_{x \rightarrow c^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow c^-} h(x) = L$. Así, para cualquier $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para toda x el intervalo $c - \delta < x < c$ está contenido en I y la desigualdad implica

$$L - \epsilon < g(x) < L + \epsilon \quad \text{y} \quad L - \epsilon < h(x) < L + \epsilon.$$

Demostración para límites por la izquierda $x, c - \delta < x < c$ implica $|f(x) - L| < \epsilon$.

Demostración para el límite por los dos lados Si $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = \lim_{x \rightarrow c} h(x) = L$, entonces $g(x)$ y $h(x)$ se aproximan a L cuando $x \rightarrow c^+$ y cuando $x \rightarrow c^-$; así que $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L$ y $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L$. Por lo tanto, $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ existe y es igual a L . ■

Ejercicios A.4

1. Suponga que las funciones $f_1(x), f_2(x)$, y $f_3(x)$ tienen límites L_1, L_2 , y L_3 , respectivamente, cuando $x \rightarrow c$. Demuestre que su suma tiene límite $L_1 + L_2 + L_3$. Utilice inducción matemática (apéndice 2) para generalizar este resultado a la suma de cualquier número finito de funciones.

2. Utilice inducción matemática y la regla del límite de un producto, en el teorema 1, para demostrar que si las funciones $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ tienen límites L_1, L_2, \dots, L_n cuando $x \rightarrow c$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow c} f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \dots \cdot f_n(x) = L_1 \cdot L_2 \cdot \dots \cdot L_n.$$

3. Utilice el hecho de que $\lim_{x \rightarrow c} x = c$ y el resultado del ejercicio 2 para demostrar que $\lim_{x \rightarrow c} x^n = c^n$ para cualquier entero $n > 1$.

4. **Límites de polinomios** Utilice el hecho de que $\lim_{x \rightarrow c} k = k$ para cualquier número k , junto con los resultados de los ejercicios 1 y 3, para demostrar que $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ para cualquier función polinomial.

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

5. **Límites de funciones racionales** Utilice el teorema 1 y el resultado del ejercicio 4 para demostrar que si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones polinomiales y $g(c) \neq 0$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(c)}{g(c)}.$$

6. **Composición de funciones continuas** La figura A.21 presenta un diagrama para una demostración de que la composición de dos funciones continuas es continua. Con base en el diagrama, reconstruya la demostración. La proposición que debe demostrarse es ésta: si f es continua en $x = c$ y g es continua en $f(c)$, entonces $g \circ f$ es continua en c .

Suponga que c es un punto interior del dominio de f y que $f(c)$ es un punto interior del dominio de g . Esto hará que los límites que se incluyan sean por los dos lados. (Los argumentos son similares para los casos que incluyen límites laterales).

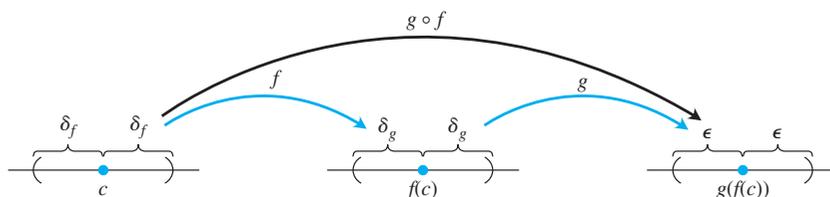


FIGURA A.21 Diagrama para una demostración de que la composición de dos funciones continuas es continua.

A.5

Límites que aparecen con frecuencia

Este apéndice verifica los límites (4) a (6) en el teorema 5 de la sección 10.1.

Límite 4: Si $|x| < 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$ Necesitamos demostrar que para cada $\epsilon > 0$ existe un entero N tan grande que $|x^n| < \epsilon$ para todo entero n mayor que N . Como $\epsilon^{1/n} \rightarrow 1$, mientras $|x| < 1$, existe un entero N para el cual $\epsilon^{1/N} > |x|$. En otras palabras,

$$|x^N| = |x|^N < \epsilon. \tag{1}$$

Éste es el entero que buscamos, ya que si $|x| < 1$, entonces

$$|x^n| < |x^N| \quad \text{para toda } n > N. \quad (2)$$

Al combinar (1) y (2), se produce $|x^n| < \epsilon$ para toda $n > N$, con lo que se concluye la demostración. ■

Límite 5: Para cualquier número x , $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$ Sea

$$a_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Entonces

$$\ln a_n = \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = n \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right) \rightarrow x,$$

como vemos por la siguiente aplicación de la regla de L'Hôpital, en la que derivamos con respecto a n :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + x/n)}{1/n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{1 + x/n}\right) \cdot \left(-\frac{x}{n^2}\right)}{-1/n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{1 + x/n} = x. \end{aligned}$$

Aplicamos el teorema 3, sección 9.1, con $f(x) = e^x$ para concluir que

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = a_n = e^{\ln a_n} \rightarrow e^x. \quad \blacksquare$$

Límite 6: Para cualquier número x , $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ Como

$$-\frac{|x|^n}{n!} \leq \frac{x^n}{n!} \leq \frac{|x|^n}{n!},$$

todo lo que necesitamos demostrar es que $|x|^n/n! \rightarrow 0$. Luego podemos aplicar el teorema de la compresión para sucesiones (sección 10.1, teorema 2) para concluir que $x^n/n! \rightarrow 0$.

El primer paso en la demostración de que $|x|^n/n! \rightarrow 0$ es elegir un entero $M > |x|$, de manera que $(|x|/M) < 1$. Por el límite 4, que se acaba de demostrar, tenemos $(|x|/M)^n \rightarrow 0$. Luego restringimos nuestra atención a los valores de $n > M$. Para tales valores de n , es posible escribir

$$\begin{aligned} \frac{|x|^n}{n!} &= \frac{|x|^n}{1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot M \cdot \underbrace{(M+1) \cdot (M+2) \cdot \cdots \cdot n}_{(n-M) \text{ factores}}} \\ &\leq \frac{|x|^n}{M! M^{n-M}} = \frac{|x|^n M^M}{M! M^n} = \frac{M^M}{M!} \left(\frac{|x|}{M}\right)^n. \end{aligned}$$

Así que,

$$0 \leq \frac{|x|^n}{n!} \leq \frac{M^M}{M!} \left(\frac{|x|}{M}\right)^n.$$

Ahora, la constante $M^M/M!$ no cambia cuando n aumenta. Por lo tanto, el teorema de la compresión nos indica que $|x|^n/n! \rightarrow 0$ ya que $(|x|/M)^n \rightarrow 0$. ■

A.6

Teoría de los números reales

Un desarrollo riguroso del cálculo tiene como base las propiedades de los números reales. Muchos resultados acerca de funciones, derivadas e integrales serían falsos si los establecemos para funciones definidas solamente en los números racionales. En este apéndice examinamos, de manera breve, algunos conceptos básicos de la teoría de los números reales que sugieren lo que se podría aprender en un estudio más profundo y teórico del cálculo.

Tres tipos de propiedades hacen de los números reales lo que son. Éstas son las propiedades **algebraicas**, de **orden** y de **completez**. Las propiedades algebraicas incluyen la suma y la multiplicación, la resta y la división. Se aplican a los números racionales y a los complejos, así como a los números reales.

La estructura de los números se construye en torno a un conjunto con operaciones de suma y multiplicación. Para la suma y la multiplicación se requieren las siguientes propiedades.

- A1** $a + (b + c) = (a + b) + c$ para todas a, b, c .
- A2** $a + b = b + a$ para todas a, b .
- A3** Existe un número denominado “0”, tal que $a + 0 = a$ para toda a .
- A4** Para cada número a , existe un b , tal que $a + b = 0$.
- M1** $a(bc) = (ab)c$ para todas a, b, c .
- M2** $ab = ba$ para todas a, b .
- M3** Existe un número denominado “1”, tal que $a \cdot 1 = a$ para toda a .
- M4** Para cada a distinta de cero existe una b , tal que $ab = 1$.
- D** $a(b + c) = ab + bc$ para todas a, b, c .

A1 y M1 son las *leyes asociativas*, A2 y M2 son *leyes conmutativas*, A3 y M3 son las *leyes de la identidad* y D es la *ley distributiva*. Los conjuntos con tales propiedades algebraicas son ejemplos de **campos** y se estudian con profundidad en el área de las matemáticas teóricas denominada álgebra abstracta.

Las propiedades de **orden** nos permiten comparar el tamaño de cualesquiera dos números. Éstas son:

- O1** Para cualesquiera a y b , se cumple $a \leq b$ o $b \leq a$ o ambas.
- O2** Si $a \leq b$ y $b \leq a$ entonces $a = b$.
- O3** Si $a \leq b$ y $b \leq c$ entonces $a \leq c$.
- O4** Si $a \leq b$ entonces $a + c \leq b + c$.
- O5** Si $a \leq b$ y $0 \leq c$ entonces $ac \leq bc$.

O3 es la *ley de transitividad*, mientras que O4 y O5 se relacionan con la suma y la multiplicación.

Es posible ordenar los números reales, los enteros y los racionales, pero no los números complejos. No hay una manera razonable de decidir si un número como $i = \sqrt{-1}$ es mayor o menor que cero. Un campo donde se puede comparar el tamaño de cualesquiera dos elementos se denomina **campo ordenado**. Tanto los números racionales como los números reales forman un campo ordenado, pero hay muchos otros.

Podemos pensar en los números reales desde un punto de vista geométrico, alineándolos como puntos en la recta. La **propiedad de completez** dice que los números reales corresponden a todos los puntos en la recta, sin “agujeros” ni “espacios” entre ellos. En contraste, los racionales omiten puntos como $\sqrt{2}$ y π , mientras que los enteros dejan fuera fracciones como $1/2$. Los reales, al tener la propiedad de completez, no omiten puntos.

¿Qué queremos decir exactamente con esta idea de los “espacios”? Para responder esto debemos dar una descripción más precisa de la completez. Un número M es un **cota superior** de un conjunto de números si todos los números en el conjunto son menores o iguales a M . M es una **mínima cota superior** si es la cota superior más pequeña. Por ejemplo, $M = 2$ es una cota superior para los números negativos. También lo es $M = 1$, lo que demuestra que 2

no es una mínima cota superior. La mínima cota superior para el conjunto de números negativos es $M = 0$. Definimos un campo ordenado **completo** como aquél donde todo conjunto no vacío, acotado por arriba, tiene una mínima cota superior.

Si trabajamos sólo con los números racionales, el conjunto de números menores que $\sqrt{2}$ está acotado, pero no tiene una mínima cota superior racional, ya que cualquier cota superior racional M puede remplazarse con un número racional ligeramente menor que siga siendo mayor que $\sqrt{2}$. Así, los racionales no son completos. En los números reales, un conjunto que está acotado por arriba siempre tiene una mínima cota superior. Los reales son un campo ordenado completo.

La propiedad de completitud es la base de muchos resultados obtenidos en cálculo. Un ejemplo se da al buscar un valor máximo de una función en un intervalo cerrado $[a, b]$, como se hizo en la sección 4.1. La función $y = x - x^3$ tiene un valor máximo en $[0, 1]$ en el punto x que satisface $1 - 3x^2 = 0$, o $x = \sqrt{1/3}$. Si limitáramos nuestra atención a las funciones continuas definidas sólo en los racionales, habríamos concluido que la función no tiene máximo, ya que $\sqrt{1/3}$ es irracional (figura A.22). El teorema del valor extremo (sección 4.1) implica que funciones continuas en intervalos cerrados $[a, b]$ tienen un valor máximo, no válido para funciones definidas sólo en los racionales.

El teorema del valor intermedio implica que una función continua f en un intervalo $[a, b]$ con $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$ debe anularse en algún punto de $[a, b]$. Los valores de la función no pueden pasar de negativos a positivos sin que haya alguna x en $[a, b]$, donde $f(x) = 0$. El teorema del valor intermedio también se basa en la completitud de los números reales, y es falso para funciones continuas definidas sólo en los racionales. La función $f(x) = 3x^2 - 1$ cumple $f(0) = -1$ y $f(1) = 2$, pero si consideramos f sólo en los números racionales, su valor nunca se anula. El único valor de x para el que $f(x) = 0$ es $x = \sqrt{1/3}$, un número irracional.

Hemos numerado las propiedades que se requieren de los números reales al decir que éstos constituyen un campo ordenado completo. Pero aún no hemos terminado. Los matemáticos griegos de la escuela de Pitágoras trataron de imponer otra propiedad a los números de la recta real: la condición de que todos los números fueran cocientes de enteros. También se percataron de que su esfuerzo estaba destinado al fracaso cuando descubrieron números irracionales como $\sqrt{2}$. ¿Cómo saber que nuestros esfuerzos por especificar los números reales serán infructuosos por alguna razón imprevista? Escher, el artista, dibujó ilusiones ópticas con escaleras elípticas que subían y subían hasta encontrarse consigo mismas en la parte inferior. Si un ingeniero tratara de construir tal escalera, se daría cuenta de la imposibilidad de concretar en una estructura los planos basados en tales ilusiones ópticas. ¿Podría ocurrir que nuestro diseño de los números reales tuviera una contradicción sutil que nos impidiera construir tal sistema numérico?

Resolveremos este punto dando una descripción específica de los números reales y verificando que las propiedades algebraicas, de orden y de completitud se satisfacen en este modelo. A lo anterior se le llama **construcción** de los números reales; tal como las escaleras se construyen con madera, piedra o acero, existen muchas formas de construir los números reales. Una de ellas considera los números reales como todos los decimales infinitos

$$a.d_1d_2d_3d_4\dots$$

Desde este punto de vista, un número real es un entero a seguido por una sucesión de dígitos decimales d_1, d_2, d_3, \dots , cada uno entre 0 y 9. Esta sucesión puede detenerse, repetirse de manera periódica o continuar sin patrón. De esta forma, 2.00, 0.333333... y 3.1415926535898... representan números reales conocidos. Explicar el verdadero significado de los puntos "...” después de dichos dígitos requiere un desarrollo de la teoría de sucesiones y series, como en el capítulo 10. Cada número real se construye como límite de una sucesión de números racionales dados por sus aproximaciones decimales finitas. Un decimal infinito es entonces lo mismo que una serie

$$a + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{100} + \dots$$

Esta construcción decimal de los números reales no es tan directa. Es bastante fácil comprobar que da números que satisfacen las propiedades de completitud y orden, pero la verificación de las propiedades algebraicas es más compleja. Incluso la suma o la multiplicación

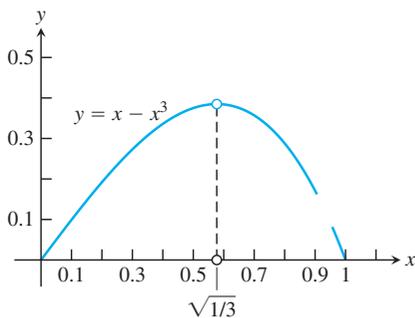


FIGURA A.22 El valor máximo de $y = x - x^3$ en $[0, 1]$ ocurre en el número irracional $x = \sqrt{1/3}$.

de dos números necesitan de una cantidad infinita de operaciones. Dar sentido a la división requiere un cuidadoso argumento, el cual implica límites de aproximaciones racionales a los decimales infinitos.

El matemático alemán Richard Dedekind (1831-1916) adoptó un enfoque distinto y logró la primera construcción rigurosa de los números reales en 1872. Dado cualquier número real x , es posible separar los números racionales en dos conjuntos: los menores que o iguales a x , y los mayores que x . Ingeniosamente, Dedekind invirtió este razonamiento y definió un número real como una separación en dos conjuntos de este tipo. Lo anterior parecería un enfoque extraño, pero tales métodos indirectos de construcción de nuevas estructuras, a partir de otras anteriores, son comunes en las matemáticas teóricas.

Éste y otros enfoques pueden utilizarse para construir un sistema de números con propiedades algebraicas, de orden y de completez deseadas. Un último aspecto que vale la pena analizar es si todas estas construcciones dan el mismo resultado. ¿Es posible que las distintas construcciones produzcan diferentes sistemas numéricos que satisfagan todas las propiedades requeridas? En caso de que la respuesta sea afirmativa, ¿cuál de tales sistemas es el de los números reales? Por fortuna, la respuesta es no. Los números reales constituyen el único sistema numérico que satisface las propiedades algebraicas, de orden y de completez.

La confusión en torno a la naturaleza de los números reales y los límites causó una gran controversia durante las primeras etapas de desarrollo del cálculo. Los pioneros del cálculo, como Newton, Leibniz y sus sucesores, al tratar de averiguar qué ocurría con el cociente de diferencias

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

cuando tanto Δy como Δx tendían a cero, hablaban de la derivada resultante como si fuera un cociente entre dos cantidades infinitamente pequeñas. Estos “infinitésimos”, que se escriben dx y dy , se consideraban como números de nuevo tipo, menores que cualquier número fijo, pero distintos de cero. De manera similar, se imaginaba que una integral definida era la suma de una cantidad infinita de infinitésimos

$$f(x) \cdot dx$$

conforme x varía en un intervalo cerrado. Aunque los cocientes de diferencias aproximantes $\Delta y/\Delta x$ se entendían de manera similar a la actual, era un cociente de cantidades infinitesimales, y no un límite, donde se creía que radicaba el significado de la derivada. Dicha forma de pensar condujo a dificultades lógicas, cuando los intentos de definición y el manejo de los infinitésimos dieron lugar a contradicciones e inconsistencias. El cociente de diferencias, más concreto y manejable, no provocó tales problemas; sólo se le consideraba una herramienta útil para realizar los cálculos. Los cocientes de diferencias se utilizaron para encontrar el valor numérico de la derivada y para deducir fórmulas generales para los cálculos, pero no fueron considerados fundamentales para responder qué es realmente la derivada. Hoy nos damos cuenta de que los problemas lógicos asociados a los infinitésimos se evitan *definiendo* la derivada como el límite de los cocientes de diferencias aproximantes. Las ambigüedades del antiguo enfoque ya no existen y en la teoría estándar del cálculo los infinitésimos no se necesitan ni se usan.

A.7

Números complejos

Los números complejos son expresiones de la forma $a + ib$, donde a y b son números reales e i es un símbolo para $\sqrt{-1}$. Por desgracia, las palabras “real” e “imaginario” tienen connotaciones que suelen colocar a $\sqrt{-1}$ en una posición menos favorable en nuestra mente que $\sqrt{2}$. De hecho, se requirió de una gran imaginación, en el sentido de *inventiva*, para construir el sistema de números *reales*, que es la base del cálculo (véase el apéndice A.6). En este apéndice revisaremos las diversas etapas de dicha invención, para luego presentar el desarrollo posterior de un sistema de números complejos.

El desarrollo de los números reales

La primera etapa de desarrollo de los números fue el reconocimiento de los **números para contar**, 1, 2, 3, ..., que ahora llamamos **números naturales** o **enteros positivos**. Es posible realizar algunas operaciones aritméticas sencillas con este número sin salir del sistema; es decir, el sistema de enteros positivos es **cerrado** si se trata de las operaciones de suma y multiplicación. En otras palabras, si m y n son cualesquiera enteros positivos, entonces

$$m + n = p \quad \text{y} \quad mn = q \tag{1}$$

son también enteros positivos. Dados los dos enteros positivos del lado izquierdo de cualquiera de las ecuaciones en (1), podemos especificar los enteros positivos correspondientes del lado derecho. Más que esto, es posible especificar m y p , así como encontrar un entero positivo n tal que $m + n = p$. Por ejemplo, $3 + n = 7$ se puede resolver cuando los únicos números que conocemos son los enteros positivos. Pero la ecuación $7 + n = 3$ no se resuelve a menos que se amplíe el sistema numérico.

El cero y los números negativos se inventaron para resolver ecuaciones como $7 + n = 3$. En una civilización que reconoce todos los **enteros**

$$\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, \tag{2}$$

las personas educadas siempre serán capaces de encontrar el entero faltante que resuelva la ecuación $m + n = p$ cuando se les den los otros dos enteros de la ecuación.

Suponga que tales personas también saben cómo multiplicar cualesquiera dos enteros de la lista (2). Si en las ecuaciones (1) se les dan m y q , verán que a veces pueden encontrar n . Si usan la imaginación, se inspirarán para idear más números e introducir las fracciones, que son justamente pares ordenados m/n de enteros m y n . El número cero tiene propiedades especiales que molestarían un poco, pero en última instancia los individuos en cuestión descubrirán que es bueno tener todos los cocientes de enteros m/n , excluyendo aquellos con cero en el denominador. Este sistema, llamado conjunto de **números racionales**, será lo suficientemente rico como para realizar las **operaciones racionales** de la aritmética:

- | | |
|----------------------------------|---|
| <p>1. (a) suma (b) resta</p> | <p>2. (a) multiplicación (b) división</p> |
|----------------------------------|---|

con cualesquiera dos números del sistema, *excepto que no es posible dividir entre cero*, pues esto carece de sentido.

La geometría del cuadrado unitario (figura A.23) y el teorema de Pitágoras demostraron que es posible construir un segmento de recta que, en términos de alguna unidad de longitud básica, tiene longitud igual a $\sqrt{2}$. En consecuencia, las personas resolvieron la ecuación

$$x^2 = 2$$

mediante una construcción geométrica. Pero también descubrieron que el segmento de recta que representa a $\sqrt{2}$ es una cantidad inconmensurable. Lo anterior significa que $\sqrt{2}$ no puede expresarse como la razón entre dos múltiplos *enteros* de cierta unidad de longitud. Es decir, la gente era incapaz de encontrar una solución numérica racional de la ecuación $x^2 = 2$.

No existe un número racional cuyo cuadrado sea 2. Para comprender por qué, supongamos que sí hay tal número racional. Entonces, podríamos encontrar enteros p y q , sin factores comunes distintos de 1, tales que

$$p^2 = 2q^2. \tag{3}$$

Como p y q son enteros, p debe ser par, pues en caso contrario, al multiplicarlo por sí mismo, el producto sería impar. En símbolos, $p = 2p_1$, donde p_1 es un entero. Esto nos lleva a $2p_1^2 = q^2$, lo que significa que q debe ser par; digamos, $q = 2q_1$, donde q_1 es un entero. Lo anterior hace que 2 sea un factor de p y q , lo que contradice nuestra elección de p y q como enteros sin factores comunes distintos de 1. Por lo tanto, no hay un número racional cuyo cuadrado sea 2.

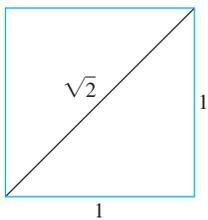


FIGURA A.23 Con una regla y un compás es posible construir un segmento de longitud irracional.

Aunque las personas de que hemos hablado no podrían hallar una solución racional para la ecuación $x^2 = 2$, sí serían capaces de obtener una sucesión de cocientes racionales

$$\frac{1}{1}, \frac{7}{5}, \frac{41}{29}, \frac{239}{169}, \dots, \quad (4)$$

cuyos cuadrados forman una sucesión

$$\frac{1}{1}, \frac{49}{25}, \frac{1681}{841}, \frac{57,121}{28,561}, \dots, \quad (5)$$

que converge a 2. Esta vez la imaginación sugería la necesidad del concepto de límite de una sucesión de números racionales. Si aceptamos el hecho de que una sucesión creciente acotada por arriba siempre tiene un límite (teorema 6, sección 10.1) y observamos que la sucesión (4) tiene tales propiedades, querríamos que tuviera un límite L . Esto también nos indica, de acuerdo con (5) que $L^2 = 2$ y, por lo tanto, que L no es uno de nuestros números racionales. Si agregamos a los números racionales los límites de todas las sucesiones de números racionales crecientes y acotadas por arriba, llegaremos al sistema de todos los números “reales”. Escribimos la palabra *real* entre comillas porque ninguna característica de este sistema lo hace “más real” o “menos real” que a cualquier otro sistema matemático.

Los números complejos

Durante el desarrollo del sistema de números reales se recurrió muchas veces a la imaginación. De hecho, fue necesario hacer alarde de inventiva por lo menos en tres momentos durante la construcción del sistema que hemos analizado hasta el momento:

1. En la *invención del primer sistema*: el conjunto de *todos los enteros*, construido a partir de los números para contar.
2. En la *invención del segundo sistema*: el conjunto de los *números racionales* m/n , construido a partir de los enteros.
3. En la *invención del tercer sistema*: el conjunto de todos los *números reales* x , construido a partir de los números racionales.

Tales sistemas, producto de la inventiva, forman una jerarquía en la que cada sistema contiene al anterior. Cada sistema es también más rico que su predecesor, en el sentido de que permite realizar operaciones adicionales sin necesidad de recurrir a otros:

1. En el sistema de todos los enteros, es posible resolver todas las ecuaciones de la forma

$$x + a = 0, \quad (6)$$

donde a puede ser cualquier entero.

2. En el sistema de todos los números racionales, podemos resolver todas las ecuaciones de la forma

$$ax + b = 0, \quad (7)$$

siempre y cuando a y b sean números racionales $a \neq 0$.

3. En el sistema de todos los números reales, es posible resolver todas las ecuaciones de los tipos (6) y (7), además de todas las ecuaciones cuadráticas

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{con} \quad a \neq 0 \quad \text{y} \quad b^2 - 4ac \geq 0. \quad (8)$$

Es probable que usted conozca la fórmula que da las soluciones a la ecuación (8); a saber,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad (9)$$

y que también esté familiarizado con el hecho de que cuando el discriminante, $b^2 - 4ac$, es negativo, las soluciones de la ecuación (9) no pertenecen a los sistemas que hemos analizado. De hecho, la sencilla ecuación cuadrática

$$x^2 + 1 = 0$$

es imposible de resolver si los únicos sistemas numéricos que pueden utilizarse son los tres mencionados.

En consecuencia, llegamos al *cuarto sistema inventado*, el conjunto de *todos los números complejos* $a + ib$. Podríamos omitir el símbolo i y usar la notación de pares ordenados (a, b) . Puesto que desde el punto de vista de las operaciones algebraicas los números a y b se tratan de manera ligeramente distinta, es esencial mantener el *orden*. Por lo tanto, decimos que el **sistema de números complejos** consta del conjunto de todos los pares ordenados de números reales (a, b) , junto con las reglas que indican su igualdad, su suma, su multiplicación, etcétera, y que se presentan a continuación. Usaremos las notaciones (a, b) y $a + ib$ en el siguiente análisis. Llamaremos a a la **parte real** y b a la **parte imaginaria** del número complejo (a, b) .

Tenemos las siguientes definiciones.

Igualdad

$$\begin{aligned} a + ib &= c + id \\ \text{si y si sólo} \\ a &= c \text{ y } b = d. \end{aligned}$$

Dos números complejos (a, b) y (c, d) son *iguales* si y sólo si $a = c$ y $b = d$.

Suma

$$\begin{aligned} (a + ib) + (c + id) \\ = (a + c) + i(b + d) \end{aligned}$$

La *suma* de los dos números complejos (a, b) y (c, d) es el número complejo $(a + c, b + d)$.

Multiplicación

$$\begin{aligned} (a + ib)(c + id) \\ = (ac - bd) + i(ad + bc) \end{aligned}$$

El *producto* de dos números complejos (a, b) y (c, d) es el número complejo $(ac - bd, ad + bc)$.

$$c(a + ib) = ac + i(bc)$$

El producto de un número real c por el número complejo (a, b) es el número complejo (ac, bc) .

El conjunto de todos los números complejos (a, b) , donde el segundo número b es igual a cero, tiene todas las propiedades del conjunto de números reales a . Por ejemplo, la suma y la multiplicación de $(a, 0)$ y $(c, 0)$ da

$$(a, 0) + (c, 0) = (a + c, 0),$$

$$(a, 0) \cdot (c, 0) = (ac, 0),$$

que son números del mismo tipo, con su parte imaginaria igual a cero. Además, si multiplicamos un “número real” $(a, 0)$ y el número complejo (c, d) , obtendremos

$$(a, 0) \cdot (c, d) = (ac, ad) = a(c, d).$$

En particular, el número complejo $(0, 0)$ desempeña el papel del cero en el sistema de números complejos, y el número complejo $(1, 0)$, el de la *unidad* o el *uno*.

El par ordenado $(0, 1)$, con parte real igual a cero y parte imaginaria igual a uno, tiene la propiedad de que su cuadrado,

$$(0, 1)(0, 1) = (-1, 0),$$

tiene parte real igual a menos uno y parte imaginaria igual a cero. Por lo tanto, en el sistema de números complejos (a, b) existe un número $x = (0, 1)$ cuyo cuadrado puede sumarse a la unidad $(1, 0)$ para producir el cero $(0, 0)$, es decir,

$$(0, 1)^2 + (1, 0) = (0, 0).$$

En consecuencia, la ecuación

$$x^2 + 1 = 0$$

tiene una solución $x = (0, 1)$ en este nuevo sistema numérico.

Tal vez usted esté más familiarizado con la notación $a + ib$ que con la notación (a, b) . Como las leyes algebraicas para los pares ordenados nos permiten escribir

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a(1, 0) + b(0, 1),$$

mientras $(1, 0)$ se comporte como la unidad y $(0, 1)$ como una raíz cuadrada de menos uno, no debemos dudar en escribir $a + ib$ en vez de (a, b) . Asociada a b , la i es como un elemento que marca la parte imaginaria de $a + ib$. Es posible pasar del ámbito de los pares ordenados (a, b) al de las expresiones $a + ib$ y viceversa. Pero, una vez que se han aprendido las leyes algebraicas para el sistema de números complejos como pares ordenados (a, b) , el símbolo $(0, 1) = i$ no es menos “real” que el símbolo $(1, 0) = 1$, una vez que hemos aprendido las leyes del álgebra en el sistema complejo de número de pares ordenados (a, b) .

Para reducir cualquier combinación racional de números complejos a un único número complejo, aplicamos las leyes del álgebra elemental, reemplazando i^2 por -1 siempre que aparezca. Por supuesto, no podemos dividir entre el número complejo $(0, 0) = 0 + i0$. Pero si $a + ib \neq 0$, es posible efectuar una división como sigue:

$$\frac{c + id}{a + ib} = \frac{(c + id)(a - ib)}{(a + ib)(a - ib)} = \frac{(ac + bd) + i(ad - bc)}{a^2 + b^2}.$$

El resultado es un número complejo $x + iy$ con

$$x = \frac{ac + bd}{a^2 + b^2}, \quad y = \frac{ad - bc}{a^2 + b^2},$$

y $a^2 + b^2 \neq 0$, pues $a + ib = (a, b) \neq (0, 0)$.

El número $a - ib$, que se utiliza como factor para eliminar i del denominador, es el **conjugado complejo** de $a + ib$. Se acostumbra usar \bar{z} , (que se lee “z barra o z conjugado”) para denotar el conjugado complejo de z ; así,

$$z = a + ib, \quad \bar{z} = a - ib.$$

Al multiplicar el numerador y el denominador de la fracción $(c + id)/(a + ib)$ por el conjugado complejo del denominador, éste se reemplaza siempre por un número real.

EJEMPLO 1 Damos algunos ejemplos de operaciones aritméticas con números complejos.

$$(a) \quad (2 + 3i) + (6 - 2i) = (2 + 6) + (3 - 2)i = 8 + i$$

$$(b) \quad (2 + 3i) - (6 - 2i) = (2 - 6) + (3 - (-2))i = -4 + 5i$$

$$(c) \quad (2 + 3i)(6 - 2i) = (2)(6) + (2)(-2i) + (3i)(6) + (3i)(-2i) \\ = 12 - 4i + 18i - 6i^2 = 12 + 14i + 6 = 18 + 14i$$

$$(d) \quad \frac{2 + 3i}{6 - 2i} = \frac{2 + 3i}{6 - 2i} \frac{6 + 2i}{6 + 2i} \\ = \frac{12 + 4i + 18i + 6i^2}{36 + 12i - 12i - 4i^2} \\ = \frac{6 + 22i}{40} = \frac{3}{20} + \frac{11}{20}i$$

Diagramas de Argand

El número complejo $z = x + iy$ tiene dos representaciones geométricas:

1. como el punto $P(x, y)$ en el plano xy
2. como el vector \overrightarrow{OP} que va del origen a P .

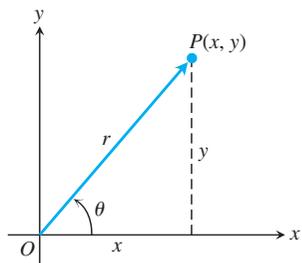


FIGURA A.24 Este diagrama de Argand representa a $z = x + iy$ como un punto $P(x, y)$ y como un vector \overrightarrow{OP} .

En cada representación, el eje x se conoce como **eje real** y el eje y es el **eje imaginario**. Ambas representaciones son **diagramas de Argand** para $x + iy$ (figura A.24).

En términos de las coordenadas polares x y y , tenemos

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \operatorname{sen} \theta,$$

y

$$z = x + iy = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta). \tag{10}$$

Definimos el **valor absoluto** de un número complejo $x + iy$ como la longitud r de un vector \overrightarrow{OP} que va del origen a $P(x, y)$. Denotamos el valor absoluto mediante barras verticales; en consecuencia,

$$|x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Si elegimos siempre las coordenadas polares r y θ de manera que r sea no negativo, entonces

$$r = |x + iy|.$$

El ángulo polar θ es el **argumento** de z y se escribe $\theta = \arg z$. Desde luego, se puede sumar cualquier múltiplo entero de 2π para producir otro ángulo adecuado.

La siguiente ecuación presenta una fórmula útil que relaciona un número complejo z , su conjugado \bar{z} , y su valor absoluto $|z|$, a saber,

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2.$$

Fórmula de Euler

La identidad

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta,$$

llamada **fórmula de Euler** nos permite escribir la ecuación (10) como

$$z = r e^{i\theta}.$$

Esta fórmula, a la vez, nos lleva a las siguientes reglas para el cálculo de productos, cocientes, potencias y raíces de números complejos, así como a diagramas de Argand para $e^{i\theta}$. Como $\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$ es lo que obtenemos de la ecuación (10) al considerar $r = 1$, es posible decir que $e^{i\theta}$ se representa mediante un vector unitario que forma un ángulo θ con la parte positiva del eje x , como muestra en la figura A.25.

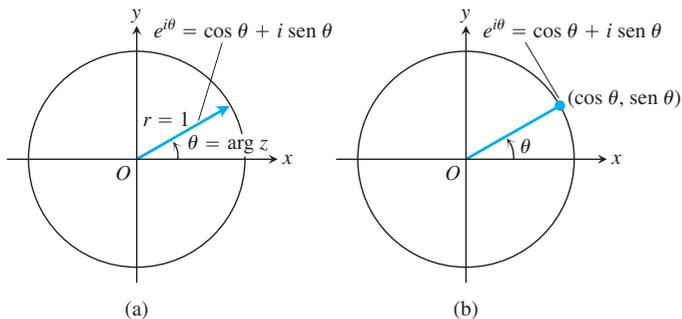


FIGURA A.25 Diagramas de Argand para $e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$, (a) como un vector y (b) como un punto.

Productos

Para multiplicar dos números complejos, multiplicamos sus valores absolutos y sumamos sus ángulos. Sean

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, \quad z_2 = r_2 e^{i\theta_2}, \tag{11}$$

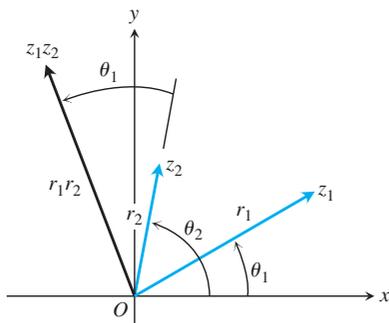


FIGURA A.26 Cuando se multiplican z_1 y z_2 , $|z_1z_2| = r_1 \cdot r_2$ y $\arg(z_1z_2) = \theta_1 + \theta_2$.

de manera que

$$|z_1| = r_1, \quad \arg z_1 = \theta_1; \quad |z_2| = r_2, \quad \arg z_2 = \theta_2.$$

Entonces,

$$z_1z_2 = r_1e^{i\theta_1} \cdot r_2e^{i\theta_2} = r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

y, en consecuencia,

$$\begin{aligned} |z_1z_2| &= r_1r_2 = |z_1| \cdot |z_2| \\ \arg(z_1z_2) &= \theta_1 + \theta_2 = \arg z_1 + \arg z_2. \end{aligned} \tag{12}$$

Por lo tanto, el producto de dos números complejos se representa mediante un vector cuya longitud es el producto de las longitudes de los factores y cuyo argumento es la suma de sus argumentos (figura A.26). En particular, a partir de la ecuación (12) vemos que un vector puede girar en sentido contrario al de las manecillas del reloj un ángulo θ multiplicándolo por $e^{i\theta}$. La multiplicación por i provoca un giro de 90° , por -1 un giro de 180° , por $-i$ un giro de 270° , etcétera.

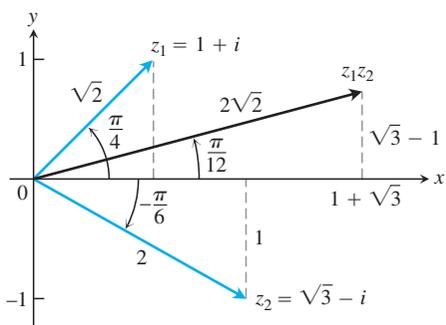


FIGURA A.27 Para multiplicar dos números complejos, multiplique sus valores absolutos y sume sus argumentos.

EJEMPLO 2 Sean $z_1 = 1 + i$, $z_2 = \sqrt{3} - i$. Trazamos estos números complejos en un diagrama de Argand (figura A.27), donde obtenemos las representaciones polares

$$z_1 = \sqrt{2}e^{i\pi/4}, \quad z_2 = 2e^{-i\pi/6}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= 2\sqrt{2} \exp\left(\frac{i\pi}{4} - \frac{i\pi}{6}\right) = 2\sqrt{2} \exp\left(\frac{i\pi}{12}\right) \\ &= 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{12}\right) \approx 2.73 + 0.73i. \end{aligned}$$

La notación $\exp(A)$ representa e^A . ■

Cocientes

Supongamos que $r_2 \neq 0$ en la ecuación (11). Así,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1e^{i\theta_1}}{r_2e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}.$$

Por lo tanto,

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{r_1}{r_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad \text{y} \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \theta_1 - \theta_2 = \arg z_1 - \arg z_2.$$

Es decir, dividimos las longitudes y restamos los ángulos para obtener el cociente de números complejos.

EJEMPLO 3 Sean $z_1 = 1 + i$ y $z_2 = \sqrt{3} - i$, como en el ejemplo 2. Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{1 + i}{\sqrt{3} - i} &= \frac{\sqrt{2}e^{i\pi/4}}{2e^{-i\pi/6}} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{5\pi i/12} \approx 0.707 \left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{12}\right) \\ &\approx 0.183 + 0.683i. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Potencias

Si n es un entero positivo, es posible aplicar las fórmulas de producto en la ecuación (12) para obtener

$$z^n = z \cdot z \cdot \dots \cdot z. \quad n \text{ factores}$$

Con $z = re^{i\theta}$, obtenemos

$$\begin{aligned} z^n &= (re^{i\theta})^n = r^n e^{i(\theta+\theta+\dots+\theta)} && n \text{ sumandos} \\ &= r^n e^{in\theta}. \end{aligned} \quad (13)$$

La longitud $r = |z|$ se eleva a la n -ésima potencia y el ángulo $\theta = \arg z$ se multiplica por n . Si consideramos $r = 1$ en la ecuación (13), obtendremos el teorema de De Moivre.

Teorema de De Moivre

$$(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n = \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta. \quad (14)$$

Si desarrollamos el lado izquierdo de la ecuación de De Moivre mediante el teorema del binomio y la reducimos a la forma $a + ib$, obtendremos fórmulas para $\cos n\theta$ y $\operatorname{sen} n\theta$ como polinomios de grados n en $\cos \theta$ y $\operatorname{sen} \theta$.

EJEMPLO 4 Si $n = 3$ en la ecuación (14), tenemos

$$(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^3 = \cos 3\theta + i \operatorname{sen} 3\theta.$$

El lado izquierdo de esta ecuación se desarrolla como

$$\cos^3 \theta + 3i \cos^2 \theta \operatorname{sen} \theta - 3 \cos \theta \operatorname{sen}^2 \theta - i \operatorname{sen}^3 \theta.$$

La parte real de la expresión anterior debe ser igual a $\cos 3\theta$ y la parte imaginaria debe ser igual a $\operatorname{sen} 3\theta$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \cos 3\theta &= \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \operatorname{sen}^2 \theta, \\ \operatorname{sen} 3\theta &= 3 \cos^2 \theta \operatorname{sen} \theta - \operatorname{sen}^3 \theta. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Raíces

Si $z = re^{i\theta}$ es un número complejo distinto de cero y n es un entero positivo, entonces hay precisamente n números complejos distintos w_0, w_1, \dots, w_{n-1} , que son raíces n -ésimas de z . Para comprender por qué, sea $w = \rho e^{i\alpha}$ una n -ésima raíz de $z = \rho e^{i\theta}$, por lo que

$$w^n = z$$

o

$$\rho^n e^{in\alpha} = re^{i\theta}.$$

Entonces,

$$\rho = \sqrt[n]{r}$$

es la n -ésima raíz real positiva de r . En cuanto al argumento, aunque no podemos decir que $n\alpha$ y θ deben ser iguales, sí es posible afirmar que difieren en un múltiplo entero de 2π . Esto es,

$$n\alpha = \theta + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Por consiguiente,

$$\alpha = \frac{\theta}{n} + k \frac{2\pi}{n}.$$

Por lo tanto, todas las n -ésimas raíces de $z = re^{i\theta}$ están dadas por

$$\sqrt[n]{re^{i\theta}} = \sqrt[n]{r} \exp i\left(\frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (15)$$

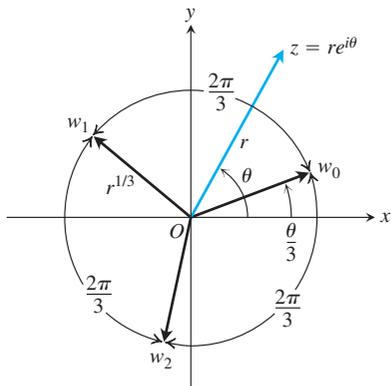


FIGURA A.28 Las tres raíces cúbicas de $z = re^{i\theta}$.

Parecería que hay una infinidad de respuestas distintas correspondientes a la infinidad de valores posibles de k , pero $k = n + m$ da la misma respuesta que $k = m$ en la ecuación (15). Así, sólo necesitamos considerar n valores consecutivos de k para obtener todas las n -ésimas raíces distintas de z . Por conveniencia, tomamos

$$k = 0, 1, 2, \dots, n - 1.$$

Todas las raíces n -ésimas de $re^{i\theta}$ están en una circunferencia con centro en el origen y con radio igual a la n -ésima raíz positiva de r . Una de ellas tiene argumento $\alpha = \theta/n$. Las demás se distribuyen de manera uniforme en la circunferencia, cada una separada de sus vecinas por un ángulo igual a $2\pi/n$. La figura A.28 ilustra la distribución de las tres raíces cúbicas w_0, w_1, w_2 del número complejo $z = re^{i\theta}$.

EJEMPLO 5 Determine las cuatro raíces cuartas de -16 .

Solución Como primer paso, ubicamos el número -16 en un diagrama de Argand (figura A.29) y determinamos su representación polar $re^{i\theta}$. En este caso, $z = -16$ y $r = +16$ y $\theta = \pi$. Una de las raíces cuartas de $16e^{i\pi}$ es $2e^{i\pi/4}$. Obtenemos las demás mediante sumas sucesivas de $2\pi/4 = \pi/2$ al argumento de esta primera raíz. Por lo tanto,

$$\sqrt[4]{16 \exp i\pi} = 2 \exp i\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right),$$

y las cuatro raíces son

$$w_0 = 2 \left[\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \right] = \sqrt{2}(1 + i)$$

$$w_1 = 2 \left[\cos \frac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{4} \right] = \sqrt{2}(-1 + i)$$

$$w_2 = 2 \left[\cos \frac{5\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{4} \right] = \sqrt{2}(-1 - i)$$

$$w_3 = 2 \left[\cos \frac{7\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{7\pi}{4} \right] = \sqrt{2}(1 - i). \quad \blacksquare$$

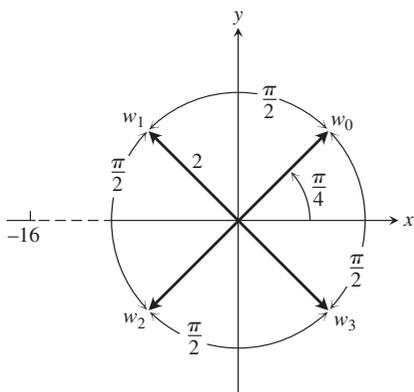


FIGURA A.29 Las cuatro raíces cuartas de -16 .

El teorema fundamental del álgebra

Alguien podría decir que la invención de $\sqrt{-1}$ está muy bien y que conduce a un sistema numérico más rico que el de los números reales, pero ¿en qué momento se detendrá este proceso? ¿Tendremos que inventar más sistemas para obtener $\sqrt[3]{-1}$, $\sqrt[4]{-1}$, y así sucesivamente? Resulta que esto no es necesario. Tales números pueden expresarse ya en términos del sistema de números complejos $a + ib$. De hecho, el teorema fundamental del álgebra dice que con la introducción de los números complejos se cuenta con los números suficientes para factorizar cualquier polinomio como un producto de factores lineales y, por lo tanto, los números suficientes para resolver cualquier ecuación polinomial posible.

El teorema fundamental del álgebra

Toda ecuación polinomial de la forma

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0,$$

donde los coeficientes a_0, a_1, \dots, a_n son cualesquiera números complejos, cuyo grado n es mayor que o igual a uno, y cuyo coeficiente principal a_n no es cero, tiene exactamente n raíces en el sistema de números complejos siempre y cuando cada raíz múltiple con multiplicidad m se cuente como m raíces.

En casi todos los textos sobre la teoría de funciones de una variable compleja aparece una demostración de este teorema.

Ejercicios A.7

Operaciones con números complejos

1. Cómo multiplican números complejos las computadoras

Calcule $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.

- a. $(2, 3) \cdot (4, -2)$ b. $(2, -1) \cdot (-2, 3)$
- c. $(-1, -2) \cdot (2, 1)$

(Ésta es la forma en la que las computadoras multiplican números complejos)

2. Resuelva las siguientes ecuaciones en términos de los números reales x y y .

- a. $(3 + 4i)^2 - 2(x - iy) = x + iy$
- b. $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 + \frac{1}{x+iy} = 1 + i$
- c. $(3 - 2i)(x + iy) = 2(x - 2iy) + 2i - 1$

Graficación y geometría

3. ¿Cuántos de los siguientes números complejos pueden obtenerse geoméricamente a partir de $z + iy$? Elabore un bosquejo de los números.

- a. \bar{z} b. $\overline{(-z)}$
- c. $-z$ d. $1/z$

4. Demuestre que la distancia entre los puntos z_1 y z_2 en un diagrama de Argand es $|z_1 - z_2|$.

En los ejercicios 5 a 10, grafique los puntos $z = x + iy$ que satisfacen las condiciones dadas.

- 5. a. $|z| = 2$ b. $|z| < 2$ c. $|z| > 2$
- 6. $|z - 1| = 2$ 7. $|z + 1| = 1$
- 8. $|z + 1| = |z - 1|$ 9. $|z + i| = |z - 1|$
- 10. $|z + 1| \geq |z|$

En los ejercicios 11 a 14, exprese los números complejos en la forma $re^{i\theta}$, con $r \geq 0$ y $-\pi < \theta \leq \pi$. Trace un diagrama de Argand para cada cálculo.

- 11. $(1 + \sqrt{-3})^2$ 12. $\frac{1+i}{1-i}$
- 13. $\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$ 14. $(2 + 3i)(1 - 2i)$

Potencias y raíces

Utilice el teorema de De Moivre para expresar las funciones trigonométricas en los ejercicios 15 y 16 en términos de $\cos \theta$ y $\sin \theta$.

- 15. $\cos 4\theta$ 16. $\sin 4\theta$

- 17. Determine las tres raíces cúbicas de 1.
- 18. Determine las dos raíces cuadradas de i .
- 19. Determine las tres raíces cúbicas de $-8i$.
- 20. Determine las seis raíces sextas de 64.
- 21. Determine las cuatro soluciones de la ecuación $z^4 - 2z^2 + 4 = 0$.
- 22. Determine las seis soluciones de la ecuación $z^6 + 2z^3 + 2 = 0$.
- 23. Determine todas las soluciones de la ecuación $x^4 + 4x^2 + 16 = 0$.
- 24. Resuelva la ecuación $x^4 + 1 = 0$.

Teoría y ejemplos

25. Números complejos y vectores en el plano Demuestre con un diagrama de Argand que la ley para sumar números complejos es la misma que la ley del paralelogramo para la suma de vectores.

26. Aritmética compleja con conjugados Demuestre que el conjugado de la suma (producto o cociente) de dos números complejos, z_1 y z_2 , es la misma que la suma (producto o cociente) de sus conjugados.

27. Raíces complejas de polinomios con coeficientes reales en parejas conjugadas complejas

- a. Amplíe los resultados del ejercicio 26 para demostrar que $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$, si

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

es un polinomio con coeficientes reales, a_0, \dots, a_n .

- b. Si z es una raíz de la ecuación $f(z) = 0$, donde $f(z)$ es un polinomio con coeficientes reales, como en el inciso (a), demuestre que el conjugado \bar{z} también es raíz de la ecuación. (Sugerencia: Sea $f(z) = u + iv = 0$; entonces, u y v son iguales a cero. Utilice el hecho de que $f(\bar{z}) = \overline{f(z)} = u - iv$.)

- 28. **Valor absoluto de un conjugado** Demuestre que $|\bar{z}| = |z|$.
- 29. **Cuando $z = \bar{z}$** Si z y \bar{z} son iguales, ¿qué puede decir acerca de la ubicación del punto z en el plano complejo?

30. Partes real e imaginaria Sean $\text{Re}(z)$ la parte real de z e $\text{Im}(z)$ la parte imaginaria. Demuestre que se cumplen las siguientes relaciones para cualesquiera números complejos z, z_1 y z_2 .

- $z + \bar{z} = 2\text{Re}(z)$
- $z - \bar{z} = 2i\text{Im}(z)$

c. $|\text{Re}(z)| \leq |z|$

d. $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\text{Re}(z_1\bar{z}_2)$

e. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

A.8

La ley distributiva para el producto vectorial cruz

En este apéndice demostraremos la ley distributiva

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w},$$

que es la propiedad 2 en la sección 12.4.

Demostración Para deducir la ley distributiva, construimos $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ de una forma nueva. Dibujamos $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ desde el punto común O y construimos un plano M perpendicular a \mathbf{u} en O (figura A.30). Luego proyectamos \mathbf{v} ortogonalmente sobre M , lo que da un vector \mathbf{v}' con longitud $|\mathbf{v}|\sin\theta$. El vector \mathbf{v}' se hace girar 90° con respecto a \mathbf{u} en el sentido positivo para producir un vector \mathbf{v}'' . Por último, multiplicamos \mathbf{v}'' por la longitud de \mathbf{u} . El vector resultante $|\mathbf{u}|\mathbf{v}''$ es igual a $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, ya que \mathbf{v}'' tiene la misma dirección que $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ por su construcción (figura A.30) y

$$|\mathbf{u}|\mathbf{v}'' = |\mathbf{u}|\mathbf{v}' = |\mathbf{u}|\mathbf{v}|\sin\theta = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}|.$$

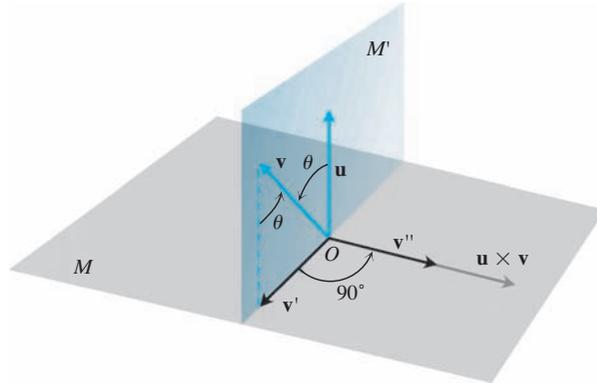


FIGURA A.30 Como se explicó en el texto, $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = |\mathbf{u}|\mathbf{v}''$.

Ahora, cada una de estas tres operaciones, a saber,

- la proyección sobre M .
- la rotación de 90° con respecto a \mathbf{u}
- la multiplicación por el escalar $|\mathbf{u}|$

cuando se aplica a un triángulo cuyo plano no es paralelo a \mathbf{u} , producirá otro triángulo. Si iniciamos con el triángulo cuyos lados son \mathbf{v}, \mathbf{w} y $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ (figura A.31) y aplicamos los tres pasos, de manera sucesiva, obtendremos lo siguiente:

- Un triángulo cuyos lados son \mathbf{v}', \mathbf{w}' y $(\mathbf{v} + \mathbf{w})'$, que satisfacen la ecuación vectorial

$$\mathbf{v}' + \mathbf{w}' = (\mathbf{v} + \mathbf{w})'$$

- Un triángulo cuyos lados son $\mathbf{v}'', \mathbf{w}''$ y $(\mathbf{v} + \mathbf{w})''$, que satisfacen la ecuación vectorial

$$\mathbf{v}'' + \mathbf{w}'' = (\mathbf{v} + \mathbf{w})''$$

(La notación de doble prima en cada vector tiene el mismo significado que en la figura A.30).

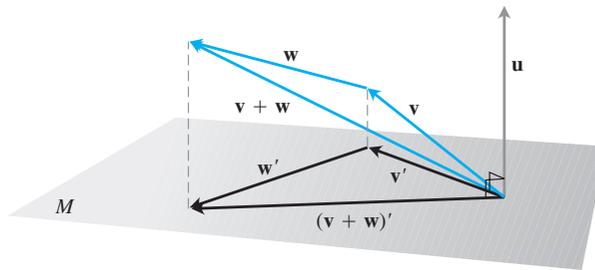


FIGURA A.31 Los vectores \mathbf{v} , \mathbf{w} , $\mathbf{v} + \mathbf{w}$, y sus proyecciones sobre un plano perpendicular a \mathbf{u} .

3. Un triángulo cuyos lados son $|\mathbf{u}|v''$, $|\mathbf{u}|w''$, y $|\mathbf{u}|(v + w)''$ que satisfacen la ecuación vectorial

$$|\mathbf{u}|v'' + |\mathbf{u}|w'' = |\mathbf{u}|(v + w)''.$$

Al sustituir $|\mathbf{u}|v'' = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$, $|\mathbf{u}|w'' = \mathbf{u} \times \mathbf{w}$, y $|\mathbf{u}|(v + w)'' = \mathbf{u} \times (v + w)$ a partir de nuestro análisis anterior, en la última ecuación da

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}),$$

que es la ley que queríamos establecer. ■

A.9

El teorema de la derivada mixta y el teorema del incremento

Este apéndice deduce el teorema de la derivada mixta (teorema 2, sección 14.3) y el teorema del incremento para funciones de dos variables (teorema 3, sección 14.3). En 1734 Euler publicó el teorema de la derivada mixta en una serie de artículos que escribió sobre hidrodinámica.

TEOREMA 2: El teorema de derivada mixta Si $f(x, y)$ y sus derivadas parciales f_x , f_y , f_{xy} y f_{yx} están definidas en una región abierta que contiene un punto (a, b) y son todas continuas en (a, b) , entonces

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b).$$

Demostración La igualdad de $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$ se puede establecer mediante cuatro aplicaciones del teorema del valor medio (teorema 4 de la sección 4.2). Por hipótesis, el punto (a, b) está en el interior de un rectángulo R en el plano xy , donde f , f_x , f_y , f_{xy} y f_{yx} están definidas. Sean h y k números tales que el punto $(a + h, b + k)$ también está en R y consideremos la diferencia

$$\Delta = F(a + h) - F(a), \tag{1}$$

donde

$$F(x) = f(x, b + k) - f(x, b). \tag{2}$$

Aplicamos el teorema del valor medio a F , que es continua por ser derivable. Entonces, la ecuación (1) se convierte en

$$\Delta = hF'(c_1), \quad (3)$$

donde c_1 está entre a y $a + h$. De acuerdo con la ecuación (2),

$$F'(x) = f_x(x, b + k) - f_x(x, b),$$

de manera que la ecuación (3) se convierte en

$$\Delta = h[f_x(c_1, b + k) - f_x(c_1, b)]. \quad (4)$$

Si aplicamos el teorema del valor medio de la función $g(y) = f_x(c_1, y)$ tenemos

$$g(b + k) - g(b) = kg'(d_1),$$

o bien

$$f_x(c_1, b + k) - f_x(c_1, b) = kf_{xy}(c_1, d_1)$$

para alguna d_1 entre b y $b + k$. Al sustituir esto en la ecuación (4), obtendremos

$$\Delta = hkf_{xy}(c_1, d_1) \quad (5)$$

para cierto punto (c_1, d_1) en el rectángulo R' , cuyos vértices son los cuatro puntos (a, b) , $(a + h, b)$, $(a + h, b + k)$ y $(a, b + k)$. (Véase la figura A.32).

Al sustituir la ecuación (2) en la ecuación (1), también podemos escribir

$$\begin{aligned} \Delta &= f(a + h, b + k) - f(a + h, b) - f(a, b + k) + f(a, b) \\ &= [f(a + h, b + k) - f(a, b + k)] - [f(a + h, b) - f(a, b)] \\ &= \phi(b + k) - \phi(b), \end{aligned} \quad (6)$$

donde

$$\phi(y) = f(a + h, y) - f(a, y). \quad (7)$$

Si aplicamos el teorema del valor medio a la ecuación (6), ahora nos da

$$\Delta = k\phi'(d_2) \quad (8)$$

para algún d_2 entre b y $b + k$. De acuerdo con la ecuación (7),

$$\phi'(y) = f_y(a + h, y) - f_y(a, y). \quad (9)$$

Al sustituir la ecuación (9) en la ecuación (8), se obtiene

$$\Delta = k[f_y(a + h, d_2) - f_y(a, d_2)].$$

Por último, aplicamos el teorema del valor medio a la expresión en corchetes para obtener

$$\Delta = khf_{yx}(c_2, d_2) \quad (10)$$

para algún c_2 entre a y $a + h$.

Juntas, las ecuaciones (5) y (10) demuestran que

$$f_{xy}(c_1, d_1) = f_{yx}(c_2, d_2), \quad (11)$$

donde (c_1, d_1) y (c_2, d_2) están en el rectángulo R' (figura A.32). La ecuación (11) no es precisamente el resultado que buscamos, pues sólo nos dice que f_{xy} tiene el mismo valor en (c_1, d_1) que f_{yx} en (c_2, d_2) . Sin embargo, los números h y k pueden hacerse tan pequeños como se quiera. La hipótesis de que f_{xy} y f_{yx} son continuas en (a, b) significa que $f_{xy}(c_1, d_1) = f_{xy}(a, b) + \epsilon_1$ y $f_{yx}(c_2, d_2) = f_{yx}(a, b) + \epsilon_2$, donde cada una de $\epsilon_1, \epsilon_2 \rightarrow 0$ cuando $h, k \rightarrow 0$. Por lo tanto, si h y $k \rightarrow 0$, tenemos que $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$. ■

La igualdad entre $f_{xy}(a, b)$ y $f_{yx}(a, b)$ puede demostrarse con hipótesis más débiles que las planteadas. Por ejemplo, basta que f, f_x y f_y existan en R y que f_{xy} sea continua en (a, b) . Entonces, f_{yx} existe en (a, b) y es igual a f_{xy} en ese punto.

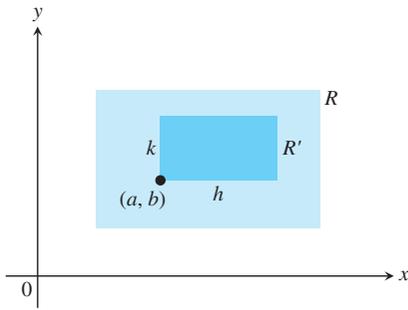


FIGURA A.32 La clave para demostrar que $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$ es que no importa qué tan pequeño sea R' , f_{xy} y f_{yx} toman valores iguales dentro de R' (aunque no necesariamente en el mismo punto).

TEOREMA 3: El teorema del incremento para funciones de dos variables

Suponga que las primeras derivadas parciales de $f(x, y)$ están definidas en una región abierta R que contiene al punto (x_0, y_0) y que f_x y f_y son continuas en (x_0, y_0) . Entonces, el cambio

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

en el valor de f que resulta de moverse de (x_0, y_0) a otro punto $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ en R satisface una ecuación de la forma

$$\Delta z = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \epsilon_1\Delta x + \epsilon_2\Delta y$$

donde cada $\epsilon_1, \epsilon_2 \rightarrow 0$ cuando $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$.

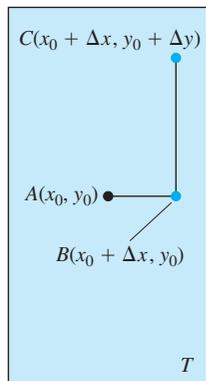


FIGURA A.33 La región rectangular T en la demostración del teorema del incremento. La figura se dibujó para Δx y Δy positivos, pero cualquiera de ellos podría ser cero o negativo.

Demostración Trabajamos dentro de un rectángulo T con centro en $A(x_0, y_0)$, que está dentro de R , y suponemos que Δx y Δy ya son lo bastante pequeños como para que el segmento de recta que une A con $B(x_0 + \Delta x, y_0)$ y el segmento de recta que une B con $C(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ estén en el interior de T (figura A.33).

Es posible pensar en Δz como la suma $\Delta z = \Delta z_1 + \Delta z_2$ de dos incrementos, donde

$$\Delta z_1 = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$$

es el cambio en el valor de f de A a B y

$$\Delta z_2 = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0)$$

es el cambio en el valor de f de B a C (figura A.34).

En el intervalo cerrado de valores de x , que va de x_0 a $x_0 + \Delta x$, la función $F(x) = f(x, y_0)$ es una función derivable (y por lo tanto continua) de x , con derivada

$$F'(x) = f_x(x, y_0).$$

Según el teorema del valor medio (teorema 4 de la sección 4.2), existe un valor c de x entre x_0 , $x_0 + \Delta x$ donde

$$F(x_0 + \Delta x) - F(x_0) = F'(c) \Delta x$$

o

$$f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) = f_x(c, y_0) \Delta x$$

o

$$\Delta z_1 = f_x(c, y_0) \Delta x. \tag{12}$$

De manera similar, $G(y) = f(x_0 + \Delta x, y)$ es una función derivable (y por lo tanto continua) de y en el intervalo cerrado en y que va de y_0 a $y_0 + \Delta y$, con derivada

$$G'(y) = f_y(x_0 + \Delta x, y).$$

En consecuencia, existe un valor d de y entre y_0 y $y_0 + \Delta y$ donde

$$G(y_0 + \Delta y) - G(y_0) = G'(d) \Delta y$$

o

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) = f_y(x_0 + \Delta x, d) \Delta y$$

o

$$\Delta z_2 = f_y(x_0 + \Delta x, d) \Delta y. \tag{13}$$

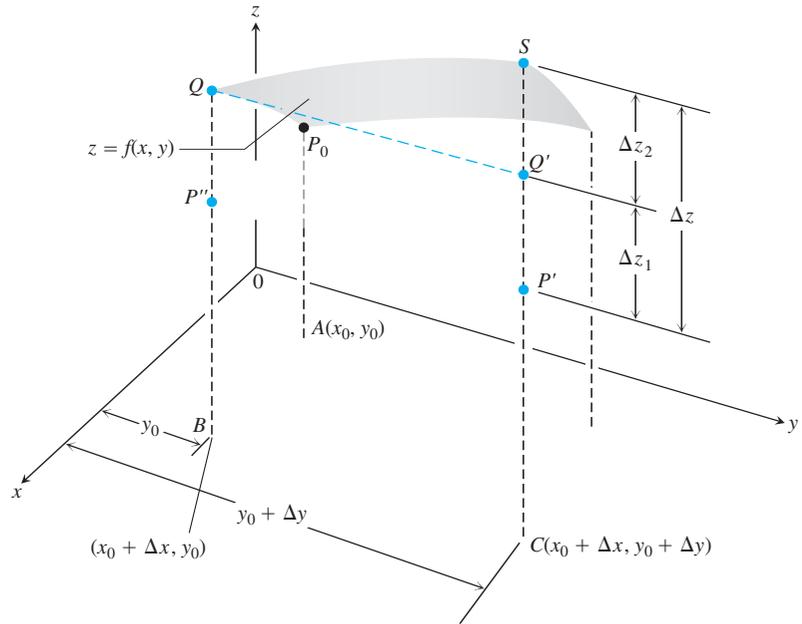


FIGURA A.34 Parte de la superficie $z = f(x, y)$ cerca de $P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Los puntos P_0 , P' , y P'' tienen la misma altura $z_0 = f(x_0, y_0)$ por arriba del plano xy . El cambio en z es $\Delta z = P'S$. El cambio

$$\Delta z_1 = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0),$$

mostrado como $P''Q = P'Q'$, es consecuencia del cambio de x , desde x_0 hasta $x_0 + \Delta x$ mientras y se mantiene igual a y_0 . Luego, cuando x se mantiene igual a $x_0 + \Delta x$,

$$\Delta z_2 = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0)$$

es el cambio en z causado por el cambio de y_0 a $y_0 + \Delta y$, que está representado por $Q'S$. El cambio total en z es la suma de Δz_1 a Δz_2 .

Ahora bien, cuando Δx y $\Delta y \rightarrow 0$, sabemos que $c \rightarrow x_0$ y $d \rightarrow y_0$. Por lo tanto, como f_x y f_y son continuas en (x_0, y_0) , las cantidades

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= f_x(c, y_0) - f_x(x_0, y_0), \\ \epsilon_2 &= f_y(x_0 + \Delta x, d) - f_y(x_0, y_0) \end{aligned} \quad (14)$$

tienden a cero cuando Δx y $\Delta y \rightarrow 0$.

Por último,

$$\begin{aligned} \Delta z &= \Delta z_1 + \Delta z_2 \\ &= f_x(c, y_0)\Delta x + f_y(x_0 + \Delta x, d)\Delta y && \text{A partir de las ecuaciones (12) y (13).} \\ &= [f_x(x_0, y_0) + \epsilon_1]\Delta x + [f_y(x_0, y_0) + \epsilon_2]\Delta y && \text{A partir de la ecuación (14).} \\ &= f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \epsilon_1\Delta x + \epsilon_2\Delta y, \end{aligned}$$

donde ϵ_1 y $\epsilon_2 \rightarrow 0$ cuando Δx y $\Delta y \rightarrow 0$, que era lo que teníamos que demostrar. ■

Resultados análogos son válidos para funciones con cualquier número finito de variables independientes. Suponga que las primeras derivadas parciales de $w = f(x, y, z)$ se definen en toda una región abierta que contiene al punto (x_0, y_0, z_0) , y que f_x , f_y y f_z son continuas en (x_0, y_0, z_0) . Entonces,

$$\begin{aligned} \Delta w &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0) \\ &= f_x\Delta x + f_y\Delta y + f_z\Delta z + \epsilon_1\Delta x + \epsilon_2\Delta y + \epsilon_3\Delta z, \end{aligned} \quad (15)$$

donde $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3 \rightarrow 0$ cuando $\Delta x, \Delta y, y \Delta z \rightarrow 0$.

Las derivadas parciales f_x, f_y y f_z de la ecuación (15) deben evaluarse en el punto (x_0, y_0, z_0) .

La ecuación (15) puede demostrarse considerando Δw como la suma de tres incrementos.

$$\Delta w_1 = f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0) \quad (16)$$

$$\Delta w_2 = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0) - f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) \quad (17)$$

$$\Delta w_3 = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0), \quad (18)$$

y aplicando el teorema del valor medio a cada uno por separado. Dos coordenadas permanecen constantes y sólo una varía en cada uno de estos incrementos parciales $\Delta w_1, \Delta w_2, \Delta w_3$. En la ecuación (17), por ejemplo, sólo varía y , pues x se mantiene constante igual a $x_0 + \Delta x$, y z se mantiene igual a z_0 . Como $f(x_0 + \Delta x, y, z_0)$ es una función continua de y con una derivada f_y , se sujeta al teorema del valor medio; así, tenemos

$$\Delta w_2 = f_y(x_0 + \Delta x, y_1, z_0) \Delta y$$

para cierta y_1 entre y_0 y $y_0 + \Delta y$.

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS CON NÚMERO IMPAR

CAPÍTULO 12

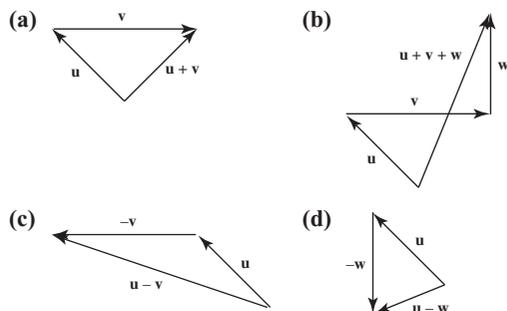
Sección 12.1, pp. 663–664

- La línea a través del punto $(2, 3, 0)$ paralela al eje z
- El eje x
- El círculo $x^2 + y^2 = 4$ en el plano xy
- El círculo $x^2 + z^2 = 4$ en el plano xz
- El círculo $y^2 + z^2 = 1$ en el plano yz
- El círculo $x^2 + y^2 = 16$ en el plano xy
- La elipse formada por la intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y el plano $z = y$
- La parábola $y = x^2$ en el plano xy
- (a) El primer cuadrante del plano xy
(b) El cuarto cuadrante del plano xy
- (a) La pelota de radio 1 con centro en el origen
(b) Todos los puntos mayores que 1 a partir del origen
- (a) La pelota de radio 2 con centro en el origen con el interior de la pelota de radio 1 con centro en el origen cambiado
(b) El hemisferio sólido superior de radio 1 con centro en el origen
- (a) La región sobre o dentro de la parábola $y = x^2$ en el plano xy y todos los puntos arriba de esta región
(b) La región sobre o a la izquierda de la parábola $x = y^2$ en el plano xy y todos los puntos arriba de ella que están a 2 unidades o menos del plano xy
- (a) $x = 3$ (b) $y = -1$ (c) $z = -2$
- (a) $z = 1$ (b) $x = 3$ (c) $y = -1$
- (a) $x^2 + (y - 2)^2 = 4, z = 0$
(b) $(y - 2)^2 + z^2 = 4, x = 0$ (c) $x^2 + z^2 = 4, y = 2$
- (a) $y = 3, z = -1$ (b) $x = 1, z = -1$ (c) $x = 1, y = 3$
- $x^2 + y^2 + z^2 = 25, z = 3$ 35. $0 \leq z \leq 1$ 37. $z \leq 0$
- (a) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 < 1$
(b) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 > 1$
- 3 43. 7 45. $2\sqrt{3}$ 47. $C(-2, 0, 2), a = 2\sqrt{2}$
- $C(\sqrt{2}, \sqrt{2}, -\sqrt{2}), a = \sqrt{2}$
- $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 14$
- $(x + 1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{16}{81}$
- $C(-2, 0, 2), a = \sqrt{8}$ 57. $C\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right), a = \frac{5\sqrt{3}}{4}$
- (a) $\sqrt{y^2 + z^2}$ (b) $\sqrt{x^2 + z^2}$ (c) $\sqrt{x^2 + y^2}$
- $\sqrt{17} + \sqrt{33} + 6$ 63. $y = 1$
- (a) $(0, 3, -3)$ (b) $(0, 5, -5)$

Sección 12.2, pp. 672–674

- (a) $\langle 9, -6 \rangle$ (b) $3\sqrt{13}$ 3. (a) $\langle 1, 3 \rangle$ (b) $\sqrt{10}$
- (a) $\langle 12, -19 \rangle$ (b) $\sqrt{505}$ 7. (a) $\left\langle \frac{1}{5}, \frac{14}{5} \right\rangle$ (b) $\frac{\sqrt{197}}{5}$
- $\langle 1, -4 \rangle$ 11. $\langle -2, -3 \rangle$ 13. $\left\langle -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle$
- $\left\langle -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle$ 17. $-3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ 19. $-3\mathbf{i} + 16\mathbf{j}$
- $3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$

23. El vector \mathbf{v} es horizontal y de una pulgada de largo. Los vectores \mathbf{u} y \mathbf{w} son de $\frac{1}{16}$ in de largo, \mathbf{w} es vertical y \mathbf{u} forma un ángulo de 45° con la horizontal. Todos los vectores deben dibujarse a escala.



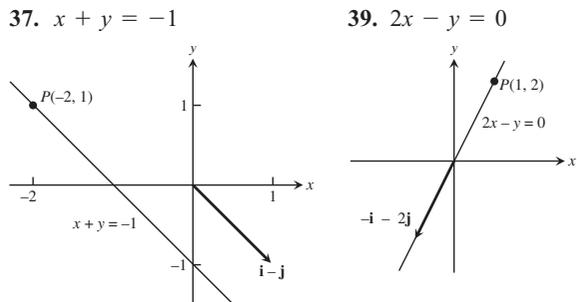
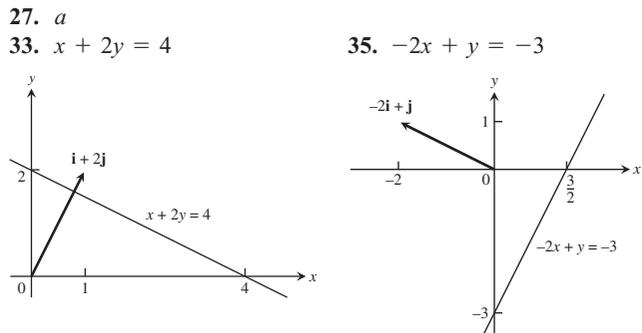
25. $3\left(\frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{1}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k}\right)$ 27. $5(\mathbf{k})$
29. $\sqrt{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{k}\right)$
31. (a) $2\mathbf{i}$ (b) $-\sqrt{3}\mathbf{k}$ (c) $\frac{3}{10}\mathbf{j} + \frac{2}{5}\mathbf{k}$ (d) $6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$
33. $\frac{7}{13}(12\mathbf{i} - 5\mathbf{k})$
35. (a) $\frac{3}{5\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{4}{5\sqrt{2}}\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k}$ (b) $(1/2, 3, 5/2)$
37. (a) $-\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{k}$ (b) $\left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}\right)$
39. $A(4, -3, 5)$ 41. $a = \frac{3}{2}, b = \frac{1}{2}$
43. $\approx \langle -338.095, 725.046 \rangle$
45. $|\mathbf{F}_1| = \frac{100 \cos 45^\circ}{\sin 75^\circ} \approx 73.205 \text{ N}$
 $|\mathbf{F}_2| = \frac{100 \cos 30^\circ}{\sin 75^\circ} \approx 89.658 \text{ N}$
 $\mathbf{F}_1 = \langle -|\mathbf{F}_1| \cos 30^\circ, |\mathbf{F}_1| \sin 30^\circ \rangle \approx \langle -63.397, 36.603 \rangle$
 $\mathbf{F}_2 = \langle |\mathbf{F}_2| \cos 45^\circ, |\mathbf{F}_2| \sin 45^\circ \rangle \approx \langle 63.397, 63.397 \rangle$
47. $w = \frac{100 \sin 75^\circ}{\cos 40^\circ} \approx 126.093 \text{ N}$
 $|\mathbf{F}_1| = \frac{w \cos 35^\circ}{\sin 75^\circ} \approx 106.933 \text{ N}$
49. (a) $(5 \cos 60^\circ, 5 \sin 60^\circ) = \left(\frac{5}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$
 (b) $(5 \cos 60^\circ + 10 \cos 315^\circ, 5 \sin 60^\circ + 10 \sin 315^\circ) = \left(\frac{5 + 10\sqrt{2}}{2}, \frac{5\sqrt{3} - 10\sqrt{2}}{2}\right)$

51. (a) $\frac{3}{2}\mathbf{i} + \frac{3}{2}\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ (b) $\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ (c) $(2, 2, 1)$

Sección 12.3, pp. 680–682

- (a) $-25, 5, 5$ (b) -1 (c) -5 (d) $-2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \sqrt{5}\mathbf{k}$
- (a) $25, 15, 5$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{5}{3}$ (d) $\frac{1}{9}(10\mathbf{i} + 11\mathbf{j} - 2\mathbf{k})$
- (a) $2, \sqrt{34}, \sqrt{3}$ (b) $\frac{2}{\sqrt{3}\sqrt{34}}$ (c) $\frac{2}{\sqrt{34}}$
(d) $\frac{1}{17}(5\mathbf{j} - 3\mathbf{k})$

7. (a) $10 + \sqrt{17}, \sqrt{26}, \sqrt{21}$ (b) $\frac{10 + \sqrt{17}}{\sqrt{546}}$
 (c) $\frac{10 + \sqrt{17}}{\sqrt{26}}$ (d) $\frac{10 + \sqrt{17}}{26}(5\mathbf{i} + \mathbf{j})$
 9. 0.75 rad 11. 1.77 rad
 13. Ángulo en $A = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \approx 63.435$ grados, ángulo en
 $B = \cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) \approx 53.130$ grados, ángulo en
 $C = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \approx 63.435$ grados.
 23. Componente horizontal: ≈ 1188 ft/seg, componente vertical:
 ≈ 167 ft/seg
 25. (a) Puesto que $|\cos \theta| \leq 1$, tenemos que
 $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}||\cos \theta| \leq |\mathbf{u}||\mathbf{v}|(1) = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|$.
 (b) Existe igualdad precisamente cuando $|\cos \theta| = 1$ o cuando
 \mathbf{u} o \mathbf{v} o ambos son $\mathbf{0}$. En el caso de vectores diferentes de
 cero, existe igualdad cuando $\theta = 0$ o π , es decir, cuando
 los vectores son paralelos.



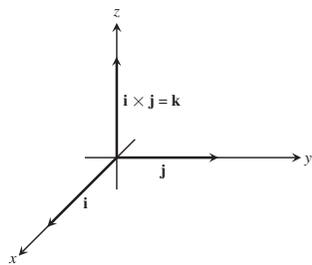
41. 5 J 43. 3464 J 45. $\frac{\pi}{4}$ 47. $\frac{\pi}{6}$ 49. 0.14

Sección 12.4, pp. 686–688

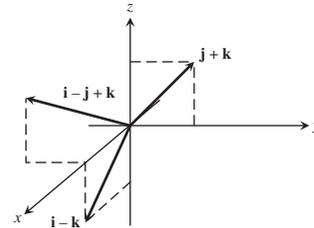
1. $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = 3$, la dirección es $\frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{1}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}$; $|\mathbf{v} \times \mathbf{u}| = 3$,
 la dirección es $-\frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{1}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k}$
 3. $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = 0$, sin dirección; $|\mathbf{v} \times \mathbf{u}| = 0$, sin dirección
 5. $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = 6$, la dirección es $-\mathbf{k}$; $|\mathbf{v} \times \mathbf{u}| = 6$, la dirección es \mathbf{k}
 7. $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = 6\sqrt{5}$, la dirección es
 $\frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{i} - \frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{k}$; $|\mathbf{v} \times \mathbf{u}| = 6\sqrt{5}$, la dirección es

$$-\frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{k}$$

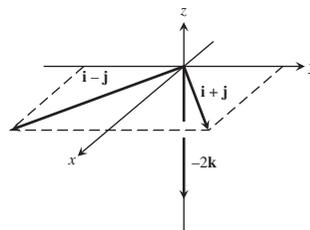
9.



11.



13.



15. (a) $2\sqrt{6}$ (b) $\pm \frac{1}{\sqrt{6}}(2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$
 17. (a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (b) $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} - \mathbf{j})$
 19. 8 21. 7 23. (a) Ninguno (b) \mathbf{u} y \mathbf{w} 25. $10\sqrt{3}$ ft-lb
 27. (a) Verdadero (b) No siempre es verdadero (c) Verdadero
 (d) Verdadero (e) No siempre es verdadero (f) Verdadero
 (g) Verdadero (h) Verdadero
 29. (a) $\text{proy}_{\mathbf{v}} \mathbf{u} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v}$ (b) $\pm \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ (c) $\pm (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$
 (d) $|(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}|$ (e) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$ (f) $|\mathbf{u}| \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$
 31. (a) Sí (b) No (c) Sí (d) No
 33. No, \mathbf{v} no necesita ser igual a \mathbf{w} . Por ejemplo, $\mathbf{i} + \mathbf{j} \neq -\mathbf{i} + \mathbf{j}$,
 pero $\mathbf{i} \times (\mathbf{i} + \mathbf{j}) = \mathbf{i} \times \mathbf{i} + \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{0} + \mathbf{k} = \mathbf{k}$
 $\mathbf{i} \times (-\mathbf{i} + \mathbf{j}) = -\mathbf{i} \times \mathbf{i} + \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{0} + \mathbf{k} = \mathbf{k}$.
 35. 2 37. 13 39. $\sqrt{129}$ 41. $\frac{11}{2}$ 43. $\frac{25}{2}$
 45. $\frac{3}{2}$ 47. $\frac{\sqrt{21}}{2}$
 49. Si $\mathbf{A} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$ y $\mathbf{B} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}$, entonces

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

y el área del triángulo es

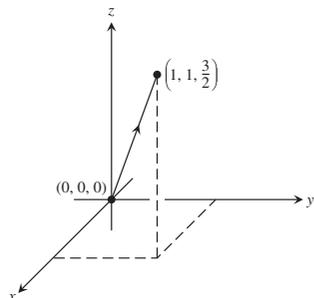
$$\frac{1}{2} |\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

El signo correspondiente es (+) si el ángulo agudo de \mathbf{A} a \mathbf{B}
 va en sentido contrario a las manecillas del reloj en el plano xy ,
 y (-) si va en el mismo sentido de las manecillas del reloj.

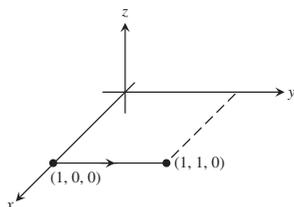
Sección 12.5, pp. 694–696

1. $x = 3 + t, y = -4 + t, z = -1 + t$
 3. $x = -2 + 5t, y = 5t, z = 3 - 5t$
 5. $x = 0, y = 2t, z = t$ 7. $x = 1, y = 1, z = 1 + t$
 9. $x = t, y = -7 + 2t, z = 2t$ 11. $x = t, y = 0, z = 0$

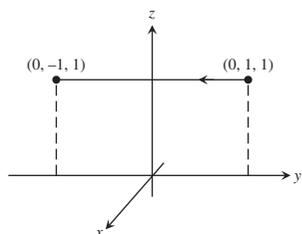
13. $x = t, y = t, z = \frac{3}{2}t,$
 $0 \leq t \leq 1$



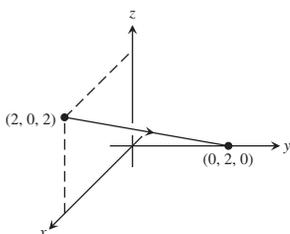
15. $x = 1, y = 1 + t,$
 $z = 0, -1 \leq t \leq 0$



17. $x = 0, y = 1 - 2t,$
 $z = 1, 0 \leq t \leq 1$



19. $x = 2 - 2t, y = 2t,$
 $z = 2 - 2t, 0 \leq t \leq 1$



21. $3x - 2y - z = -3$ 23. $7x - 5y - 4z = 6$
 25. $x + 3y + 4z = 34$ 27. $(1, 2, 3), -20x + 12y + z = 7$
 29. $y + z = 3$ 31. $x - y + z = 0$ 33. $2\sqrt{30}$ 35. 0

37. $\frac{9\sqrt{42}}{7}$ 39. 3 41. $19/5$ 43. $5/3$ 45. $9/\sqrt{41}$

47. $\pi/4$ 49. 1.38 rad 51. 0.82 rad 53. $(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$

55. $(1, 1, 0)$ 57. $x = 1 - t, y = 1 + t, z = -1$

59. $x = 4, y = 3 + 6t, z = 1 + 3t$

61. $L1$ interseca a $L2$; $L2$ es paralela a $L3$; $L1$ y $L3$ son oblicuas.

63. $x = 2 + 2t, y = -4 - t, z = 7 + 3t; x = -2 - t,$
 $y = -2 + (1/2)t, z = 1 - (3/2)t$

65. $(0, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}), (-1, 0, -3), (1, -1, 0)$

69. Hay muchas respuestas posibles. Una posibilidad es: $x + y = 3$
 $y + z = 7$.

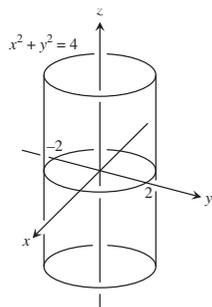
71. $(x/a) + (y/b) + (z/c) = 1$ describe todos los planos *excepto* aquellos que pasan por el origen o son paralelos a los ejes coordenados.

Sección 12.6, pp. 700–701

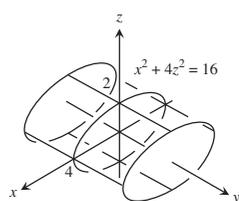
1. (d), elipsoide 3. (a), cilindro 5. (l), paraboloides hiperbólico

7. (b), cilindro 9. (k), paraboloides hiperbólico 11. (h), cono

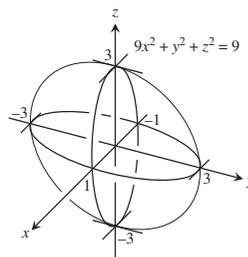
13.



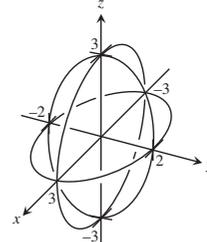
15.



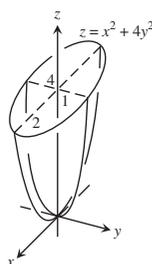
17.



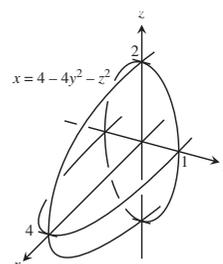
19. $4x^2 + 9y^2 + 4z^2 = 36$



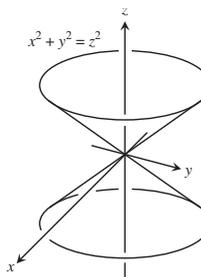
21.



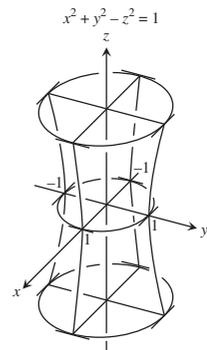
23.



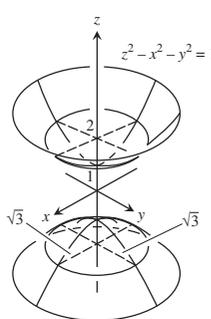
25.



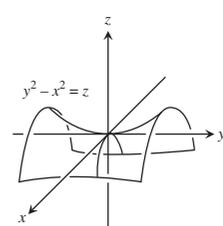
27.



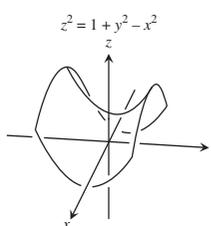
29.



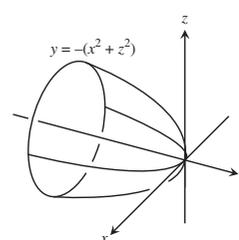
31.

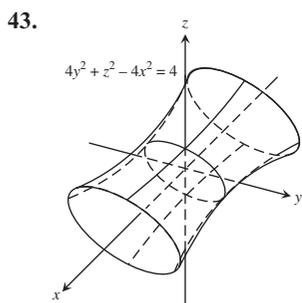
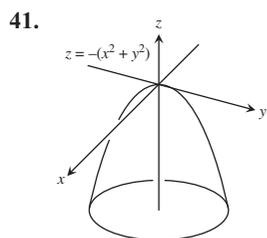
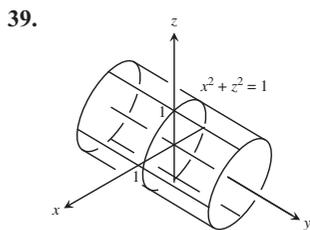
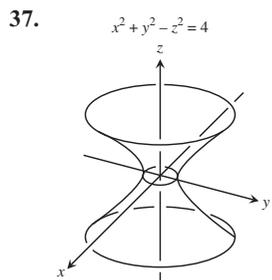


33.



35.

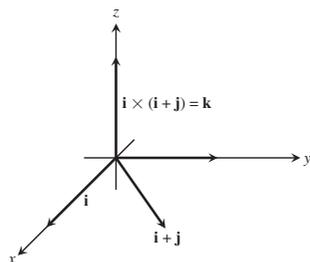




45. (a) $\frac{2\pi(9 - c^2)}{9}$ (b) 8π (c) $\frac{4\pi abc}{3}$

Ejercicios de práctica, pp. 702–703

1. (a) $\langle -17, 32 \rangle$ (b) $\sqrt{1317}$
3. (a) $\langle 6, -8 \rangle$ (b) 10
5. $\left\langle -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle$ [se supone contrario a las manecillas del reloj]
7. $\left\langle \frac{8}{\sqrt{17}}, -\frac{2}{\sqrt{17}} \right\rangle$
9. Longitud = 2, la dirección es $\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$.
11. $\mathbf{v}(\pi/2) = 2(-\mathbf{i})$
13. Longitud = 7, la dirección es $\frac{2}{7}\mathbf{i} - \frac{3}{7}\mathbf{j} + \frac{6}{7}\mathbf{k}$.
15. $\frac{8}{\sqrt{33}}\mathbf{i} - \frac{2}{\sqrt{33}}\mathbf{j} + \frac{8}{\sqrt{33}}\mathbf{k}$
17. $|\mathbf{v}| = \sqrt{2}, |\mathbf{u}| = 3, \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 3, \mathbf{v} \times \mathbf{u} = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k},$
 $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}, |\mathbf{v} \times \mathbf{u}| = 3, \theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4},$
 $|\mathbf{u}| \cos \theta = \frac{3}{\sqrt{2}}, \text{proy}_{\mathbf{v}} \mathbf{u} = \frac{3}{2}(\mathbf{i} + \mathbf{j})$
19. $\frac{4}{3}(2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k})$
21. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{k}$



23. $2\sqrt{7}$ 25. (a) $\sqrt{14}$ (b) 1 29. $\sqrt{78}/3$
 31. $x = 1 - 3t, y = 2, z = 3 + 7t$ 33. $\sqrt{2}$

35. $2x + y + z = 5$
 37. $-9x + y + 7z = 4$
 39. $\left(0, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right), (-1, 0, -3), (1, -1, 0)$ 41. $\pi/3$

43. $x = -5 + 5t, y = 3 - t, z = -3t$
 45. (b) $x = -12t, y = 19/12 + 15t, z = 1/6 + 6t$

47. Sí; \mathbf{v} es paralelo al plano.

49. 3 51. $-3\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

53. $\frac{2}{\sqrt{35}}(5\mathbf{i} - \mathbf{j} - 3\mathbf{k})$

55. $\left(\frac{11}{9}, \frac{26}{9}, -\frac{7}{9}\right)$

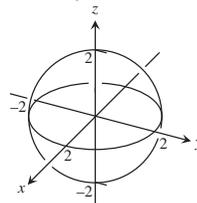
57. $(1, -2, -1); x = 1 - 5t, y = -2 + 3t, z = -1 + 4t$

59. $2x + 7y + 2z + 10 = 0$

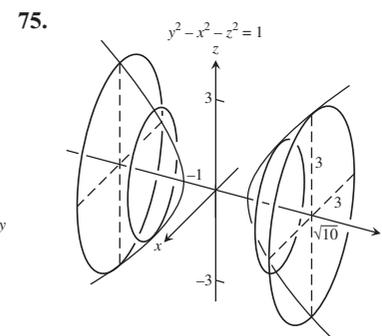
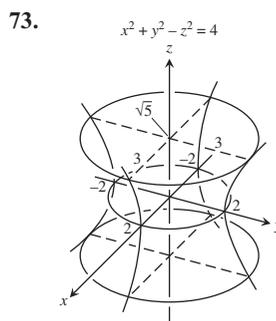
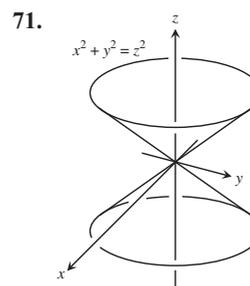
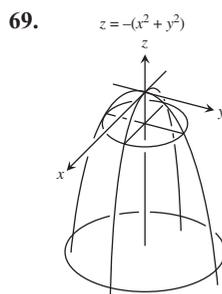
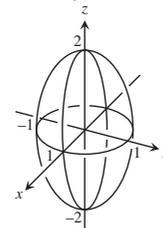
61. (a) No (b) No (c) No (d) No (e) Sí

63. $11/\sqrt{107}$

65. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$



67. $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 4$



Ejercicios adicionales y avanzados, pp. 704–706

1. $(26, 23, -1/3)$ 3. $|\mathbf{F}| = 20 \text{ lb}$
5. (a) $|\mathbf{F}_1| = 80 \text{ lb}, |\mathbf{F}_2| = 60 \text{ lb}, \mathbf{F}_1 = \langle -48, 64 \rangle,$
 $\mathbf{F}_2 = \langle 48, 36 \rangle, \alpha = \tan^{-1} \frac{4}{3}, \beta = \tan^{-1} \frac{3}{4}$

(b) $|\mathbf{F}_1| = \frac{2400}{13} \approx 184.615 \text{ lb}$, $|\mathbf{F}_2| = \frac{1000}{13} \approx 76.923 \text{ lb}$,

$\mathbf{F}_1 = \left\langle \frac{-12,000}{169}, \frac{28,800}{169} \right\rangle \approx \langle -71.006, 170.414 \rangle$,

$\mathbf{F}_2 = \left\langle \frac{12,000}{169}, \frac{5,000}{169} \right\rangle \approx \langle 71.006, 29.586 \rangle$

9. (a) $\theta = \tan^{-1} \sqrt{2} \approx 54.74^\circ$ (b) $\theta = \tan^{-1} 2\sqrt{2} \approx 70.53^\circ$

13. (b) $\frac{6}{\sqrt{14}}$ (c) $2x - y + 2z = 8$

(d) $x - 2y + z = 3 + 5\sqrt{6}$ $yx - 2y + z = 3 - 5\sqrt{6}$

15. $\frac{32}{41}\mathbf{i} + \frac{23}{41}\mathbf{j} - \frac{13}{41}\mathbf{k}$

17. (a) $0, 0$ (b) $-10\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$, $-9\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$

(c) $-4\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$

(d) $-10\mathbf{i} - 10\mathbf{k}$, $-12\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$

19. La fórmula siempre es verdadera.

CAPÍTULO 13

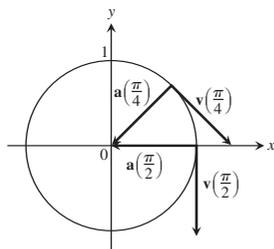
Sección 13.1, pp. 713–715

1. $y = x^2 - 2x$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $\mathbf{a} = 2\mathbf{j}$

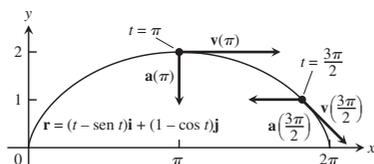
3. $y = \frac{2}{9}x^2$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$, $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$

5. $t = \frac{\pi}{4}$: $\mathbf{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}$, $\mathbf{a} = \frac{-\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}$;

$t = \pi/2$: $\mathbf{v} = -\mathbf{j}$, $\mathbf{a} = -\mathbf{i}$



7. $t = \pi$: $\mathbf{v} = 2\mathbf{i}$, $\mathbf{a} = -\mathbf{j}$; $t = \frac{3\pi}{2}$: $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{a} = -\mathbf{i}$



9. $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$; $\mathbf{a} = 2\mathbf{j}$; velocidad: 3;

dirección: $\frac{1}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}$; $\mathbf{v}(1) = 3\left(\frac{1}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}\right)$

11. $\mathbf{v} = (-2 \text{ sen } t)\mathbf{i} + (3 \text{ cos } t)\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$;

$\mathbf{a} = (-2 \text{ cos } t)\mathbf{i} - (3 \text{ sen } t)\mathbf{j}$; velocidad: $2\sqrt{5}$;

dirección: $(-1/\sqrt{5})\mathbf{i} + (2/\sqrt{5})\mathbf{k}$;

$\mathbf{v}(\pi/2) = 2\sqrt{5}\left[(-1/\sqrt{5})\mathbf{i} + (2/\sqrt{5})\mathbf{k}\right]$

13. $\mathbf{v} = \left(\frac{2}{t+1}\right)\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$; $\mathbf{a} = \left(\frac{-2}{(t+1)^2}\right)\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$;

velocidad: $\sqrt{6}$; dirección: $\frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{6}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{k}$;

$\mathbf{v}(1) = \sqrt{6}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{6}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{k}\right)$

15. $\pi/2$ 17. $\pi/2$

19. $x = t$, $y = -1$, $z = 1 + t$ 21. $x = t$, $y = \frac{1}{3}t$, $z = t$

23. (a) (i): Tiene velocidad constante 1 (ii): Sí (iii): Sentido contrario a las manecillas del reloj (iv): Sí

(b) (i): Tiene velocidad constante 2 (ii): Sí (iii): Sentido contrario a las manecillas del reloj (iv): Sí

(c) (i): Tiene velocidad constante 1 (ii): Sí (iii): Sentido contrario a las manecillas del reloj (iv): Inicia en (0, -1) en vez de (1, 0)

(d) (i): Tiene velocidad constante 1 (ii): Sí (iii): En el sentido de las manecillas del reloj (iv): Sí

(e) (i): Tiene velocidad variable (ii): No (iii): Sentido contrario a las manecillas del reloj (iv): Sí

25. $\mathbf{v} = 2\sqrt{5}\mathbf{i} + \sqrt{5}\mathbf{j}$

Sección 13.2, pp. 720–724

1. $(1/4)\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + (3/2)\mathbf{k}$ 3. $\left(\frac{\pi + 2\sqrt{2}}{2}\right)\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

5. $(\ln 4)\mathbf{i} + (\ln 4)\mathbf{j} + (\ln 2)\mathbf{k}$

7. $\frac{e-1}{2}\mathbf{i} + \frac{e-1}{e}\mathbf{j} + \mathbf{k}$

9. $\mathbf{i} - \mathbf{j} + \frac{\pi}{4}\mathbf{k}$

11. $\mathbf{r}(t) = \left(\frac{-t^2}{2} + 1\right)\mathbf{i} + \left(\frac{-t^2}{2} + 2\right)\mathbf{j} + \left(\frac{-t^2}{2} + 3\right)\mathbf{k}$

13. $\mathbf{r}(t) = ((t+1)^{3/2} - 1)\mathbf{i} + (-e^{-t} + 1)\mathbf{j} + (\ln(t+1) + 1)\mathbf{k}$

15. $\mathbf{r}(t) = 8t\mathbf{i} + 8t\mathbf{j} + (-16t^2 + 100)\mathbf{k}$

17. $\mathbf{r}(t) = \left(\frac{3}{2}t^2 + \frac{6}{\sqrt{11}}t + 1\right)\mathbf{i} - \left(\frac{1}{2}t^2 + \frac{2}{\sqrt{11}}t - 2\right)\mathbf{j} + \left(\frac{1}{2}t^2 + \frac{2}{\sqrt{11}}t + 3\right)\mathbf{k} = \left(\frac{1}{2}t^2 + \frac{2t}{\sqrt{11}}\right)(3\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}) + (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k})$

19. 50 seg

21. (a) 72.2 seg; 25,510 m (b) 4020 m (c) 6378 m

23. (a) $v_0 \approx 9.9 \text{ m/seg}$ (b) $\alpha \approx 18.4^\circ$ o 71.6°

25. 39.3° o 50.7°

31. (b) \mathbf{v}_0 bisecaría $\angle AOR$.

33. (a) (Suponiendo que "x" es cero en el punto de impacto) $\mathbf{r}(t) = (x(t))\mathbf{i} + (y(t))\mathbf{j}$, donde $x(t) = (35 \text{ cos } 27^\circ)t$ y $y(t) = 4 + (35 \text{ sen } 27^\circ)t - 16t^2$.

(b) En $t \approx 0.497$ seg, alcanza su máxima altura de aproximadamente 7.945 ft.

(c) Rango ≈ 37.45 ft; tiempo de vuelo ≈ 1.201 seg

(d) En $t \approx 0.254$ y $t \approx 0.740$ seg, cuando es ≈ 29.554 y ≈ 14.396 ft desde donde aterrizará

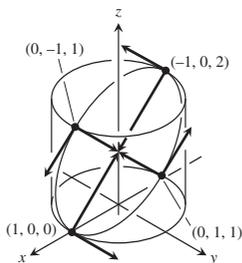
(e) Sí. Las cosas cambian porque la pelota no pasará la red.

35. 4.00 ft, 7.80 ft/seg

43. (a) $\mathbf{r}(t) = (x(t))\mathbf{i} + (y(t))\mathbf{j}$; donde
 $x(t) = \left(\frac{1}{0.08}\right)(1 - e^{-0.08t})(152 \cos 20^\circ - 17.6)$ y
 $y(t) = 3 + \left(\frac{152}{0.08}\right)(1 - e^{-0.08t})(\sin 20^\circ)$
 $+ \left(\frac{32}{0.08^2}\right)(1 - 0.08t - e^{-0.08t})$
 (b) En $t \approx 1.527$ seg alcanza la altura máxima de aproximadamente 41.893 ft.
 (c) Rango ≈ 351.734 ft; tiempo de vuelo ≈ 3.181 seg
 (d) En $t \approx 0.877$ y 2.190 seg, cuando está aproximadamente a 106.028 y 251.530 ft del home
 (e) No

Sección 13.3, pp. 727–728

1. $\mathbf{T} = \left(-\frac{2}{3} \sin t\right)\mathbf{i} + \left(\frac{2}{3} \cos t\right)\mathbf{j} + \frac{\sqrt{5}}{3}\mathbf{k}, 3\pi$
 3. $\mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{1+t}}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{1+t}}\mathbf{k}, \frac{52}{3}$
 5. $\mathbf{T} = -\cos t \mathbf{j} + \sin t \mathbf{k}, \frac{3}{2}$
 7. $\mathbf{T} = \left(\frac{\cos t - t \sin t}{t+1}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\sin t + t \cos t}{t+1}\right)\mathbf{j}$
 $+ \left(\frac{\sqrt{2t^{1/2}}}{t+1}\right)\mathbf{k}, \frac{\pi^2}{2} + \pi$
 9. $(0, 5, 24\pi)$ 11. $s(t) = 5t, L = \frac{5\pi}{2}$
 13. $s(t) = \sqrt{3}e^t - \sqrt{3}, L = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ 15. $\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})$
 17. (a) El cilindro es $x^2 + y^2 = 1$, el plano es $x + z = 1$.
 (b) y (c)



(d) $L = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \sin^2 t} dt$ (e) $L \approx 7.64$

Sección 13.4, pp. 733–734

1. $\mathbf{T} = (\cos t)\mathbf{i} - (\sin t)\mathbf{j}, \mathbf{N} = (-\sin t)\mathbf{i} - (\cos t)\mathbf{j}, \kappa = \cos t$
 3. $\mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\mathbf{i} - \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\mathbf{j}, \mathbf{N} = \frac{-t}{\sqrt{1+t^2}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\mathbf{j}, \kappa = \frac{1}{2(\sqrt{1+t^2})^3}$
 5. (b) $\cos x$
 7. (b) $\mathbf{N} = \frac{-2e^{2t}}{\sqrt{1+4e^{4t}}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{1+4e^{4t}}}\mathbf{j}$
 (c) $\mathbf{N} = -\frac{1}{2}(\sqrt{4-t^2}\mathbf{i} + t\mathbf{j})$

9. $\mathbf{T} = \frac{3 \cos t}{5}\mathbf{i} - \frac{3 \sin t}{5}\mathbf{j} + \frac{4}{5}\mathbf{k}, \mathbf{N} = (-\sin t)\mathbf{i} - (\cos t)\mathbf{j}, \kappa = \frac{3}{25}$
 11. $\mathbf{T} = \left(\frac{\cos t - \sin t}{\sqrt{2}}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\cos t + \sin t}{\sqrt{2}}\right)\mathbf{j}, \mathbf{N} = \left(\frac{-\cos t - \sin t}{\sqrt{2}}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{-\sin t + \cos t}{\sqrt{2}}\right)\mathbf{j}, \kappa = \frac{1}{e^t \sqrt{2}}$
 13. $\mathbf{T} = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\mathbf{j}, \mathbf{N} = \frac{\mathbf{i}}{\sqrt{t^2+1}} - \frac{t\mathbf{j}}{\sqrt{t^2+1}}, \kappa = \frac{1}{t(t^2+1)^{3/2}}$
 15. $\mathbf{T} = \left(\operatorname{sech} \frac{t}{a}\right)\mathbf{i} + \left(\tanh \frac{t}{a}\right)\mathbf{j}, \mathbf{N} = \left(-\tanh \frac{t}{a}\right)\mathbf{i} + \left(\operatorname{sech} \frac{t}{a}\right)\mathbf{j}, \kappa = \frac{1}{a} \operatorname{sech}^2 \frac{t}{a}$
 19. $1/(2b)$ 21. $\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + y^2 = 1$
 23. $\kappa(x) = 2/(1 + 4x^2)^{3/2}$ 25. $\kappa(x) = |\sin x|/(1 + \cos^2 x)^{3/2}$

Sección 13.5, pp. 738–739

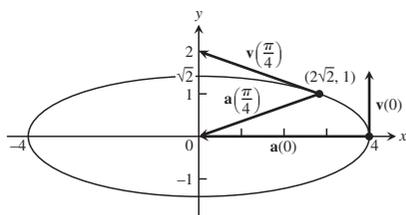
1. $\mathbf{a} = |a|\mathbf{N}$ 3. $\mathbf{a}(1) = \frac{4}{3}\mathbf{T} + \frac{2\sqrt{5}}{3}\mathbf{N}$ 5. $\mathbf{a}(0) = 2\mathbf{N}$
 7. $\mathbf{r}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j} - \mathbf{k}, \mathbf{T}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}, \mathbf{N}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}, \mathbf{B}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \mathbf{k}$; plano osculador: $z = -1$; plano normal: $-x + y = 0$; plano rectificador: $x + y = \sqrt{2}$
 9. $\mathbf{B} = \left(\frac{4}{5} \cos t\right)\mathbf{i} - \left(\frac{4}{5} \sin t\right)\mathbf{j} - \frac{3}{5}\mathbf{k}, \tau = -\frac{4}{25}$
 11. $\mathbf{B} = \mathbf{k}, \tau = 0$ 13. $\mathbf{B} = -\mathbf{k}, \tau = 0$ 15. $\mathbf{B} = \mathbf{k}, \tau = 0$
 17. Sí. Si el carro se mueve en una trayectoria curva ($\kappa \neq 0$), entonces $a_N = \kappa|\mathbf{v}|^2 \neq 0$ y $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$.
 23. $\kappa = \frac{1}{t}, \rho = t$
 29. Componentes de \mathbf{v} : $-1.8701, 0.7089, 1.0000$
 Componentes de \mathbf{a} : $-1.6960, -2.0307, 0$
 Velocidad: 2.2361; Componentes de \mathbf{T} : $-0.8364, 0.3170, 0.4472$
 Componentes de \mathbf{N} : $-0.4143, -0.8998, -0.1369$
 Componentes de \mathbf{B} : $0.3590, -0.2998, 0.8839$; Curvatura: 0.5060
 Torsión: 0.2813; Componente tangencial de la aceleración: 0.7746
 Componente normal de la aceleración: 2.5298
 31. Componentes de \mathbf{v} : 2.0000, 0, -0.1629
 Componentes de \mathbf{a} : 0, $-1.0000, -0.0086$; Velocidad: 2.0066
 Componentes de \mathbf{T} : 0.9967, 0, -0.0812
 Componentes de \mathbf{N} : $-0.0007, -1.0000, -0.0086$
 Componentes de \mathbf{B} : $-0.0812, 0.0086, 0.9967$;
 Curvatura: 0.2484
 Torsión: 0.0411; Componente tangencial de la aceleración: 0.0007
 Componente normal de la aceleración: 1.0000

Sección 13.6, p. 742

1. $\mathbf{v} = (3a \operatorname{sen} \theta)\mathbf{u}_r + 3a(1 - \cos \theta)\mathbf{u}_\theta$
 $\mathbf{a} = 9a(2 \cos \theta - 1)\mathbf{u}_r + (18a \operatorname{sen} \theta)\mathbf{u}_\theta$
3. $\mathbf{v} = 2ae^{a\theta}\mathbf{u}_r + 2e^{a\theta}\mathbf{u}_\theta$
 $\mathbf{a} = 4e^{a\theta}(a^2 - 1)\mathbf{u}_r + 8ae^{a\theta}\mathbf{u}_\theta$
5. $\mathbf{v} = (-8 \operatorname{sen} 4t)\mathbf{u}_r + (4 \cos 4t)\mathbf{u}_\theta$
 $\mathbf{a} = (-40 \cos 4t)\mathbf{u}_r - (32 \operatorname{sen} 4t)\mathbf{u}_\theta$

Ejercicios de práctica, pp. 743–744

1. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{2} = 1$



En $t = 0$: $a_T = 0$, $a_N = 4$, $\kappa = 2$;

En $t = \frac{\pi}{4}$: $a_T = \frac{7}{3}$, $a_N = \frac{4\sqrt{2}}{3}$, $\kappa = \frac{4\sqrt{2}}{27}$

3. $|\mathbf{v}|_{\max} = 1$ 5. $\kappa = 1/5$
7. $dy/dt = -x$; en el sentido de las manecillas del reloj
11. Sobre el suelo, aproximadamente a 66 ft 3 in del *stopboard* (el tope que ayuda al lanzador a contrarrestar la inercia que ha acumulado en el lanzamiento).
15. Longitud = $\frac{\pi}{4}\sqrt{1 + \frac{\pi^2}{16}} + \ln\left(\frac{\pi}{4} + \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{16}}\right)$
17. $\mathbf{T}(0) = \frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{1}{3}\mathbf{k}$; $\mathbf{N}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$;
 $\mathbf{B}(0) = -\frac{1}{3\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{3\sqrt{2}}\mathbf{j} + \frac{4}{3\sqrt{2}}\mathbf{k}$; $\kappa = \frac{\sqrt{2}}{3}$; $\tau = \frac{1}{6}$
19. $\mathbf{T}(\ln 2) = \frac{1}{\sqrt{17}}\mathbf{i} + \frac{4}{\sqrt{17}}\mathbf{j}$; $\mathbf{N}(\ln 2) = -\frac{4}{\sqrt{17}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{17}}\mathbf{j}$;
 $\mathbf{B}(\ln 2) = \mathbf{k}$; $\kappa = \frac{8}{17\sqrt{17}}$; $\tau = 0$
21. $\mathbf{a}(0) = 10\mathbf{T} + 6\mathbf{N}$
23. $\mathbf{T} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos t\right)\mathbf{i} - (\operatorname{sen} t)\mathbf{j} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos t\right)\mathbf{k}$;
 $\mathbf{N} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sen} t\right)\mathbf{i} - (\cos t)\mathbf{j} - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sen} t\right)\mathbf{k}$;
 $\mathbf{B} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k}$; $\kappa = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\tau = 0$
25. $\pi/3$ 27. $x = 1 + t$, $y = t$, $z = -t$ 31. $\kappa = 1/a$

Ejercicios adicionales y avanzados, pp. 745–746

1. (a) $\frac{d\theta}{dt}\Big|_{\theta=2\pi} = 2\sqrt{\frac{\pi gb}{a^2 + b^2}}$
 (b) $\theta = \frac{gbt^2}{2(a^2 + b^2)}$, $z = \frac{gb^2t^2}{2(a^2 + b^2)}$

(c) $\mathbf{v}(t) = \frac{gbt}{\sqrt{a^2 + b^2}}\mathbf{T}$;
 $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{bg}{\sqrt{a^2 + b^2}}\mathbf{T} + a\left(\frac{bgt}{a^2 + b^2}\right)^2\mathbf{N}$

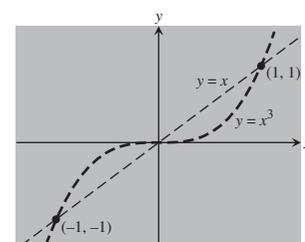
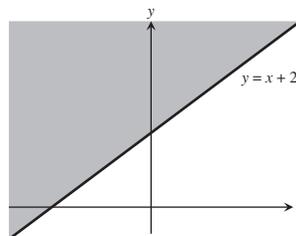
No existe componente en la dirección de \mathbf{B} .

5. (a) $\frac{dx}{dt} = \dot{r} \cos \theta - r\dot{\theta} \operatorname{sen} \theta$, $\frac{dy}{dt} = \dot{r} \operatorname{sen} \theta + r\dot{\theta} \cos \theta$
 (b) $\frac{dr}{dt} = \dot{x} \cos \theta + \dot{y} \operatorname{sen} \theta$, $r\frac{d\theta}{dt} = -\dot{x} \operatorname{sen} \theta + \dot{y} \cos \theta$
7. (a) $\mathbf{a}(1) = -9\mathbf{u}_r - 6\mathbf{u}_\theta$, $\mathbf{v}(1) = -\mathbf{u}_r + 3\mathbf{u}_\theta$ (b) 6.5 in
9. (c) $\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta + \dot{z}\mathbf{k}$, $\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{u}_\theta + \ddot{z}\mathbf{k}$

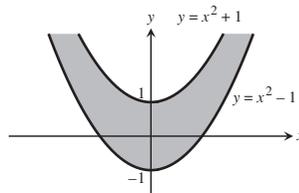
CAPÍTULO 14

Sección 14.1, pp. 753–755

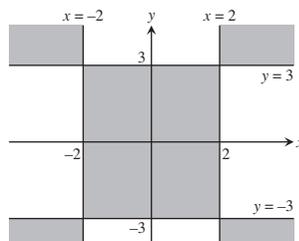
1. (a) 0 (b) 0 (c) 58 (d) 33
3. (a) 4/5 (b) 8/5 (c) 3 (d) 0
5. Dominio: todos los puntos (x, y) en o arriba de la recta $y = x + 2$
7. Dominio: todos los puntos que no se encuentran sobre la gráfica de $y = x$ o $y = x^3$

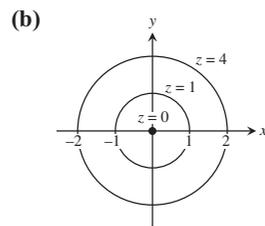
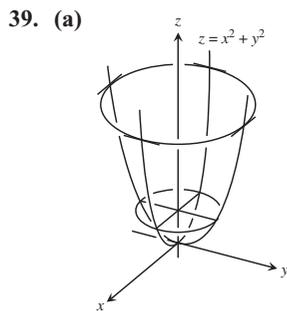
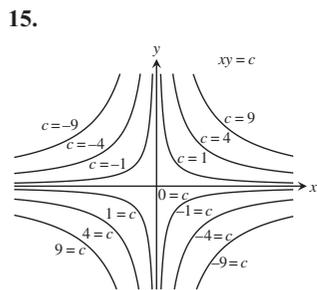
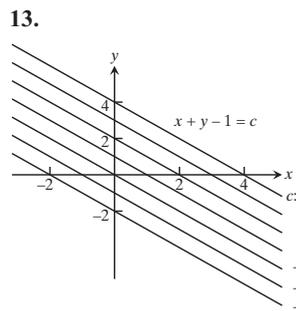


9. Dominio: todos los puntos (x, y) que satisfacen $x^2 - 1 \leq y \leq x^2 + 1$

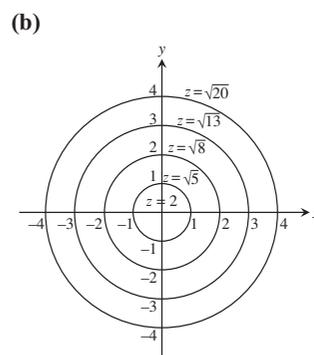
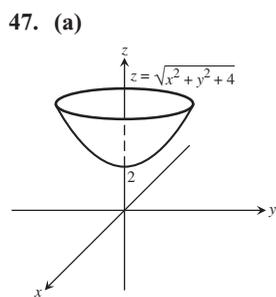
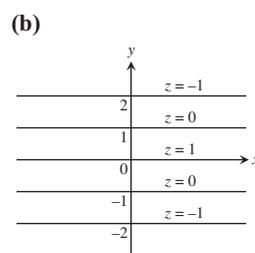
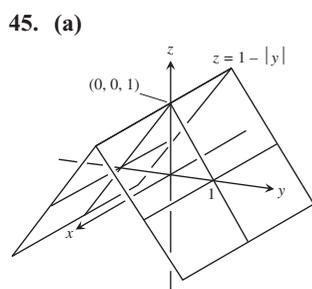
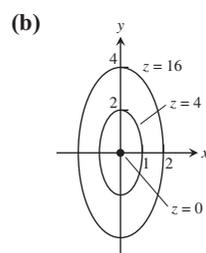
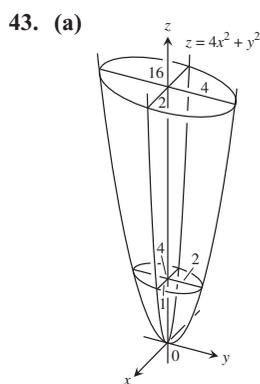
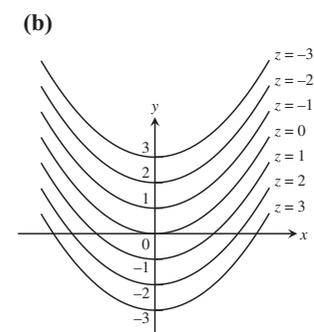
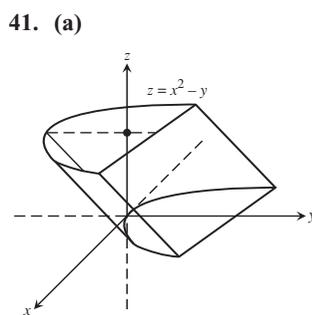
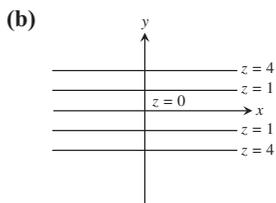
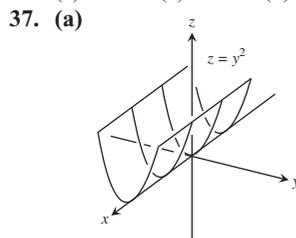


11. Dominio: todos los puntos (x, y) para los cuales $(x - 2)(x + 2)(y - 3)(y + 3) \geq 0$

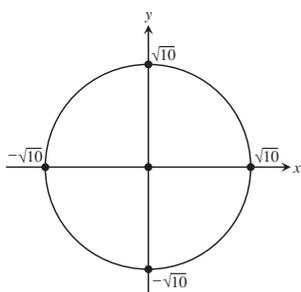




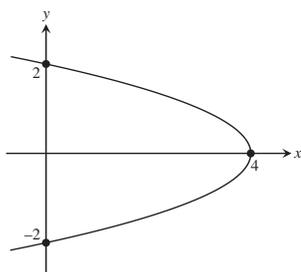
17. (a) Todos los puntos en el plano xy
 (b) Todos los números reales
 (c) Las rectas $y - x = c$ (d) Sin puntos de frontera
 (e) Tanto abierta como cerrada (f) No acotado
19. (a) Todos los puntos en el plano xy (b) $z \geq 0$
 (c) Para $f(x, y) = 0$, el origen; para $f(x, y) \neq 0$, elipses con centro en $(0, 0)$, y ejes mayores y menores a lo largo de los ejes x y y respectivamente
 (d) Sin puntos de frontera (e) Tanto abierta como cerrada
 (f) No acotado
21. (a) Todos los puntos en el plano xy
 (b) Todos los números reales
 (c) Para $f(x, y) = 0$, los ejes x y y ; para $f(x, y) \neq 0$, hipérbolas con los ejes x y y como asíntotas
 (d) Sin puntos de frontera (e) Tanto abierta como cerrada
 (f) No acotado
23. (a) Todos los puntos (x, y) que satisfagan $x^2 + y^2 < 16$
 (b) $z \geq 1/4$
 (c) Círculos con centro en el origen, de radios $r < 4$
 (d) El límite es el círculo $x^2 + y^2 = 16$
 (e) Abierta (f) Acotado
25. (a) $(x, y) \neq (0, 0)$ (b) Todos los reales
 (c) Los círculos con centro en $(0, 0)$ y radios $r > 0$
 (d) El límite es el punto $(0, 0)$
 (e) Abierta (f) No acotado
27. (a) Todos los puntos (x, y) que satisfagan $-1 \leq y - x \leq 1$
 (b) $-\pi/2 \leq z \leq \pi/2$
 (c) Líneas rectas de la forma $y - x = c$ donde $-1 \leq c \leq 1$
 (d) La frontera está formada por las dos rectas $y = 1 + x$ y $y = -1 + x$
 (e) Cerrada (f) No acotado
29. (a) Dominio: todos los puntos (x, y) fuera del círculo $x^2 + y^2 = 1$
 (b) Rango: todos los reales
 (c) Círculos con centro en el origen de radios $r > 1$
 (d) Límite: $x^2 + y^2 = 1$
 (e) Abierta (f) No acotado
31. (f) 33. (a) 35. (d)



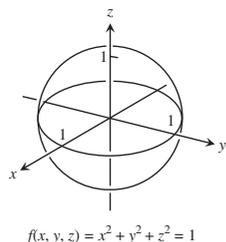
49. $x^2 + y^2 = 10$



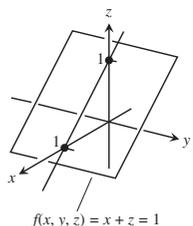
51. $x + y^2 = 4$



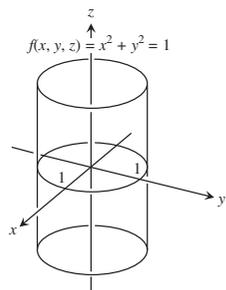
53.



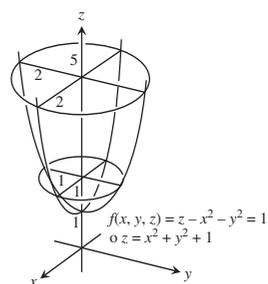
55.



57.



59.

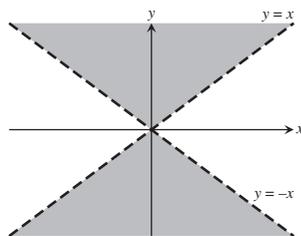


61. $\sqrt{x - y} - \ln z = 2$

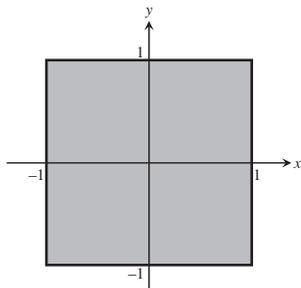
63. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

65. Dominio: todos los puntos (x, y) que satisfagan $|x| < |y|$

67. Dominio: todos los puntos (x, y) que satisfagan $-1 \leq x \leq 1$
 $-1 \leq y \leq 1$



curva de nivel: $y = 2x$



curva de nivel:
 $\sin^{-1} y - \sin^{-1} x = \frac{\pi}{2}$

Sección 14.2, pp. 761–764

1. $5/2$ 3. $2\sqrt{6}$ 5. 1 7. $1/2$ 9. 1 11. $1/4$ 13. 0
 15. -1 17. 2 19. $1/4$ 21. 1 23. 3 25. $19/12$
 27. 2 29. 3 31. (a) Todos los puntos (x, y)
 (b) Todos los puntos (x, y) excepto $(0, 0)$
 33. (a) Todos los puntos (x, y) excepto donde $x = 0$ o $y = 0$
 (b) Todos los puntos (x, y)
 35. (a) Todos los puntos (x, y, z) (b) Todos los puntos (x, y, z) ,
 excepto el interior del cilindro $x^2 + y^2 = 1$

37. (a) Todos los puntos (x, y, z) con $z \neq 0$ (b) Todos los puntos (x, y, z) con $x^2 + z^2 \neq 1$

39. (a) Todos los puntos (x, y) que satisfagan $z > x^2 + y^2 + 1$

41. Considere trayectorias a lo largo de $y = x, x > 0$, y a lo largo de $y = x, x < 0$.

43. Considere las trayectorias $y = kx^2$, donde k es una constante.

45. Considere las trayectorias $y = mx$, donde m es una constante, $m \neq -1$.

47. Considere las trayectorias $y = kx^2$, donde k es una constante, $k \neq 0$.

49. Considere las trayectorias $x = 1$ y $y = x$.

51. (a) 1 (b) 0 (c) No existe

55. El límite es 1. 57. El límite es 0.

59. (a) $f(x, y)|_{y=mx} = \sin 2\theta$ donde $\tan \theta = m$ 61. 0

63. No existe 65. $\pi/2$ 67. $f(0, 0) = \ln 3$

69. $\delta = 0.1$ 71. $\delta = 0.005$ 73. $\delta = 0.04$

75. $\delta = \sqrt{0.015}$ 77. $\delta = 0.005$

Sección 14.3, pp. 772–775

1. $\frac{\partial f}{\partial x} = 4x, \frac{\partial f}{\partial y} = -3$ 3. $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x(y + 2), \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 1$

5. $\frac{\partial f}{\partial x} = 2y(xy - 1), \frac{\partial f}{\partial y} = 2x(xy - 1)$

7. $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

9. $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-1}{(x + y)^2}, \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-1}{(x + y)^2}$

11. $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-y^2 - 1}{(xy - 1)^2}, \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-x^2 - 1}{(xy - 1)^2}$

13. $\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x+y+1}, \frac{\partial f}{\partial y} = e^{x+y+1}$ 15. $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x + y}, \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x + y}$

17. $\frac{\partial f}{\partial x} = 2 \sin(x - 3y) \cos(x - 3y),$

$\frac{\partial f}{\partial y} = -6 \sin(x - 3y) \cos(x - 3y)$

19. $\frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1}, \frac{\partial f}{\partial y} = x^y \ln x$ 21. $\frac{\partial f}{\partial x} = -g(x), \frac{\partial f}{\partial y} = g(y)$

23. $f_x = y^2, f_y = 2xy, f_z = -4z$

25. $f_x = 1, f_y = -y(y^2 + z^2)^{-1/2}, f_z = -z(y^2 + z^2)^{-1/2}$

27. $f_x = \frac{yz}{\sqrt{1 - x^2y^2z^2}}, f_y = \frac{xz}{\sqrt{1 - x^2y^2z^2}}, f_z = \frac{xy}{\sqrt{1 - x^2y^2z^2}}$

29. $f_x = \frac{1}{x + 2y + 3z}, f_y = \frac{2}{x + 2y + 3z}, f_z = \frac{3}{x + 2y + 3z}$

31. $f_x = -2xe^{-(x^2+y^2+z^2)}, f_y = -2ye^{-(x^2+y^2+z^2)}, f_z = -2ze^{-(x^2+y^2+z^2)}$

33. $f_x = \operatorname{sech}^2(x + 2y + 3z), f_y = 2 \operatorname{sech}^2(x + 2y + 3z),$
 $f_z = 3 \operatorname{sech}^2(x + 2y + 3z)$

35. $\frac{\partial f}{\partial t} = -2\pi \sin(2\pi t - \alpha), \frac{\partial f}{\partial \alpha} = \sin(2\pi t - \alpha)$

37. $\frac{\partial h}{\partial \rho} = \sin \phi \cos \theta, \frac{\partial h}{\partial \phi} = \rho \cos \phi \cos \theta, \frac{\partial h}{\partial \theta} = -\rho \sin \phi \sin \theta$

39. $W_P(P, V, \delta, v, g) = V, W_V(P, V, \delta, v, g) = P + \frac{\delta v^2}{2g},$

$W_\delta(P, V, \delta, v, g) = \frac{Vv^2}{2g}, W_v(P, V, \delta, v, g) = \frac{V\delta v}{g},$

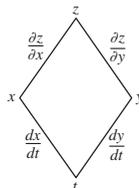
$W_g(P, V, \delta, v, g) = -\frac{V\delta v^2}{2g^2}$

41. $\frac{\partial f}{\partial x} = 1 + y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 1 + x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$,
 $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1$
43. $\frac{\partial g}{\partial x} = 2xy + y \cos x$, $\frac{\partial g}{\partial y} = x^2 - \sin y + \sin x$,
 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 2y - y \sin x$, $\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = -\cos y$,
 $\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = 2x + \cos x$
45. $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{x+y}$, $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{1}{x+y}$, $\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{-1}{(x+y)^2}$, $\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \frac{-1}{(x+y)^2}$,
 $\frac{\partial^2 r}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y} = \frac{-1}{(x+y)^2}$
47. $\frac{\partial w}{\partial x} = x^2 y \sec^2(xy) + 2x \tan(xy)$, $\frac{\partial w}{\partial y} = x^3 \sec^2(xy)$,
 $\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 2x^3 y \sec^2(xy) \tan(xy) + 3x^2 \sec^2(xy)$
 $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 4xy \sec^2(xy) + 2x^2 y^2 \sec^2(xy) \tan(xy) + 2 \tan(xy)$
 $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 2x^4 \sec^2(xy) \tan(xy)$
49. $\frac{\partial w}{\partial x} = \sin(x^2 y) + 2x^2 y \cos(x^2 y)$, $\frac{\partial w}{\partial y} = x^3 \cos(x^2 y)$,
 $\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 3x^2 \cos(x^2 y) - 2x^4 y \sin(x^2 y)$
 $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 6xy \cos(x^2 y) - 4x^3 y^2 \sin(x^2 y)$
 $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -x^5 \sin(x^2 y)$
51. $\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{2}{2x+3y}$, $\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{3}{2x+3y}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{-6}{(2x+3y)^2}$
53. $\frac{\partial w}{\partial x} = y^2 + 2xy^3 + 3x^2 y^4$, $\frac{\partial w}{\partial y} = 2xy + 3x^2 y^2 + 4x^3 y^3$,
 $\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 2y + 6xy^2 + 12x^2 y^3$
55. (a) Primero x (b) Primero y (c) Primero x
 (d) Primero x (e) Primero y (f) Primero y
57. $f_x(1, 2) = -13$, $f_y(1, 2) = -2$
59. $f_x(-2, 3) = 1/2$, $f_y(-2, 3) = 3/4$ 61. (a) 3 (b) 2
63. 12 65. -2 67. $\frac{\partial A}{\partial a} = \frac{a}{bc \sin A}$, $\frac{\partial A}{\partial b} = \frac{c \cos A - b}{bc \sin A}$
69. $v_x = \frac{\ln v}{(\ln u)(\ln v) - 1}$
71. $f_x(x, y) = 0$ para todos los puntos (x, y) ,
 $f_y(x, y) = \begin{cases} 3y^2, & y \geq 0 \\ -2y, & y < 0 \end{cases}$
 $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = 0$ para todos los puntos (x, y)
89. Sí

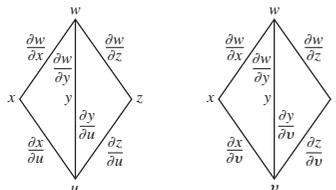
Sección 14.4, pp. 782-783

1. (a) $\frac{dw}{dt} = 0$, (b) $\frac{dw}{dt}(\pi) = 0$
3. (a) $\frac{dw}{dt} = 1$, (b) $\frac{dw}{dt}(3) = 1$

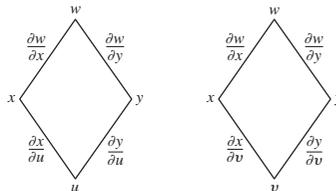
5. (a) $\frac{dw}{dt} = 4t \tan^{-1} t + 1$, (b) $\frac{dw}{dt}(1) = \pi + 1$
7. (a) $\frac{\partial z}{\partial u} = 4 \cos v \ln(u \sin v) + 4 \cos v$,
 $\frac{\partial z}{\partial v} = -4u \sin v \ln(u \sin v) + \frac{4u \cos^2 v}{\sin v}$
 (b) $\frac{\partial z}{\partial u} = \sqrt{2}(\ln 2 + 2)$, $\frac{\partial z}{\partial v} = -2\sqrt{2}(\ln 2 - 2)$
9. (a) $\frac{\partial w}{\partial u} = 2u + 4uv$, $\frac{\partial w}{\partial v} = -2v + 2u^2$
 (b) $\frac{\partial w}{\partial u} = 3$, $\frac{\partial w}{\partial v} = -\frac{3}{2}$
11. (a) $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{z}{(z-y)^2}$, $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{-y}{(z-y)^2}$
 (b) $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 1$, $\frac{\partial u}{\partial z} = -2$
13. $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$



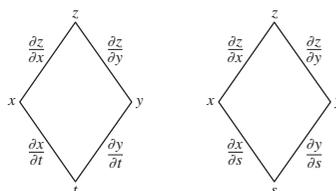
15. $\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u}$
 $\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v}$



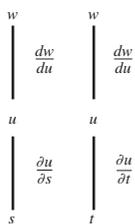
17. $\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}$



19. $\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}$

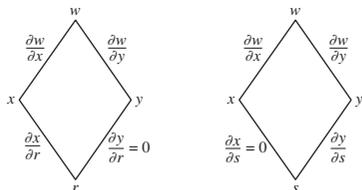


21. $\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{dw}{du} \frac{\partial u}{\partial s}, \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{dw}{du} \frac{\partial u}{\partial t}$



23. $\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dr} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dr} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dr}$ puesto que $\frac{dy}{dr} = 0$,

$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{ds} = \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{ds}$ puesto que $\frac{dx}{ds} = 0$



25. $4/3$ 27. $-4/5$ 29. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{4}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{3}{4}$

31. $\frac{\partial z}{\partial x} = -1, \frac{\partial z}{\partial y} = -1$ 33. 12 35. -7

37. $\frac{\partial z}{\partial u} = 2, \frac{\partial z}{\partial v} = 1$

39. $\frac{\partial w}{\partial t} = 2t e^{s^3+t^2}, \frac{\partial w}{\partial s} = 3s^2 e^{s^3+t^2}$

41. -0.00005 amps/seg

47. $(\cos 1, \sin 1, 1)$ y $(\cos(-2), \sin(-2), -2)$

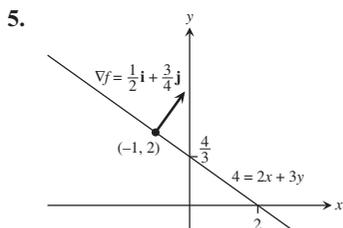
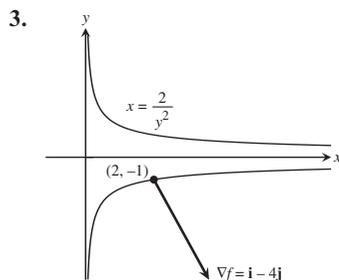
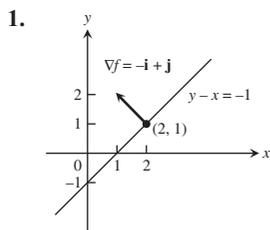
49. (a) Máximo en $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ y $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$; mínimo

en $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ y $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$

(b) Máx = 6, mín = 2

51. $2x\sqrt{x^8 + x^3} + \int_0^{x^2} \frac{3x^2}{2\sqrt{t^4 + x^3}} dt$

Sección 14.5, pp. 790-791



7. $\nabla f = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ 9. $\nabla f = -\frac{26}{27}\mathbf{i} + \frac{23}{54}\mathbf{j} - \frac{23}{54}\mathbf{k}$

11. -4 13. 21/13 15. 3 17. 2

19. $\mathbf{u} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}, (D_{\mathbf{u}}f)_{P_0} = \sqrt{2}; -\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j},$

$(D_{-\mathbf{u}}f)_{P_0} = -\sqrt{2}$

21. $\mathbf{u} = \frac{1}{3\sqrt{3}}\mathbf{i} - \frac{5}{3\sqrt{3}}\mathbf{j} - \frac{1}{3\sqrt{3}}\mathbf{k}, (D_{\mathbf{u}}f)_{P_0} = 3\sqrt{3};$

$-\mathbf{u} = -\frac{1}{3\sqrt{3}}\mathbf{i} + \frac{5}{3\sqrt{3}}\mathbf{j} + \frac{1}{3\sqrt{3}}\mathbf{k}, (D_{-\mathbf{u}}f)_{P_0} = -3\sqrt{3}$

23. $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}), (D_{\mathbf{u}}f)_{P_0} = 2\sqrt{3};$

$-\mathbf{u} = -\frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}), (D_{-\mathbf{u}}f)_{P_0} = -2\sqrt{3}$

25. 27.

29. (a) $\mathbf{u} = \frac{3}{5}\mathbf{i} - \frac{4}{5}\mathbf{j}, D_{\mathbf{u}}f(1, -1) = 5$

(b) $\mathbf{u} = -\frac{3}{5}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{j}, D_{\mathbf{u}}f(1, -1) = -5$

(c) $\mathbf{u} = \frac{3}{5}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{j}, \mathbf{u} = -\frac{3}{5}\mathbf{i} - \frac{4}{5}\mathbf{j}$

(d) $\mathbf{u} = -\mathbf{j}, \mathbf{u} = \frac{24}{25}\mathbf{i} - \frac{7}{25}\mathbf{j}$

(e) $\mathbf{u} = -\mathbf{i}, \mathbf{u} = \frac{7}{25}\mathbf{i} + \frac{24}{25}\mathbf{j}$

31. $\mathbf{u} = \frac{7}{\sqrt{53}}\mathbf{i} - \frac{2}{\sqrt{53}}\mathbf{j}, -\mathbf{u} = -\frac{7}{\sqrt{53}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{53}}\mathbf{j}$

33. No, la tasa máxima de cambio es $\sqrt{185} < 14$.

35. $-7/\sqrt{5}$

Sección 14.6, pp. 799-802

1. (a) $x + y + z = 3$

(b) $x = 1 + 2t, y = 1 + 2t, z = 1 + 2t$

3. (a) $2x - z - 2 = 0$ (b) $x = 2 - 4t, y = 0, z = 2 + 2t$

5. (a) $2x + 2y + z - 4 = 0$

(b) $x = 2t, y = 1 + 2t, z = 2 + t$

7. (a) $x + y + z - 1 = 0$ (b) $x = t, y = 1 + t, z = t$

9. $2x - z - 2 = 0$ 11. $x - y + 2z - 1 = 0$

13. $x = 1, y = 1 + 2t, z = 1 - 2t$

15. $x = 1 - 2t, y = 1, z = \frac{1}{2} + 2t$

17. $x = 1 + 90t, y = 1 - 90t, z = 3$

19. $df = \frac{9}{11,830} \approx 0.0008$ 21. $dg = 0$

23. (a) $\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \sqrt{3} - \frac{1}{2} \cos \sqrt{3} \approx 0.935^\circ\text{C}/\text{ft}$

(b) $\sqrt{3} \sin \sqrt{3} - \cos \sqrt{3} \approx 1.87^\circ\text{C}/\text{seg}$

25. (a) $L(x, y) = 1$ (b) $L(x, y) = 2x + 2y - 1$

27. (a) $L(x, y) = 3x - 4y + 5$ (b) $L(x, y) = 3x - 4y + 5$

29. (a) $L(x, y) = 1 + x$ (b) $L(x, y) = -y + \frac{\pi}{2}$
31. (a) $W(20, 25) = 11^\circ\text{F}$, $W(30, -10) = -39^\circ\text{F}$,
 $W(15, 15) = 0^\circ\text{F}$
 (b) $W(10, -40) \approx -65.5^\circ\text{F}$, $W(50, -40) \approx -88^\circ\text{F}$,
 $W(60, 30) \approx 10.2^\circ\text{F}$
 (c) $L(v, T) \approx -0.36(v - 25) + 1.337(T - 5) - 17.4088$
 (d) i) $L(24, 6) \approx -15.7^\circ\text{F}$
 ii) $L(27, 2) \approx -22.1^\circ\text{F}$
 iii) $L(5, -10) \approx -30.2^\circ\text{F}$
33. $L(x, y) = 7 + x - 6y$; 0.06 35. $L(x, y) = x + y + 1$; 0.08
37. $L(x, y) = 1 + x$; 0.0222
39. (a) $L(x, y, z) = 2x + 2y + 2z - 3$ (b) $L(x, y, z) = y + z$
 (c) $L(x, y, z) = 0$
41. (a) $L(x, y, z) = x$ (b) $L(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y$
 (c) $L(x, y, z) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z$
43. (a) $L(x, y, z) = 2 + x$
 (b) $L(x, y, z) = x - y - z + \frac{\pi}{2} + 1$
 (c) $L(x, y, z) = x - y - z + \frac{\pi}{2} + 1$
45. $L(x, y, z) = 2x - 6y - 2z + 6$, 0.0024
47. $L(x, y, z) = x + y - z - 1$, 0.00135
49. Error máximo (estimado) ≤ 0.31 en magnitud
51. (a) $\pm 5\%$ (b) $\pm 7\%$
53. $\approx \pm 4.83\%$
55. Ponga más atención a la dimensión más pequeña. Generará la derivada parcial más grande.
57. (a) 0.3%
59. f es más sensible al cambio en d .
61. Q es más sensible al cambio en h .
65. En $-\frac{\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$; en 0, 0; en $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

Sección 14.7, pp. 808-811

1. $f(-3, 3) = -5$, mínimo local 3. $f(-2, 1)$, punto de silla
5. $f\left(3, \frac{3}{2}\right) = \frac{17}{2}$, máximo local
7. $f(2, -1) = -6$, mínimo local 9. $f(1, 2)$, punto de silla
11. $f\left(\frac{16}{7}, 0\right) = -\frac{16}{7}$, máximo local
13. $f(0, 0)$, punto de silla; $f\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{170}{27}$, máximo local
15. $f(0, 0) = 0$, mínimo local; $f(1, -1)$, punto de silla
17. $f(0, \pm\sqrt{5})$, punto de silla; $f(-2, -1) = 30$, máximo local;
 $f(2, 1) = -30$, mínimo local
19. $f(0, 0)$, punto de silla; $f(1, 1) = 2$, $f(-1, -1) = 2$, máximo local
21. $f(0, 0) = -1$, máximo local
23. $f(n\pi, 0)$, puntos de silla para todo entero n
25. $f(2, 0) = e^{-4}$, mínimo local
27. $f(0, 0) = 0$, mínimo local; $f(0, 2)$, punto de silla
29. $f\left(\frac{1}{2}, 1\right) = \ln\left(\frac{1}{4}\right) - 3$, máximo local
31. Máximo absoluto: 1 en (0, 0); mínimo absoluto: -5 en (1, 2)
33. Máximo absoluto: 4 en (0, 2); mínimo absoluto: 0 en (0, 0)

35. Máximo absoluto: 11 en (0, -3); mínimo absoluto: -10 en (4, -2)
37. Máximo absoluto: 4 en (2, 0); mínimo absoluto: $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ en $\left(3, -\frac{\pi}{4}\right)$, $\left(3, \frac{\pi}{4}\right)$, $\left(1, -\frac{\pi}{4}\right)$, y $\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$
39. $a = -3$, $b = 2$
41. Lo más caliente es $2\frac{1^\circ}{4}$ en $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ y $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; y lo más frío es $-\frac{1^\circ}{4}$ en $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.
43. (a) $f(0, 0)$, punto de silla (b) $f(1, 2)$, mínimo local
 (c) $f(1, -2)$, mínimo local; $f(-1, -2)$, punto de silla
49. $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{355}{36}\right)$ 51. $\left(\frac{9}{7}, \frac{6}{7}, \frac{3}{7}\right)$ 53. 3, 3, 3 55. 12
57. $\frac{4}{\sqrt{3}} \times \frac{4}{\sqrt{3}} \times \frac{4}{\sqrt{3}}$ 59. 2 ft \times 2 ft \times 1 ft
61. (a) Sobre el semicírculo, $\text{máx } f = 2\sqrt{2}$ en $t = \pi/4$, $\text{mín } f = -2$ en $t = \pi$. Sobre el cuarto de círculo, $\text{máx en } f = 2\sqrt{2}$ en $t = \pi/4$, $\text{mín } f = 2$ en $t = 0, \pi/2$.
 (b) Sobre el semicírculo, $\text{máx } g = 2$ en $t = \pi/4$, $\text{mín } g = -2$ en $t = 3\pi/4$. Sobre el cuarto de círculo, $\text{máx } g = 2$ en $t = \pi/4$, $\text{mín } g = 0$ en $t = 0, \pi/2$.
 (c) Sobre el semicírculo, $\text{máx } h = 8$ en $t = 0, \pi$; $\text{mín } h = 4$ en $t = \pi/2$. Sobre el cuarto de círculo, $\text{máx } h = 8$ en $t = 0$, $\text{mín } h = 4$ en $t = \pi/2$.
63. i) $\text{mín } f = -1/2$ en $t = -1/2$; no hay máx
 ii) $\text{máx } f = 0$ en $t = -1, 0$; $\text{mín } f = -1/2$ en $t = -1/2$
 iii) $\text{máx } f = 4$ en $t = 1$; $\text{mín } f = 0$ en $t = 0$
67. $y = -\frac{20}{13}x + \frac{9}{13}$, $y|_{x=4} = -\frac{71}{13}$

Sección 14.8, pp. 818-820

1. $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right)$ 3. 39 5. $(3, \pm 3\sqrt{2})$
7. (a) 8 (b) 64
9. $r = 2$ cm, $h = 4$ cm 11. Longitud = $4\sqrt{2}$, ancho = $3\sqrt{2}$
13. $f(0, 0) = 0$ es mínimo, $f(2, 4) = 20$ es máximo.
15. La más baja = 0° , la más alta = 125°
17. $\left(\frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}\right)$ 19. 1 21. (0, 0, 2), (0, 0, -2)
23. $f(1, -2, 5) = 30$ es máximo, $f(-1, 2, -5) = -30$ es mínimo.
25. 3, 3, 3 27. $\frac{2}{\sqrt{3}}$ por $\frac{2}{\sqrt{3}}$ por $\frac{2}{\sqrt{3}}$ unidades
29. $(\pm 4/3, -4/3, -4/3)$ 31. $U(8, 14) = \$128$
33. $f(2/3, 4/3, -4/3) = \frac{4}{3}$ 35. (2, 4, 4)
37. El máximo es $1 + 6\sqrt{3}$ en $(\pm\sqrt{6}, \sqrt{3}, 1)$, el mínimo es $1 - 6\sqrt{3}$ en $(\pm\sqrt{6}, -\sqrt{3}, 1)$.
39. El máximo es 4 en (0, 0, ± 2), el mínimo es 2 en $(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}, 0)$.

Sección 14.9, p. 824

1. Cuadrática: $x + xy$; cúbica: $x + xy + \frac{1}{2}xy^2$
3. Cuadrática: xy ; cúbica: xy

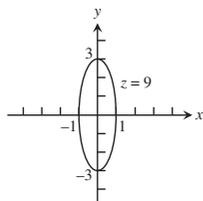
5. Cuadrática: $y + \frac{1}{2}(2xy - y^2)$;
 cúbica: $y + \frac{1}{2}(2xy - y^2) + \frac{1}{6}(3x^2y - 3xy^2 + 2y^3)$
7. Cuadrática: $\frac{1}{2}(2x^2 + 2y^2) = x^2 + y^2$; cúbica: $x^2 + y^2$
9. Cuadrática: $1 + (x + y) + (x + y)^2$;
 cúbica: $1 + (x + y) + (x + y)^2 + (x + y)^3$
11. Cuadrática: $1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2$; $E(x, y) \leq 0.00134$

Sección 14.10, p. 828

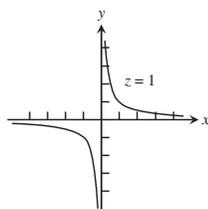
1. (a) 0 (b) $1 + 2z$ (c) $1 + 2z$
3. (a) $\frac{\partial U}{\partial P} + \frac{\partial U}{\partial T} \left(\frac{V}{nR}\right)$ (b) $\frac{\partial U}{\partial P} \left(\frac{nR}{V}\right) + \frac{\partial U}{\partial T}$
5. (a) 5 (b) 5
7. $\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)_\theta = \cos \theta$
 $\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)_y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

Ejercicios de práctica, pp. 829–832

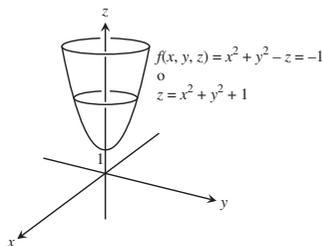
1. Dominio: todos los puntos en el plano xy ; rango: $z \geq 0$.
 Las curvas de nivel son elipses con el eje mayor a lo largo del eje y y el eje menor a lo largo del eje x .



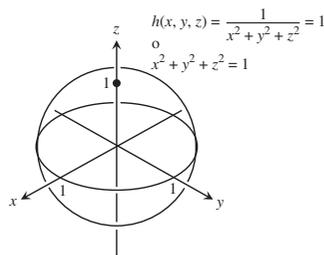
3. Dominio: todas las (x, y) tales que $x \neq 0$ y $y \neq 0$; rango: $z \neq 0$.
 Las curvas de nivel son hipérbolas con los ejes x y y como asíntotas.



5. Dominio: todos los puntos en el espacio xyz ; rango: todos los números reales. Las superficies de nivel son paraboloides de revolución con el eje z como eje.

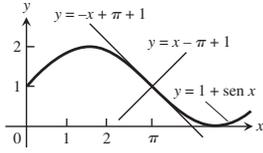


7. Dominio: todos los puntos (x, y, z) tales que $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$; rango: los números reales positivos. Las superficies de nivel son esferas con centro en $(0, 0, 0)$ y radio $r > 0$



9. -2 11. 1/2 13. 1 15. Sea $y = kx^2, k \neq 1$
17. No; $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ no existe.
19. $\frac{\partial g}{\partial r} = \cos \theta + \sen \theta, \frac{\partial g}{\partial \theta} = -r \sen \theta + r \cos \theta$
21. $\frac{\partial f}{\partial R_1} = -\frac{1}{R_1^2}, \frac{\partial f}{\partial R_2} = -\frac{1}{R_2^2}, \frac{\partial f}{\partial R_3} = -\frac{1}{R_3^2}$
23. $\frac{\partial P}{\partial n} = \frac{RT}{V}, \frac{\partial P}{\partial R} = \frac{nT}{V}, \frac{\partial P}{\partial T} = \frac{nR}{V}, \frac{\partial P}{\partial V} = -\frac{nRT}{V^2}$
25. $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 0, \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \frac{2x}{y^3}, \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{y^2}$
27. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -30x + \frac{2 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1$
29. $\left.\frac{dw}{dt}\right|_{t=0} = -1$
31. $\left.\frac{\partial w}{\partial r}\right|_{(r,s)=(\pi,0)} = 2, \left.\frac{\partial w}{\partial s}\right|_{(r,s)=(\pi,0)} = 2 - \pi$
33. $\left.\frac{df}{dt}\right|_{t=1} = -(\sen 1 + \cos 2)(\sen 1) + (\cos 1 + \cos 2)(\cos 1) - 2(\sen 1 + \cos 1)(\sen 2)$
35. $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x,y)=(0,1)} = -1$
37. Crece más rápidamente en la dirección $\mathbf{u} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}$;
 decrece más rápidamente en la dirección $-\mathbf{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}$;
 $D_{\mathbf{u}}f = \frac{\sqrt{2}}{2}; D_{-\mathbf{u}}f = -\frac{\sqrt{2}}{2}; D_{\mathbf{u}_1}f = -\frac{7}{10}$ donde $\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$
39. Crece más rápidamente en la dirección $\mathbf{u} = \frac{2}{7}\mathbf{i} + \frac{3}{7}\mathbf{j} + \frac{6}{7}\mathbf{k}$;
 decrece más rápidamente en la dirección
 $-\mathbf{u} = -\frac{2}{7}\mathbf{i} - \frac{3}{7}\mathbf{j} - \frac{6}{7}\mathbf{k}$;
 $D_{\mathbf{u}}f = 7; D_{-\mathbf{u}}f = -7; D_{\mathbf{u}_1}f = 7$ donde $\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$
41. $\pi/\sqrt{2}$
43. (a) $f_x(1, 2) = f_y(1, 2) = 2$ (b) 14/5
45. $x^2 + y^2 + z^2 = 0$
-

47. Tangente: $4x - y - 5z = 4$; recta normal:
 $x = 2 + 4t, y = -1 - t, z = 1 - 5t$
 49. $2y - z - 2 = 0$
 51. Tangente: $x + y = \pi + 1$; recta normal: $y = x - \pi + 1$



53. $x = 1 - 2t, y = 1, z = 1/2 + 2t$
 55. Las respuestas dependerán del límite superior usado para $|f_{xx}|, |f_{xy}|, |f_{yy}|$. Con $M = \sqrt{2}/2, |E| \leq 0.0142$. Con $M = 1, |E| \leq 0.02$.
 57. $L(x, y, z) = y - 3z, L(x, y, z) = x + y - z - 1$
 59. Sea más cuidadoso con el diámetro.
 61. $dI = 0.038$, porcentaje de cambio en $I = 15.83\%$, más sensible al cambio de voltaje
 63. (a) 5% 65. Mínimo local de -8 en $(-2, -2)$
 67. Punto de silla en $(0, 0), f(0, 0) = 0$; máximo local de $1/4$ en $(-1/2, -1/2)$
 69. Punto de silla en $(0, 0), f(0, 0) = 0$; mínimo local de -4 en $(0, 2)$; máximo local de 4 en $(-2, 0)$; punto de silla en $(-2, 2), f(-2, 2) = 0$
 71. Máximo absoluto: 28 en $(0, 4)$; mínimo absoluto: $-9/4$ en $(3/2, 0)$
 73. Máximo absoluto: 18 en $(2, -2)$; mínimo absoluto: $-17/4$ en $(-2, 1/2)$
 75. Máximo absoluto: 8 en $(-2, 0)$; mínimo absoluto: -1 en $(1, 0)$
 77. Máximo absoluto: 4 en $(1, 0)$; mínimo absoluto: -4 en $(0, -1)$
 79. Máximo absoluto: 1 en $(0, \pm 1)$ y $(1, 0)$; mínimo absoluto: -1 en $(-1, 0)$
 81. Máximo: 5 en $(0, 1)$; mínimo: $-1/3$ en $(0, -1/3)$
 83. Máximo: $\sqrt{3}$ en $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$; mínimo: $-\sqrt{3}$ en $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$
 85. Ancho = $(\frac{c^2V}{ab})^{1/3}$, largo = $(\frac{b^2V}{ac})^{1/3}$, alto = $(\frac{a^2V}{bc})^{1/3}$
 87. Máximo: $\frac{3}{2}$ en $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2})$ y $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2})$; mínimo: $\frac{1}{2}$ en $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2})$ y $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2})$
 89. (a) $(2y + x^2z)e^{yz}$ (b) $x^2e^{yz}(y - \frac{z}{2y})$
 (c) $(1 + x^2y)e^{yz}$
 91. $\frac{\partial w}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta}, \frac{\partial w}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta}$
 97. $(t, -t \pm 4, t)$, t es un número real

Ejercicios adicionales y avanzados, pp. 833–834

1. $f_{xy}(0, 0) = -1, f_{yx}(0, 0) = 1$
 7. (c) $\frac{r^2}{2} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$ 13. $V = \frac{\sqrt{3}abc}{2}$

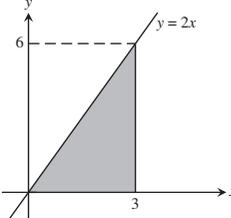
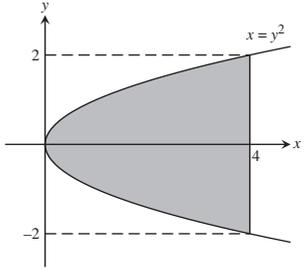
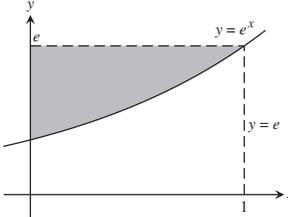
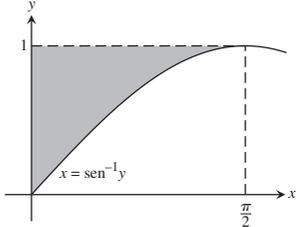
17. $f(x, y) = \frac{y}{2} + 4, g(x, y) = \frac{x}{2} + \frac{9}{2}$
 19. $y = 2 \ln |\sen x| + \ln 2$
 21. (a) $\frac{1}{\sqrt{53}}(2i + 7j)$ (b) $\frac{-1}{\sqrt{29,097}}(98i - 127j + 58k)$
 23. $w = e^{-c^2\pi^2 t} \sen \pi x$

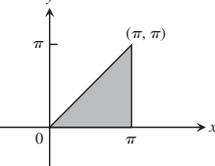
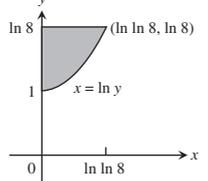
CAPÍTULO 15

Sección 15.1, pp. 840–841

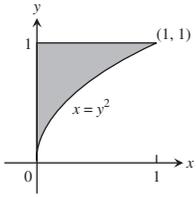
1. 24 3. 1 5. 16 7. $2 \ln 2 - 1$ 9. $(3/2)(5 - e)$ 11. $3/2$
 13. 14 15. 0 17. $1/2$ 19. $2 \ln 2$ 21. $(\ln 2)^2$ 23. $8/3$
 25. 1 27. $\sqrt{2}$

Sección 15.2, pp. 847–850

1.  3. 
 5.  7. 
 9. (a) $0 \leq x \leq 2, x^3 \leq y \leq 8$
 (b) $0 \leq y \leq 8, 0 \leq x \leq y^{1/3}$
 11. (a) $0 \leq x \leq 3, x^2 \leq y \leq 3x$
 (b) $0 \leq y \leq 9, \frac{y}{3} \leq x \leq \sqrt{y}$
 13. (a) $0 \leq x \leq 9, 0 \leq y \leq \sqrt{x}$
 (b) $0 \leq y \leq 3, y^2 \leq x \leq 9$
 15. (a) $0 \leq x \leq \ln 3, e^{-x} \leq y \leq 1$
 (b) $\frac{1}{3} \leq y \leq 1, -\ln y \leq x \leq \ln 3$
 17. (a) $0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 3 - 2x$
 (b) $0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y \cup 1 \leq y \leq 3, 0 \leq x \leq \frac{3-y}{2}$

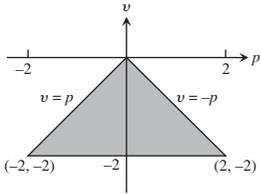
19. $\frac{\pi^2}{2} + 2$ 21. $8 \ln 8 - 16 + e$
 

23. $e - 2$

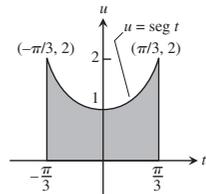


25. $\frac{3}{2} \ln 2$ 27. $-1/10$

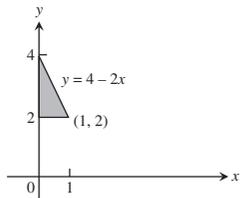
29. 8



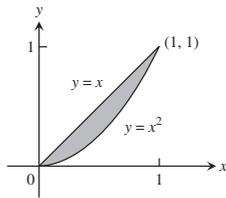
31. 2π



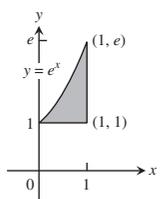
33. $\int_2^4 \int_0^{(4-y)/2} dx dy$



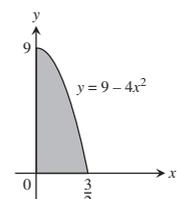
35. $\int_0^1 \int_{x^2}^x dy dx$



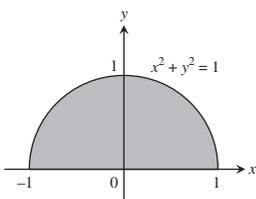
37. $\int_1^e \int_{\ln y}^1 dx dy$



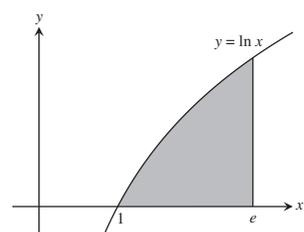
39. $\int_0^9 \int_0^{(\sqrt{9-y})/2} 16x dx dy$



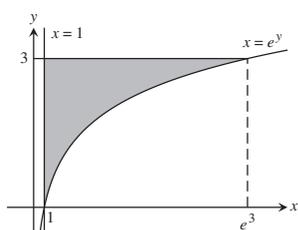
41. $\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} 3y dy dx$



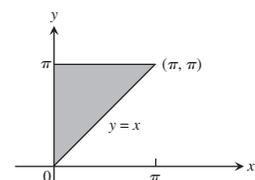
43. $\int_0^1 \int_{e^y}^e xy dx dy$



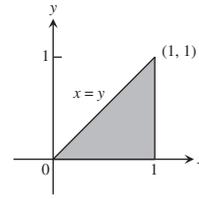
45. $\int_1^3 \int_{\ln x}^3 (x+y) dy dx$



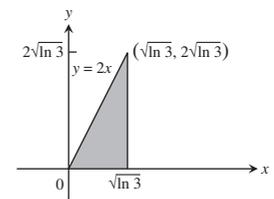
47. 2



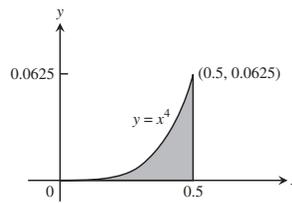
49. $\frac{e-2}{2}$



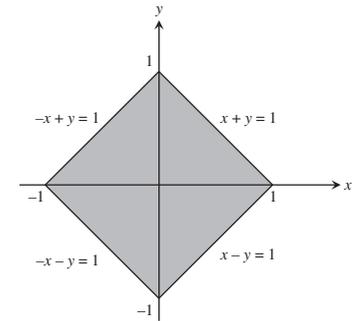
51. 2



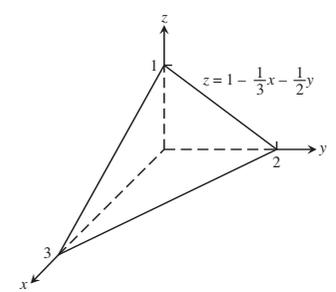
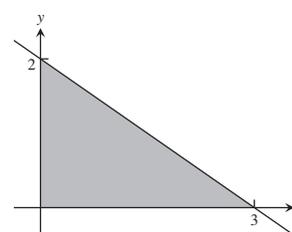
53. $1/(80\pi)$



55. $-2/3$

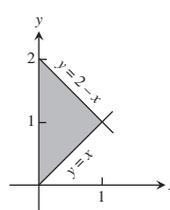


57. $4/3$ 59. $625/12$ 61. 16 63. 20 65. $2(1 + \ln 2)$



69. 1 71. π^2 73. $-\frac{3}{32}$ 75. $\frac{20\sqrt{3}}{9}$

77. $\int_0^1 \int_x^{2-x} (x^2 + y^2) dy dx = \frac{4}{3}$



79. R es el conjunto de puntos (x, y) tales que $x^2 + 2y^2 < 4$.

81. No, por el teorema de Fubini, los dos órdenes de integración deben dar el mismo resultado.

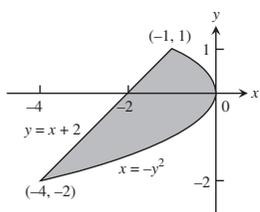
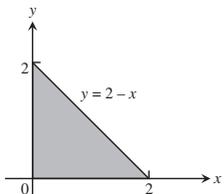
85. 0.603 87. 0.233

Sección 15.3, p. 852

1. $\int_0^2 \int_0^{2-x} dy dx = 2$ o

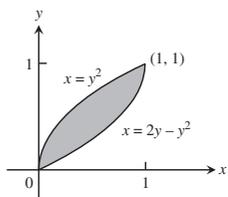
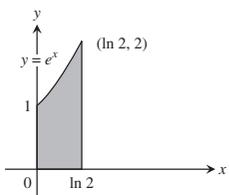
3. $\int_{-2}^1 \int_{y-2}^{-y^2} dx dy = \frac{9}{2}$

$\int_0^2 \int_0^{2-y} dx dy = 2$



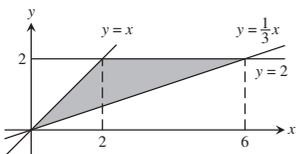
5. $\int_0^{\ln 2} \int_0^{e^x} dy dx = 1$

7. $\int_0^1 \int_{y^2}^{2y-y^2} dx dy = \frac{1}{3}$



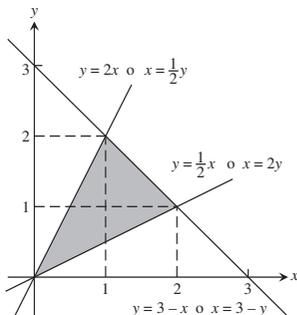
9. $\int_0^2 \int_y^{3y} 1 dx dy = 4$ o

$\int_0^2 \int_{x/3}^x 1 dy dx + \int_2^6 \int_{x/3}^2 1 dy dx = 4$

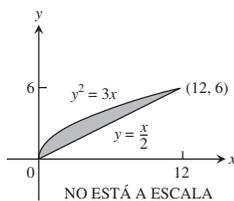


11. $\int_0^1 \int_{x/2}^{2x} 1 dy dx + \int_1^2 \int_{x/2}^{3-x} 1 dy dx = \frac{3}{2}$ o

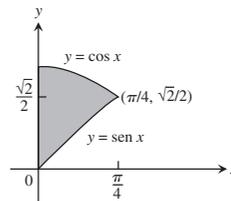
$\int_0^1 \int_{y/2}^{2y} 1 dx dy + \int_1^2 \int_{y/2}^{3-y} 1 dx dy = \frac{3}{2}$



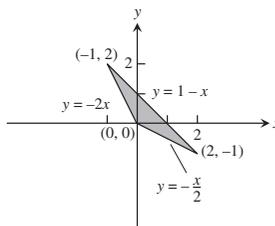
13. 12



15. $\sqrt{2} - 1$



17. $\frac{3}{2}$



19. (a) 0 (b) $4/\pi^2$ 21. $8/3$

23. $40,000(1 - e^{-2})\ln(7/2) \approx 43,329$

Sección 15.4, pp. 857-859

1. $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 9$ 3. $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}, 0 \leq r \leq \csc \theta$

5. $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}, 1 \leq r \leq 2\sqrt{3} \sec \theta$;

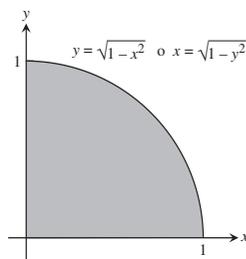
$\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 1 \leq r \leq 2 \csc \theta$

7. $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 2 \cos \theta$ 9. $\frac{\pi}{2}$

11. 2π 13. 36 15. $2 - \sqrt{3}$ 17. $(1 - \ln 2)\pi$

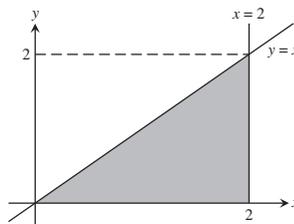
19. $(2 \ln 2 - 1)(\pi/2)$ 21. $\frac{2(1 + \sqrt{2})}{3}$

23.



$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} xy dy dx$ o $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} xy dx dy$

25.



$\int_0^2 \int_0^x y^2(x^2 + y^2) dy dx$ o $\int_0^2 \int_y^2 y^2(x^2 + y^2) dx dy$

27. $2(\pi - 1)$ 29. 12π 31. $(3\pi/8) + 1$ 33. $\frac{2a}{3}$ 35. $\frac{2a}{3}$

37. $2\pi(2 - \sqrt{e})$ 39. $\frac{4}{3} + \frac{5\pi}{8}$ 41. (a) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (b) 1
 43. $\pi \ln 4$, no 45. $\frac{1}{2}(a^2 + 2h^2)$

Sección 15.5, pp. 865–868

1. $1/6$

$$3. \int_0^1 \int_0^{2-2x} \int_0^{3-3x-3y/2} dz dy dx, \int_0^2 \int_0^{1-y/2} \int_0^{3-3x-3y/2} dz dx dy,$$

$$\int_0^1 \int_0^{3-3x} \int_0^{2-2x-2z/3} dy dz dx, \int_0^3 \int_0^{1-z/3} \int_0^{2-2x-2z/3} dy dx dz,$$

$$\int_0^2 \int_0^{3-3y/2} \int_0^{1-y/2-z/3} dx dz dy,$$

$$\int_0^3 \int_0^{2-2z/3} \int_0^{1-y/2-z/3} dx dy dz.$$

El valor de las seis integrales es 1.

5. $\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{8-x^2-y^2} 1 dz dx dy,$

$$\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \int_{x^2+y^2}^{8-x^2-y^2} 1 dz dx dy,$$

$$\int_{-2}^2 \int_4^{8-y^2} \int_{-\sqrt{8-z-y^2}}^{\sqrt{8-z-y^2}} 1 dx dz dy + \int_{-2}^2 \int_{y^2}^4 \int_{-\sqrt{z-y^2}}^{\sqrt{z-y^2}} 1 dx dz dy,$$

$$\int_4^8 \int_{-\sqrt{8-z}}^{\sqrt{8-z}} \int_{-\sqrt{8-z-y^2}}^{\sqrt{8-z-y^2}} 1 dx dy dz + \int_0^4 \int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} \int_{-\sqrt{z-y^2}}^{\sqrt{z-y^2}} 1 dx dy dz,$$

$$\int_{-2}^2 \int_4^{8-x^2} \int_{-\sqrt{8-z-x^2}}^{\sqrt{8-z-x^2}} 1 dy dz dx + \int_{-2}^2 \int_{x^2}^4 \int_{-\sqrt{z-x^2}}^{\sqrt{z-x^2}} 1 dy dz dx,$$

$$\int_4^8 \int_{-\sqrt{8-z}}^{\sqrt{8-z}} \int_{-\sqrt{8-z-x^2}}^{\sqrt{8-z-x^2}} 1 dy dx dz + \int_0^4 \int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} \int_{-\sqrt{z-x^2}}^{\sqrt{z-x^2}} 1 dy dx dz.$$

El valor de las seis integrales es 16π .

7. 1 9. 6 11. $\frac{5(2 - \sqrt{3})}{4}$ 13. 18
 15. $7/6$ 17. 0 19. $\frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}$
 21. (a) $\int_{-1}^1 \int_0^{1-x^2} \int_{x^2}^{1-z} dy dz dx$ (b) $\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-z}}^{\sqrt{1-z}} \int_{x^2}^{1-z} dy dx dz$
 (c) $\int_0^1 \int_0^{1-z} \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx dy dz$ (d) $\int_0^1 \int_0^{1-y} \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx dz dy$
 (e) $\int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \int_0^{1-y} dz dx dy$
 23. $2/3$ 25. $20/3$ 27. 1 29. $16/3$ 31. $8\pi - \frac{32}{3}$
 33. 2 35. 4π 37. $31/3$ 39. 1 41. $2 \sin 4$ 43. 4
 45. $a = 3$ o $a = 13/3$
 47. El dominio es el conjunto de todos los puntos (x, y, z) tales que $4x^2 + 4y^2 + z^2 \leq 4$.

Sección 15.6, pp. 873–875

1. $\bar{x} = 5/14, \bar{y} = 38/35$ 3. $\bar{x} = 64/35, \bar{y} = 5/7$
 5. $\bar{x} = \bar{y} = 4a/(3\pi)$ 7. $I_x = I_y = 4\pi, I_0 = 8\pi$
 9. $\bar{x} = -1, \bar{y} = 1/4$ 11. $I_x = 64/105$

13. $\bar{x} = 3/8, \bar{y} = 17/16$
 15. $\bar{x} = 11/3, \bar{y} = 14/27, I_y = 432$
 17. $\bar{x} = 0, \bar{y} = 13/31, I_y = 7/5$
 19. $\bar{x} = 0, \bar{y} = 7/10; I_x = 9/10, I_y = 3/10, I_0 = 6/5$
 21. $I_x = \frac{M}{3}(b^2 + c^2), I_y = \frac{M}{3}(a^2 + c^2), I_z = \frac{M}{3}(a^2 + b^2)$
 23. $\bar{x} = \bar{y} = 0, \bar{z} = 12/5, I_x = 7904/105 \approx 75.28,$
 $I_y = 4832/63 \approx 76.70, I_z = 256/45 \approx 5.69$
 25. (a) $\bar{x} = \bar{y} = 0, \bar{z} = 8/3$ (b) $c = 2\sqrt{2}$
 27. $I_L = 1386$
 29. (a) $4/3$ (b) $\bar{x} = 4/5, \bar{y} = \bar{z} = 2/5$
 31. (a) $5/2$ (b) $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z} = 8/15$ (c) $I_x = I_y = I_z = 11/6$
 33. 3

37. (a) $I_{c.m.} = \frac{abc(a^2 + b^2)}{12}, R_{c.m.} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{12}}$
 (b) $I_L = \frac{abc(a^2 + 7b^2)}{3}, R_L = \sqrt{\frac{a^2 + 7b^2}{3}}$

Sección 15.7, pp. 883–886

1. $\frac{4\pi(\sqrt{2} - 1)}{3}$ 3. $\frac{17\pi}{5}$ 5. $\pi(6\sqrt{2} - 8)$ 7. $\frac{3\pi}{10}$
 9. $\pi/3$
 11. (a) $\int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{4-r^2}} r dz dr d\theta$
 (b) $\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} \int_0^1 r dr dz d\theta + \int_0^{2\pi} \int_{\sqrt{3}}^2 \int_0^{\sqrt{4-z^2}} r dr dz d\theta$
 (c) $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{4-r^2}} \int_0^{2\pi} r d\theta dz dr$
 13. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\cos \theta} \int_0^{3r^2} f(r, \theta, z) dz r dr d\theta$
 15. $\int_0^{\pi} \int_0^{2 \sin \theta} \int_0^{4-r \sin \theta} f(r, \theta, z) dz r dr d\theta$
 17. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_1^{1+\cos \theta} \int_0^4 f(r, \theta, z) dz r dr d\theta$
 19. $\int_0^{\pi/4} \int_0^{\sec \theta} \int_0^{2-r \sin \theta} f(r, \theta, z) dz r dr d\theta$ 21. π^2 23. $\pi/3$
 25. 5π 27. 2π 29. $\left(\frac{8 - 5\sqrt{2}}{2}\right)\pi$
 31. (a) $\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/6} \int_0^2 \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta +$
 $\int_0^{2\pi} \int_{\pi/6}^{\pi/2} \int_0^{\csc \phi} \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$
 (b) $\int_0^{2\pi} \int_1^2 \int_0^{\sin^{-1}(1/\rho)} \rho^2 \sin \phi d\phi d\rho d\theta +$
 $\int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \rho^2 \sin \phi d\phi d\rho d\theta$
 33. $\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_{\cos \phi}^2 \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta = \frac{31\pi}{6}$

35. $\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{1-\cos\phi} \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta = \frac{8\pi}{3}$

37. $\int_0^{2\pi} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{2\cos\phi} \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta = \frac{\pi}{3}$

39. (a) $8 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^2 \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$

(b) $8 \int_0^{\pi/2} \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-r^2}} r \, dz \, dr \, d\theta$

(c) $8 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz \, dy \, dx$

41. (a) $\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \int_{\sec\phi}^2 \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$

(b) $\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} \int_1^{\sqrt{4-r^2}} r \, dz \, dr \, d\theta$

(c) $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \int_{-\sqrt{3-x^2}}^{\sqrt{3-x^2}} \int_1^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz \, dy \, dx$ (d) $5\pi/3$

43. $8\pi/3$ 45. $9/4$ 47. $\frac{3\pi-4}{18}$ 49. $\frac{2\pi a^3}{3}$ 51. $5\pi/3$

53. $\pi/2$ 55. $\frac{4(2\sqrt{2}-1)\pi}{3}$ 57. 16π 59. $5\pi/2$

61. $\frac{4\pi(8-3\sqrt{3})}{3}$ 63. $2/3$ 65. $3/4$

67. $\bar{x} = \bar{y} = 0, \bar{z} = 3/8$ 69. $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (0, 0, 3/8)$

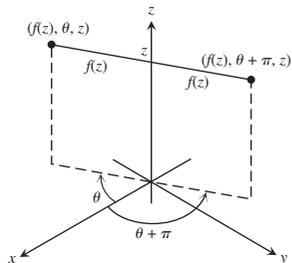
71. $\bar{x} = \bar{y} = 0, \bar{z} = 5/6$ 73. $I_x = \pi/4$ 75. $\frac{a^4 h \pi}{10}$

77. (a) $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (0, 0, \frac{4}{5}), I_z = \frac{\pi}{12}$

(b) $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (0, 0, \frac{5}{6}), I_z = \frac{\pi}{14}$

81. $\frac{3M}{\pi R^3}$

85. La ecuación de la superficie $r = f(z)$ nos dice que el punto $(r, \theta, z) = (f(z), \theta, z)$ permanecerá sobre la superficie para todos los valores de θ . En particular, $(f(z), \theta + \pi, z)$ permanece sobre la superficie siempre que $(f(z), \theta, z)$ se encuentre sobre la superficie, de manera que la superficie es simétrica con respecto al eje z .



Sección 15.8, pp. 894–896

1. (a) $x = \frac{u+v}{3}, y = \frac{v-2u}{3}, \frac{1}{3}$

(b) Región triangular con límites $u = 0, v = 0, y u + v = 3$

3. (a) $x = \frac{1}{5}(2u-v), y = \frac{1}{10}(3v-u); \frac{1}{10}$

(b) Región triangular con límites $3v = u, v = 2u, y 3u + v = 10$

7. $64/5$ 9. $\int_1^2 \int_1^3 (u+v) \frac{2u}{v} \, du \, dv = 8 + \frac{52}{3} \ln 2$

11. $\frac{\pi ab(a^2+b^2)}{4}$ 13. $\frac{1}{3} \left(1 + \frac{3}{e^2}\right) \approx 0.4687$ 15. $\frac{225}{16}$

17. (a) $\begin{vmatrix} \cos v & -u \sin v \\ \sin v & u \cos v \end{vmatrix} = u \cos^2 v + u \sin^2 v = u$

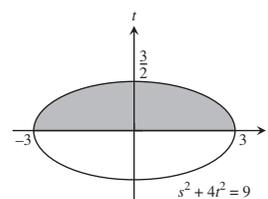
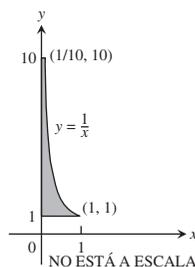
(b) $\begin{vmatrix} \sin v & u \cos v \\ \cos v & -u \sin v \end{vmatrix} = -u \sin^2 v - u \cos^2 v = -u$

21. 12 23. $\frac{a^2 b^2 c^2}{6}$

Ejercicios de práctica, pp. 896–898

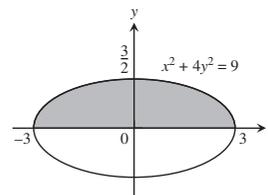
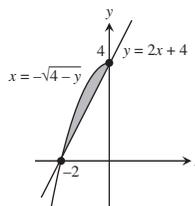
1. $9e - 9$

3. $9/2$



5. $\int_{-2}^0 \int_{2x+4}^{4-x^2} dy \, dx = \frac{4}{3}$

7. $\int_{-3}^3 \int_0^{(1/2)\sqrt{9-x^2}} y \, dy \, dx = \frac{9}{2}$



9. $\sin 4$ 11. $\frac{\ln 17}{4}$ 13. $4/3$ 15. $4/3$ 17. $1/4$ 19. π

21. $\frac{\pi-2}{4}$ 23. 0 25. $8/35$ 27. $\pi/2$ 29. $\frac{2(31-3^{5/2})}{3}$

31. (a) $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} 3 \, dz \, dx \, dy$

(b) $\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^2 3 \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$ (c) $2\pi(8-4\sqrt{2})$

33. $\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{\sec\phi} \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta = \frac{\pi}{3}$

35. $\int_0^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{3-x^2}} \int_1^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z^2 xy \, dz \, dy \, dx$
 $+ \int_1^{\sqrt{3}} \int_0^{\sqrt{3-x^2}} \int_1^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z^2 xy \, dz \, dy \, dx$

37. (a) $\frac{8\pi(4\sqrt{2}-5)}{3}$ (b) $\frac{8\pi(4\sqrt{2}-5)}{3}$

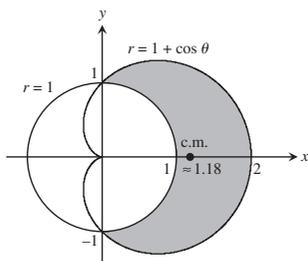
39. $I_z = \frac{8\pi\delta(b^5 - a^5)}{15}$

41. $\bar{x} = \bar{y} = \frac{1}{2 - \ln 4}$ 43. $I_0 = 104$ 45. $I_x = 2\delta$

47. $M = 4, M_x = 0, M_y = 0$ 49. $\bar{x} = \frac{3\sqrt{3}}{\pi}, \bar{y} = 0$

51. (a) $\bar{x} = \frac{15\pi + 32}{6\pi + 48}, \bar{y} = 0$

(b)



Ejercicios adicionales y avanzados, pp. 898-900

1. (a) $\int_{-3}^2 \int_x^{6-x^2} x^2 dy dx$ (b) $\int_{-3}^2 \int_x^{6-x^2} \int_0^{x^2} dz dy dx$
 (c) $125/4$

3. 2π 5. $3\pi/2$

7. (a) Radio del agujero = 1, radio de la esfera = 2

(b) $4\sqrt{3}\pi$ 9. $\pi/4$ 11. $\ln\left(\frac{b}{a}\right)$ 15. $1/\sqrt[4]{3}$

17. Masa = $a^2 \cos^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) - b\sqrt{a^2 - b^2}$,

$I_0 = \frac{a^4}{2} \cos^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) - \frac{b^3}{2} \sqrt{a^2 - b^2} - \frac{b^3}{6} (a^2 - b^2)^{3/2}$

19. $\frac{1}{ab}(e^{a^2b^2} - 1)$ 21. (b) 1 (c) 0

25. $h = \sqrt{20}$ in, $h = \sqrt{60}$ in 27. $2\pi\left[\frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

CAPÍTULO 16

Sección 16.1, pp. 905-907

1. Gráfica (c) 3. Gráfica (g) 5. Gráfica (d) 7. Gráfica (f)

9. $\sqrt{2}$ 11. $\frac{13}{2}$ 13. $3\sqrt{14}$ 15. $\frac{1}{6}(5\sqrt{5} + 9)$

17. $\sqrt{3} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$ 19. (a) $4\sqrt{5}$ (b) $\frac{1}{12}(17^{3/2} - 1)$

21. $\frac{15}{32}(e^{16} - e^{64})$ 23. $\frac{1}{27}(40^{3/2} - 13^{3/2})$

25. $\frac{1}{6}(5^{3/2} - 7\sqrt{2} - 1)$ 27. $\frac{10\sqrt{5} - 2}{3}$ 29. 8

31. $\frac{1}{6}(17^{3/2} - 1)$ 33. $2\sqrt{2} - 1$

35. (a) $4\sqrt{2} - 2$ (b) $\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})$ 37. $I_z = 2\pi\delta a^3$

39. (a) $I_z = 2\pi\sqrt{2}\delta$ (b) $I_z = 4\pi\sqrt{2}\delta$ 41. $I_x = 2\pi - 2$

Sección 16.2, pp. 917-920

1. $\nabla f = -(xi + yj + zk)(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}$

3. $\nabla g = -\left(\frac{2x}{x^2 + y^2}\right)\mathbf{i} - \left(\frac{2y}{x^2 + y^2}\right)\mathbf{j} + e^z\mathbf{k}$

5. $\mathbf{F} = -\frac{kx}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\mathbf{i} - \frac{ky}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\mathbf{j}$, cualquier $k > 0$

7. (a) $9/2$ (b) $13/3$ (c) $9/2$

9. (a) $1/3$ (b) $-1/5$ (c) 0

11. (a) 2 (b) $3/2$ (c) $1/2$

13. $-15/2$ 15. 36 17. (a) $-5/6$ (b) 0 (c) $-7/12$

19. $1/2$ 21. $-\pi$ 23. $69/4$ 25. $-39/2$ 27. $25/6$

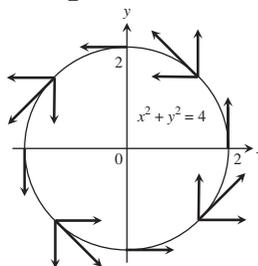
29. (a) $\text{Circ}_1 = 0, \text{circ}_2 = 2\pi, \text{flujo}_1 = 2\pi, \text{flujo}_2 = 0$

(b) $\text{Circ}_1 = 0, \text{circ}_2 = 8\pi, \text{flujo}_1 = 8\pi, \text{flujo}_2 = 0$

31. $\text{Circ} = 0, \text{flujo} = a^2\pi$ 33. $\text{Circ} = a^2\pi, \text{flujo} = 0$

35. (a) $-\frac{\pi}{2}$ (b) 0 (c) 1 37. (a) 32 (b) 32 (c) 32

39.



41. (a) $\mathbf{G} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ (b) $\mathbf{G} = \sqrt{x^2 + y^2}\mathbf{F}$

43. $\mathbf{F} = -\frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ 47. 48 49. π 51. 0 53. $\frac{1}{2}$

Sección 16.3, pp. 929-931

1. Conservativo 3. No conservativo 5. No conservativo

7. $f(x, y, z) = x^2 + \frac{3y^2}{2} + 2z^2 + C$

9. $f(x, y, z) = xe^{y+2z} + C$

11. $f(x, y, z) = x \ln x - x + \tan(x + y) + \frac{1}{2} \ln(y^2 + z^2) + C$

13. 49 15. -16 17. 1 19. $9 \ln 2$ 21. 0 23. -3

27. $\mathbf{F} = \nabla\left(\frac{x^2 - 1}{y}\right)$ 29. (a) 1 (b) 1 (c) 1

31. (a) 2 (b) 2 33. (a) $c = b = 2a$ (b) $c = b = 2$

35. No importa qué trayectoria se use. El trabajo será el mismo sobre cualquier trayectoria porque el campo es conservativo.

37. La fuerza \mathbf{F} es conservativa porque todas las derivadas parciales de $M, N, y P$ son cero. $f(x, y, z) = ax + by + cz + C; A = (xa, ya, za)$ y $B = (xb, yb, zb)$. Por lo tanto, $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(B) - f(A) = a(xb - xa) + b(yb - ya) + c(zb - za) = \mathbf{F} \cdot \overline{AB}$.

Sección 16.4, pp. 940-942

1. Flujo = 0, circ = $2\pi a^2$ 3. Flujo = $-\pi a^2$, circ = 0

5. Flujo = 2, circ = 0 7. Flujo = -9, circ = 9

9. Flujo = $-11/60$, circ = $-7/60$ 11. Flujo = $64/9$, circ = 0

13. Flujo = $1/2$, circ = $1/2$ 15. Flujo = $1/5$, circ = $-1/12$

17. 0 19. $2/33$ 21. 0 23. -16π 25. πa^2 27. $3\pi/8$

29. (a) 0 si C se recorre en sentido contrario a las manecillas del reloj

(b) $(h - k)$ (área de la región) 39. (a) 0

49. Flujo: $3/2$; circ: $-1/2$ 53. 3 55. $\frac{2\pi}{3}(7 - 8\sqrt{2})$
 57. 0 59. π

Ejercicios adicionales y avanzados, pp. 986–988

1. 6π 3. $2/3$
 5. (a) $\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$ (b) $\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{i} + y\mathbf{k}$
 (c) $\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{i}$
 7. $\frac{16\pi R^3}{3}$ 9. $a = 2, b = 1$. El flujo mínimo es -4 .
 11. (b) $\frac{16}{3}g$
 (c) Trabajo = $\left(\int_C gxy \, ds\right) \bar{y} = g \int_C xy^2 \, ds = \frac{16}{3}g$
 13. (c) $\frac{4}{3}\pi w$ 19. Falso si $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$

CAPÍTULO 17

Sección 17.1, p. 17-7

1. $y = c_1e^{-3x} + c_2e^{4x}$ 3. $y = c_1e^{-4x} + c_2e^x$
 5. $y = c_1e^{-2x} + c_2e^{2x}$ 7. $y = c_1e^{-x} + c_2e^{3x/2}$
 9. $y = c_1e^{-x/4} + c_2e^{3x/2}$ 11. $y = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x$
 13. $y = c_1 \cos 5x + c_2 \sin 5x$ 15. $y = e^x(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$
 17. $y = e^{-x}(c_1 \cos \sqrt{3}x + c_2 \sin \sqrt{3}x)$
 19. $y = e^{-2x}(c_1 \cos \sqrt{5}x + c_2 \sin \sqrt{5}x)$
 21. $y = c_1 + c_2x$ 23. $y = c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x}$
 25. $y = c_1e^{-3x} + c_2xe^{-3x}$ 27. $y = c_1e^{-x/2} + c_2xe^{-x/2}$
 29. $y = c_1e^{-x/3} + c_2xe^{-x/3}$ 31. $y = -\frac{3}{4}e^{-5x} + \frac{3}{4}e^{-x}$
 33. $y = \frac{1}{2\sqrt{3}} \sin 2\sqrt{3}x$
 35. $y = -\cos 2\sqrt{2}x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2\sqrt{2}x$
 37. $y = (1 - 2x)e^{2x}$ 39. $y = 2(1 + 2x)e^{-3x/2}$
 41. $y = c_1e^{-x} + c_2e^{3x}$ 43. $y = c_1e^{-x/2} + c_2xe^{-x/2}$
 45. $y = c_1 \cos \sqrt{5}x + c_2 \sin \sqrt{5}x$ 47. $y = c_1e^{-x/5} + c_2xe^{-x/5}$
 49. $y = e^{-x/2}(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$ 51. $y = c_1e^{3x/4} + c_2xe^{3x/4}$
 53. $y = c_1e^{-4x/3} + c_2xe^{-4x/3}$ 55. $y = c_1e^{-x/2} + c_2e^{4x/3}$
 57. $y = (1 + 2x)e^{-x}$ 59. $y = \frac{15}{13}e^{-7x/3} + \frac{11}{13}e^{2x}$

Sección 17.2, p. 17-16

1. $y = c_1e^{5x} + c_2e^{-2x} + \frac{3}{10}$
 3. $y = c_1 + c_2e^x + \frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x$
 5. $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{8} \cos 3x$
 7. $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-x} - 6 \cos x - 2 \sin x$
 9. $y = c_1e^x + c_2e^{-x} - x^2 - 2 + \frac{1}{2}xe^x$

11. $y = c_1e^{3x} + c_2e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-x} + \frac{49}{50} \cos x + \frac{7}{50} \sin x$

13. $y = c_1 + c_2e^{-5x} + x^3 + \frac{3}{5}x^2 - \frac{6}{25}x$

15. $y = c_1 + c_2e^{3x} + 2x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}xe^{3x}$

17. $y = c_1 + c_2e^{-x} + \frac{1}{2}x^2 - x$

19. $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{2}x \cos x$

21. $y = (c_1 + c_2x)e^{-x} + \frac{1}{2}x^2e^{-x}$

23. $y = c_1e^x + c_2e^{-x} + \frac{1}{2}xe^x$

25. $y = e^{-2x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x) + 2$

27. $y = A \cos x + B \sin x + x \sin x + \cos x \ln(\cos x)$

29. $y = c_1 + c_2e^{5x} + \frac{1}{10}x^2e^{5x} - \frac{1}{25}xe^{5x}$

31. $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{2}x \cos x + x \sin x$

33. $y = c_1 + c_2e^x + \frac{1}{2}e^{-x} + xe^x$

35. $y = c_1e^{5x} + c_2e^{-x} - \frac{1}{8}e^x - \frac{4}{5}$

37. $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - (\sin x)[\ln(\csc x + \cot x)]$

39. $y = c_1 + c_2e^{8x} + \frac{1}{8}xe^{8x}$

41. $y = c_1 + c_2e^x - x^4/4 - x^3 - 3x^2 - 6x$

43. $y = c_1 + c_2e^{-2x} - \frac{1}{3}e^x + x^3/6 - x^2/4 + x/4$

45. $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + (x - \tan x) \cos x - \sin x \ln(\cos x)$
 $= c_1 \cos x + c_2' \sin x + x \cos x - (\sin x) \ln(\cos x)$

47. $y = ce^{3x} - \frac{1}{2}e^x$

49. $y = ce^{3x} + 5xe^{3x}$

51. $y = 2 \cos x + \sin x - 1 + \sin x \ln(\sec x + \tan x)$

53. $y = -e^{-x} + 1 + \frac{1}{2}x^2 - x$

55. $y = 2(e^x - e^{-x}) \cos x - 3e^{-x} \sin x$

57. $y = (1 - x + x^2)e^x$

59. $y_p = \frac{1}{4}x^2$

Sección 17.3, pp. 17-21 a 17-23

1. $my'' + y' + y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 2$
 3. $\frac{25}{32}y'' + 40y = 0, \quad y(0) = \frac{5}{12}, \quad y'(0) = \frac{v_0}{12}$
 5. $2q'' + 4q' + 10q = 20 \cos t, \quad q(0) = 2, \quad q'(0) = 3$
 7. 0.0864 ft (arriba del equilibrio)
 9. $y(t) = 0.2917 \cos(7.1552t) + \frac{v_0}{85.8623} \sin(7.1552t)$
 (en ft), o $y = 3.5 \cos(7.1552t) + \frac{v_0}{0.1398} \sin(7.1552t)$ (en pulgadas).
 11. 0.308 seg 13. 8.334 lb 15. 24.4949 ft/seg
 17. -1.56 ft/seg^2 (aceleración hacia arriba)

19. $q(t) = -8e^{-3t} + 10e^{-2t}$, $\lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = 0$
 21. $y(t) = 1 + 2e^{-t} - \frac{1}{3}e^{-2t} - \frac{2}{3}e^{-8t}$
 23. $y(\pi) = -2$ m (arriba del equilibrio)
 25. $q(t) = \frac{1}{5} + \left(\frac{49\sqrt{199}}{995} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{199}}{2} t + \frac{49}{5} \cos \frac{\sqrt{199}}{2} t \right) e^{-t/2}$

Sección 17.4, p. 17-25

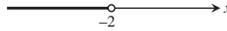
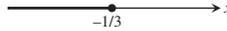
1. $y = \frac{c_1}{x^2} + c_2 x$ 3. $y = \frac{c_1}{x^2} + c_2 x^3$
 5. $y = c_1 x^2 + c_2 x^4$ 7. $y = c_1 x^{-1/3} + c_2$
 9. $y = x(c_1 + c_2 \ln x)$
 11. $y = x[c_1 \cos(2 \ln x) + c_2 \operatorname{sen}(2 \ln x)]$
 13. $y = \frac{1}{x}[c_1 \cos(3 \ln x) + c_2 \operatorname{sen}(3 \ln x)]$
 15. $y = \frac{1}{\sqrt{x}}[c_1 \cos(\ln x) + c_2 \operatorname{sen}(\ln x)]$
 17. $y = \frac{1}{x}(c_1 + c_2 \ln x)$ 19. $y = c_1 + c_2 \ln x$
 21. $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}(c_1 + c_2 \ln x)$ 23. $y = x^{-5/4}(c_1 + c_2 \ln x)$
 25. $y = \frac{1}{2x^3} + \frac{x}{2}$ 27. $y = x$
 29. $y = x[-\cos(\ln x) + 2 \operatorname{sen}(\ln x)]$

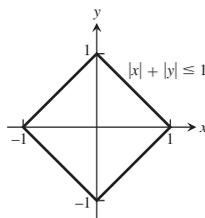
Sección 17.5, p. 17-31

1. $y = c_0 + c_1 \left(x - x^2 + \frac{2}{3}x^3 - \dots \right)$
 $= c_0 - \frac{c_1}{2} e^{-2x}$
 3. $y = c_0(1 - 2x^2 + \dots) + c_1 \left(x - \frac{2}{3}x^3 + \dots \right)$
 $= c_0 \cos 2x + c_1 \operatorname{sen} 2x$
 5. $y = c_1 x + c_2 x^2$
 7. $y = c_0 \left(1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \dots \right) + c_1 \left(x + \frac{1}{6}x^3 + \dots \right)$
 9. $y = c_0 \left(1 - x^2 + \frac{5}{12}x^4 - \dots \right) + c_1 x$
 11. $y = c_0(1 - 3x^2 + \dots) + c_1(x - x^3)$
 13. $y = c_0 \left(1 + x^2 + \frac{2}{3}x^4 + \dots \right)$
 $+ c_1 \left(x + x^3 + \frac{3}{5}x^5 + \dots \right)$
 15. $y = c_0 \left(1 - \frac{3}{2}x^2 + \dots \right) + c_1 \left(x - \frac{1}{2}x^3 + \dots \right)$
 17. $y = c_0 \left(1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 + \dots \right) + c_1 \left(x - \frac{1}{3}x^3 \right)$

APÉNDICES

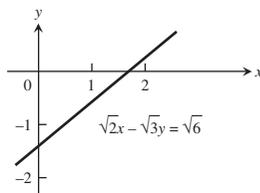
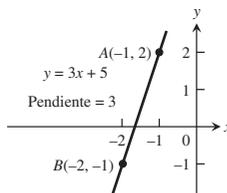
Apéndice 1, p. AP-6

1. $0.\bar{1}, 0.\bar{2}, 0.\bar{3}, 0.\bar{8}, 0.\bar{9}$ o 1
 3. $x < -2$  $5. x \leq -\frac{1}{3}$ 
 7. 3, -3 9. 7/6, 25/6
 11. $-2 \leq t \leq 4$  $13. 0 \leq z \leq 10$ 
 15. $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$  $17. (-\infty, -3] \cup [1, \infty)$ 
 19. $(-3, -2) \cup (2, 3)$ 21. (0, 1) 23. $(-\infty, 1]$
 27. La gráfica de $|x| + |y| \leq 1$ es el interior y la frontera de la región “con forma de diamante”.



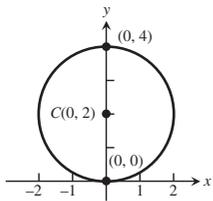
Apéndice 3, pp. AP-16–AP-18

1. 2, -4; $2\sqrt{5}$ 3. Circunferencia unitaria
 5. $m_{\perp} = -\frac{1}{3}$
 7. (a) $x = -1$ (b) $y = 4/3$ 9. $y = -x$
 11. $y = -\frac{5}{4}x + 6$ 13. $y = 4x + 4$ 15. $y = -\frac{x}{2} + 12$
 17. intersección con el eje $x = \sqrt{3}$
 intersección con el eje $y = -\sqrt{2}$

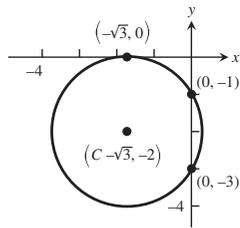


19. (3, -3)

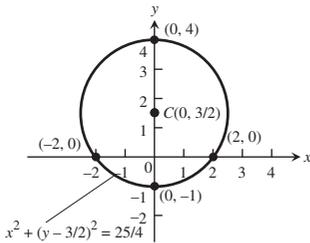
21. $x^2 + (y - 2)^2 = 4$



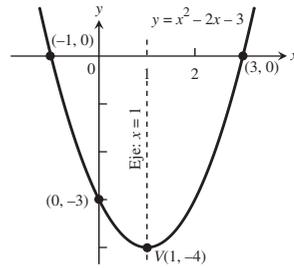
23. $(x + \sqrt{3})^2 + (y + 2)^2 = 4$



25. $(x +$



27.



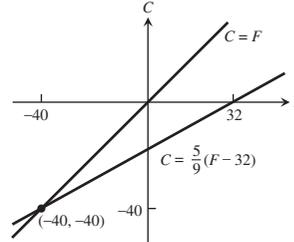
37. $(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}), (-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}})$

39. $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{3}), (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{3})$

41. (a) ≈ -2.5 grados/in (b) ≈ -16.1 grados/in

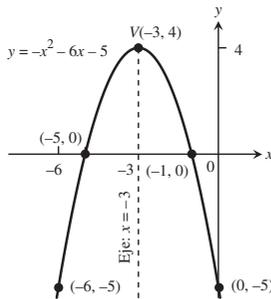
(c) ≈ -8.3 grados/in 43. 5.97 atm

45. Sí: $C = F = -40^\circ$



51. $k = -8, k = 1/2$

29.



31. Puntos exteriores de una circunferencia de radio $\sqrt{7}$, con centro en el origen.

33. Las arandelas entre las circunferencias $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 4$ (puntos con distancia al origen entre 1 y 2)

35. $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 < 6$

Apéndice 7, pp. AP-34-AP-35

1. (a) (14, 8) (b) (-1, 8) (c) (0, -5)

3. (a) Mediante reflexión de z con respecto al eje real
(b) Mediante reflexión de z con respecto al eje imaginario
(c) Mediante reflexión de z con el eje real y luego multiplicando la longitud del vector por $1/|z|^2$

5. (a) Puntos en la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$

(b) Puntos dentro de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$

(c) Puntos fuera de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$

7. Puntos en la circunferencia de radio 1, centro (-1, 0)

9. Puntos en la recta $y = -x$ 11. $4e^{2\pi i/3}$ 13. $1e^{2\pi i/3}$

15. $\cos^4 \theta - 6 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \sin^4 \theta$ 17. $1, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$

19. $2i, -\sqrt{3} - i, \sqrt{3} - i$ 21. $\frac{\sqrt{6}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i, -\frac{\sqrt{6}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i$

23. $1 \pm \sqrt{3}i, -1 \pm \sqrt{3}i$

ÍNDICE

- A**
 a , logaritmos con base, 383-384
 a^x , definición de, 380
derivada de, 382-383
Abscisa, AP-10
Aceleración, 127, 129
caída libre y, 128
como derivada de la velocidad, 127, 128-129
componente normal de, 734-738
componente tangencial de, 734-738
derivada de (sacudida), 127
en coordenadas polares, 739-742
en el espacio, 711
velocidad y posición a partir de, 196
Aditividad, 903
integrales dobles y, 846
para integrales definidas, 266
Alargamiento de una gráfica, 17
Alberto de Sajonia, 559
Álgebra, teorema fundamental del,
AP-33-AP-34
Altura máxima en movimiento de un
proyectil, 719
Análisis de error
de planos fase, 523
limitaciones del, 526
en aproximación lineal estándar, 169, 796
en integración numérica, 472-475
para aproximación lineal, 798
Ángulo(s), 22-23
de dirección, 680
de disparo, 718
de elevación, 718
de inclinación, AP-11
de lanzamiento, 718
en posición estándar, 23
entre planos, 694
entre vectores, 674-676
Antiderivadas, 230-235
de una función vectorial, 715
definición de, 230
integrales definidas y, 235-236
movimiento y, 233-234
Aproximación(es)
análisis de error de, 472-475
cuadráticas, 586
diferenciales, error en las, 169-170
lineales estándar, 165, 795
lineales, fórmula del error para, 796, 821-822
mediante diferenciales, 168
mediante el plano tangente, 795
mediante la recta tangente, 164, 795
mediante la regla de Simpson, 472-475
mediante la regla del trapecio, 472-474
mediante polinomios de Taylor, 586
mediante trapecios, 469-470
método de Newton para raíces, 226
para raíces y potencias, 166-167
recta tangente, 795
utilizando parábolas, 470-472
Arco
secante, 450
tangente, 599-600
Área, 246-248
aproximaciones finitas para, 248, 249
bajo la curva o gráfica, 247
como una integral definida, 246
de la superficie
de revolución, 332-335, 624-625
de superficie implícita, 949-950, 954
de superficies explícitas, 954
de una gráfica, 950
definición de, 332-334
diferencial para superficie parametrizada,
946
para la esfera, 947
parametrización del, 944-948
suaves, 945-946
de paralelogramo, 945
producto cruz vectorial, como, 683
de regiones acotadas en un plano, 850-851
de un trapecio, 269
debajo de la gráfica de funciones no negativas,
253
definición de, 268
en coordenadas polares, 855
encerrada por una astroide, 619
entre curvas, 294-296
sustitución y, 291-297
estimación de
suma inferior y, 247-248
infinita, 479
mediante el teorema de Green, 940
mediante integrales dobles, 850-852
optimización, de rectángulos, 216-217
planas para coordenadas polares, 635-637
sección transversal, 308, 309
suma superior y, 246-247
superficies y, 334, 624-625, 943-953
total, 247, 280-282
Argumento, AP-30
Asíntotas, 9
de hipérbolas, 643-644
determinación de, 209
horizontal, 84, 86-88, 92, 209
inclinada (oblicua), 88-89
oblicua o inclinada, 88-89
vertical, 84, 91-92
definición, 91
determinación de la ecuación para, 91-92
Astroide, 620
longitud de la, 622
B
Banda de Möbius, 956
Base
 a , logaritmos con, 383-384
de funciones exponenciales, 380
de un cilindro, 308
Bernoulli, Daniel, 185
Bernoulli, Johann, 145
Bolzano, Bertrand, 127
Bombeo de líquidos desde contenedores, 340
Braquistocronas, 614-616
Búsqueda
binaria, 427-428
secuencial, 427-428
C
Cable, colgante, 11
Caída libre, ley de Galileo para, 39, 127-128
Calculadoras, para estimar límites, 51-53
graficación con, 30-34
Cambio
absoluto, 170
de base en un logaritmo, 384
de dimensiones, de la gráfica de una función,
16-18
estimación del, en una dirección especial, 794
exponencial (crecimiento o decaimiento),
387-388

- porcentual, 170
- relativo, 170
- sensibilidad al, 131, 170-172
- tasas de, 39-44, 103-104, 124-125
- Campo(s)
 - completamente ordenado, AP-23-AP-24
 - conservativos, 920, 922-928, 970
 - como campos gradientes, 923
 - determinación de potenciales para, 925-928
 - integrales de línea en, 927
 - potenciales para, 925-928
 - propiedad de ciclo de, 924
 - pruebas de componentes para, 925, 927
 - teorema de Stokes y, 970
 - de números, AP-23
 - de pendientes, 498-499
 - de velocidades
 - circulación para, 914-915
 - integral del flujo, 914-915
 - eléctrico, 920
 - gradiente, 923
 - gravitacional, 920
 - vectores en, 908
 - ordenado, AP-23-AP-24
 - vectorial(es), 908-910
 - campos conservativos como, 923
 - conservativos, 920, 924-925
 - continuo, 908
 - densidad de flujo de, 933
 - derivable, 908
 - divergencia de, 933-934
 - eléctricos, 920
 - función potencial para, 921
 - gradiente, 909-910, 922-923
 - gravitacional, 920
 - integración en, 901-981
 - integrales de línea de, definición, 910
 - integrales de línea y, 907-917
 - rotacional de, 962
- Capacidad de sustentación, 521
- Cardioide, en coordenadas polares, área
 - encerrada por, 636
 - graficación de, 636
 - longitud de, 637-638
- Carga eléctrica, 978
- Cascarones
 - cilíndricos, 319
 - volúmenes mediante, 319-324
 - delgados, masas y momentos de, 958-960
- Catenaria, 11, 423
- Cauchy, Augustin-Louis, 401
- Cavalieri, Bonaventura, 310
- Centro
 - de curvatura, para curvas planas, 731
 - de masa, 347
 - centroide, 352
 - coordenadas de, 348-349, 904, 958
 - de sólidos, 869
 - de un alambre o un resorte, 904
 - de un cascarón delgado, 959-960
 - de una placa delgada y plana, 348-351
 - momentos y, 346-355, 868-873
- Centroides, 352, 869-870
 - fuerzas en un fluido y, 353
 - teorema de Pappus y, 353-354
- Ciclo, 915
- Cicloides, 614
- Cilindro(s), 696-697
 - base de, 308
 - parabólico, flujo a través de, 957
 - parametrización de, 944
 - rebanar por medio de, 319-321
 - volumen de, 308
- Círculo
 - de curvatura, para curvas planas, 731-732
 - osculador, 731
- Circuitos RL , 508
- Circulación
 - flujo contra, 916
 - para campos de velocidad, 914-915
- Circunferencia
 - con radio dado, AP-14
 - ecuación estándar de la, AP-14, 18
 - ecuación polar de una, 652-653
 - en el plano, AP-13, AP-15
 - límite, 526
 - longitud de una, 622
 - unitaria, AP-14
- Clairaut, Alexis, 770
- Cociente(s), AP-31
 - de diferencias, 103, 107
 - formas para, 107
 - límite de, 104
 - productos y derivadas de, 119-120
- Coefficientes
 - de polinomios, 8-9
 - de series de potencias, 575
 - de un binomio, 597
 - determinación de, para fracciones parciales, 460-461
 - indeterminados, 454
- Comando Integrate (para integrar) (SAC), 465
- Combinación
 - de funciones, 14-22
 - de series, 549-550
- Componente(s)
 - (escalar) de \mathbf{u} en la dirección de \mathbf{v} , 678
 - \mathbf{i} de un vector, 669
 - \mathbf{j} de un vector, 669
 - \mathbf{k}
 - de un vector, 669
 - del rotacional, 934-936
 - normal de la aceleración, 734-738
 - tangencial de la velocidad, 734-738
- Compresión
 - de una gráfica, 16
 - uniforme de un gas, 934
- Computadoras, para la estimación de límites, 51-53
- Concavidad, 203-206
 - criterio de la segunda derivada para, 203
- Conectividad, 80
- Cónicas
 - ecuaciones polares de, 650-652
 - en coordenadas polares, 639, 648-653
 - excentricidad de, 648-650
- Conjugado complejo, AP-29
- Conjunto, AP-2, vacío, AP-2
- Conos
 - área de la superficie de, 946
 - elípticos, 697, 699
 - parametrización de, 943
- Constante
 - arbitraria, 231
 - de gravitacional universal, 740
 - de resorte, 338
 - distinta de cero, 232
 - tasa, 388
- Construcción de los números reales, AP-24-AP-25
- Continuidad, 39-100. *Véase también*
 - Discontinuidad
 - de composiciones, 761
 - de funciones inversas, 364
 - de funciones vectoriales, 708-709
 - de una función en un punto, 74-76
 - derivadas parciales y, 769
 - derivabilidad y, 111, 772
 - en el extremo izquierdo del intervalo, 74
 - en un intervalo, 76
 - en un punto interior, 74
 - para funciones de varias variables, 759-761
- Convención para ángulos, 23
- Convergencia, 264
 - absoluta, 570
 - condicional, 570-571
 - criterios para, 483-485, 572-573
 - de integrales impropias, 478, 480-481
 - de series, 554
 - de potencias, 575-579
 - de Taylor, 589-595
 - geométricas, 546
 - de sucesiones, 533-535
 - de sumas de Riemann, 264
 - intervalo de, 579
 - radio de, 578-579
 - teorema de, para series de potencias, 578
- Coordenadas
 - cartesianas
 - conversión a coordenadas polares, 855-857
 - de tres dimensiones. *Véase* Sistema de coordenadas de tres dimensiones
 - en el plano, AP-10
 - integrales triples en, 859-865
 - relacionadas con coordenadas cilíndricas y esféricas, 879
 - relacionadas con coordenadas cilíndricas, 876
 - relacionadas con coordenadas polares, 623-630
 - cilíndricas
 - a coordenadas rectangulares, 876, 883
 - de coordenadas esféricas, 883
 - definición de, 875
 - diferencial de volumen en, 876
 - integración de, 877-879
 - integrales triples en, 875-879
 - movimiento en, 739-740
 - parametrización mediante, 944
 - del centro de masa, 348-349, 904, 948
 - polares, integrales en, 853-854
 - xyz , integrales de línea y, 911-912
- esféricas
 - definición de, 879
 - integrales triples en, 879-883
- polares, 627-630
 - área de una región polar, 636
 - área en, 855

- cónicas en, 639, 648-653
- critérios de simetría para gráficas en, 631
- definición de, 627
- graficación en, 628, 631-634,
- integrales en, 853-854
- longitud de curvas polares, 637
- movimiento en, 739-740
- pendiente de una curva polar, 632-633
- polo en, 627
- rayo inicial de, 627
- relacionadas con coordenadas cartesianas, 628-630
- velocidad y aceleración en, 739-742
- rectangulares. *Véase* Coordenadas cartesianas
- x , AP-10
- y , AP-10
- Cosecante, 23
- Coseno(s), 23
 - directores, 680
 - integrales de productos de, 447-448
 - integrales de productos de potencias de, 444-446
 - ley de los, 26-27, 675
- Costo(s)
 - fijos, 130
 - marginal, 129-130, 218
 - variables, 130
- Cota
 - inferior, 267
 - mínima superior, 539, AP-23-AP-24
 - superior, 267, AP-23
- Courant, Richard, 116
- Crecimiento
 - exponencial, 388
 - logístico, 521, 522
 - de una población, 521-522
 - poblacional
 - logístico, 521-522
 - no limitado, 390-391
- Criterio(s)
 - de comparación
 - de límite, 483, 484, 560-561
 - directa, 483, 484
 - para convergencia de integrales impropias, 484-485
 - para convergencia de series, 558-561
 - de convergencia absoluta, 571
 - de derivadas, para valores extremos locales, 187-188, 635-638
 - de la integral, 553-556
 - estimación del error, 555-556
 - residuo en el, 555-556
 - de la primera derivada, 198-201, 207, 803, 812-813
 - de la raíz, 565-566, 579
 - de la razón, 563-565, 576-577, 579, 597
 - de la segunda derivada, 203, 206, 808
 - deducción del, funciones de dos variables, 820-821
 - de las dos trayectorias para la existencia de límites, 760
 - de las series alternantes, 568
 - de simetría, para gráficas en coordenadas polares, 631
 - del n -ésimo término para divergencia, 548
 - máx-mín, 200, 206, 803, 805, 808
- Cuadrado, cómo completar un, AP-14-AP-15
- Cuadrantes del sistema de coordenadas, AP-10
- Cubo, integral sobre las superficies de, 955
- Cuerpo que cae, con resistencia, 520-521
- Curva(s)
 - área bajo una, 479
 - área entre, 294-296
 - bosquejo de, 203-210
 - cerrada, 915
 - de contorno, 750
 - de nivel, 788-789
 - de funciones de dos variables, 750
 - definición de, 41-43, 102
 - definida paramétricamente, longitud de, 620-622
 - determinación de, 42, 103, 632
 - elemento componente de una, 945
 - en el espacio, 707-713
 - ecuaciones paramétricas para, 707
 - ecuaciones vectoriales para. *Véase* Funciones vectoriales
 - fórmulas para, 738
 - longitud de arco a lo largo de una, 724-726
 - normal a una, 730
 - trabajo realizado por una fuerza sobre una, 912-914
 - vector binormal de una, 734
 - en forma de "S", 522
 - generación para superficies cilíndricas, 696
 - hipótesis para cálculo integral vectorial, 921-922
 - orientada
 - negativamente, 936
 - positivamente, 936
 - paramétrica, 611, 612
 - cálculo con, 618-625
 - derivable, 618
 - graficación de, 634
 - longitud de arco de, 620-622, 724-725
 - parametrizada, 611, 624-625
 - placas acotadas por dos, 351-352
 - plana(s)
 - círculo de curvatura para, 731-732
 - curvatura de, 728-733
 - flujo que cruza una, 915-917
 - longitudes de, 327, 329, 621-624
 - parametrización de, 610-616, 707
 - polar
 - graficación de, 624
 - longitud de, 637-638
 - punto
 - de inflexión de, 204-206
 - inicial de, 610
 - terminal de una, 610
 - recta tangente a, 102
 - secante de, 41
 - solución, 498
 - suave, 3-4, 326-327, 620-621, 710
 - curvatura de, 728-729
 - longitud, 724
 - por tramos, 710, 921
 - rapidez en, 726
 - torsión de, 737
 - sustitución y , 291-297
 - tangente a, 39-44, 726, 788-789
 - trabajo realizado por una fuerza sobre una, 912-914
 - $y = f(x)$, longitud, 327
- Curvatura
 - cálculo de, 729, 738
 - centro de, 731
 - de curvas planas, 728-733
 - en el espacio, 732
 - radio de, 731
- Cúspide, 111
- D**
- Decaimiento
 - del carbono, 14, 392
 - exponencial, 388
 - radiactivo, 391
- Dedekin, Richard, 295, 550, AP-2
- Definiciones recursivas, 539
- Denominadores cero, eliminación algebraica de, 51
- Densidad, 348
 - circulación y , 934-936
 - de circulación, 934-936
 - de flujo, 933
 - (divergencia), de un campo vectorial, 933, 972
 - específica de un fluido, 340-341
- Derivabilidad, 109-111, 764, 769, 771-772
- Derivación, 102
 - de funciones vectoriales, reglas para, 711-714
 - de una función, 107
 - implícita, 149-153, 779-781
 - fórmula para, 780
 - integración y , como procesos inversos, 280
 - logarítmica, 375
 - término a término de una serie de potencias, 580
 - total, 797, 798
- Derivada(s)
 - aplicaciones de, 184-245
 - cálculo a partir de la definición, 107
 - como tasa de cambio, 124-131
 - como una función, 102, 106-112
 - como velocidad, 125, 711
 - comportamiento gráfico de una función con base en, 210
 - de aceleración (sacudida), 127
 - de función valor absoluto, 146
 - de funciones exponenciales, 378-379
 - de funciones hiperbólicas, 417-418
 - inversas, 420-421
 - de funciones recíprocas, 107
 - de funciones trigonométricas
 - inversas, 135-139, 411
 - de la función constante, 116
 - de la función coseno, 136-137
 - de la función raíz cuadrada, 108
 - de la función seno, 135-136
 - de la inversa de funciones derivables, 364-366
 - de orden superior, 121-122, 152, 771
 - de segundo orden, 121-122
 - de una función compuesta, 142-143, 712
 - de una función vectorial, 709-711
 - de una integral, 276, 280
 - de una serie de potencias, 580
 - de $y = \ln x$, 371

- de $y = \sec^{-1} u$, 409-410
- de $y = \operatorname{sen}^{-1} u$, 408
- de $y = \tan^{-1} u$, 409
- definición de, 106
- del lado derecho, 109-110
- del vector tangente, 730
- direccional, 784-790
 - cálculo de, 786-788
 - como producto punto, 786
 - definición de, 785
 - en el plano, 784-785
 - estimación del cambio por medio de, 794
 - gradientes y, 786
 - interpretación de, 785-786
 - propiedades de, 787
- en economía, 129-131
- en un punto, 102-104, 110-111
- fórmula alterna para, 107
- graficación de, 108-109
- lateral, 109-110
- logarítmica, 375
- n -ésima, 122
- notaciones para, 108
- parciales, 747-835
 - cálculo de, 766-768
 - con variables restringidas, 824-828
 - continuas, identidad para funciones con, 969
 - continuidad y, 769
 - de funciones de dos variables, 764-766
 - de orden superior, 771
 - de segundo orden, 769-770
 - de una función de varias variables, 747-752
 - definiciones de, 765
 - notaciones equivalentes de, 765
- por la derecha, 109-110
- por la izquierda, 109-110
- que incluyen a $\log_a x$, 384-385, AP-27
- regla de Leibniz, 306
- regla del producto cruz, 712
- regla del producto punto, 712
- regla general de la potencia para, 117, 381
- reglas para el múltiplo constante, 117-119
- símbolos para, 122
- tercera, 122
- Descartes, René, AP-10
- Desigualdad(es)
 - del triángulo, AP-5
 - máx-mín para integrales definidas, 266, 267, 274
 - reglas para, AP-1
 - resolución de, AP-3-AP-4
- Desplazamiento (avance), AP-11, 125
 - definición de, 251-252, 279
 - de la gráfica de funciones, 16
 - horizontal de una función, 16
 - versus distancia recorrida, 254
 - vertical de una función, 16
- Detención de flujo, 934
- Determinación de raíces, 80
- Determinante(s)
 - cálculo del producto cruz, 686
 - acobiano, 887, 889, 890, 892
- Diagrama(s)
 - de árbol, para la regla de la cadena en varias variables, 776, 777, 778, 779, 780
- de Argand, AP-29-AP-30
- de dispersión, 4
- de flechas para una función, 2, 827-828
- de una máquina para una función, 2
- Diapasón, datos para afinación de un, 4
- Diferencial(es), 164, 167-168, 796-798
 - área de la superficie, para superficies parametrizadas, 946
 - de área, 636
 - de la longitud de arco, 623-624
 - definición de, 167
 - estimación mediante, 168-169
 - total, 797-798
- Dirección
 - a lo largo de una trayectoria, 610-611, 901-902
 - de vectores, 668
 - estimación del cambio en, 794
- Directriz(ces)
 - de la elipse, 649
 - de la hipérbola, 649
 - de la parábola, 649, 651
- Dirichlet, Lejeune, 479
- Discontinuidad(es), 111. *Véase también*
 - Continuidad
 - de salto, 75
 - en dy/dx , 328-329
 - infinita, 75
 - oscilante, 75
 - punto de, 74
 - removible, 75
- Discriminante (hessiano) de una función, 805
- Distancia
 - en coordenadas de tres dimensiones
 - de un punto a otro punto, 662
 - de un punto a un plano, 691-692, 693-694
 - de un punto a una recta, 690
 - en el plano, AP-13-AP-15
 - esferas en el espacio y, 662-663
 - fórmula de la distancia, 662, AP-14
 - recorrida, 248-250
 - estimación mediante una suma finita, 249-250
 - total, 251-252
 - versus desplazamiento, 251-252, 279
- Divergencia
 - criterio del n -ésimo término para, 548
 - criterio para la, 483-485, 572-573
 - de integrales impropias, 478, 480-481
 - de series, 545, 548
 - de un campo vectorial, 931-934, 972
 - de una sucesión, 533-535
 - a infinito, 535
 - a infinito negativo, 535
 - teorema de la, 974
 - para otras regiones, 976-977
 - para regiones especiales, 975-976
- Dominio,
 - conexo, 921
 - de un campo vectorial, 908, 921
 - conexo, 921
 - simplemente conexo, 921
 - de una función, 1-3, 747, 748
 - integrales dobles y, 846
 - natural, 2
- E**
- e*,
 - como límite, 382
 - como una serie, 590-591
 - definición del número, 370
 - exponencial natural y, 377-378
- Economía
 - derivadas en, 129-131
 - ejemplos de optimización aplicada en, 218-219
- Ecuación(es)
 - autónomas, solución gráfica de, 516-522
 - con componentes, para un plano, 691
 - de continuidad de la hidrodinámica, 978-979
 - de Laplace, 774
 - de onda, 774
 - de presión-profundidad, 341
 - del calor, 775
 - diferenciales
 - aplicaciones, 510-515
 - autónomas, 517
 - con variables separables, 388-389
 - de primer orden, 496-531
 - problemas con valor inicial y, 233-234
 - separables, 388-390
 - sistema(s) de, 523-526
 - solución de, 496-498, 510-515
 - foco-directriz, 649
 - identidad de Euler, 601-602
 - inversas, 378, 384
 - lineal(es), AP-13
 - diferenciales de primer orden, 504-508,
 - forma estándar, 504-505
 - general, AP-13
 - resolución de, 505-507
 - movimiento ideal de proyectiles y, 718
 - para elipses, 643, 652
 - para hipérbolas, 644
 - para un plano en el espacio, 691-692
 - paramétricas, 610-613
 - de rectas, 689-690
 - de una cicloide, 614
 - de una circunferencia, 611, 622
 - de una hipérbola, 613, 619
 - para curvas en el espacio, 707
 - para el movimiento de un proyectil, 717-719
- polares
 - de circunferencias, 652-653
 - de rectas, 652
 - de secciones cónicas, 650-652
 - graficación de, 628
 - para circunferencias, 652
 - para rectas, 652
- presión-profundidad, 341
- punto pendiente, AP-12
- que relacionan coordenadas esféricas con cartesianas y con coordenadas cilíndricas, 879
- que relacionan coordenadas rectangulares y cilíndricas, 876
- que relacionan las coordenadas polares y las cartesianas, 629
- vectoriales
 - del plano, 691
 - para curvas en el espacio, 707

- para movimiento de proyectiles, 717-719
 - para rectas, 688, 689-690
- Efecto de remolino, 934
- Eje(s) de coordenadas, AP-10
 - cortar y girar, volúmenes mediante, 308-315
 - de una elipse, 641
 - girar alrededor de, 934-936
 - momento de inercia con respecto a, 904, 958
 - revoluciones alrededor del, 334-335
- Einstein, Albert, 172
- Elementos
 - de un conjunto, AP-2
 - radiactivos, vida media, 391-392
- Elevación, AP-11
- Elípticos, conos, 697, 699
- Elipse(s),
 - centro de, 19, 641
 - definición de, 488
 - distancia del centro al foco, 642
 - ecuación estándar de, 19
 - ecuaciones polares de, 651-652
 - eje focal de, 641
 - eje menor de, 19, 642
 - eje principal (o mayor) de, 19, 642
 - excentricidad de, 648-649
 - gráficas de, 18-19
 - ley de la (primera ley de Kepler), 741
 - vértices de, 641
- Elipsoides, 697-698, 699
 - de revolución, 698
- Energía
 - cinética, 172
 - conversión de masa a, 172
- Enteros, AP-26
 - iniciales, AP-8
 - positivos, AP-26
 - regla de la potencia para, 116-117
- Equilibrio
 - estable y no estable, 519
 - valores de, 517, 524-525
- Escalares, definición de, 667
- Esféricas
 - área de la superficie de, 946-947
 - concéntricas en un campo vectorial, 976-977
 - ecuación estándar para, 662
 - en el espacio, distancia y, 662-663
 - parametrización de, 943-944
- Esquina, 111
- Estimación
 - de error para el criterio de la integral, 555-556
 - del residuo
 - de orden n , definición para la fórmula de Taylor, 590
 - en el criterio de la integral, 555-556
 - en el teorema de Taylor, 590, 591-592
- Euler, Leonhard, 500, AP-36
- e^x , derivada e integrales de, 378-379
- Excentricidad, 648-653
 - de la elipse, 648-649
 - de la hipérbola, 648
 - de la parábola, 648
 - ecuaciones polares para cónicas con, 650
- Expansión uniforme de un gas, 934
- Exponentes, leyes de los, 379-380
- Extensión continua, 79-80
- Extremos
 - absolutos, determinación, 188-189
 - gráficas de, 183
 - globales (absolutos), 184-186, 188
 - locales (relativos), 186, 187, 200-201, 206, 803
 - locales, 186, 200-201
 - criterio (prueba) de la segunda derivada para, 206
 - criterio (prueba) de la primera derivada para, 188, 200-201
 - teorema de la primera derivada para, 187
 - relativos (locales), 186, 187, 803
- F**
- Factor(es)
 - integrante, 505-507
 - método de “las cubiertas superiores” de Heaviside para, lineales, 458-460
- Fermat, Pierre de, 42
- Física, ejemplos de optimización aplicada provenientes de, 216-218
- Fórmula
 - de reducción, 439, 464
 - de sustitución para integrales definidas, 291-293
 - de Taylor, 589, 590
 - para funciones de dos variables, 820-823
 - para el cambio del tamaño vertical y la reflexión, 17
 - recursiva, 539
- Flujo
 - cálculo de, 936, 957-958
 - definición de, 916, 956
 - en comparación con circulación, 916
 - integral de superficie para, 956-958
 - que cruza una curva plana, 915-917
 - que cruza una frontera rectangular, 932-933
- Focos, 639-641
- Forma(s)
 - de componentes para vectores, 665-667
 - diferenciales, 928-929
 - exactas, 928-929
 - indeterminadas de límites, 396-406, 600-601
 - integral, regla del producto en, 436-439
- Fórmula(s)
 - de cálculo para la torsión, 737
 - de cambio de dimensiones horizontal y reflexión, 17
 - de desplazamiento para la gráfica de funciones, 16
 - de error, para aproximaciones lineales, 169, 796, 821-822
 - de Euler, AP-30
 - de la longitud de arco, 329-330, 621, 724
 - de Leibniz, 600
 - de los cascarones para sólidos de revolución, 322
 - de suma, trigonométricas, 26
 - de transformación de coordenadas, 883
 - diferencial abreviada, longitud de arco, 329-330
 - diferencial, forma abreviada para la longitud de arco, 329-330
 - paramétricas para las derivadas, 619
 - sinusoidal, 27
- trigonométricas
 - del ángulo doble, 26
 - para medio ángulo, 26
- Fraciones parciales
 - definición de, 454
 - integración de funciones racionales mediante, 453-461
 - método de, 454-458
- Franja(s)
 - horizontales, 349-350
 - vertical, 319-349
- Frenet, Jean-Frédéric, 734
- Fubini, Guido, 839
- Fuerza(s)
 - campo de, 912
 - constante, 337, 338, 339
 - trabajo efectuado por una, 679
 - de un fluido
 - centroides y, 353
 - integrales para, contra una placa plana vertical, 342
 - sobre una superficie de profundidad constante, 341
 - trabajo y, 337-342, 913
 - presión de un fluido y, 340-342
 - suma de, 667-668
 - trabajo efectuado por una
 - en una curva en el espacio, 912-914
 - a lo largo de un desplazamiento, 679
 - variable
 - a lo largo de una curva, 912-913
 - a lo largo de una recta, 338
- Función(es), 1-38
 - algebraicas, 10, 361
 - arco
 - coseno, 405-407
 - seno, 405-407
 - área total debajo de la gráfica de, 281
 - cambio de dimensiones de, 16-18
 - combinación de, 14-22
 - componente(s), 707, 908
 - composición, 15-16
 - continuidad de la, 77, 761
 - definición de la, 15
 - derivada de la, 142-143
 - límite de la, 78
 - común(es), 7-11
 - con valores reales, 2, 546, 708, 747
 - con valores vectoriales. Véase Funciones vectoriales
 - constante(s), 7, 48, 116, 252
 - continuamente derivable, 326, 334, 620-621
 - continuas, 76-77
 - definición de, 76, 709
 - derivabilidad y, 111-112
 - en un extremo del intervalo, 74
 - en un intervalo, 76
 - en un punto, 79, 709, 759
 - extremos absolutos de, 188-189, 761
 - integrabilidad de, 264
 - límites de, 73
 - por la derecha, 74
 - por la izquierda, 74
 - por partes, 264, 304-305
 - propiedades de, 76
 - teorema del valor medio para, 80-81, 217, 274-275

- valor promedio de, 269-270, 851, 864,
 - valor promedio de, no negativas, 252-253
 - valores extremos de, en conjuntos cerrados y acotados, 185, 761
 - continuidad de, 74, 709, 759
 - cosecante
 - integral de, 374
 - inversa de, 407
 - coseno, 23, 136-137
 - derivada de, 135-137
 - gráfica de, 10
 - integral de, 235
 - inversa de, 405
 - cotangente, 23
 - integral de, 374
 - creciente, 6, 199-200
 - cuadrática, 9
 - cúbica, 8-9
 - de costo
 - marginal, 129-130
 - total, 130
 - de dos variables, 748-749, 752, 771
 - derivadas parciales de, 747-752, 764-766
 - fórmula de Taylor para, 820-823
 - límites para, 755-759
 - linealización de, 794-796
 - regla(s) de la cadena, 775-777
 - teorema del incremento de, 771
 - de más de dos variables, 761, 768-769, 798-799
 - de muchas variables, 781
 - de posición, aceleración y, 196
 - de tres variables, 750-752, 777, 789-790
 - de varias variables, 747-752
 - decreciente, 6, 199-200
 - definición de, 1, 7
 - definida
 - implícitamente, 150-151, 779
 - mediante fórmulas, 14
 - por partes, 5
 - sobre superficies, 777-779
 - derivada
 - como, 106-112
 - de, 102, 103, 107, 110-111, 710
 - del potencial, 921
 - diagrama
 - de dispersión de una, 4
 - de flechas de, 2, 748
 - de una máquina de, 2
 - derivables, 107, 618, 764, 772
 - continuas, 111-112, 620
 - derivadas de inversas de, 364-366
 - en un intervalo, 109-110
 - fórmula de Taylor para, 586
 - gráfica de, 203
 - regla del múltiplo constante de, 117
 - reglas para, 115-121, 143, 712
 - discontinuidad, 74-75, 759
 - dominios de, 1-3, 14, 747, 748
 - en el espacio, valor promedio de, 864-865
 - escalar, 708
 - escalón unitario, límites y 49
 - exponenciales, 377-385
 - antiderivada general de, 379
 - definición de, 377
 - derivadas de, 378-379
 - descripción de, 10
 - general a^x , 380
 - gráfica de, 377
 - natural, 377
 - serie de potencias para, 586, 590
 - extensión continua de, 79
 - fórmulas de desplazamiento para, 16
 - gradiente, 786
 - gráficas de, 3-4, 750
 - hessiana de funciones de dos variables, 805
 - hiperbólicas, 416-421
 - básicas, 417
 - definición de, 416-417
 - derivadas de, 417-418, 420-421
 - gráficas de, 419
 - identidades para, 416-417, 419-420
 - integrales de, 417-418
 - inversas, 418-419, 420-421
 - identidad, 7, 48, 969
 - impar, 6-7
 - integrable, 264, 716, 837, 859
 - inversas, 11, 361, 362-363
 - derivadas y, 364-366
 - determinación de, 363-364
 - hiperbólicas, 418-419, 420-421
 - inyectivas (uno a uno), 361
 - regla de la derivada para, 365
 - trigonométricas. *Véase* Funciones trigonométricas inversas
 - inyectiva (uno a uno), 361-362
 - criterio de la recta horizontal para, 362
 - definición de, 361
 - límite de, 46-54, 756
 - lineal, 7
 - linealización de, 164-165, 794-796
 - logarítmicas, 369-375
 - común, 384
 - descripción de, 11
 - natural, 369-371, 372
 - rango de, 373
 - logaritmo natural
 - definición de, 369-371
 - propiedades algebraicas, 372
 - serie de potencias para, 582, 600
 - mayor entero (piso entero), 5
 - menor entero (techo entero), 5
 - monótona, 198-201
 - multiplicación, 14
 - no derivable, 110
 - no integrable, 264
 - no negativa
 - área debajo de la gráfica de una, 268-269
 - continua, 252
 - par(es), 6-7
 - polinomiales, definición de, 8
 - posición, 5
 - positiva, área debajo de la gráfica de, 253
 - potencia, 7-8
 - potencial, 921
 - prueba de la recta vertical para, 4-5
 - punto crítico de una, 188, 804
 - racionales
 - definición, 9
 - dominio de, 9
 - integración de, mediante fracciones parciales, 453-461
 - límites de, 50, en infinito, 86
 - raíz
 - cuadrática, 8
 - cúbica, 8
 - derivada de, 108
 - rango de, 1-3, 747, 748
 - representación
 - como serie de potencias, 584
 - numérica, 4
 - secante, inversa de, 418-419
 - seno, 23, 135-136
 - derivada de, 135-136
 - general, AP-7, 27
 - gráfica de, 10
 - integral de, 444
 - inversa de, 405
 - simétrica, 6-7, 293-294, 631
 - gráficas de, 6-7
 - integrales definidas de, 293-294
 - suave por partes, 921
 - suma de, 14-15
 - tasas de crecimiento de, 424-426
 - trascendente, 11, 361-428
 - trigonométricas
 - ángulos, 22-23
 - definición de, 404-405
 - derivadas de, 135-139, 411
 - gráficas de, 25, 32-34, transformaciones de, 27
 - identidades de cofunción, 410-411
 - integrales de, 374, 444-448, evaluadas con, 411-412
 - inversas, 404-413
 - periodicidad de, 25
 - seis básicas, 23-24
 - y cuadrantes, 24
 - valor(es)
 - absoluto, 5
 - como una función definida por partes, 5
 - de, 2
 - extremos de, 184-189, 803-808, 814, 817
 - máximo y mínimo de, 184-186, 188, 200, 206, 806-807
 - variable
 - de entrada de, 1, 747
 - de salida de, 1, 747
 - dependiente de, 1, 747
 - independiente de, 1, 747
 - vectores, 707-713
 - antiderivadas de, 715
 - continuidad, 708-709
 - de longitud constante, 713
 - derivadas de, definición de, 710
 - derivable, 710
 - integral definida de, 716-717
 - integral indefinida de, 715-716
 - integrales de, 715-720
 - límites de, 708-709
 - reglas de derivación de, 711-714
 - velocidad, 196, 251-252, 711
 - aceleración y, 196, 711
- G**
- Galileo Galilei, 39
 - fórmula de caída libre de, 39, 127-128
 - ley de, 39

- Gauss, Carl Friedrich, 258, 677
 Gibbs, Josiah Willard, 726
 Giro alrededor de un eje, 934-936
 Grado de un polinomio, 9
 Gráfica(s)
 área de una superficie de, 950
 asíntotas de, 84-93
 cóncava
 hacia abajo, 203
 hacia arriba (convexa), 203-320
 conectividad y, 80
 de curvas polares, 634
 de derivadas, 108-109
 de ecuaciones, AP-10
 paramétricas, 634
 de funciones, 3-4, 14-22
 comunes, 7-11
 de dos variables, 749-750
 de tres variables, 750-751
 de varias variables, 747-752
 trigonométricas, 25, 27, 32-34
 de una sucesión, 533
 de $y = f(x)$, estrategia para, 198-200
 en coordenadas polares, 628, 631-634
 criterios de simetría para, 631
 técnica para, 634
 simétrica con respecto
 al origen, 6, 631
 al eje x , 6, 631
 al eje y , 6, 631
 Graficación
 con calculadoras y computadoras, 30-34
 consecuencia para, 80
 con computadora, 30-34
 de funciones con dos variables, 752
 Grassmann, Hermann, 669
 Gravitación, ley de Newton de la, 740
- H**
 Halley, Edmund, 200
 Heaviside, Oliver, 458
 Hélice, 708
 Hessiano de una función, 805
 Hidrodinámica, ecuación de continuidad de,
 978-979
 Hipérbola(s), 643-645
 centro de, 643
 definición de, 643
 directrices de, 649
 ecuación de, en coordenadas cartesianas,
 649-650
 ecuación polar de, 650
 ecuaciones en la forma estándar para, 644-645
 eje focal de, 643
 excentricidad de, 648, 649
 focos de, 643
 ramas de, 640
 vértices de, 643
 Hiperboloide, 697, 699
 Huygens, Christian, 613, 614
- I**
 Identidad(es)
 de Euler, 601-602
 de función inversa-cofunción inversa, 410-411
 trigonométricas, 25
- Imagen, 887
 Incrementos, AP-10-AP-13
 Independencia de la trayectoria, 920-921
 Índice
 de una sucesión, 532
 de una suma, 256, 550
 Inducción matemática, AP-6-AP-9
 Inercia, momentos de, 870-873
 Infinito
 divergencia de sucesiones a, 535
 límites en, 84-93
 de funciones racionales, 86
 Infinitesimales, AP-19
 Inflexión, punto de, 188, 204-206, 209
 Ingreso marginal, 218
 Integración, 246-307
 con respecto a y , área entre curvas, 296-297
 con un SAC, 465-466
 de funciones racionales mediante fracciones
 parciales, 453-461
 de una función vectorial, 716-717
 definida
 por partes, 440
 por sustitución, 292
 derivación e, relación entre, 280
 doble, área mediante, 850-852
 en campos vectoriales, 901-981
 en coordenadas cilíndricas, 875-879
 en coordenadas esféricas, 881-883
 fórmula de, por partes, 436-437
 fórmulas básicas de, 435
 fórmulas de, 411-413
 límites de. Véase Límites de integración
 mediante sustitución trigonométrica,
 449-452
 mediante tablas, 440-441
 numérica, 468-475
 por partes, 436-441
 tabular, 440-441
 técnicas de, 435-495
 término a término para series de funciones,
 581
 variable de, 235, 264
 Integrales
 aproximación de
 mediante sumas de Riemann, 261
 mediante sumas inferiores, 248
 mediante la regla del punto medio,
 248, 469
 mediante la regla de Simpson, 470-472
 mediante la regla del trapecio, 469-470
 mediante sumas superiores, 248
 breve tabla de, 435
 de campos vectoriales, 910
 de flujo, 914-915
 de funciones hiperbólicas, 417-418
 de línea, 901-905
 aditividad y, 903
 cálculo de masa y momento y la, 903-905
 campos vectoriales y la, 907-917
 coordenadas xyz y la, 911-912
 definición de, 901
 en el plano, 905
 evaluación de, 902, 911
 evaluación de, mediante el teorema de
 Green, 938-939
 interpretación de, 905
 teorema fundamental de, 922
 de potencias de $\tan x$ y $\sec x$, 446-447
 de $\sin^2 x$ y $\cos^2 x$, 289-290
 de superficie, 953-960, 965
 cálculo de, 955-956
 fórmulas para, 954
 para flujos, 956-958
 de $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$ y $\csc x$, 374-375
 de tasas, 278-280
 de trabajo, 337-338, 727-728, 912-914
 definidas, 262-270
 aplicaciones de, 308-360
 de funciones simétricas, 293-294
 de funciones vectoriales, 716
 definición de, 246, 262-263, 285
 dobles
 como volúmenes, 837-838
 en forma polar, 853-857
 propiedades de las, 846-847
 sobre rectángulos, 836-840
 sobre regiones no rectangulares acotadas,
 841-842
 sustituciones en, 887-891
 teorema de Fubini para el cálculo de,
 838-840
 en coordenadas polares, 853-854
 evaluación, por partes, 440
 evaluada con funciones trigonométricas
 inversas, 411-412
 aproximaciones a, 485
 del tipo I, 478, 486
 del tipo II, 481, 486
 existencia de, 262-264
 $\int (1/u)du$, 373-374
 impropia, 478-486
 aproximaciones a, 485
 del tipo I, 478, 486
 del tipo II, 481, 486
 indefinidas, 235-236. Véase también
 Antiderivadas
 definición, 235, 284, 285
 evaluación con la regla de sustitución,
 284-290
 iterada, 838
 logaritmo definido como una, 370
 múltiples, 836-837. Véase Integrales dobles;
 Integrales triples
 sustitución en, 887-894
 no elementales, 466, 598-599
 notación para, 263
 para fuerza de un fluido contra una placa
 plana vertical, 342
 polares, cambio de integrales cartesianas a,
 855-857
 propiedades de, 265-267
 que incluye $\log_a x$, 384-385
 repetidas, 838
 sustitución en, 291-293
 tablas de, 463-464, T-1-T-6
 teorema del valor medio para, 274-275
 trigonométricas, 444-448
 triples
 en coordenadas cilíndricas, 875-879
 en coordenadas esféricas, 879-883
 en coordenadas rectangulares, 859-865

- propiedades de, 859-860, 865
sustituciones en, 891-894
vectoriales, 715-717
- Integrandos, 235
con asíntotas verticales, 481-482
- Interpretación fuera-dentro de la regla de la cadena, 144-145
- Intersección
con el eje x , AP-13
con el eje y , AP-13
de conjuntos, AP-2
rectas de, 692-693
- Intervalo(s), AP-3
acotados, 6
de convergencia, 579
de parámetros, 610-611
derivables en, 109-110
finitos (acotados), 6, AP-3
infinitos (no acotados), 6, AP-3
no acotados, 6
tipos de, AP-3
- Inversas, definición de, 404-405
de $\ln x$ y el número e , 377-378
de $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$ y $\csc x$, 407-408
operaciones de integración y derivación, 280
- J**
- Jacobi, Carl Gustav Jacob, 887
Jacobiano, determinante, 887, 889, 890, 892
Joule, James Prescott, 337
Joules, 337
- K**
- Kepler, Johannes, 741
leyes de, 741-742
Kovalevsky, Sonya, 421, 826
- L**
- L'Hôpital, Guillaume de, 396
Lagrange, Joseph-Louis, 193, 811
Laplace, Pierre-Simon, 770
Legendre, Adrien Marie, 506
Leibniz, Gottfried, AP-25
Lentes, luz que incide, 152
- Ley(es)
asociativas, AP-23
conmutativas, AP-23
de Gauss, 978
de Hooke para resortes, 338-339
de la elipse (primera ley de Kepler), 741
de las áreas iguales (segunda ley de Kepler), 741
de logaritmos, 384
de los cosenos, 26-27, 675
de los exponentes, 379-380
de los límites, 46-54, 757
teorema, 49
de Newton
de la gravitación, 740
del enfriamiento, 392-393, 519-520
de refracción, 218
de Snell, 218
de transitividad para números reales, AP-23
del cambio exponencial, 511
del gas ideal, 824
- del tiempo-distancia (tercera ley de Kepler), 741-742
distributiva, AP-23
demostración de la, AP-35-AP-36
- Límite(s), 39-100
 ρ de integración, determinación de, 881
 ϕ de integración, determinación de, 881-882
 r de integración, 854, 878
de funciones continuas, 78
de sumas finitas, 258-259
de un cociente de diferencias, 104
de valores de funciones, 46-54
demostración de, AP-21
definición
demostración de teoremas con, 62-63
formal, 57-63
informal de, 46-47
pruebas de, 58-60
de $(\sin \theta)/\theta$, 69-71
de funciones con valores vectoriales, 708-709
de funciones racionales, 50
de polinomios, 50
de sucesiones, 534, 536
de sumas de Riemann, 262-264
deltas, determinación algebraica, 60-62
 e (el número) como un, 382
en infinito, 84-93
estimación de, calculadoras y computadoras para, 51-53
formas indeterminadas de, 396-399
infinitos, 89-90
de integración, 478-480
definición precisa de, 90-93
laterales, 66-71. Véase también Límites por la izquierda; Límites por la derecha
formal, 68
informal de, 66
no existencia de, prueba de las dos direcciones para funciones de dos variables, 760
para funciones de dos variables, 755-759
por la derecha, AP-20, 67, definición de, 68
por la izquierda, 67
definición, 57-63, 66-67, 68
por los dos lados, 66
demostración de, AP-21
que aparecen comúnmente, 538-539, AP-21-AP-22
regla
de la potencia para, 49
de la raíz para, 49
teorema de la compresión (o del sándwich), 53-54
 x de integración, 862, 864
 y de integración, 861, 963
 z de integración, 861, 862, 863, 877
- Linealización, 164-166, 795
de funciones de dos variables, 794-796, 798
- Líneas de fase, 517
- Líquidos
bombeo desde contenedores, 340
incompresibles, 934
- $\ln x$
derivada de, 371
ecuación inversa para, 378, AP-24
gráfica y rango de, 373
integral de, 437
- inversa de, y el número e , 377-378, AP-23
propiedades de, 372
y cambio de base, 384
- Logaritmo(s)
con base a , 383-384
natural, 369-375
propiedades de, 372
propiedades inversas de, 384
- Longitud
a lo largo de una curva en el espacio, 724-725
constante, funciones vectoriales de, 713
de arco, 326-330
de una curva en el espacio, 724-726
de una función, 327, 726
fórmula diferencial para la, 329-330
integrales de línea y, 901-902
de curvas, 326-328, 621-624
definidas de forma paramétrica, 620-622
en coordenadas polares, 637-638
de un vector (magnitud), 665, 667-668
- M**
- Maclaurin, Colin, 585
Magnitud (longitud) de un vector, 665, 667-668
- Marco
de coordenadas de mano derecha, 660
de Frenet, 734
fórmulas para el cálculo del, 737
torsión en el, 736-737
- TNB**, 734
- Marginales, 129
- Masa. Véase también Centro de masa
a lo largo de una recta, 346-347
cálculos de momento y, integrales de línea y, 903-905
conversión a energía, 172
de cascarones delgados, 958-960
de un alambre o de una varilla delgada, 903-904
distribuida en una región plana, 347-348
en reposo, 172
fórmulas para la, 348, 351, 869, 904
integrales múltiples y, 869, 872
mediante una integral de línea, 904
medida de, 511
suma de momentos de, 348
valor de, 172
- Máximo
absoluto (global), 184, 187, 189, 806-808
global (absoluto), 184, 806-808
local (relativo), 186, 803, 808
restringido, 811-814
- Medida en radianes, 146
- Mendel, Gregor Johann, 131
- Método
de "cubiertas superiores" de Heaviside, para factores lineales, 458-460
de Euler para ecuaciones diferenciales, 499-502
de las arandelas, 314-315, 324
de los cascarones, 321-324
de los discos, 311-312
de Newton, 225-228
aplicación, 226-227
convergencia de las aproximaciones, 228
procedimiento para el, 225-226

- Newton-Raphson, 225-228
 numérico, 499
- Mínimo
 absoluto (global), 184, 187, 189, 806, 808
 global (absoluto), 184, 806-808
 local (relativo), 186, 803, 808
 restringido, 811-814
- Modelo
 de cazadores en competencia, 524-526
 de crecimiento exponencial para poblaciones, 511-512
- Momento(s)
 cálculo de masa y, integrales de línea y, 903-905
 centros de masa y, 346-355, 868-873, 904, 958
 de alambres y varillas delgadas, 903-904
 de cascarones delgados, 958-960
 de inercia, 870-873, 958
 de sistemas con respecto al origen, 347
 de sólidos y placas, 872
 primer, 868-870, 958
- Movimiento
 a lo largo de una curva en el espacio, 709-710, 734
 a lo largo de una recta, 125-129
 antiderivadas y, 233-234
 armónico simple, 137-138
 con resistencia proporcional a la velocidad, 510-511
 de proyectiles
 con ráfagas de viento, 719-720
 ecuaciones vectoriales y paramétricas del, 717-719
 dirección de, 711
 en coordenadas polares y cilíndricas, 739-740
 funciones vectoriales y, 707, 709-711
 planetario
 como si fuera en un plano, 740-741
 primera ley de Kepler (ley de la elipse), 741
 segunda ley de Kepler (ley de las áreas iguales), 741
 tercera ley de Kepler (ley del tiempo-distancia), 741-742
 segunda ley de Newton, 171-172, 510, 520
- Multiplicación
 de funciones, 14
 de series de potencias, 580
 escalar, de vectores, 667-668
- Multiplicador(es) de Lagrange, 807, 811-818
 con dos restricciones, 817-818
 método de, 814-816
- N**
 Nabla (∇), 786, 966-968
 Napier, John, 372
 n -ésima suma parcial, 544-545
 Newton, Sir Isaac, AP-25
 Norma de una partición, 261, 837, 876
- Notación
 de Leibniz, 108, 144, 164, 167, 263, 621
 factorial, 539
 para derivadas, 108, 765-766
 sigma, 256-258
- Números
 de Fibonacci, 539
 complejos, AP-25-AP-34
 parte imaginaria de, AP-28
 irracionales, AP-2
 como exponentes, 377-378
 naturales, AP-2
 “o”, 426-427
 parte real de, AP-28
 racionales, AP-2, AP-26
 reales
 construcción de reales y, AP-24-AP-25
 desarrollo de los, AP-26-AP-27
 la recta real y los, AP-1
 orden de, AP-1, AP-23
 propiedades de los, algebraicas, AP-1, AP-23
 teoría de los, AP-23-AP-25
- O**
 Octantes, 660
- Orden
 comparación de funciones, 426-427
 de la regla de integración, 266
- Oresme, Nicole, 534
- Operaciones algebraicas, para vectores, 667-669
- Óptica
 ley de Snell de, 218
 principio de Fermat en, 217
- Optimización aplicada, 214-219
 del área de un rectángulo, 216
 ejemplos en economía, 218-219
 ejemplos en matemáticas y física, 216-219
 empleo de la menor cantidad de material, 215-216
 volumen de una caja, 214
- Origen
 del sistema de coordenadas, AP-10
 en coordenadas polares, 327
 momento del sistema con respecto al, 347
- P**
 Pappus (griego del siglo III), 353
 Par coordenado, AP-10
- Parábola(s), 611, AP-15-AP-16
 aproximaciones por medio de, 470-472
 definición de, 639
 directriz de, 639, 641, 651
 eje de, 640, AP-15
 excentricidad de, 648-649
 foco de, 639, 641
 longitud focal de, 640
 parametrización de, 611-612
 pendiente de, 42
 semicúbica, 155
 vértice de, 640, AP-15
- Paraboloide(s), 697
 elíptico, 699
 hiperbólico, 698, 699
 volumen de una región encerrada por un, 862-863
- Paralelogramo
 área de, 683
 ley de la suma, 667-668, 675
- Parametrización
 de curvas, 610-616, 707
 de superficies, 943-948
- de un cilindro, 944
 de un cono, 943
 de una esfera, 943-944
 de una recta, 688-689
 y área de la superficie, 944-948
- Parámetro(s), 610, 943
 de la longitud de arco, 725
 de dominio, 610, 943
- Pareja de coordenadas polares, 627
- Particiones, 836
 k -ésimo subintervalo de, 260
 norma de, 261, 837
 para sumas de Riemann, 259-261
- Pascal, Blaise, 545
- Pendiente
 de curvas parametrizadas, 612-613
 de la secante, 42
 de una curva, 41-43, 103-104
 de una curva en coordenadas polares, 632-633
 de una recta no vertical, AP-11
- Periodo orbital, 741
- Periodicidad de funciones trigonométricas, 25
- Pico de voltaje, 289
- Placa(s)
 en dos dimensiones, 869, 872
 planas
 centro de masa de una, 348-351, 869
 verticales, fuerza de un fluido y, 342
 y delgadas, centro de masa de, 348-351
- Plano(s)
 ángulo entre, 694
 coordenados, 660
 cartesianas en, AP-10
 primeros momentos con respecto a, 904, 958
 derivadas direccionales en, 784-785
 distancia y círculos en el, AP-13-AP-15
 ecuación para el, 691
 en el espacio, 688-694
 fase, 524
 integrales de línea en, 905
 movimiento planetario en, 740-741
 normal, 737
 osculador, 737
 paralelo, 692
 rebanar por medio de, 309-310
 rectas de intersección para, 692-693
 rectificador, 737
 tangente
 a una superficie, 792, 793
 a una superficie paramétrica, 945
 horizontal, 803-804,
 y rectas normales, 791-793
 teorema de Green en, 931-940
 xy , 524, 660
 curvas solución en el, 518
 xz , 660
 yz , 660
- Población límite, 521
- Poiseuille, Jean, 171
- Poisson, Siméon-Denis, 802
- Polinomio(s)
 coeficientes de, 8-9
 cuadrático irreducible, 454-455
 de Taylor, 586-588, 593, 594
 derivada de, 118-119

- grado de, 9
- límites de, 50
- Posición de una partícula en el espacio a lo largo del tiempo, 707
- Potencia(s), AP-32
 - de senos y cosenos, productos de, 444-446
 - indeterminadas, 400
 - serie binomial para, 597-598
- Potenciales, para campos conservativos, 925-928
- Preimagen, 887
- Presiones
 - fluidos y fuerzas, 340-342
 - y fuerzas en un fluido, 340-342
- Principio
 - de Cavalieri, 310
 - de Fermat en óptica, 217
- Primera ley de Kepler (ley de la elipse), 741
- Primeros momentos, 346-348, 868-869
 - con respecto a un eje coordenado, 348, 869
 - con respecto a los planos coordenados, 869, 958
- Problemas
 - de mezclas, 513-515
 - de valor inicial, 233, 390, 497
- Producto(s)
 - caja, 684-686
 - cocientes y, derivadas de, 119-120
 - cruz
 - con determinantes, 683-685
 - de dos vectores en el espacio, 682-683
 - demonstración de la ley distributiva para, AP-35-AP-36
 - propiedades del, 682-683
 - regla de la mano derecha para, 682
 - de números complejos, AP-30-AP-31
 - de potencias de senos y cosenos, 444-446
 - de senos y cosenos, 447-448
 - internos. *Véase* Producto punto
 - punto, 674-679
 - de vectores ortogonales, 517
 - definición de, 675
 - derivada direccional como, 786
 - propiedades de, 677-679
- Propiedad
 - de completéz de los números reales, AP-23
 - del valor intermedio, 80
- Proyección de vectores, 677-679
- Prueba
 - de componentes
 - para campos conservativos, 925, 927
 - para formas diferenciales exactas, 928
 - de continuidad, 75
 - de la recta vertical, 4-5
- Punto(s)
 - crítico, 188, 189, 208, 804, 808
 - de discontinuidad, definición de, 74
 - de inflexión, 188, 204-206
 - de reposo, 517, 524-525, 526
 - en el sistema de coordenadas cartesianas,
 - distancia a un plano, 693-694
 - frontera, 751, 806-807, 808, AP-3
 - para regiones en el plano, 749
 - para regiones en el espacio, 751
 - inicial, 751
 - de una curva, 610
 - interior, 806, AP-3
 - continuidad en un, 74
 - para regiones en el plano, 749
 - para regiones en el espacio, 751
 - medio de un segmento de recta en el espacio,
 - determinación con vectores, 670
 - silla, 698, 804, 805, 806, 808
 - terminal
 - de una curva, 610
 - de un vector, 665
- R**
- Radiactividad, 391
- Radianes, 22-23, 24
- Radio
 - circunferencia de, AP-14
 - de convergencia, 579
 - de series de potencias, 578-579
 - de curvatura, para curvas planas, 731-732
 - unitario, 22
- Raíces, AP-32-AP-33
 - cuadradas, eliminación de, en integrales, 446
 - determinación mediante el método de Newton, 225-228
 - serie binomial para, 597-598
 - teorema del valor intermedio y, 80-81
- Rango
 - de una función, 1-3, 747, 748
 - en el movimiento de un proyectil, 719, 720
- Rapidez, 126-127, 158
 - a lo largo de una curva suave, 726
 - de una partícula en el espacio, 711
 - inicial en el movimiento de un proyectil, 718
 - instantánea, 39-41
 - promedio, 39-41
 - en intervalos de tiempo pequeños, 40
- Rayo inicial en coordenadas polares, 627
- Razón(es)
 - de cambio promedio, 41, 43
 - en series geométricas, 546
- Reales, construcción de, AP-24-AP-25
- Rebanar
 - con cilindros, 319-321
 - mediante rectas paralelas, 309-310
 - proceso de, para obtener volúmenes, 308-314
- Recta(s)
 - de intersección para planos, 692-693
 - ecuaciones de, 688, AP-10-AP-13
 - paramétricas, 688-689
 - polares, 652
 - vectoriales para, 688-690
 - masas a lo largo de, 346-347
 - movimiento a lo largo de, 125-129
 - normal, 152, 792
 - planos tangentes y, 791-793
 - paralelas, AP-13, 692
 - perpendiculares, AP-13
 - planos y, en el espacio, 688-694
 - secante, 41
 - tangente, 43-44, 102
 - a una curva, 102
 - trabajo realizado por una fuerza variable a lo largo de, 338
 - vertical, fórmula de cascarones para rotaciones alrededor de una, 322
- Rectángulo(s)
 - aproximación al área por medio de, 247-248
 - integrales dobles sobre, 836-840
 - optimización del área de, dentro de una circunferencia, 216-217
 - que definen sumas de Riemann, 260-261
- Reflexión de una gráfica, 16-18
- Región(es)
 - abierta, 749, 751
 - acotadas, 749
 - áreas de, en el plano, 850-852
 - máximos y mínimos absolutos en, 806-808
 - no rectangulares, 841-842
 - cerrada, 749, 751
 - conectada (o conexa), 921
 - conexa, 921
 - en el espacio
 - punto interior, 751
 - volumen de, 860
 - en forma de hélices en coordenadas polares,
 - área de, 636
 - especial
 - teorema de divergencia, 975-976
 - teorema de Green para, 939-940
 - general, integrales dobles sobre, 841-847
 - no acotada, 749
 - plana
 - masas distribuidas en, 347-348
 - puntos interiores, 749
 - simplemente conexa, 921
 - sólida, volumen de, 842-845
- Regla(s)
 - de la raíz
 - para límites, 49
 - de derivación, 115-122, 235
 - para combinación de series, 549
 - para derivadas, 115-116
 - para el gradiente, 789
 - para funciones vectoriales, 712
 - para integrales, 266
 - para límites de funciones con dos variables, 757
 - para límites de sucesiones, 536, 548
 - para límites, 49
 - de dominación para integrales definidas, 266
 - de L'Hôpital, 396, 397-399, 400-402
 - determinación de límites de sucesiones mediante, 537-538
 - demonstración de, 400-402
 - de la potencia, para límites de funciones de dos variables, 757
 - de Leibniz, 306
 - de la cadena, 142-146, 156, 157, 168, 378, 383, 408, 409, 410, 619, 730, 739, 775-781, 786, 820, 828, 948
 - con potencias de funciones, 145-146
 - demonstración de la, 170
 - "demostración" intuitiva de la, 143-144
 - derivada de funciones compuestas, 142-143
 - para derivación implícita, 648
 - para dos variables y tres variables independientes, 778-779
 - para funciones de dos variables, 775-777
 - para funciones de tres variables, 778-779
 - para funciones vectoriales, 712, 713
 - regla "afuera-adentro" y, 144

- regla de sustitución y, 285-286
- uso repetido de, 145
- de la derivada
 - de inversas, 365
 - de un cociente, 120-121, 145, 569
 - de un producto, 119-120, 520
 - de una suma, 118-119, AP-8
- de la función constante, 712
- de la multiplicación por una constante
 - para antiderivadas, 232, 235
 - para derivadas, 117-118
 - para gradientes, 789
 - para integrales, 266, 846
 - para límites, 49
 - para límites de funciones con dos variables, 757
 - para límites de sucesiones, 536
 - para series, 549
 - para sumas finitas, 257
 - series divergentes y, 549
- de la potencia
 - demostración de, 381
 - logaritmos naturales, 372
 - para derivadas, 115-116
 - para enteros positivos, 116-117
 - para límites de funciones de dos variables, 757
 - para límites, 49
- de la suma, 235, 249, 266
- derivada, 118-119
- de series geométricas, 546
- para gradientes, 789
- para límites, 49, 62, 534, 757
- para funciones vectoriales, 712
- de linealidad de la antiderivada, 232
- de Simpson
 - análisis de error y la, 472-475
 - aproximaciones mediante la, 470-472
- de sustitución, 286-287, 292
- evaluación de integrales indefinidas con, 284-290
- del álgebra para sumas finitas, 257-258
 - para el logaritmo natural, 372
 - para gradientes, 789
- del cociente, 51
 - para derivadas, 120-121, 145
 - para gradientes, 789
 - para límites, AP-19-AP-20, 49
 - para límites de funciones con dos variables, 757
 - para logaritmos naturales, 372
 - para sucesiones, 535
- del intervalo de ancho cero, 266
- del límite
 - de un producto, demostración, AP-18-AP-19
 - de una potencia, 49
 - de una raíz, 49
- del múltiplo escalar para funciones vectoriales, 712
- del negativo, para antiderivadas, 232
- del producto
 - cruz para derivadas de funciones vectoriales, 712-713
 - en la forma de integral, integración por partes, 436-439
 - para derivadas, 119-120
 - para gradientes, 789
 - para límites, 49
 - para límites de funciones con dos variables, 757
 - para logaritmos naturales, 372
 - para series de potencias, 580
 - para sucesiones, 535
 - punto para funciones vectoriales, 712
- del punto medio, 247, 248
- del recíproco para logaritmos naturales, 372
- del trapecio, 468-470
 - análisis de error y, 472-475
- general de la derivada de una potencia, 381
- límite de un cociente, demostración, AP-19-AP-20
- Reindexación de series infinitas, 550
- Relaciones de proporcionalidad, 7
- Reloj de péndulo, 614
- Representación
 - de funciones, series de potencias, 584-585
 - numérica de funciones, 4
- Resistencia
 - determinación de, para un cuerpo que cae, 520-521
 - proporcional a la velocidad, movimiento con, 510-511
- Resorte(s)
 - ley de Hooke para, 338-339
 - masa de, 903-904
 - trabajo para estirar un, 339
- Resta de vectores, 668
- Revolución(es)
 - alrededor del eje y , 334-335
 - áreas de superficie de, 624-625
 - elipsoide de, 698
 - sólidos de
 - método de los discos, 311-313
 - método de las arandelas, 314-315
- Riemann, Georg Friedrich Bernhard, 259
- Rolle, Michael, 192
- Rotación, 311-314
 - componente \mathbf{k} de, 934-936
 - uniforme, 934
- Rueda de paletas, 966-968
- S**
- SAC, *Véase* Sistema algebraico computacional
- Sacudida, 96, 97
- Secante, función trigonométrica, 23
- Secciones transversales, 308-315
 - horizontales, límites de integración y, 845-846
 - verticales, límites de integración y, 845
- Segmento(s)
 - dirigidos de recta, 665
 - de recta
 - dirigido, 665
 - en el espacio, 688-694
 - punto medio de, determinación con vectores, 670
- Segunda ley de Kepler (ley de las áreas iguales), 741
- Segunda ley de Newton del movimiento, 171-172, 510, 520
- Serie(s)
 - absolutamente convergente, 570
 - agregar o eliminar términos de, 550
 - alternante, 568-570
 - armónica, 568-569
 - armónica, 533, 553
 - alternante, 568-569
 - binomial, 596-598
 - combinación de, 549-550
 - convergente, 545, 570, condicionalmente, 570
 - convergencia de, criterios de comparación para, 558-560
 - criterio(s)
 - alternantes, 568
 - convergencia, 558-560
 - de comparación, 559
 - de la integral, 553-555, 556
 - de la comparación de límites, 560-561
 - de la razón, 563-565
 - de la raíz, 565-566
 - para convergencia absoluta, 571
 - resumen de, 572-573
 - de Maclaurin, 585-586, 587
 - de potencias, 575-582
 - convergencia de, 575-578
 - derivación término a término de, 580
 - integración término a término de, 581
 - multiplicación de, 579-580
 - radio de convergencia, 578
 - recíproca, 575-576
 - de Taylor, 585-586, 589, 592-593
 - aplicación de, 592-593, 598-602
 - como representaciones de funciones, 585
 - convergencia de, 589-595
 - usadas con frecuencia, 602
 - divergente, 545, 548
 - geométrica, 546-548
 - convergencia de, 546
 - infinitas, 544-550
 - p , 555
 - rearrreglo de términos de, 572
 - reindexación de, 550
 - representación de funciones en, de potencias, 584-585
 - suma parcial de, 544-545
- Sec x ,
 - integrales de potencias de, 446-447
 - inversa de, 407-408
- Segundos momentos, 870-872, 958
- Seno(s), 23, 24
 - integrales
 - de productos de, 447-448
 - de productos de potencias de, 444-446
- Símbolo de la integral, 235
- Simpson, Thomas, 471
- Sistema(s)
 - algebraico computacional (SAC)
 - comando Integrate (para integrar), 465
 - en la evaluación de integrales impropias, 482-483
 - integración con, 465-466
 - tablas de integrales y, 463-464
 - de álgebra, computadora: *Véase* Sistema algebraico computacional (SAC), 10
 - de coordenadas cartesianas, 660-663

- de mano izquierda, 660
- de mano derecha, 660
- de coordenadas de tres dimensiones, 660-663
 - cartesianas, 660
 - cilíndricas, 877-879
 - derechos e izquierdos, 660
 - esféricas, 881-882
 - planos coordenados, 660
- Slugs, 511
- Snell, van Royen, Willebrord, 217
- Sólido(s)
 - cálculo del volumen de, 309
 - mediante el método de las arandelas, 314-315
 - mediante el método de las rebanadas, 308-315
 - mediante el método de los discos, 311-313
 - mediante integrales dobles, 837, 838, 842-845
 - mediante integrales triples, 859-860
 - cilíndrico, volumen de, 308
 - de revolución
 - mediante el método de los discos, 311-313
 - mediante el método de las arandelas, 314-315
 - de tres dimensiones, masas y momentos, 869, 872
 - principio de Cavalieri para, 310
 - sección transversal de, 308
- Solución(es)
 - de una ecuación diferencial, 233, 389
 - general, 496-498
 - particular, 497-498
 - general de ecuaciones diferenciales, 233, 389
 - gráficas de ecuaciones autónomas, 516-522
 - numérica, 499
 - particular, de una ecuación diferencial, 233
- St. Vincent, Gregory, 623
- Subintervalo k -ésimo de una partición, 260, 263
- Sucesión(es), 532-541
 - acotadas, 539-540
 - cálculo de, 535-538
 - convergencia de, 533-535
 - de sumas parciales, 545
 - no decreciente, 540
 - definida recursivamente, 539
 - divergente de, 533-535
 - a infinito, 535
 - a infinito negativo, 535
 - índice de, 532
 - infinitas, 532-533
 - límites de, 534, 536
 - mediante el teorema de la función continua, 536
 - mediante la regla de L'Hôpital, 537-538
 - mediante el teorema de la compresión, 536
 - monótonas, 539-541
 - no acotada, 539
 - no decrecientes, 540
- Suma(s)
 - de funciones, 14-15
 - de vectores, 667-668
 - de Riemann, 259-261, 278, 280, 309, 320, 322, 333, 340, 341, 348, 876, 880, 901, 953
 - convergencia de, 264
 - límites de, 262-264
- finitas
 - estimación mediante, 246-253
 - límites de, 258-259
 - notación sigma y, 256-258
 - reglas del álgebra para, 257-260
- inferiores, 247-248
- límites de, 258-259
- parcial(es)
 - n -ésima de una serie, 544-545
 - no decrecientes, 553, 545
 - sucesión de, 545
 - superiores, 247, 248
 - y diferencia de integrales dobles, 846
- Superficie(s)
 - cilíndrica, 332
 - con agujeros, 969
 - con dos lados, 956
 - cuádricas, 697-699
 - de funciones de dos variables, 750
 - de nivel, de funciones de tres variables, 750
 - de poliedros, 968-969
 - de profundidad constante, fuerza de un fluido en, 341
 - definida implícitamente, 948
 - funciones definidas en, 777-779
 - implícita, 948-950
 - orientable, 956
 - parametrización de, 943-948
 - plano tangente a, 792-793
 - profundidad constante, fuerza de un fluido en, plana, 341
 - suave, 944-945, 948
 - por partes, 954, 963
 - y áreas 334, 624-625, 943-953
- Sustitución, 285-289
 - en integrales dobles, 887-891
 - coordenadas rectangulares a coordenadas polares, 854
 - en integrales múltiples, 887-894
 - en integrales triples, 891-894
 - coordenadas rectangulares a coordenadas cilíndricas, 876
 - coordenadas rectangulares a coordenadas esféricas, 880
 - trigonométrica, 449-452
 - y área entre curvas, 291-297
- T**
- Tabla(s)
 - de integrales, 463-464, T-1, T-6
- Tamaño
 - de la malla, 469
 - del paso, 469
- Tan x y cot x
 - derivadas de, 138
 - integrales de, 374-375
 - inversas de, 407
- Tan x y sec x
 - derivadas, 138
 - integrales de, 374
 - potencias, 446-447
- Tangente(s)
 - a curvas, 19, 39-44
 - de nivel, 788-789
 - de curvas en el espacio, 707-713
 - de gráficas de funciones, 102-103
 - en un punto, 102-104
 - pendiente de, 41
 - valores de, 24
 - vertical, 111
 - y normales, 152-153
- Tasa(s)
 - constante, cambio exponencial, 388
 - de cambio, 39-44
 - promedio, 41
 - instantánea, derivada como, 43-44
 - de crecimiento, 388, 424-428
 - relativo, 511-512
 - de decaimiento, radiactivo, 391
 - instantánea de cambio, 43-44
 - derivada como, 124-125
 - relacionadas, 155-160
- Tautocronas, 614-615
- Taylor, Brooks, 585
- Taylor
 - polinomios de, 586-588, 593, 594
 - teorema de, 589
 - demostración del, 594-595
- Teorema(s)
 - ángulo entre dos vectores, 674
 - campos conservativos son campos gradientes, 923
 - convergencia, para series de potencias, 578
 - criterio de comparación
 - directa, 560
 - del límite, 560
 - criterio de la convergencia absoluta, 571
 - criterio de la integral, 554
 - criterio de la primera derivada para valores extremos locales, 187, 803
 - criterio de la raíz, 565-566
 - criterio de la razón, 563
 - criterio de la segunda derivada para valores extremos locales, 206, 805
 - de Clairaut, 770
 - de De Moivre, AP-32
 - de estimación
 - de series alternantes, 570, 593
 - del residuo, 591, 593
 - de Fubini, 839, 843-845, para integrales dobles, 838-840, 843-845, 854, 860
 - de Green, 937
 - área por medio del, 940
 - comparación con el teorema de la divergencia, 972, 980
 - comparación con el teorema de Stokes, 963, 980
 - demostración del, para regiones especiales, 939-940
 - divergencia o forma normal de, 936, 972, 980
 - en el plano, 931-940
 - formas para, 936-938
 - generalización en tres dimensiones, 980
 - para evaluar integrales de línea, 938-939
 - rotacional o forma tangencial, 937, 939, 964, 980
 - teorema de cambio neto y, 937
 - de la compresión (o del sándwich), 53, 69, 70, 87, 536, AP-20
 - de la derivada mixta (cruzada), 770, AP-36

- de la evaluación (parte 2 del teorema fundamental), 277-278
- de la función
 - continua para sucesiones, 536
 - función implícita, 781, 948
- de la primera derivada para valores extremos locales, 187-188
- de la restricción. *Véase* Teorema de la compresión (o del sándwich)
- de la sucesión monótona, 540-541, 553
- de las derivadas mixtas, 770, AP-36
- de las sucesiones monótonas, 540-541, 553
- de Leibniz, 568
- de límites, demostraciones de, AP-18-AP-21
- de Pappus, 353-354
 - para el área de una superficie, 354-355
 - para volúmenes, 353-354
- de Pitágoras, 25, 27, 28, AP-13, AP-26
- de Rolle, 192-193
- de Stokes, 925, 962-970, 980, 981
 - campos conservativos y, 970
 - en comparación con el teorema de Green, 962, 963, 964
 - integral de superficie en el, 965
 - para superficies con agujeros, 969
 - para superficies poliédricas, 968-969
- de Taylor, 589, 594-595
- del cambio neto, 279
 - teorema de Green y, 937
- del gradiente ortogonal, 814
- del incremento para funciones de dos variables, 771, AP-38-AP-40
- del rearreglo, para series absolutamente convergentes, 572
 - demostración del, AP-20
 - para sucesiones, 536
- del valor extremo, 185-186, 761, AP-24
- del valor intermedio, AP-24
 - para funciones continuas, 80-81, 217, 274-275
- del valor medio, 192-196, 327, 401, 621, AP-36-AP-40
 - consecuencias matemáticas del, 195-196
 - corolario 1 del, 195
 - corolario 2 del, 195-196, 372
 - corolario 3 del, 199-200, 201
 - de Cauchy, 400, 401
 - interpretación del, 194, 274
 - para integrales definidas, 274-275
 - para derivadas, 277
- derivación término a término, 580
- derivabilidad implica continuidad, 111, 772
- divergencia, 974
- estimación
 - de series alternantes, 570, 593
 - del residuo, 591, 593
- evaluación, 277-278
- exactitud de las formas diferenciales, 928
- fórmula para derivación implícita, 780
- función continua para sucesiones, 536
- fundamental, AP-33-AP-34
 - de las integrales de línea, 922
 - del álgebra, AP-33-AP-34
 - del cálculo, 274-282, 329, 435, 623, 921, 937, 981
 - parte 1, 275-277
 - parte 2, 277-278
- gradiente ortogonal, 814
- integración término a término, 581
- integrales para campos vectoriales, 980-981
 - multiplicación de series de potencias, 580
 - número e como un límite, 382
 - para integrales de línea, 902
 - parte 1 (derivada de una integral), 275-276
 - demostración de, 276-277
 - parte 2 (teorema de la evaluación), 277-278
 - demostración de, 277-278
 - teorema del cambio neto, 279
- propiedad del ciclo de campos conservativos, 924
- propiedades algebraicas del logaritmo natural, 372
- propiedades de las funciones continuas, 76
- propiedades de límites de funciones de dos variables, 757
- regla de L'Hôpital, 397, 400, 537-538
- regla de la cadena, 142-146
 - para dos variables independientes y tres variables intermedias, 778
 - para funciones de dos variables, 775
 - para funciones de tres variables, 777
- regla de la derivada para inversas, 365
- regla de sustitución, 286
- rot $F = 0$ relacionado con la propiedad del ciclo, 970
- sucesiones no decrecientes, 540
- sustitución en integrales definidas, 292
- valor extremo, 185-186, AP-24
- Teoría
 - electromagnética (ley de Gauss), 978
 - unificada, 980
- Tercera ley de Kepler (ley del tiempo-distancia), 741-742
- Término(s)
 - de una serie, 545
 - de una sucesión, 532
 - del error en la fórmula de Taylor, 590
 - dominantes, 93
- Tiempo de vuelo, 719
- Torca, 346-347, 685
 - del sistema, sistemas de masas, 346
- Toro, 951
- Torsión, 736-737, 738
- Trabajo
 - en el bombeo de líquidos, 340
 - energía cinética y, 344
 - fuerzas en fluidos y, 337-342
 - por fuerzas a lo largo de un desplazamiento, 679
 - por fuerzas sobre curvas en el espacio, 912-914
 - por una fuerza variable a lo largo de una curva, 913
 - por una fuerza variable a lo largo de una recta, 338
 - realizado por una fuerza constante, 337-342
- Transferencia de calor, 392-393
- Transformación
 - de gráficas trigonométricas, 27
 - jacobiano de, 889, 890
 - lineal, 888-889
- Trayectorias
 - de una partícula, 707
 - ortogonales, 512-513
- Triple producto escalar (producto caja), 685-686
- U**
- Unidades del Sistema Internacional (SI), 337
- Unión de conjuntos, AP-2
- Utilidad marginal, 218
- V**
- Valor(es)
 - absoluto, AP-4-AP-6, AP-30
 - propiedades de, AP-5
 - de estado estable, 508
 - de integrales impropias, 478, 481
 - de una función, 2-3, 864-865
 - en los extremos del intervalo de una función, 74, 188, 189
 - extremos, 184-188, 802-808
 - en los puntos finales de un intervalo, 188
 - extremos locales
 - criterios de derivadas para, 187, 803-804, 805
 - definición, 186, 803
 - extremos restringidos
 - de funciones, 184-189, 803-804
 - en los extremos de un intervalo, 188
 - locales (relativos), criterios de derivadas para, 186-187, 200, 206, 803, 805
 - mediante multiplicadores de Lagrange, 814
 - máximo local, 186, 803
 - medio. *Véase* Valor promedio
 - mínimo local, 186, 803
 - promedio, 252, 851-852
 - de funciones con varias variables, 851-852, 864-865
 - de funciones continuas, 269-270
 - de funciones continuas no negativas, 252-253
- Variable(s)
 - de entrada de una función, 1, 747
 - de integración, 235, 264
 - de salida de una función, 747
 - del grosor, 322-323
 - dependiente de una función, 1, 747, 824-825
 - derivadas parciales con, restringidas, 824-828
 - funciones con dos variables, 748-749, 752, 771
 - funciones con tres variables, 750-752, 789-790
 - regla de la cadena para, 777
 - funciones con varias, 747-752, 761, 768-769, 781
 - derivadas parciales de, 764-766
 - fórmula de Taylor para, 820-823
 - independientes y tres intermedias, 778
 - límites para, 755-759
 - linealización de, 794-796, 798
 - regla de la cadena para, 775-777
 - independiente de una función, 1, 747, 775, 777, 824-825
 - intermedia, 776-777
 - muda en integrales, 264
 - proporcional, 7
 - restringidas, 824-828

- Vector(es), 665-672
 - aceleración, 711-734
 - ángulo entre, 674-676
 - aplicaciones de, 671-672
 - binomial, 738
 - de una curva, 734
 - unitario, 734
 - cero, 666
 - componente **i** de, 669
 - componente **j** de, 669
 - componente **k** de, 669
 - coplanares, 669
 - de dos dimensiones, 666, 676
 - de posición, 665
 - de tres dimensiones, 666
 - forma de componentes de, 666
 - definición de, 665
 - dirección de, 669
 - en dos dimensiones, forma de componentes de, 666
 - en física e ingeniería, 671-672
 - en la navegación, 671
 - en posición estándar, 665-666
 - en un campo gravitacional, 908
 - forma de componentes de, 665-667
 - geometría en el espacio y, 660-699
 - gradiente, 784-787
 - definición de, 786
 - para curvas de nivel, 788-789
 - reglas del álgebra para, 789
 - rotacional de, 969
 - igualdad de, 665
 - longitud (magnitud) de, 665, 667-668
 - multiplicación escalar de, 667-668
 - normal, 730, 732-733
 - de una curva, 732-733
 - unitario, 732
 - unitario principal, 730-738
 - notación para, 665
 - operaciones algebraicas con, 667-669
 - ortogonales, 676-677
 - paralelo, 682
 - producto cruz de, 682
 - perpendicular (ortogonal), 676-677
 - posición estándar, para un punto, 665-666
 - producto punto, definición de, 674
 - producto cruz
 - como el área de un paralelogramo, 683
 - como un determinante, 683-685
 - de dos vectores en el espacio, 682-683
 - definición de, 682
 - en forma de componentes, 683-685
 - regla de la mano derecha para, 682
 - proyección de, 677-679
 - punto inicial de, 665
 - punto terminal de, 665
 - resta (sustracción) de, 668
 - resultante, 667-668
 - rotacional, 962-963
 - suma de, 667-668, 675
 - tangente, 710
 - de una curva, 710
 - unitario, 726-727, 738
 - torca, 685
 - triple producto escalar de, 685-686
 - unitario
 - definición de, 669-670
 - derivada en la dirección de, 785
 - escritura de vectores en términos de, 669-670
 - estándar, 669
 - velocidad, 665, 711
 - Velocidad, 129
 - a lo largo de una curva en el espacio, 711
 - angular de rotación, 967
 - caída libre y, 128
 - del flujo de un fluido, 932
 - en coordenadas polares, 739-742
 - instantánea, 125-126
 - promedio, 125
 - resistencia proporcional a la, movimiento con, 510-511
 - terminal, 521
 - Ventana de graficación, 30-33
 - Vida media, 391-392
 - Voltaje pico o voltaje máximo, 289
 - Volumen
 - de un cilindro, 308
 - de una pirámide, 309
 - diferencial
 - en coordenadas cilíndricas, 876
 - en coordenadas esféricas, 880
 - de sólidos con sección transversal conocida, 309
 - de una región en el espacio, 860
 - de una región sólida, 842-845
 - integrales dobles como, 837, 838
 - integrales triples como, 860
 - mediante arandelas por la rotación alrededor de un eje, 314
 - mediante cascarones cilíndricos, 319-324
 - mediante discos por rotación alrededor de un eje, 311, 313
 - mediante el proceso de rebanar, 308-315
 - mediante integrales iteradas, 842-843
 - mediante secciones transversales, 308-315
 - teorema de Pappus para, 353-354
- W**
- Weierstrass, Karl, 484
- Y**
- $y = f(x)$,
 - graficación de, 206-208
 - longitud de, 326-328, 623
- $y = \ln x$, derivada de, 371
- $y = \sec^{-1} u$, derivada de, 409-410
- $y = \sen^{-1} u$, derivada de, 408
- $y = \tan^{-1} u$, derivada de, 409

CRÉDITOS

Página ii, fotografía, Forest Edge, Hokuto, Hokkaido, Japón 2004 © Michael Kenna; **página 1, fotografía**, Getty Images; **página 39, fotografía**, Getty Images; **página 102, fotografía**, Getty Images; **página 133, sección 3.4, fotografía para el ejercicio 19**, *PSSC Physics*, segunda edición, DC Health & Co., con Education Development Center, Inc.; **página 178, capítulo 3, Ejercicios de práctica, gráficas para el ejercicio 94**, NCPMF “Differentiation”, por W. U. Walton *et al.*, Proyecto CALC, Education Development Center, Inc.; **página 181, capítulo 3 Ejercicios adicionales y avanzados, fotografía para el ejercicio 9**, AP Wide World Photos; **página 184, fotografía**, Getty Images; **página 246, fotografía**, Getty Images; **página 308, fotografía**, Getty Images; **página 347, figura 6.44, fotografía**, *PSSC Physics*, segunda edición, DC Health & Co., con Education Development Center, Inc.; **página 361, fotografía**, Getty Images; **página 435, fotografía**, Getty Images; **página 496, fotografía**, Getty Images; **página 532, fotografía**, Getty Images; **página 547, figura 10.9b**, *PSSC Physics*, segunda edición, DC Health & Co., con Education Development Center, Inc.; **página 610, fotografía**, Getty Images; **página 722, sección 13.2 fotografía para el ejercicio 35**, *PSSC Physics*, segunda edición, DC Health & Co., con Education Development Center, Inc.; **página 751, figura 14.7**, reproducida con permiso del Club de Montaña Apalache; **página 784, figura 14.25**, Departamento de Historia, Academia Militar de Estados Unidos, West Point, Nueva York; **página 908, figuras 16.6 y 16.7**, *NCFMF Book of Film Notes*, 1974, MIT Press con Education Development Center, Inc.; **página 909, figura 16.15**, InterNetwork Media, Inc. y NASA/JPL; **página AP-1, fotografía**, Getty Images.

BREVE TABLA DE INTEGRALES

Formas básicas

- $\int k dx = kx + C$ (cualquier número k)
- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ ($n \neq -1$)
- $\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$
- $\int e^x dx = e^x + C$
- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ ($a > 0, a \neq 1$)
- $\int \sin x dx = -\cos x + C$
- $\int \cos x dx = \sin x + C$
- $\int \sec^2 x dx = \tan x + C$
- $\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$
- $\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$
- $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$
- $\int \tan x dx = \ln |\sec x| + C$
- $\int \cot x dx = \ln |\sin x| + C$
- $\int \sinh x dx = \cosh x + C$
- $\int \cosh x dx = \sinh x + C$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1} \frac{x}{a} + C$
- $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + C$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \sinh^{-1} \frac{x}{a} + C$ ($a > 0$)
- $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \sec^{-1} \left| \frac{x}{a} \right| + C$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \cosh^{-1} \frac{x}{a} + C$ ($x > a > 0$)

Formas que incluyen $ax + b$

- $\int (ax + b)^n dx = \frac{(ax + b)^{n+1}}{a(n+1)} + C, n \neq -1$
- $\int x(ax + b)^n dx = \frac{(ax + b)^{n+1}}{a^2} \left[\frac{ax + b}{n+2} - \frac{b}{n+1} \right] + C, n \neq -1, -2$
- $\int (ax + b)^{-1} dx = \frac{1}{a} \ln |ax + b| + C$
- $\int x(ax + b)^{-1} dx = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2} \ln |ax + b| + C$
- $\int x(ax + b)^{-2} dx = \frac{1}{a^2} \left[\ln |ax + b| + \frac{b}{ax + b} \right] + C$
- $\int \frac{dx}{x(ax + b)} = \frac{1}{b} \ln \left| \frac{x}{ax + b} \right| + C$
- $\int (\sqrt{ax + b})^n dx = \frac{2}{a} \frac{(\sqrt{ax + b})^{n+2}}{n+2} + C, n \neq -2$
- $\int \frac{\sqrt{ax + b}}{x} dx = 2\sqrt{ax + b} + b \int \frac{dx}{x\sqrt{ax + b}}$

$$29. \text{ (a)} \int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \ln \left| \frac{\sqrt{ax+b} - \sqrt{b}}{\sqrt{ax+b} + \sqrt{b}} \right| + C$$

$$\text{ (b)} \int \frac{dx}{x\sqrt{ax-b}} = \frac{2}{\sqrt{b}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{ax-b}{b}} + C$$

$$30. \int \frac{\sqrt{ax+b}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{ax+b}}{x} + \frac{a}{2} \int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} + C$$

$$31. \int \frac{dx}{x^2\sqrt{ax+b}} = -\frac{\sqrt{ax+b}}{bx} - \frac{a}{2b} \int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} + C$$

Formas que incluyen $a^2 + x^2$

$$32. \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + C$$

$$33. \int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^2} = \frac{x}{2a^2(a^2 + x^2)} + \frac{1}{2a^3} \tan^{-1} \frac{x}{a} + C$$

$$34. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \sinh^{-1} \frac{x}{a} + C = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}) + C$$

$$35. \int \sqrt{a^2 + x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}) + C$$

$$36. \int x^2 \sqrt{a^2 + x^2} dx = \frac{x}{8} (a^2 + 2x^2) \sqrt{a^2 + x^2} - \frac{a^4}{8} \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}) + C$$

$$37. \int \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{x} dx = \sqrt{a^2 + x^2} - a \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 + x^2}}{x} \right| + C$$

$$38. \int \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{x^2} dx = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}) - \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{x} + C$$

$$39. \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx = -\frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}) + \frac{x\sqrt{a^2 + x^2}}{2} + C$$

$$40. \int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 + x^2}} = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 + x^2}}{x} \right| + C$$

$$41. \int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2 + x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{a^2x} + C$$

Formas que incluyen $a^2 - x^2$

$$42. \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right| + C$$

$$43. \int \frac{dx}{(a^2 - x^2)^2} = \frac{x}{2a^2(a^2 - x^2)} + \frac{1}{4a^3} \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right| + C$$

$$44. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1} \frac{x}{a} + C$$

$$45. \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{x}{a} + C$$

$$46. \int x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^4}{8} \sin^{-1} \frac{x}{a} - \frac{1}{8} x \sqrt{a^2 - x^2} (a^2 - 2x^2) + C$$

$$47. \int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} dx = \sqrt{a^2 - x^2} - a \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right| + C$$

$$48. \int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^2} dx = -\sin^{-1} \frac{x}{a} - \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} + C$$

$$49. \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{x}{a} - \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + C$$

$$50. \int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right| + C$$

$$51. \int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2x} + C$$

Formas que incluyen $x^2 - a^2$

$$52. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C$$

$$53. \int \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C$$

$$54. \int (\sqrt{x^2 - a^2})^n dx = \frac{x(\sqrt{x^2 - a^2})^n}{n+1} - \frac{na^2}{n+1} \int (\sqrt{x^2 - a^2})^{n-2} dx, \quad n \neq -1$$

$$55. \int \frac{dx}{(\sqrt{x^2 - a^2})^n} = \frac{x(\sqrt{x^2 - a^2})^{2-n}}{(2-n)a^2} - \frac{n-3}{(n-2)a^2} \int \frac{dx}{(\sqrt{x^2 - a^2})^{n-2}}, \quad n \neq 2$$

$$56. \int x(\sqrt{x^2 - a^2})^n dx = \frac{(\sqrt{x^2 - a^2})^{n+2}}{n+2} + C, \quad n \neq -2$$

$$57. \int x^2 \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{x}{8}(2x^2 - a^2)\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^4}{8} \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C$$

$$58. \int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} dx = \sqrt{x^2 - a^2} - a \sec^{-1} \left| \frac{x}{a} \right| + C$$

$$59. \int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x^2} dx = \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| - \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} + C$$

$$60. \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \frac{a^2}{2} \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} + C$$

$$61. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \sec^{-1} \left| \frac{x}{a} \right| + C = \frac{1}{a} \cos^{-1} \left| \frac{a}{x} \right| + C$$

$$62. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a^2 x} + C$$

Formas trigonométricas

$$63. \int \operatorname{sen} ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax + C$$

$$64. \int \cos ax dx = \frac{1}{a} \operatorname{sen} ax + C$$

$$65. \int \operatorname{sen}^2 ax dx = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2ax}{4a} + C$$

$$66. \int \cos^2 ax dx = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2ax}{4a} + C$$

$$67. \int \operatorname{sen}^n ax dx = -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} ax \cos ax}{na} + \frac{n-1}{n} \int \operatorname{sen}^{n-2} ax dx$$

$$68. \int \cos^n ax dx = \frac{\cos^{n-1} ax \operatorname{sen} ax}{na} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} ax dx$$

$$69. \text{(a)} \int \operatorname{sen} ax \cos bx dx = -\frac{\cos(a+b)x}{2(a+b)} - \frac{\cos(a-b)x}{2(a-b)} + C, \quad a^2 \neq b^2$$

$$\text{(b)} \int \operatorname{sen} ax \operatorname{sen} bx dx = \frac{\operatorname{sen}(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\operatorname{sen}(a+b)x}{2(a+b)} + C, \quad a^2 \neq b^2$$

$$\text{(c)} \int \cos ax \cos bx dx = \frac{\operatorname{sen}(a-b)x}{2(a-b)} + \frac{\operatorname{sen}(a+b)x}{2(a+b)} + C, \quad a^2 \neq b^2$$

$$70. \int \operatorname{sen} ax \cos ax dx = -\frac{\cos 2ax}{4a} + C$$

$$71. \int \operatorname{sen}^n ax \cos ax dx = \frac{\operatorname{sen}^{n+1} ax}{(n+1)a} + C, \quad n \neq -1$$

$$72. \int \frac{\cos ax}{\operatorname{sen} ax} dx = \frac{1}{a} \ln |\operatorname{sen} ax| + C$$

$$73. \int \cos^n ax \operatorname{sen} ax dx = -\frac{\cos^{n+1} ax}{(n+1)a} + C, \quad n \neq -1$$

$$74. \int \frac{\operatorname{sen} ax}{\cos ax} dx = -\frac{1}{a} \ln |\cos ax| + C$$

$$75. \int \operatorname{sen}^n ax \cos^m ax dx = -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} ax \cos^{m+1} ax}{a(m+n)} + \frac{n-1}{m+n} \int \operatorname{sen}^{n-2} ax \cos^m ax dx, \quad n \neq -m \quad (\text{reduce } \operatorname{sen}^n ax)$$

$$76. \int \operatorname{sen}^n ax \cos^m ax dx = \frac{\operatorname{sen}^{n+1} ax \cos^{m-1} ax}{a(m+n)} + \frac{m-1}{m+n} \int \operatorname{sen}^n ax \cos^{m-2} ax dx, \quad m \neq -n \quad (\text{reduce } \cos^m ax)$$

- $$77. \int \frac{dx}{b + c \operatorname{sen} ax} = \frac{-2}{a\sqrt{b^2 - c^2}} \tan^{-1} \left[\sqrt{\frac{b-c}{b+c}} \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2} \right) \right] + C, \quad b^2 > c^2$$
- $$78. \int \frac{dx}{b + c \operatorname{sen} ax} = \frac{-1}{a\sqrt{c^2 - b^2}} \ln \left| \frac{c + b \operatorname{sen} ax + \sqrt{c^2 - b^2} \cos ax}{b + c \operatorname{sen} ax} \right| + C, \quad b^2 < c^2$$
- $$79. \int \frac{dx}{1 + \operatorname{sen} ax} = -\frac{1}{a} \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2} \right) + C$$
- $$80. \int \frac{dx}{1 - \operatorname{sen} ax} = \frac{1}{a} \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2} \right) + C$$
- $$81. \int \frac{dx}{b + c \cos ax} = \frac{2}{a\sqrt{b^2 - c^2}} \tan^{-1} \left[\sqrt{\frac{b-c}{b+c}} \tan \frac{ax}{2} \right] + C, \quad b^2 > c^2$$
- $$82. \int \frac{dx}{b + c \cos ax} = \frac{1}{a\sqrt{c^2 - b^2}} \ln \left| \frac{c + b \cos ax + \sqrt{c^2 - b^2} \operatorname{sen} ax}{b + c \cos ax} \right| + C, \quad b^2 < c^2$$
- $$83. \int \frac{dx}{1 + \cos ax} = \frac{1}{a} \tan \frac{ax}{2} + C$$
- $$84. \int \frac{dx}{1 - \cos ax} = -\frac{1}{a} \cot \frac{ax}{2} + C$$
- $$85. \int x \operatorname{sen} ax \, dx = \frac{1}{a^2} \operatorname{sen} ax - \frac{x}{a} \cos ax + C$$
- $$86. \int x \cos ax \, dx = \frac{1}{a^2} \cos ax + \frac{x}{a} \operatorname{sen} ax + C$$
- $$87. \int x^n \operatorname{sen} ax \, dx = -\frac{x^n}{a} \cos ax + \frac{n}{a} \int x^{n-1} \cos ax \, dx$$
- $$88. \int x^n \cos ax \, dx = \frac{x^n}{a} \operatorname{sen} ax - \frac{n}{a} \int x^{n-1} \operatorname{sen} ax \, dx$$
- $$89. \int \tan ax \, dx = \frac{1}{a} \ln |\sec ax| + C$$
- $$90. \int \cot ax \, dx = \frac{1}{a} \ln |\operatorname{sen} ax| + C$$
- $$91. \int \tan^2 ax \, dx = \frac{1}{a} \tan ax - x + C$$
- $$92. \int \cot^2 ax \, dx = -\frac{1}{a} \cot ax - x + C$$
- $$93. \int \tan^n ax \, dx = \frac{\tan^{n-1} ax}{a(n-1)} - \int \tan^{n-2} ax \, dx, \quad n \neq 1$$
- $$94. \int \cot^n ax \, dx = -\frac{\cot^{n-1} ax}{a(n-1)} - \int \cot^{n-2} ax \, dx, \quad n \neq 1$$
- $$95. \int \sec ax \, dx = \frac{1}{a} \ln |\sec ax + \tan ax| + C$$
- $$96. \int \csc ax \, dx = -\frac{1}{a} \ln |\csc ax + \cot ax| + C$$
- $$97. \int \sec^2 ax \, dx = \frac{1}{a} \tan ax + C$$
- $$98. \int \csc^2 ax \, dx = -\frac{1}{a} \cot ax + C$$
- $$99. \int \sec^n ax \, dx = \frac{\sec^{n-2} ax \tan ax}{a(n-1)} + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} ax \, dx, \quad n \neq 1$$
- $$100. \int \csc^n ax \, dx = -\frac{\csc^{n-2} ax \cot ax}{a(n-1)} + \frac{n-2}{n-1} \int \csc^{n-2} ax \, dx, \quad n \neq 1$$
- $$101. \int \sec^n ax \tan ax \, dx = \frac{\sec^n ax}{na} + C, \quad n \neq 0$$
- $$102. \int \csc^n ax \cot ax \, dx = -\frac{\csc^n ax}{na} + C, \quad n \neq 0$$

Formas trigonométricas inversas

- $$103. \int \operatorname{sen}^{-1} ax \, dx = x \operatorname{sen}^{-1} ax + \frac{1}{a} \sqrt{1 - a^2 x^2} + C$$
- $$104. \int \cos^{-1} ax \, dx = x \cos^{-1} ax - \frac{1}{a} \sqrt{1 - a^2 x^2} + C$$
- $$105. \int \tan^{-1} ax \, dx = x \tan^{-1} ax - \frac{1}{2a} \ln(1 + a^2 x^2) + C$$
- $$106. \int x^n \operatorname{sen}^{-1} ax \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \operatorname{sen}^{-1} ax - \frac{a}{n+1} \int \frac{x^{n+1} dx}{\sqrt{1 - a^2 x^2}}, \quad n \neq -1$$
- $$107. \int x^n \cos^{-1} ax \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \cos^{-1} ax + \frac{a}{n+1} \int \frac{x^{n+1} dx}{\sqrt{1 - a^2 x^2}}, \quad n \neq -1$$
- $$108. \int x^n \tan^{-1} ax \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \tan^{-1} ax - \frac{a}{n+1} \int \frac{x^{n+1} dx}{1 + a^2 x^2}, \quad n \neq -1$$

Formas exponenciales y logarítmicas

109. $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C$

110. $\int b^{ax} dx = \frac{1}{a} \frac{b^{ax}}{\ln b} + C, \quad b > 0, b \neq 1$

111. $\int x e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^2} (ax - 1) + C$

112. $\int x^n e^{ax} dx = \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} dx$

113. $\int x^n b^{ax} dx = \frac{x^n b^{ax}}{a \ln b} - \frac{n}{a \ln b} \int x^{n-1} b^{ax} dx, \quad b > 0, b \neq 1$

114. $\int e^{ax} \operatorname{sen} bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \operatorname{sen} bx - b \cos bx) + C$

115. $\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \operatorname{sen} bx) + C$

116. $\int \ln ax dx = x \ln ax - x + C$

117. $\int x^n (\ln ax)^m dx = \frac{x^{n+1} (\ln ax)^m}{n+1} - \frac{m}{n+1} \int x^n (\ln ax)^{m-1} dx, \quad n \neq -1$

118. $\int x^{-1} (\ln ax)^m dx = \frac{(\ln ax)^{m+1}}{m+1} + C, \quad m \neq -1$

119. $\int \frac{dx}{x \ln ax} = \ln |\ln ax| + C$

Formas que incluyen $\sqrt{2ax - x^2}, a > 0$

120. $\int \frac{dx}{\sqrt{2ax - x^2}} = \operatorname{sen}^{-1} \left(\frac{x-a}{a} \right) + C$

121. $\int \sqrt{2ax - x^2} dx = \frac{x-a}{2} \sqrt{2ax - x^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{sen}^{-1} \left(\frac{x-a}{a} \right) + C$

122. $\int (\sqrt{2ax - x^2})^n dx = \frac{(x-a)(\sqrt{2ax - x^2})^n}{n+1} + \frac{na^2}{n+1} \int (\sqrt{2ax - x^2})^{n-2} dx$

123. $\int \frac{dx}{(\sqrt{2ax - x^2})^n} = \frac{(x-a)(\sqrt{2ax - x^2})^{2-n}}{(n-2)a^2} + \frac{n-3}{(n-2)a^2} \int \frac{dx}{(\sqrt{2ax - x^2})^{n-2}}$

124. $\int x \sqrt{2ax - x^2} dx = \frac{(x+a)(2x-3a)\sqrt{2ax - x^2}}{6} + \frac{a^3}{2} \operatorname{sen}^{-1} \left(\frac{x-a}{a} \right) + C$

125. $\int \frac{\sqrt{2ax - x^2}}{x} dx = \sqrt{2ax - x^2} + a \operatorname{sen}^{-1} \left(\frac{x-a}{a} \right) + C$

126. $\int \frac{\sqrt{2ax - x^2}}{x^2} dx = -2 \sqrt{\frac{2a-x}{x}} - \operatorname{sen}^{-1} \left(\frac{x-a}{a} \right) + C$

127. $\int \frac{x dx}{\sqrt{2ax - x^2}} = a \operatorname{sen}^{-1} \left(\frac{x-a}{a} \right) - \sqrt{2ax - x^2} + C$

128. $\int \frac{dx}{x \sqrt{2ax - x^2}} = -\frac{1}{a} \sqrt{\frac{2a-x}{x}} + C$

Formas hiperbólicas

129. $\int \operatorname{senh} ax dx = \frac{1}{a} \cosh ax + C$

130. $\int \cosh ax dx = \frac{1}{a} \operatorname{senh} ax + C$

131. $\int \operatorname{senh}^2 ax dx = \frac{\operatorname{senh} 2ax}{4a} - \frac{x}{2} + C$

132. $\int \cosh^2 ax dx = \frac{\operatorname{senh} 2ax}{4a} + \frac{x}{2} + C$

133. $\int \operatorname{senh}^n ax dx = \frac{\operatorname{senh}^{n-1} ax \cosh ax}{na} - \frac{n-1}{n} \int \operatorname{senh}^{n-2} ax dx, \quad n \neq 0$

$$134. \int \cosh^n ax \, dx = \frac{\cosh^{n-1} ax \sinh ax}{na} + \frac{n-1}{n} \int \cosh^{n-2} ax \, dx, \quad n \neq 0$$

$$135. \int x \sinh ax \, dx = \frac{x}{a} \cosh ax - \frac{1}{a^2} \sinh ax + C$$

$$136. \int x \cosh ax \, dx = \frac{x}{a} \sinh ax - \frac{1}{a^2} \cosh ax + C$$

$$137. \int x^n \sinh ax \, dx = \frac{x^n}{a} \cosh ax - \frac{n}{a} \int x^{n-1} \cosh ax \, dx$$

$$138. \int x^n \cosh ax \, dx = \frac{x^n}{a} \sinh ax - \frac{n}{a} \int x^{n-1} \sinh ax \, dx$$

$$139. \int \tanh ax \, dx = \frac{1}{a} \ln |\cosh ax| + C$$

$$140. \int \coth ax \, dx = \frac{1}{a} \ln |\sinh ax| + C$$

$$141. \int \tanh^2 ax \, dx = x - \frac{1}{a} \tanh ax + C$$

$$142. \int \coth^2 ax \, dx = x - \frac{1}{a} \coth ax + C$$

$$143. \int \tanh^n ax \, dx = -\frac{\tanh^{n-1} ax}{(n-1)a} + \int \tanh^{n-2} ax \, dx, \quad n \neq 1$$

$$144. \int \coth^n ax \, dx = -\frac{\coth^{n-1} ax}{(n-1)a} + \int \coth^{n-2} ax \, dx, \quad n \neq 1$$

$$145. \int \operatorname{sech} ax \, dx = \frac{1}{a} \operatorname{sen}^{-1}(\tanh ax) + C$$

$$146. \int \operatorname{csch} ax \, dx = \frac{1}{a} \ln \left| \tanh \frac{ax}{2} \right| + C$$

$$147. \int \operatorname{sech}^2 ax \, dx = \frac{1}{a} \tanh ax + C$$

$$148. \int \operatorname{csch}^2 ax \, dx = -\frac{1}{a} \coth ax + C$$

$$149. \int \operatorname{sech}^n ax \, dx = \frac{\operatorname{sech}^{n-2} ax \tanh ax}{(n-1)a} + \frac{n-2}{n-1} \int \operatorname{sech}^{n-2} ax \, dx, \quad n \neq 1$$

$$150. \int \operatorname{csch}^n ax \, dx = -\frac{\operatorname{csch}^{n-2} ax \coth ax}{(n-1)a} - \frac{n-2}{n-1} \int \operatorname{csch}^{n-2} ax \, dx, \quad n \neq 1$$

$$151. \int \operatorname{sech}^n ax \tanh ax \, dx = -\frac{\operatorname{sech}^n ax}{na} + C, \quad n \neq 0$$

$$152. \int \operatorname{csch}^n ax \coth ax \, dx = -\frac{\operatorname{csch}^n ax}{na} + C, \quad n \neq 0$$

$$153. \int e^{ax} \sinh bx \, dx = \frac{e^{ax}}{2} \left[\frac{e^{bx}}{a+b} - \frac{e^{-bx}}{a-b} \right] + C, \quad a^2 \neq b^2$$

$$154. \int e^{ax} \cosh bx \, dx = \frac{e^{ax}}{2} \left[\frac{e^{bx}}{a+b} + \frac{e^{-bx}}{a-b} \right] + C, \quad a^2 \neq b^2$$

Algunas integrales definidas

$$155. \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} \, dx = \Gamma(n) = (n-1)!, \quad n > 0$$

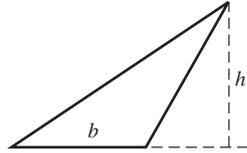
$$156. \int_0^\infty e^{-ax^2} \, dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad a > 0$$

$$157. \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x \, dx = \int_0^{\pi/2} \operatorname{cos}^n x \, dx = \begin{cases} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot n} \cdot \frac{\pi}{2}, & \text{si } n \text{ es un entero par } \geq 2 \\ \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (n-1)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot n}, & \text{si } n \text{ es un entero impar } \geq 3 \end{cases}$$

FÓRMULAS DE GEOMETRÍA

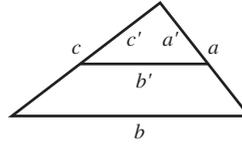
A = área, B = área de la base, C = circunferencia,
 S = área lateral o área de la superficie, V = volumen

Triángulo



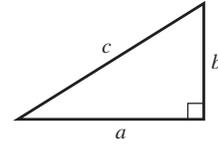
$$A = \frac{1}{2}bh$$

Triángulos semejantes



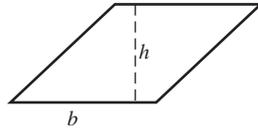
$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$$

Teorema de Pitágoras



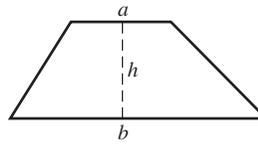
$$a^2 + b^2 = c^2$$

Paralelogramo



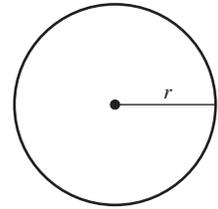
$$A = bh$$

Trapezio



$$A = \frac{1}{2}(a + b)h$$

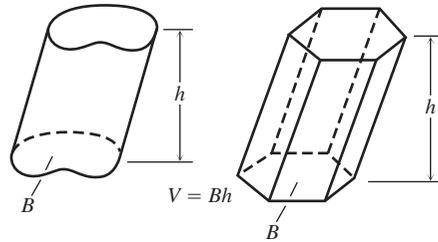
Círculo



$$A = \pi r^2,$$

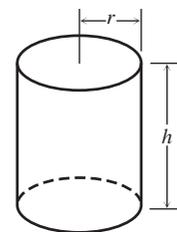
$$C = 2\pi r$$

Cualquier cilindro o prisma con bases paralelas



$$V = Bh$$

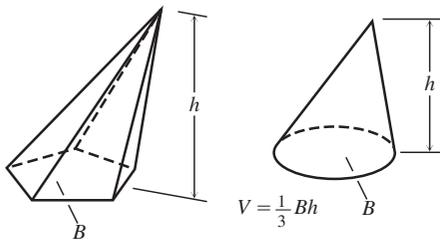
Cilindro circular recto



$$V = \pi r^2 h$$

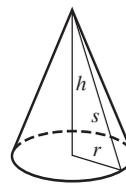
$$S = 2\pi r h = \text{Área lateral}$$

Cualquier cono o pirámide



$$V = \frac{1}{3}Bh$$

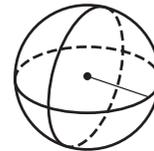
Cono circular recto



$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$S = \pi r s = \text{Área lateral}$$

Esfera

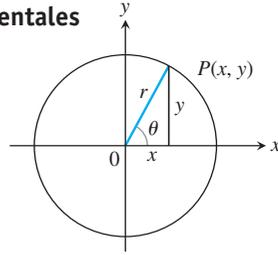


$$V = \frac{4}{3}\pi r^3, S = 4\pi r^2$$

Fórmulas de trigonometría

1. Definiciones e identidades fundamentales

Seno: $\operatorname{sen} \theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{\operatorname{csc} \theta}$
 Coseno: $\operatorname{cos} \theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\operatorname{sec} \theta}$
 Tangente: $\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{1}{\operatorname{cot} \theta}$



2. Identidades

$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen} \theta, \quad \operatorname{cos}(-\theta) = \operatorname{cos} \theta$
 $\operatorname{sen}^2 \theta + \operatorname{cos}^2 \theta = 1, \quad \operatorname{sec}^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta, \quad \operatorname{csc}^2 \theta = 1 + \cot^2 \theta$
 $\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen} \theta \operatorname{cos} \theta, \quad \operatorname{cos} 2\theta = \operatorname{cos}^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta$
 $\operatorname{cos}^2 \theta = \frac{1 + \operatorname{cos} 2\theta}{2}, \quad \operatorname{sen}^2 \theta = \frac{1 - \operatorname{cos} 2\theta}{2}$
 $\operatorname{sen}(A + B) = \operatorname{sen} A \operatorname{cos} B + \operatorname{cos} A \operatorname{sen} B$
 $\operatorname{sen}(A - B) = \operatorname{sen} A \operatorname{cos} B - \operatorname{cos} A \operatorname{sen} B$
 $\operatorname{cos}(A + B) = \operatorname{cos} A \operatorname{cos} B - \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$
 $\operatorname{cos}(A - B) = \operatorname{cos} A \operatorname{cos} B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$

$$\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

$$\tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$$

$$\operatorname{sen}\left(A - \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{cos} A, \quad \operatorname{cos}\left(A - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen} A$$

$$\operatorname{sen}\left(A + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{cos} A, \quad \operatorname{cos}\left(A + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen} A$$

$$\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = \frac{1}{2} \operatorname{cos}(A - B) - \frac{1}{2} \operatorname{cos}(A + B)$$

$$\operatorname{cos} A \operatorname{cos} B = \frac{1}{2} \operatorname{cos}(A - B) + \frac{1}{2} \operatorname{cos}(A + B)$$

$$\operatorname{sen} A \operatorname{cos} B = \frac{1}{2} \operatorname{sen}(A - B) + \frac{1}{2} \operatorname{sen}(A + B)$$

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(A + B) \operatorname{cos} \frac{1}{2}(A - B)$$

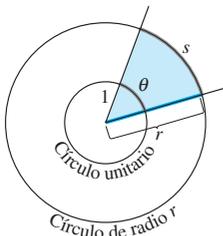
$$\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B = 2 \operatorname{cos} \frac{1}{2}(A + B) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(A - B)$$

$$\operatorname{cos} A + \operatorname{cos} B = 2 \operatorname{cos} \frac{1}{2}(A + B) \operatorname{cos} \frac{1}{2}(A - B)$$

$$\operatorname{cos} A - \operatorname{cos} B = -2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(A + B) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(A - B)$$

Funciones trigonométricas

Medida en radianes

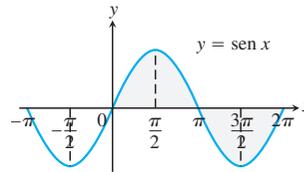


| Grados | Radianes |
|--------|----------|
| | |
| | |

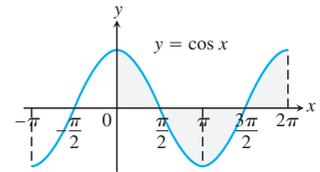
$$\frac{s}{r} = \frac{\theta}{1} = \theta \quad \text{o} \quad \theta = \frac{s}{r}$$

$$180^\circ = \pi \text{ radianes.}$$

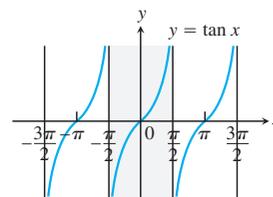
Los ángulos de dos triángulos comunes, en grados y en radianes.



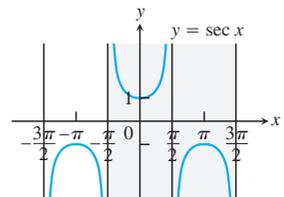
Dominio: $(-\infty, \infty)$
 Rango: $[-1, 1]$



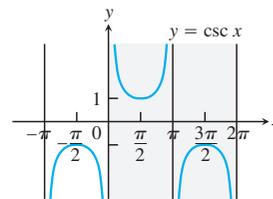
Dominio: $(-\infty, \infty)$
 Rango: $[-1, 1]$



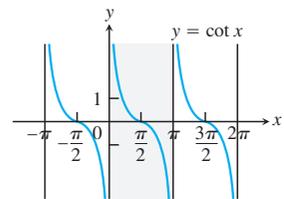
Dominio: Todos los números reales, excepto múltiplos enteros impares de $\pi/2$
 Rango: $(-\infty, \infty)$



Dominio: Todos los números reales, excepto múltiplos enteros impares de $\pi/2$
 Rango: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$



Dominio: $x \neq 0, \pm\pi, \pm2\pi, \dots$
 Rango: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$



Dominio: $x \neq 0, \pm\pi, \pm2\pi, \dots$
 Rango: $(-\infty, \infty)$

SERIES

Criterios para la convergencia de series infinitas

1. **El criterio del término n -ésimo:** A menos que $a_n \rightarrow 0$, la serie diverge.
2. **Serie geométrica:** $\sum ar^n$ converge si $|r| < 1$; de otra forma diverge.
3. **Serie p :** $\sum 1/n^p$ converge si $p > 1$; de otra forma diverge.
4. **Serie con términos no negativos:** Intente con el criterio de la integral, el criterio de la razón o el criterio de la raíz. Intente comparar con una serie conocida con el criterio de la comparación o el criterio de comparación del límite.
5. **Serie con algunos términos negativos:** ¿La serie $\sum |a_n|$ converge? Si la respuesta es sí, entonces también lo hace $\sum a_n$ ya que convergencia absoluta implica convergencia.
6. **Serie alternante:** La serie $\sum a_n$ converge si la serie satisface las condiciones del criterio de las series alternantes.

Serie de Taylor

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x| < 1$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-x)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad |x| < 1$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad |x| < \infty$$

$$\text{sen } x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad |x| < \infty$$

$$\text{cos } x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \quad |x| < \infty$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, \quad -1 < x \leq 1$$

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \tanh^{-1} x = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots \right) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| < 1$$

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| \leq 1$$

Serie binomial

$$\begin{aligned} (1+x)^m &= 1 + mx + \frac{m(m-1)x^2}{2!} + \frac{m(m-1)(m-2)x^3}{3!} + \cdots + \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)x^k}{k!} + \cdots \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{m}{k} x^k, \quad |x| < 1, \end{aligned}$$

donde

$$\binom{m}{1} = m, \quad \binom{m}{2} = \frac{m(m-1)}{2!}, \quad \binom{m}{k} = \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!} \quad \text{para } k \geq 3.$$

FÓRMULAS DE OPERADORES VECTORIALES (FORMA CARTESIANA)

Fórmulas para Grad, Div, Rot y el laplaciano

| | |
|--------------------|---|
| | <p>Cartesianas (x, y, z) $\mathbf{i}, \mathbf{j},$ y \mathbf{k} son vectores unitarios en las direcciones en que aumentan x, y y z. $M, N,$ y P son los componentes escalares de $\mathbf{F}(x, y, z)$ en estas direcciones.</p> |
| Gradiente | $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}$ |
| Divergencia | $\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}$ |
| Rotacional | $\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix}$ |
| Laplaciano | $\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ |

Triples productos escalares

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}$$

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$$

Identidades vectoriales

En las siguientes identidades, f y g son funciones escalares derivables, $\mathbf{F}, \mathbf{F}_1,$ y \mathbf{F}_2 son campos vectoriales derivables, y a y b son constantes reales.

$$\nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0}$$

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$$

$$\nabla \cdot (g\mathbf{F}) = g\nabla \cdot \mathbf{F} + \nabla g \cdot \mathbf{F}$$

$$\nabla \times (g\mathbf{F}) = g\nabla \times \mathbf{F} + \nabla g \times \mathbf{F}$$

$$\nabla \cdot (a\mathbf{F}_1 + b\mathbf{F}_2) = a\nabla \cdot \mathbf{F}_1 + b\nabla \cdot \mathbf{F}_2$$

$$\nabla \times (a\mathbf{F}_1 + b\mathbf{F}_2) = a\nabla \times \mathbf{F}_1 + b\nabla \times \mathbf{F}_2$$

$$\nabla(\mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{F}_2) = (\mathbf{F}_1 \cdot \nabla)\mathbf{F}_2 + (\mathbf{F}_2 \cdot \nabla)\mathbf{F}_1 +$$

$$\mathbf{F}_1 \times (\nabla \times \mathbf{F}_2) + \mathbf{F}_2 \times (\nabla \times \mathbf{F}_1)$$

El teorema fundamental de las integrales de línea

- Sea $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ un campo vectorial cuyos componentes son continuos en toda una región abierta y conexa D en el espacio. Entonces existe una función derivable f tal que

$$\mathbf{F} = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}$$

si y sólo si para todos los puntos A y B en D el valor de $\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria que une a A con B en D .

- Si la integral es independiente de la trayectoria de A a B , su valor es

$$\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(B) - f(A).$$

Teorema de Green y su generalización a tres dimensiones

Forma normal del teorema de Green: $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds = \iint_R \nabla \cdot \mathbf{F} \, dA$

Teorema de la divergencia: $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV$

Forma tangencial del teorema de Green: $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} \, dA$

Teorema de Stokes: $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$

LÍMITES

Leyes generales

Si L, M, c , y k son números reales y

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow c} g(x) = M, \quad \text{entonces}$$

Regla de la suma: $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x)) = L + M$

Regla de la diferencia: $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) - g(x)) = L - M$

Regla del producto: $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$

Regla del múltiplo constante: $\lim_{x \rightarrow c} (k \cdot f(x)) = k \cdot L$

Regla del cociente: $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}, \quad M \neq 0$

El teorema de la compresión o del sándwich

Si $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ en un intervalo abierto que contiene a c , excepto posiblemente en $x = c$, y si

$$\lim_{x \rightarrow c} g(x) = \lim_{x \rightarrow c} h(x) = L,$$

entonces $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$.

Desigualdades

Si $f(x) \leq g(x)$ en un intervalo abierto que contiene a c , excepto posiblemente en $x = c$, y ambos límites existen, entonces

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow c} g(x).$$

Continuidad

Si g es continua en L y $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow c} g(f(x)) = g(L).$$

Fórmulas específicas

Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow c} P(x) = P(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \dots + a_0.$$

Si $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios y $Q(c) \neq 0$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(c)}{Q(c)}.$$

Si $f(x)$ es continua en $x = c$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c).$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

Regla de L'Hôpital

Si $f(a) = g(a) = 0$, y existen f' y g' en un intervalo abierto I que contiene a a , y $g'(x) \neq 0$ en I si $x \neq a$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

suponiendo que existe el límite de la derecha.

REGLAS DE DERIVACIÓN

Fórmulas generales

Suponga que u y v son funciones derivables de x .

Constante: $\frac{d}{dx}(c) = 0$

Suma: $\frac{d}{dx}(u + v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$

Diferencia: $\frac{d}{dx}(u - v) = \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx}$

Múltiplo constante: $\frac{d}{dx}(cu) = c \frac{du}{dx}$

Producto: $\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$

Cociente: $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$

Potencia: $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$

Regla de la cadena: $\frac{d}{dx}(f(g(x))) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Funciones trigonométricas

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \quad \frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x \quad \frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\operatorname{csc}^2 x \quad \frac{d}{dx}(\operatorname{csc} x) = -\operatorname{csc} x \cot x$$

Funciones exponenciales y logarítmicas

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x \quad \frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a \quad \frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}$$

Funciones trigonométricas inversas

$$\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\cot^{-1} x) = -\frac{1}{1+x^2} \quad \frac{d}{dx}(\operatorname{csc}^{-1} x) = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

Funciones hiperbólicas

$$\frac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x \quad \frac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x$$

$$\frac{d}{dx}(\tanh x) = \operatorname{sech}^2 x \quad \frac{d}{dx}(\operatorname{sech} x) = -\operatorname{sech} x \tanh x$$

$$\frac{d}{dx}(\coth x) = -\operatorname{csch}^2 x \quad \frac{d}{dx}(\operatorname{csch} x) = -\operatorname{csch} x \coth x$$

Funciones hiperbólicas inversas

$$\frac{d}{dx}(\sinh^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \frac{d}{dx}(\cosh^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\tanh^{-1} x) = \frac{1}{1-x^2} \quad \frac{d}{dx}(\operatorname{sech}^{-1} x) = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\coth^{-1} x) = \frac{1}{1-x^2} \quad \frac{d}{dx}(\operatorname{csch}^{-1} x) = -\frac{1}{|x|\sqrt{1+x^2}}$$

Funciones paramétricas

Si $x = f(t)$ y $y = g(t)$ son derivables, entonces

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} \quad \text{y} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'/dt}{dx/dt}$$