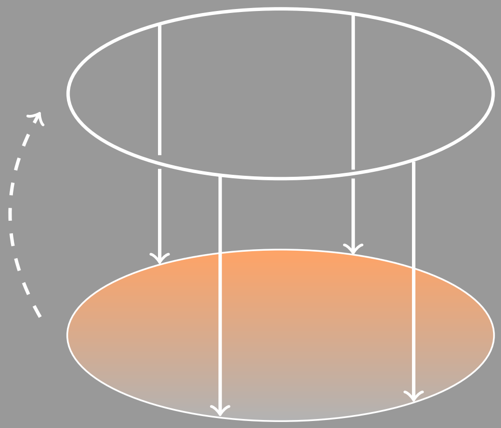
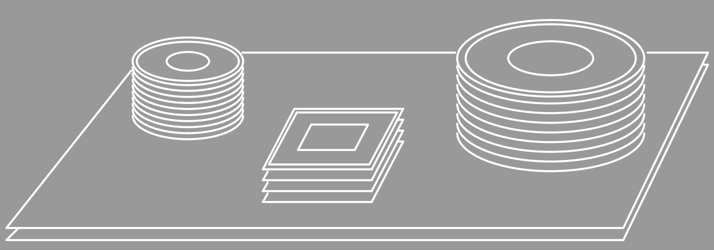


Matemáticas Conceptuales

Una primera introducción a categorías

Segunda Edición

F. William Lawvere
Stephen H. Schanuel



Traducción: Francisco Marmolejo

Matemáticas Conceptuales

Una primera introducción a categorías

Segunda Edición

F. William Lawvere
Stephen H. Schanuel

Traducción: Francisco Marmolejo.

A Fátima

Contenido

Prefacio

Desde su primera introducción hace ya más de 60 años, el concepto de categoría ha sido utilizado con frecuencia creciente en todas las ramas de las matemáticas, en especial en estudios en los que la relación entre diferentes ramas es importante. Las ideas categóricas surgieron originalmente del estudio de la relación entre la geometría y el álgebra; la simplicidad fundamental de estas ideas pronto hizo posible su más amplia aplicación.

Los conceptos categóricos están latentes en las matemáticas elementales; hacerlos más explícitos nos ayuda a ir más allá del álgebra elemental hacia ciencias matemáticas más avanzadas. Antes de la aparición de la primera edición de este libro, su simplicidad era accesible solamente a través de libros de texto de nivel de maestría porque los ejemplos disponibles involucraban temas tales como módulos y espacios topológicos.

Nuestra solución a dicho dilema fue desarrollar desde lo más básico los conceptos de gráfica dirigida y de sistema dinámico, que son estructuras matemáticas de amplia importancia pero que son, sin embargo, accesibles para cualquier estudiante interesado de preparatoria. Conforme progresa el libro, las relaciones entre estas estructuras ejemplifican las ideas elementales de categorías. De forma sorprendente, resulta que aún algunos aspectos detallados de gráficas y de sistemas dinámicos son compartidos por otras categorías que son más continuas, e.g. aquellas cuyos morfismos están definidos mediante ecuaciones diferenciales.

Muchos lectores de la primera edición han expresado su deseo de una indicación más detallada de las ligas entre el material categórico y las aplicaciones más avanzadas. Esta segunda edición responde a esta petición al agregar dos artículos nuevos y cuatro apéndices. Un nuevo artículo introduce la noción de componente conexa, la cual es fundamental para los brincos cualitativos que se estudian en teoría elemental de gráficas y en topología avanzada; la introducción de esta noción fuerza el reconocimiento del papel de los funtores. Los apéndices usan ejemplos del texto para esbozar el papel de funtores adjuntos como guía para construcciones matemáticas. A pesar de que estos condensados apéndices no pueden sustituir un estudio más detallado de temas avanzados le permitirán el estudiante, armado con lo aprendido del texto, acercarse a tal estudio con una mayor comprensión.

Buffalo, 8 de Enero de 2009.

F. William Lawvere
Stephen H. Schanuel

PALABRAS DE BIENVENIDA

Todos comenzamos a coleccionar ideas matemáticas en los primeros años de la niñez, cuando descubrimos que nuestras manos son reflejo la una de la otra y, después, cuando aprendemos que otros niños también tienen abuelas —de manera que ésta es una relación abstracta que un niño puede tener con una persona mayor—; y, luego, cuando nos damos cuenta de que las relaciones "tío" y "primo" son también de este tipo; cuando nos cansamos de perder en el juego de tres en línea (o gato) y lo analizamos completamente para nunca más perder; cuando tratamos de descifrar por qué las cosas se ven más grandes conforme se van acercando o si el contar alguna vez termina.

Conforme el lector avanza, este libro puede agregar algunos tesoros a la colección pero éste no es su objetivo. En lugar de esto, esperamos mostrar cómo poner la gran bodega en orden y encontrar la herramienta adecuada en el momento en que se la necesita, de manera que las ideas y métodos nuevos que se coleccionan y desarrollan a lo largo de la vida puedan también encontrar sus lugares apropiados. Hay en estas páginas conceptos generales que trascienden las fronteras artificiales que dividen aritmética, lógica, álgebra, geometría, cálculo, etcétera. Habrá poca discusión sobre cómo llevar a cabo cálculos especializados pero mucha sobre el análisis que sirve para decidir qué pasos es necesario hacer y en qué orden. Cualquiera que haya batallado con un problema genuino sin que se le haya enseñado un método explícito sabe que ésta es la parte más difícil.

Este libro no podría haber sido escrito hace sesenta años; el lenguaje preciso de conceptos que utiliza apenas estaba siendo desarrollado. Cierto, las ideas que estudiaremos han sido empleadas por miles de años pero aparecieron primero solamente como analogías apenas percibidas entre temas. Desde 1945, cuando la noción de "categoría" fue formulada con precisión por primera vez, estas analogías han sido afinadas y se han convertido en maneras explícitas de transformar un tema en otro. La buena fortuna de los autores les ha permitido vivir en estos tiempos interesantes y observar cómo la visión fundamental de categorías ha llevado a una comprensión más clara, y de allí a organizar de mejor manera y, a veces, dirigir el crecimiento del conocimiento matemático y sus aplicaciones.

Este libro ha sido usado en clases de preparatoria y universidad, seminarios de posgrado y por profesionales en varios países. La respuesta ha reforzado nuestra convicción de que personas de diversa formación pueden dominar estas importantes ideas.

AGRADECIMIENTOS

Mientras más “elemental” sea un libro, mayor es la dificultad de recrearlo en otro idioma. Nos sentimos muy afortunados de que nuestro colega Francisco Marmolejo, quien es un experto en el tema y comparte las metas del original, haya llevado a cabo tanto la traducción como la producción de los diagramas. Su excelente trabajo con la primera edición lo hizo la elección natural para esta segunda edición. Nunca seremos capaces de agradecerle lo suficiente por su entusiasmo y generosidad; estamos llenos de alegría por el resultado y esperamos que el lector comparta nuestro aprecio.

Queremos agradecerles a Ivonne Pallares, Iván Monroy, Ricardo Valdés, Beatriz Stellino y al Profesor Mario Bunge quienes ayudaron con la primera edición en español, la cual fue publicada por SIGLO XXI.

Fátima Fenaroli nos persuadió originalmente de que estas ideas debían convertirse en un libro. Ella fue el alma del proyecto, transformando visión en realidad, cuidándolo a través de todas las versiones en varios idiomas como si fuera su jardín.

Junio de 2014

F. William Lawvere
Stephen H. Schanuel

Organización del libro

Es necesario que el lector esté al tanto de que este libro tiene dos clases muy diferentes de "capítulos": los **Artículos** y las **Sesiones**.

Los **Artículos** forman "la columna vertebral" del libro; ellos corresponden al material escrito que les fue dado a nuestros estudiantes la primera vez que impartimos el curso. Las horas de clase dieron origen a las **Sesiones**, más informales, que le dan "cuerpo" al material con discusiones y muchos ejemplos y ejercicios. Los estudiantes que tuvieron dificultades con algunos de los ejercicios en los Artículos podían a menudo resolverlos después de las Sesiones que les seguían. Hemos tratado, en las Sesiones, de preservar la atmósfera (y hasta los nombres de los estudiantes) de aquella primera clase. El lector con experiencia puede obtener una visión general leyendo solamente los Artículos pero perdería muchos ejemplos y perspectivas esclarecedores.

La Sesión 1 es introductoria; la Sesión 10 es excepcional porque tiene la intención de darle al lector una probada de aplicaciones más sofisticadas; el dominio de dicha sesión no es esencial para el resto del libro. Vemos a continuación cuales sesiones elaboran los Artículos.

Artículo I	Sesiones 2 y 3
Artículo II	Sesiones 4 a 9
Artículo III	Sesiones 11 a 17
Artículo IV	Sesiones 19 a 29
Artículo V	Sesiones 30 y 31
Artículo VI	Sesiones 32 y 33
Artículo VII	Sesiones 34 y 35.

Los **Apéndices**, escritos de una manera menos relajada, tienen la intención de dar un rápido resumen de algunas de las posibles conecciones del material básico del curso con varios desarrollos más avanzados de las matemáticas modernas.

Sesión 1

Galileo y la multiplicación de objetos

1. Introducción

En este libro pretendemos explorar las consecuencias de una concepción nueva y fundamental de la naturaleza de las matemáticas, la cual ha conducido a métodos mejores para comprender y utilizar los conceptos matemáticos. Aunque esta concepción parece simple, no es lo suficientemente familiar; dominarla require de cierto esfuerzo, pero dicho esfuerzo será recompensado con una claridad de comprensión que sera útil para descifrar los aspectos matemáticos de cualquier tema.

La noción básica que subyace a todas las demás es la de categoría o "universo matemático". Hay diversas categorías, una indicada para cada tema particular, y hay formas de pasar de una categoría a otra. Al introducir de manera informal esta noción con algunos ejemplos, veremos que los ingredientes serán objetos, morfismos y composición de morfismos.

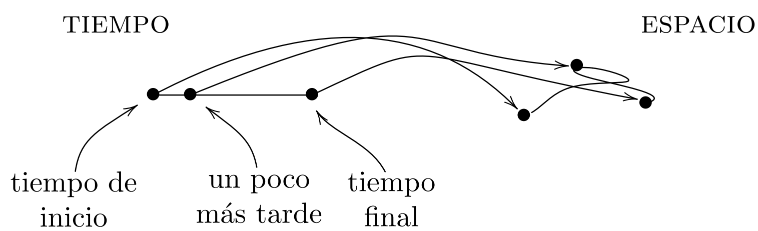
La idea de que las matemáticas involucran diferentes categorías y las relaciones que hay entre éstas ha estado implícita durante siglos; no obstante, no fue sino hasta 1945 cuando Eilenberg y Mac Lane dieron definiciones *explícitas* de las nociones básicas en su revolucionario artículo "A general theory of natural equivalences", en el que sintetizan muchas décadas de análisis del funcionamiento de las matemáticas así como de las relaciones entre sus partes.

2. Galileo y el vuelo de un ave

Comencemos con Galileo quien, hace cuatro siglos, intentaba descifrar el problema del movimiento. Deseaba comprender el movimiento preciso de una piedra lanzada y el arco elegante del chorro de agua de una fuente. Con el tiempo, Galileo encontró fórmulas simples para estos movimientos pero su primer paso fue el de encontrar un método conceptual preciso para describir los movimientos en general, incluso uno tan impredecible y caprichoso como el vuelo de un ave.

Galileo comprendió que un movimiento es más que su camino. El movimiento de un ave contiene, para cada instante, la posición del ave en ese instante; para registrarlo se necesita una película, más que una fotografía de exposición prolongada. Decimos que el movimiento es un "morfismo" (o "función") del tiempo al espacio.

El vuelo de un ave como morfismo del tiempo al espacio



Esquemáticamente:

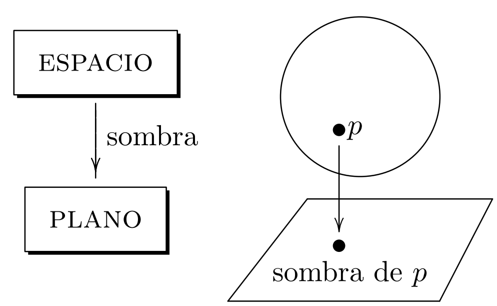
$$\text{TIEMPO} \xrightarrow{\text{vuelo del ave}} \text{ESPACIO}$$

Sin duda habrán oído la leyenda: Galileo dejó caer un objeto pesado y uno ligero desde la torre inclinada de Pisa sorprendiendo a los espectadores cuando los objetos tocaron el piso simultáneamente. Por ser tan especial, el estudio del movimiento vertical de objetos lanzados hacia arriba, lanzados hacia abajo o simplemente dejados caer, parecería no aportar mucho a la comprensión del movimiento en general. El camino de una roca que se dejó caer es, como todo niño bien sabe, una línea recta. Sin embargo, su movimiento no es tan simple; la roca se acelera al ir cayendo, de tal forma que los últimos metros los cae en menos tiempo que los primeros. ¿Por qué habría decidido Galileo concentrar su atención en esta cuestión particular sobre el movimiento vertical? La respuesta yace en una simple ecuación:

$$\text{ESPACIO} = \text{PLANO} \times \text{LÍNEA}$$

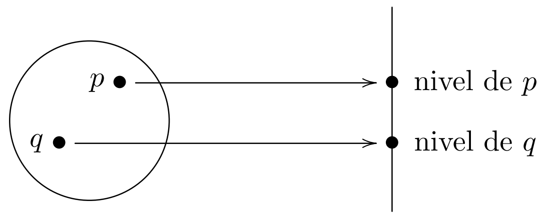
¡pero esto requiere de cierta explicación!

Ahora entran en escena dos morfismos nuevos. Imaginemos el sol cayendo de manera vertical; para cada punto en el espacio obtendremos un punto sombra en el plano horizontal:



Éste es el morfismo "sombra" del espacio al plano. La mejor manera de imaginar el segundo morfismo es pensar en una línea vertical, quizá un poste clavado en la tierra. Para cada punto en el espacio hay un punto correspondiente en la línea, al mismo nivel del punto en el espacio. Llamemos "nivel" este morfismo.

$$\begin{tikzcd} \text{ESPACIO} \arrow[r, "\text{nivel}"] & \text{LÍNEA} \end{tikzcd}$$



Si juntamos ambos morfismos, tenemos:

$$\begin{tikzcd} \text{ESPACIO} \arrow[r, "\text{nivel}"] \arrow[d, "\text{sombra}"] & \text{LÍNEA} \\ \text{PLANO} & \end{tikzcd}$$

Estos dos morfismos, "sombra" y "nivel", al parecer reducen cada problema sobre el espacio a dos problemas más simples, uno para el plano y otro para la línea. Por ejemplo, si un ave está en el espacio y conocemos sólo la sombra y el nivel del ave, podemos reconstruir su posición. Aún hay más: supongan que tenemos una película de la sombra del ave conforme ésta vuela y una película de su nivel —quizá había un observador de aves escalando un poste, manteniéndose siempre al nivel del ave, y nosotros lo filmamos. ¡A partir de estas dos películas podemos reconstruir el vuelo entero del ave! Así que no sólo una posición en el espacio se reduce a una posición en el plano y a una en la línea, sino también un movimiento en el espacio se reduce a un movimiento en el plano y a uno en la línea.

Pongamos ahora todas las piezas juntas. Del movimiento, o vuelo, de un ave

$$\begin{tikzcd} \text{TIEMPO} \arrow[rr, "\text{vuelo del ave}"] & & \text{ESPACIO} \end{tikzcd}$$

obtenemos dos movimientos más simples al "componer" el morfismo vuelo con los morfismos sombra y nivel. A partir de estos tres morfismos,

$$\begin{tikzcd} \text{TIEMPO} \arrow[dr, "\text{vuelo del ave}"] & & \\ & \text{ESPACIO} \arrow[r, "\text{nivel}"] \arrow[d, "\text{sombra}"] & \text{LÍNEA} \\ & \text{PLANO} & \end{tikzcd}$$

obtenemos estos dos morfismos

$$\begin{tikzcd} \boxed{\text{TIEMPO}} \arrow[r, "\text{nivel de vuelo del ave}"] \arrow[d, "\text{sombra de vuelo del ave}"] & \boxed{\text{LÍNEA}} \\ \boxed{\text{PLANO}} & \end{tikzcd}$$

y ahora el espacio ha desaparecido del mapa.

El descubrimiento de Galileo consiste en que a partir de estos dos movimientos más simples, en el plano y en la línea, se puede recapturar completamente el movimiento complicado en el espacio. De hecho, si los movimientos de la sombra y del nivel son "continuos", de tal forma que la sombra no desaparece súbitamente de un lugar y reaparece instantáneamente en otro, el movimiento del ave también será continuo. Este descubrimiento le permitió a Galileo reducir el estudio del movimiento a los casos especiales de movimiento horizontal y vertical. Sería una desviación describir aquí los hermosos experimentos que diseñó para estudiarlos, así como lo que descubrió, pero les recomiendo que lean acerca de ellos.

¿Parece razonable expresar esta relación del espacio al plano y la línea, dada por dos morfismos,

$$\begin{tikzcd} \boxed{\text{ESPACIO}} \arrow[r, "\text{nivel}"] \arrow[d, "\text{sombra}"] & \boxed{\text{LÍNEA}} \\ \boxed{\text{PLANO}} & \end{tikzcd}$$

por la ecuación ESPACIO = PLANO × LÍNEA? ¿Qué tienen que ver estos morfismos con la multiplicación? Sería útil considerar otros ejemplos.

3. Otros ejemplos de multiplicación de objetos

La multiplicación aparece con frecuencia bajo el disfraz de *elecciones independientes*. He aquí un ejemplo. Algunos restaurantes tienen una lista de opciones para primer platillo y otra para platillo principal; una "comida" comprende un platillo de cada lista. Primeros platillos: sopa, pasta, ensalada. Platillos principales: res, ternera, pollo, pescado.

Así que una "comida" posible es: "sopa, después pollo"; pero "ternera, después res" no está permitido. He aquí un diagrama de las comidas posibles:

Comidas

sopa, res	pasta, res	
sopa, ternera		
sopa, pollo		
sopa, pescado		

$\longrightarrow$ Principal

res
ternera
pollo
pescado

$\downarrow$

sopa	pasta	ensalada

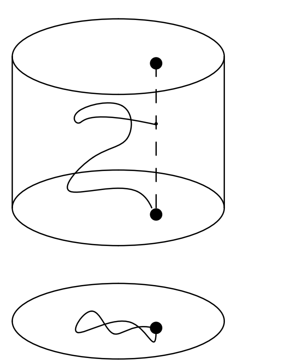
1^{er} platillo

(Encuentren ustedes mismos las demás comidas.) Noten la analogía con el diagrama de Galileo:

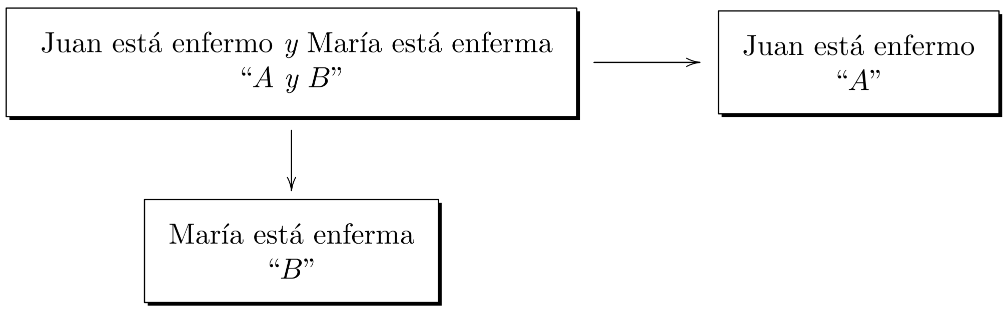
$$\begin{tikzcd} \boxed{\text{COMIDAS}} \arrow[r] \arrow[d] & \boxed{\text{PRINCIPAL}} \\ \boxed{1^{er}\ \text{PLATO}} & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \boxed{\text{ESPACIO}} \arrow[r] \arrow[d] & \boxed{\text{LÍNEA}} \\ \boxed{\text{PLANO}} & \end{tikzcd}$$

Este esquema con tres "objetos" y dos "morfismos" o "procesos" es la representación correcta de la multiplicación de objetos y se aplica a una variedad sorprendente de situaciones. La idea de multiplicación es la misma en todos los casos. Tomemos por ejemplo un segmento y un disco en geometría. También los podemos multiplicar y el resultado es un cilindro. No me refiero al hecho de que el *volumen* del cilindro se obtenga multiplicando el área del disco por la longitud del segmento. El cilindro *en sí* es el producto, segmento multiplicado por disco, porque nuevamente hay dos procesos o proyecciones que nos llevan del cilindro al segmento y al disco, de forma completamente análoga a la de los ejemplos anteriores.

Cada punto en el cilindro tiene un correspondiente punto "nivel" en el segmento y un correspondiente punto "sombra" en el disco, y si conocemos los puntos sombra y nivel, podemos encontrar el punto en el cilindro al cual corresponden. Al igual que antes, el movimiento de una mosca atrapada en el cilindro está determinado por el movimiento de su punto nivel en el segmento y por el movimiento de su punto sombra en el disco.



Un ejemplo tomado de la lógica sugiere que hay una conexión entre la multiplicación y la palabra "*y*". Desde un enunciado de la forma "A *y* B" (por ejemplo, "Juan está enfermo *y* María está enferma") podemos deducir A y podemos deducir B:



Pero más que eso: deducir el enunciado "Juan está enfermo y María está enferma" de alguna otra oración C es lo mismo que deducir de C cada una de las oraciones. En otras palabras, las dos deducciones

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r] \arrow[d] & A \\ B & \end{tikzcd}$$

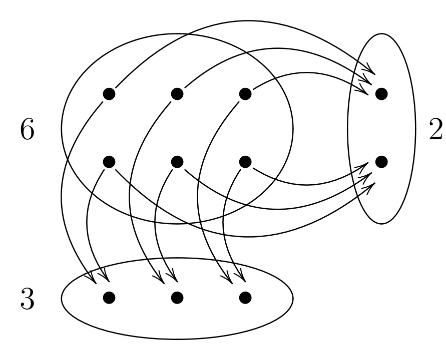
vienen a ser lo mismo que una deducción $C \longrightarrow (A \ y \ B)$. Comparen este diagrama

$$\begin{tikzcd} C \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right] & & \\ & A \ y \ B \arrow[r] \arrow[d] & A \\ & B & \end{tikzcd}$$

con el diagrama de la idea de Galileo.

Una última ilustración, quizá la más simple de todas, alude a la relación con la multiplicación de números:

$$\begin{tikzcd} 6 \arrow[r, "\text{nivel}"] \arrow[d, "\text{sombra}"'] & 2 \\ 3 & \end{tikzcd}$$



¿Por qué $3 \times 2 = 6$?

Espero que estas últimas ilustraciones les parezcan sugestivas. Nuestro propósito es aprender a usarlas como instrumentos de precisión de entendimiento y razonamiento, no simplemente como guías intuitivas.

Ejercicio 1
Encuentre otros ejemplos en los que de la combinación de dos objetos se obtenga un tercero. ¿Cuáles de estos parecen adecuarse a nuestro modelo? Es decir, ¿para cuáles de ellos el tercer objeto al parecer tiene "morfismos" a los otros dos objetos con los que se comenzó? Sería útil empezar pensando en problemas de la vida real para los cuales es necesario multiplicar números para obtener la solución, pero no todos los ejemplos están relacionados con la multiplicación de números.

Ejercicio 2
La parte del trabajo de Galileo que discutimos concierne realmente a sólo una pequeña porción del espacio, digamos la vecindad inmediata de la torre de Pisa. Como el suelo podría ser irregular, ¿qué querría decir que dos puntos estén al mismo nivel? Traten de describir un experimento para decidir si dos puntos que estén próximos el uno al otro están al mismo nivel, sin usar altura (la distancia desde un plano imaginario de referencia). Traten de usar las herramientas más elementales posibles.

PARTE I

La categoría de conjuntos

Un *morfismo* de conjuntos es un proceso para ir de un conjunto a otro. Investigamos la *composición* de morfismos (seguir un proceso de un segundo proceso) y encontramos que el álgebra de la composición de morfismos se parece al álgebra de la multiplicación de números, pero su interpretación es mucho más rica.

ARTÍCULO I

Conjuntos, morfismos y composición

Un primer ejemplo de una categoría

Antes de dar una definición precisa de “categoría” debemos familiarizarnos con un ejemplo, la **categoría de conjuntos finitos y morfismos**.

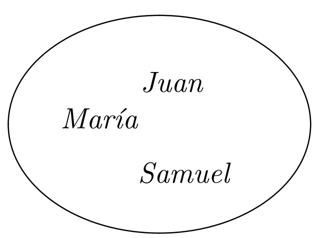
Un $\boxed{\text{o b j e t o}}$ en esta categoría es un *conjunto* finito (o una *colección* finita). He aquí algunos ejemplos:

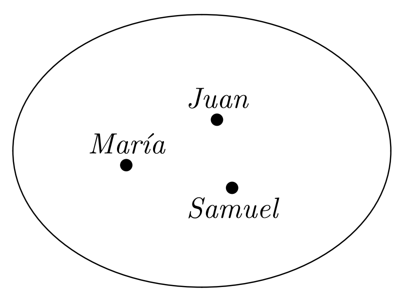
(el conjunto de todos los estudiantes en la clase) es un objeto,
(el conjunto de todos los escritorios en la clase) es otro objeto,
(el conjunto de todas las veintisiete letras de nuestro alfabeto) es otro.

Probablemente usted esté familiarizado con algunas de las notaciones para conjuntos finitos:

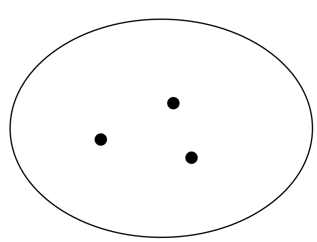
$$\{\textit{Juan, María, Samuel}\}$$

es un nombre para el conjunto cuyos tres elementos son, por supuesto, Juan, María y Samuel. (Usted también conoce algunos conjuntos infinitos, por ejemplo, el conjunto de los números naturales: $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.) Normalmente, debido a que el orden en el cual los elementos se listan es irrelevante, es más útil representarlos dispersos:





donde cada punto representa uno de los elementos, de tal manera que está uno en libertad de omitir las etiquetas cuando por una razón u otra éstas sean temporalmente irrelevantes para la discusión, y representar este conjunto por:



Una representación tal, etiquetada o no, se llama *diagrama interno* del conjunto.

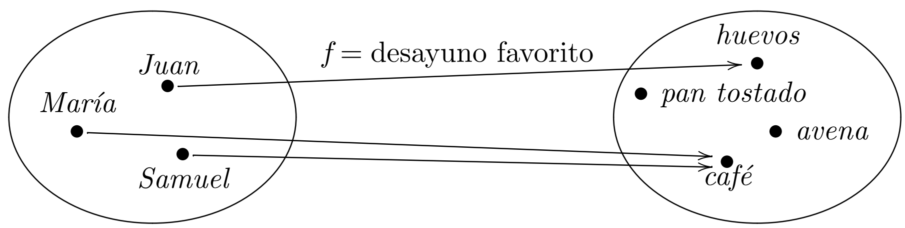
Un $\boxed{\text{m o r f i s m o}}$ f en esta categoría consiste de tres cosas:

(1) un conjunto A, llamado el *dominio* del morfismo,
(2) un conjunto B, llamado el *codominio* del morfismo,
(3) una regla que le asigna a cada elemento a en el dominio, un elemento b en el codominio. Esta b se denota por $f \circ a$ (o en algunas ocasiones "$f(a)$"), y se lee "f de a".

(Otras palabras para el término morfismo son: "función", "transformación", "operador", "flecha" y "mapeo".)

Un ejemplo probablemente lo hará más claro:

Sea A={*Juan, María, Samuel*}, sea B={*huevos, avena, pan tostado, café*} y sea f tal que a cada persona le asigna su desayuno favorito. He aquí una ilustración de la situación, la cual se llama el *diagrama interno* del morfismo:

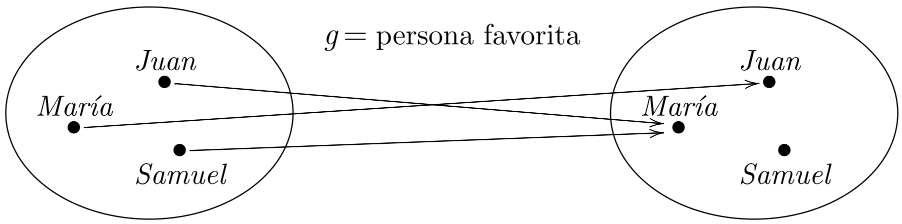


Esto indica que el desayuno favorito de Juan es huevos, que se escribe $f(\mathit{Juan}) = \mathit{huevos}$, mientras que María y Samuel prefieren café. Nótense algunas peculiaridades de la situación, porque estas son características del diagrama interno de cualquier morfismo:

(a) De cada punto en el *dominio* (aquí {*Juan, María, Samuel*}), sale exactamente una flecha.
(b) A cada punto en el *codominio* (aquí {*huevos, avena, pan tostado, café*}), puede llegar cualquier número de flechas: cero o una o más.

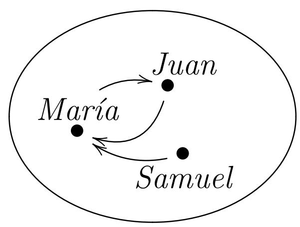
Lo importante es: por cada punto en el dominio, tenemos exactamente una flecha que sale de él, y esta flecha llega a algún punto en el codominio.

Nada en la discusión previa excluye la posibilidad de que A y B, el dominio y el codominio del morfismo, sean el *mismo* conjunto. He aquí un diagrama interno para un tal morfismo:

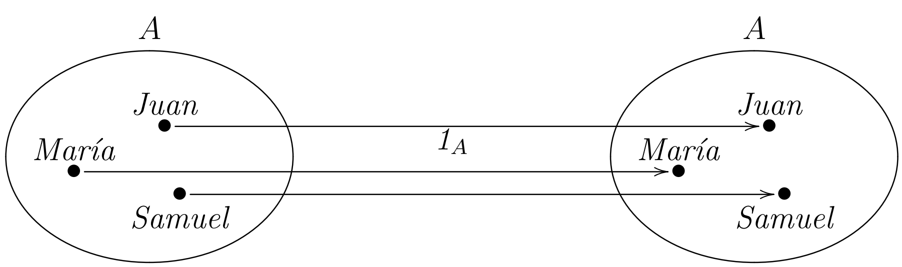


(Muchas tramas de las películas de los años cincuentas están basadas en este diagrama.)

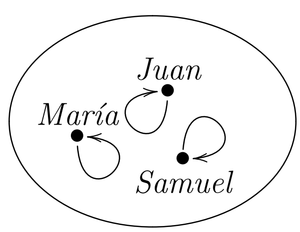
Un morfismo para el que el dominio y el codominio son el mismo objeto se llama *endomorfismo*. (¿Por qué? ¿Qué significa el prefijo "endo"?) *Sólo* para los endomorfismos hay una forma alternativa de diagrama interno. Hela aquí para el endomorfismo del ejemplo anterior:



Para cada objeto A hay un endomorfismo especial, particularmente simple, que tiene A al mismo tiempo como dominio y como codominio. Helo aquí para el caso de nuestro ejemplo:



He aquí el diagrama interno especial correspondiente, disponible porque el morfismo es un endomorfismo:



Un morfismo como éste, en el que el dominio y el codominio son el mismo conjunto A, *y* para cada a en A, $f(a)=a$, se llama

$$\boxed{\text{morfismo identidad.}}$$

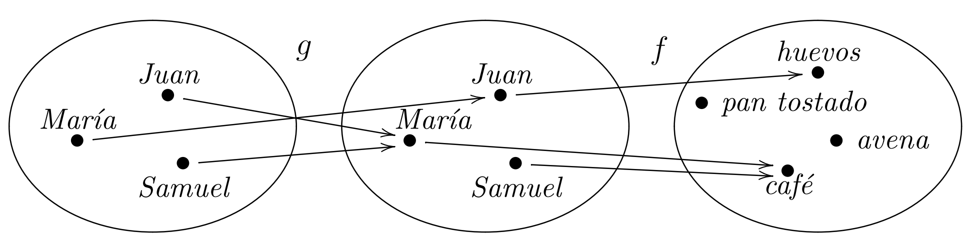
Para decirlo de manera más precisa, este morfismo es "el morfismo identidad de {*Juan, María, Samuel*} a {*Juan, María, Samuel*}", o "el morfismo identidad en el objeto {*Juan, María, Samuel*}". (Aún más simple es darle a ese objeto un nombre más corto, $A = \{$*Juan, María, Samuel*$\}$; y llamar entonces a nuestro morfismo "el morfismo identidad en A", o simplemente "1_A".)

En ocasiones necesitaremos un esquema para mantener a la vista el dominio y el codominio, sin indicar en la ilustración todos los detalles del morfismo. De esta forma podremos usar simplemente una letra para denotar cada objeto y una sola flecha para cada morfismo. He aquí los *diagramas externos* correspondientes a los últimos cinco diagramas internos:

$$A \xrightarrow{f} B$$
$$A \xrightarrow{g} A$$
$$\begin{tikzcd} A \arrow[loop above, "g"] \end{tikzcd}$$
$$A \xrightarrow{1_A} A$$
$$\begin{tikzcd} A \arrow[loop above, "1_A"] \end{tikzcd}$$

Los diagramas externos son particularmente útiles cuando se discuten *varios* objetos y morfismos, o cuando algunos de los detalles particulares de los morfismos son temporalmente irrelevantes.

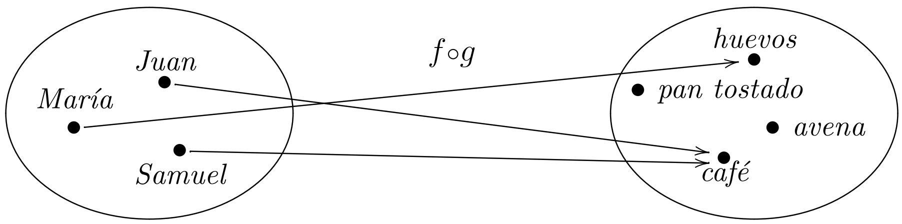
El último ingrediente básico, que le da todo el dinamismo a la noción de categoría, es la $\boxed{\text{composición de morfismos,}}$ a través de la cual dos morfismos se combinan para dar lugar a un tercero. He aquí un ejemplo:



O, en el diagrama *externo*:

$$A \xrightarrow{g} A \xrightarrow{f} B$$

Si preguntáramos: "¿Qué le debe servir de desayuno cada quien a su persona favorita?", tendríamos que dar respuestas como ésta: "A Juan le gusta María y María prefiere café, así que Juan debe servirle café.” De la misma manera, calculando los otros dos casos, obtenemos: “A María le gusta Juan y a Juan le gustan los huevos, así que María debe servir huevos; a Samuel le gusta María y a María le gusta el café, así que Samuel debe servir café”. En ilustraciones:



O, en el diagrama externo:

$$A \xrightarrow{f \circ g} B$$

“$f \circ g$” se lee “*f tras g*”, o algunas veces “f de g”, como en: “El desayuno favorito de la persona favorita de Juan es café”, por “$f \circ g \circ Juan$ = *café*”. En resumen, si tenemos dos morfismos f y g, y el dominio de f es el mismo objeto que el codominio de g, en ilustraciones:

$$X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} Z$$

entonces podemos construir a partir de ellos un solo morfismo

$$X \xrightarrow{f \circ g} Z$$

Pronto consideraremos una analogía entre la *composición de morfismos* y la multiplicación de números. Esta analogía no debe confundirse con la analogía de la sesión 1, entre la *multiplicación de objetos* y la multiplicación de números.

¡Eso es todo! Estos son todos los ingredientes básicos que necesitamos para obtener una CATEGORÍA (o un “universo matemático”):

Información para una categoría:

Objetos: $A, B, C, \ldots$

Morfismos: $A \xrightarrow{\quad f \quad} B\ , \ldots$

Morfismos identidad: $A \xrightarrow{\quad 1_A \quad} A\ , \ldots$
(uno por cada objeto)

Composición de morfismos: asigna a cada par de morfismos del tipo $A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{f} C$ otro morfismo llamado "f tras g",
$A \xrightarrow{\quad f \circ g \quad} C$

Ahora viene un aspecto importante, incluso crucial. La información debe estar acomodada adecuadamente, de la siguiente manera.

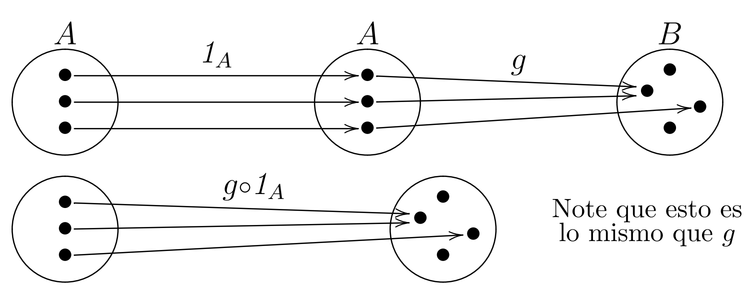
Reglas para una categoría:

1. Las **leyes para la identidad:**
   (a) Si $A \xrightarrow{\quad 1_A \quad} A \xrightarrow{\quad g \quad} B$
   entonces $A \xrightarrow{\quad g \circ 1_A = g \quad} B$
   (b) Si $A \xrightarrow{\quad f \quad} B \xrightarrow{\quad 1_B \quad} B$
   entonces $A \xrightarrow{\quad 1_B \circ f = f \quad} B$
2. La **ley asociativa:**
   Si $A \xrightarrow{\quad f \quad} B \xrightarrow{\quad g \quad} C \xrightarrow{\quad h \quad} D$
   entonces $A \xrightarrow{\quad h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \quad} D$

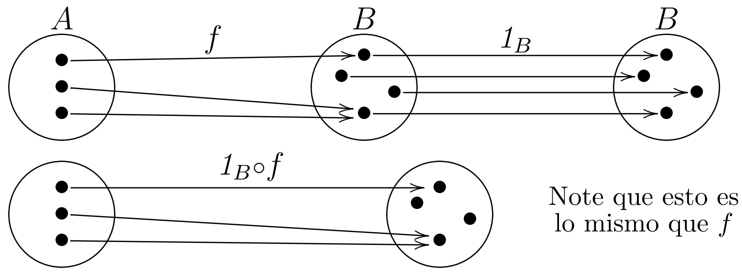
He aquí algunas ilustraciones para mostrar estas propiedades en la categoría de conjuntos:

1. Las leyes para la identidad:

(a)

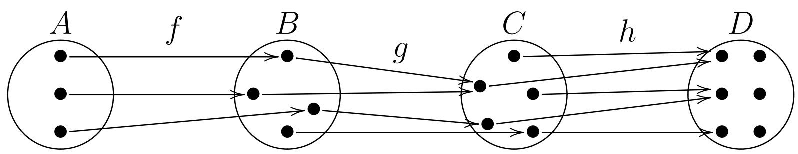


(b)

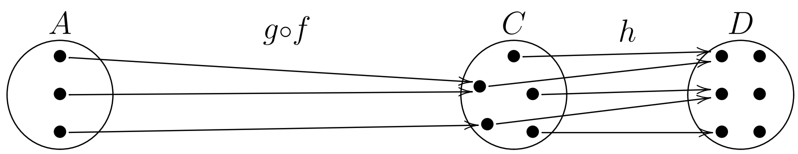


2. La ley asociativa:

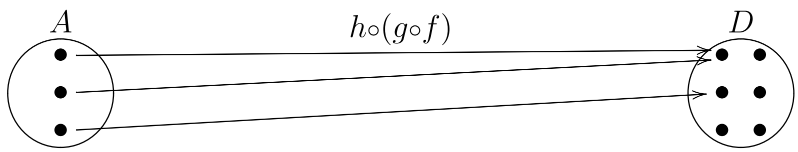
(i)



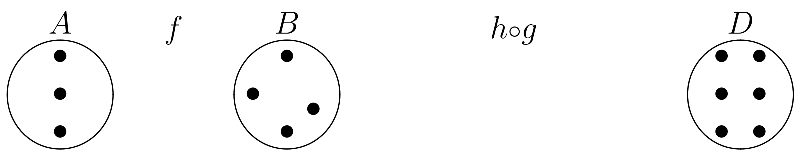
(ii)



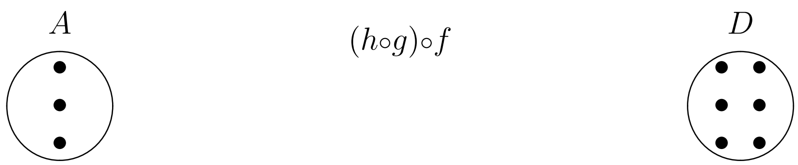
(iii)



(iv)



(v)



Ejercicio 1
Asegúrese de entender cómo se obtuvieron los diagramas (ii) y (iii) a partir del diagrama dado (i). Luego, empezando una vez más desde (i), llene (iv) y (v) usted mismo. Luego observe que (v) y (iii) son iguales.

¿Es esto un accidente u ocurrirá para cualesquiera tres morfismos seguidos? ¿Podría dar una explicación sencilla de por qué los resultados

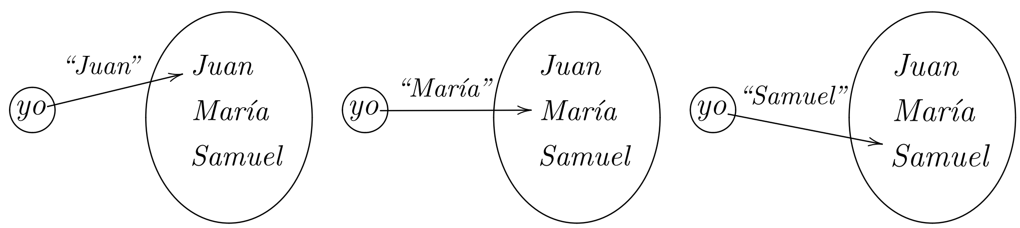
$$h \circ (g \circ f) \quad \text{y} \quad (h \circ g) \circ f$$

serán siempre iguales, cuando sea que tengamos tres morfismos seguidos

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} W \ ?$$

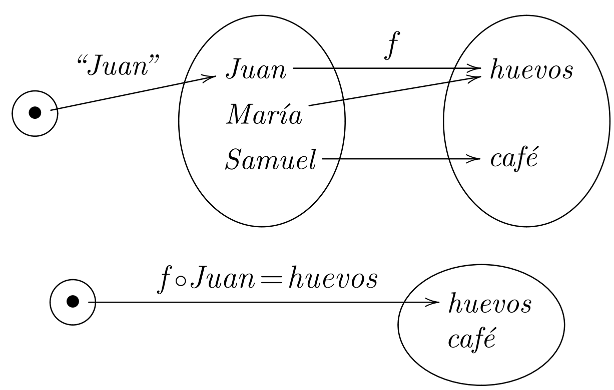
¿Qué podría decir acerca de *cuatro* morfismos seguidos?

Una variedad muy útil de conjuntos son los conjuntos “singulete”, los conjuntos con exactamente un elemento. Fijemos uno de éstos, digamos *yo*, y llamémoslo “**1**”. Veamos en qué consisten los morfismos de **1** al conjunto {*Juan, María, Samuel*}. Hay exactamente tres de estos morfismos:



Definición: *Un* **punto** *de un conjunto X es un morfismo* $\mathbf{1} \longrightarrow X$.

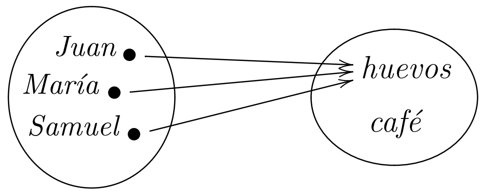
(Si A es algún conjunto conocido, un morfismo de A a X se llama un “A-elemento” de X; así que los “**1**-elementos” son puntos.) Como un punto es un morfismo, lo podemos componer con otro morfismo y obtener un punto nuevo. He aquí un ejemplo:



La ecuación $f \circ Juan = huevos$ se lee “f tras *Juan* es *huevos*” o más brevemente, “f de *Juan* es *huevos*” (o algunas veces “f manda a *Juan* a *huevos*”).

Hay aquí algunos ejercicios que le ayudarán a familiarizarse con la categoría de los conjuntos finitos. *En todos tome* $A = \{$*Juan, María, Samuel*$\}$, $B = \{$*huevos, café*$\}$.

Ejercicio 2
¿Cuántos morfismos distintos hay que tengan dominio A y codominio B? Un ejemplo es



pero hay muchos otros: ¿Cuántos en total?

Ejercicio 3
Lo mismo pero para morfismos $A \xrightarrow{f} A$.

Ejercicio 4
Lo mismo pero para morfismos $B \xrightarrow{f} A$.

Ejercicio 5
Lo mismo pero para morfismos $B \xrightarrow{f} B$.

Ejercicio 6
¿Cuántos morfismos $A \xrightarrow{f} A$ satisfacen $f \circ f = f$?

Ejercicio 7
¿Cuántos morfismos $B \xrightarrow{g} B$ satisfacen $g \circ g = g$?

Ejercicio 8
¿Puede hallar un par de morfismos $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} A$ para los que $g \circ f = \mathit{1}_A$? En caso afirmativo, ¿cuántos?

Ejercicio 9
¿Puede hallar un par de morfismos $B \xrightarrow{h} A \xrightarrow{k} B$ para los cuales $k \circ h = \mathit{1}_B$? En caso afirmativo, ¿cuántos?

1. Guía

Nuestra discusión sobre morfismos de conjuntos nos ha llevado a la definición general de *categoría*, la cual se presenta a continuación para referencias futuras. Este material se repasa en las sesiones 2 y 3.

RESUMEN

Definición de CATEGORÍA

Una categoría consiste de la INFORMACIÓN: | **... con notación respectiva**

(1) OBJETOS — $A, B, C, \ldots$

(2) MORFISMOS — $f, g, h, \ldots$

(3) Para cada morfismo f, un objeto como DOMINIO de f y un objeto como CODOMINIO de f.

Para indicar que f es un morfismo con dominio A y codominio B, escribimos $A \xrightarrow{f} B$ (o $f{:}A \to B$) y decimos que "f es un morfismo de A a B".

(4) Para cada objeto A un MORFISMO IDENTIDAD, el cual tiene dominio A y codominio A.

Denotamos este morfismo por 1_A, de tal forma que $A \xrightarrow{1_A} A$ es uno de los morfismos de A en A.

(5) Para cada par de morfismos $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ un MORFISMO COMPUESTO $A \xrightarrow{g \text{ tras f}} C$.

Denotamos este morfismo por $A \xrightarrow{g \circ f} C$ (y a veces decimos "g de f").

Sujeta a las siguientes REGLAS:

Esta notación se utiliza en los siguientes diagramas externos que ilustran las reglas

(i) LEYES PARA LA IDENTIDAD: Si $A \xrightarrow{f} B$ entonces $1_B \circ f = f$ y $f \circ 1_A = f$.

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, "1_B"] & \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "1_B \circ f = f"'] & & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & A \arrow[dr, "f"] & \\ A \arrow[ur, "1_A"] \arrow[rr, "f \circ 1_A = f"'] & & B \end{tikzcd}$$

(ii) LEY ASOCIATIVA: Si $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$, entonces $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rrr, bend left=40, "(h \circ g) \circ f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] \arrow[rrr, bend right=40, "h \circ (g \circ f)"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend left, "h \circ g"] & C \arrow[r, "h"] & D \end{tikzcd}$$

La ley asociativa nos permite omitir los paréntesis y escribir simplemente "$h \circ g \circ f$", lo cual leemos como "h tras g tras f".

En los incisos (4) y (5) están escondidas las reglas de CONTABILIDAD. Explícitamente, éstas son:

· el dominio y codominio de 1_A son ambos A;

· $g \circ f$ sólo está definida si el dominio de g es el codominio de f;

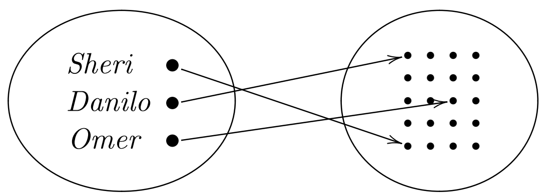
· el dominio de $g \circ f$ es el dominio de f y el codominio de $g \circ f$ es el codominio de g.

Sesión 2

Conjuntos, morfismos y composición

1. Repaso del artículo I

Antes de discutir algunos de los ejercicios del artículo I, hagamos un breve repaso. Un **conjunto** es cualquier colección de cosas. Ustedes conocen ejemplos de conjuntos infinitos, como el conjunto de todos los números naturales, $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, pero la mayoría de nuestros ejemplos serán conjuntos finitos. He aquí un típico **diagrama interno** de una **función** (o **morfismo**):



Elección de asientos

Otras palabras que significan lo mismo que *función* y *morfismo* son **transformación, operador, mapeo** y **funcional**; la idea es tan importante que ha sido redescubierta y renombrada en muchos contextos distintos.

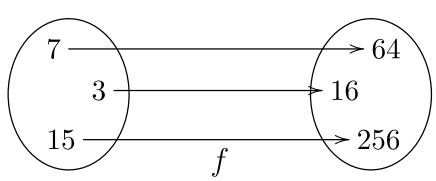
Como lo sugiere el diagrama interno, tener un **morfismo** f **de conjuntos** involucra tres cosas:

(1) un conjunto A, llamado el **dominio** del morfismo f;
(2) un conjunto B, llamado el **codominio** del morfismo f;

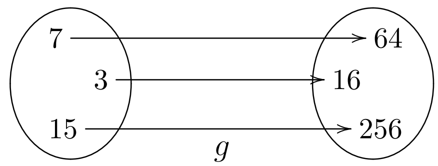
y ahora el ingrediente principal:

(3) una **regla** (o proceso) para f, que le asigna a cada elemento del dominio A exactamente un elemento del codominio B.

Ésa es una descripción bastante precisa de lo que es un morfismo, pero también necesitamos decidir cuándo dos reglas distintas dan el mismo morfismo. He aquí un ejemplo. El primer morfismo será llamado f y tiene como dominio y codominio el conjunto de todos los números naturales. La regla para f será: *"sumar* 1 *y después elevar al cuadrado"*. (Esto puede escribirse en notación abreviada como $f(x) = (x+1)^2$, pero eso no es importante para esta discusión.) Una parte del diagrama interno de f es:



El segundo morfismo se llamará g. Para el dominio y codominio de g tomamos otra vez el conjunto de todos los números naturales, pero la regla para g será: *"elevar la entrada al cuadrado, duplicar la entrada, sumar los dos resultados y después sumar 1"*, una regla ciertamente distinta. No obstante, una parte del diagrama interno de g es:



el mismo que el de f. No sólo eso, ustedes pueden verificarlo con cualquier número que deseen y siempre obtendrán el mismo resultado con la regla para f que con la regla para g. Debido a que las dos reglas producen el mismo resultado para cada entrada (y los dominios son iguales y los codominios son iguales), decimos que f y g son el *mismo morfismo* y escribimos esto como $f = g$. (¿Saben cómo es la fórmula codificada para la regla de g? Correcto, $g(x) = x^2 + 2x + 1$.) Lo que dice la ecuación $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ es precisamente que $f = g$, no que las dos reglas son la misma regla (lo que obviamente no son; en particular, una de ellas tiene más pasos que la otra). La idea es que una función, o morfismo de conjuntos, no es la regla en sí, sino lo que ésta lleva a cabo. Los dibujos o diagramas internos reflejan muy bien este aspecto.

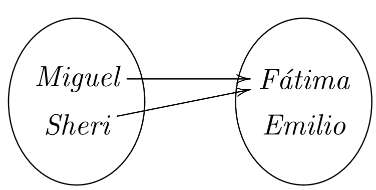
En otras categorías que no son la categoría de conjuntos, "un morfismo de A a B" es típicamente un "proceso para ir de A a B", así que, en una categoría cualquiera, los morfismos f y g no son considerados como lo mismo si no satisfacen *al menos*:

(1) f y g tienen el mismo dominio, digamos A, y
(2) f y g tienen el mismo codominio, digamos B.

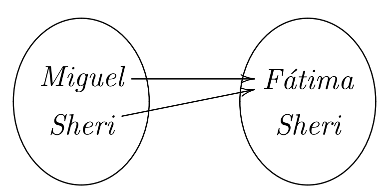
Casi siempre hay muchos morfismos diferentes de A a B, así que estas dos propiedades por sí solas no garantizan que f y g sean el mismo morfismo. Si recordamos que un punto de un conjunto A es un morfismo de un conjunto singulete $\mathbf{1}$ en A, vemos que hay una sencilla **prueba para la igualdad de morfismos entre conjuntos** $A \xrightarrow{f} B$ y $A \xrightarrow{g} B$:

$$\text{Si para cada } \textit{punto } \mathbf{1} \xrightarrow{a} A,\ f \circ a = g \circ a, \text{ entonces } f = g.$$

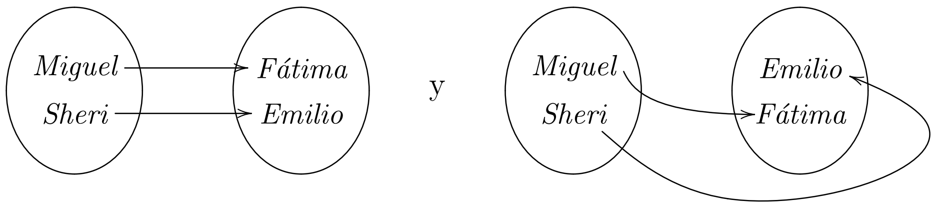
(Noten que $f \circ a$ y $g \circ a$ son puntos de B.) Brevemente, "morfismos de conjuntos que coinciden en los puntos son iguales". Al hacer los ejercicios deben recordar que los dos morfismos



y



no son el mismo a pesar de tener la misma regla ("A Miguel le simpatiza Fátima y a Sheri le simpatiza Fátima"), porque tienen diferentes codominios; pero los morfismos



son el mismo, a pesar de que sus diagramas no se parecen del todo.

Deben recordar también que la composición de dos morfismos como ésta:

$$A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{f} C$$

se llama "$f \circ g$", ¡en el orden opuesto! Esto se debe a una decisión que tomaron nuestros bisabuelos. Ellos escribieron "el morfismo f manda la flor a Fátima" como

$$f(\textit{la flor}) = \textit{Fátima}$$

(que se lee: "f **de** *la flor* es *Fátima*"). Una mejor elección hubiera sido:

$$(\textit{la flor})\, f = \textit{Fátima}$$

Vamos a ver cómo la notación "$f(\textit{la flor}) = \textit{Fátima}$" dio lugar a la convención de escribir "$f \circ g$" para el morfismo compuesto "primero g, después f". Imaginen que escribiéramos la composición como gf. Obtendríamos entonces

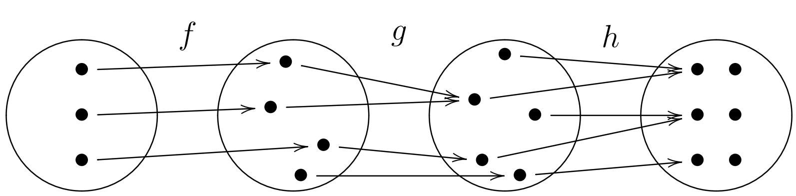
$$(gf)(Juan) = f(g(Juan))$$

lo cual es demasiado complicado. Con la convención actual, obtenemos

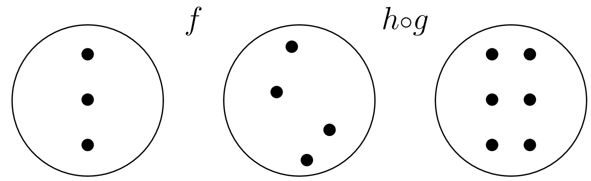
$$(f \circ g)(Juan) = f(g(Juan))$$

que es más fácil de recordar. Así que, para no confundirnos entre el orden de "$f \circ g$" y el orden en el diagrama (que es el orden en el cual se aplican las reglas), deben acostumbrarse a leer "$f \circ g$" como "f **tras** g".

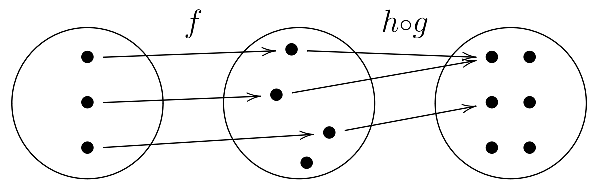
El primer ejercicio en el artículo I consistía en usar diagramas internos para verificar la ley asociativa para la composición de morfismos:



Un primer paso es completar la figura



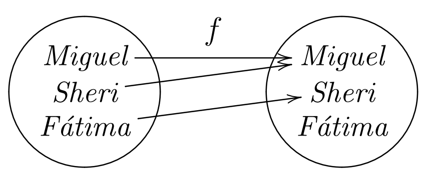
lo cual Chad ha hecho de esta manera:



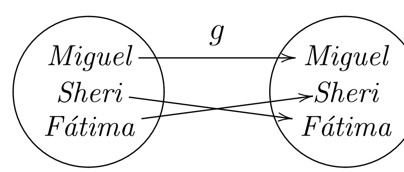
¿Es correcto esto? No del todo, porque debemos dibujar dos morfismos y el dibujo para $h \circ g$ no es un morfismo; a uno de los puntos del dominio de $h \circ g$ nada le ha sido asignado. Esta deficiencia no tendrá importancia en el siguiente paso, porque de cualquier manera la información se va a perder, pero pertenece a este paso y es incorrecto omitirla. El problema de Chad fue que, al dibujar $h \circ g$, notó que la última flecha sería irrelevante para la composición $(h \circ g) \circ f$, así que la omitió.

CHAD: Parece que el principio es como en la multiplicación, en donde no importa el orden en el cual lleve a cabo uno las operaciones; la respuesta es siempre la misma.

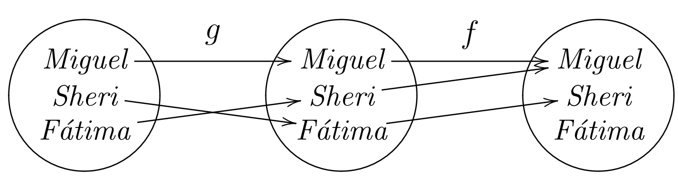
Me alegra que menciones el orden. Es cierto que la ley asociativa dice que dos *actos*, el de preceder por h y el de seguir por f, pueden ser llevados a cabo en cualquier orden; pero uno debe recordar que el orden de los *factores* sí importa. Consideren los dos morfismos:

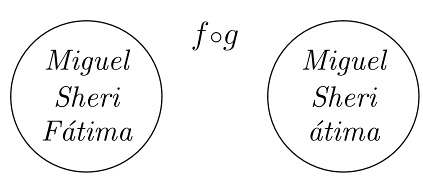


y

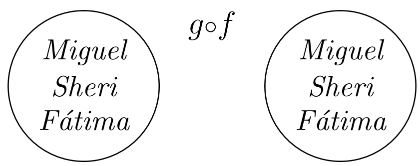


Completen el diagrama de $f \circ g$ y vean lo que obtienen:





Ahora efectúen la composición siguiendo el orden opuesto:



Los dos resultados son diferentes. En la composición de morfismos el orden es importante.

Cuando era pequeño tenía una familia grande y en las familias grandes siempre hay muchas cosas que hacer. Así que mi madre le decía a alguno de nosotros: "¿No te gustaría enjabonar los platos?" Pero conforme crecimos, dos o más quehaceres se convertían en uno, de tal forma que mi madre decía: "¿No te gustaría enjabonar y después enjuagar los platos?" o: "¿enjabonar y enjuagar y después secar y guardar los platos?" Y el orden no se puede cambiar. Harán un lío si tratan de secar antes de enjuagar. La "ley asociativa para los quehaceres" dice que los dos quehaceres:

(enjabonar y después enjuagar) y después (secar y después guardar)

y

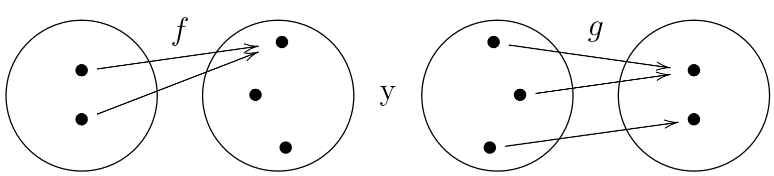
enjabonar y después [(enjuagar y después secar) y después guardar]

dan el mismo resultado. Todo lo que importa es el orden, no cuándo se toman un descanso. Todos los paréntesis son innecesarios; la tarea compuesta es:

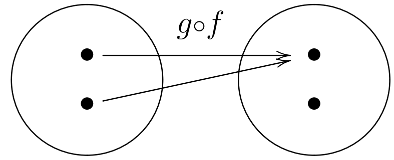
enjabonar y después enjuagar y después secar y después guardar

Piensen acerca de esto y vean si les sugiere una explicación para la ley asociativa. Después vuelvan a mirar los diagramas para ver si pueden dibujar *directamente* el diagrama de la composición de varios morfismos sin hacerlo "de dos en dos".

Varios estudiantes han preguntado por qué algunas flechas desaparecen cuando componen dos morfismos, esto es, cuando pasan de los diagramas



al diagrama de "g tras f"



Para entender esto deben darse cuenta de que el morfismo compuesto, como cada morfismo, tiene un dominio, un codominio, y una regla. El resultado de pegar los dos diagramas es sólo una de entre muchas de las maneras de calcular g tras f: "¡siguan las flechas!" El dibujo, al borrar los detalles superfluos (como las flechas extra), produce una regla diferente pero más simple para definir el mismo morfismo.

Para ilustrar que el morfismo compuesto lleva menos información que los factores, supongamos que llevan cargando a un bebé dormido para dar una breve caminata por la ciudad, caminando primero bajo el sol ardiente, después a través de la sombra refrescante en el parque y después nuevamente bajo el sol.

$$\begin{tikzcd}
 & \text{Ciudad de Oaxaca} \arrow[dr, "t\,=\,\text{temperatura}"] & \\
\text{Intervalo de tiempo} \arrow[ur, "w\,=\,\text{su caminata}"] \arrow[rr, "t\circ w"', "\text{la experiencia del bebé}"'] & & \text{Línea de temperatura}
\end{tikzcd}$$

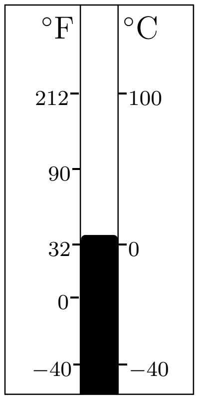
El morfismo w le asigna a cada instante la ubicación de ustedes en ese momento y el morfismo t le asigna a cada lugar en Oaxaca su temperatura. (La "línea de temperatura" tiene como puntos temperaturas físicas, en lugar de números que midan la temperatura en alguna escala; un bebé es afectado por la temperatura antes de aprender ya sea Fahrenheit o Celsius.) El bebé tuvo calor, después frío, después nuevamente calor, pero no conoce los dos morfismos cuya composición resulta en este morfismo.

2. Un ejemplo de reglas diferentes para un morfismo

La medición de la temperatura nos brinda un buen ejemplo de reglas diferentes para un morfismo numérico. Si observamos un termómetro que tenga las dos escalas, Celsius y Fahrenheit, vemos que hay un morfismo,

$$\text{Números} \xrightarrow{\text{paso de Fahrenheit a Celsius}} \text{Números}$$

que manda la medición en grados Fahrenheit de una temperatura a la medición en grados Celsius de esa misma temperatura. En otras palabras, éste es el morfismo que encaja en el diagrama



$$\begin{tikzcd} & \text{Temperatura} \arrow[dl, "{^\circ}\mathrm{F}"'] \arrow[dr, "{^\circ}\mathrm{C}"] & \\ \text{Números} \arrow[rr, "\text{Paso de }{^\circ}\text{F a }{^\circ}\text{C}"'] & & \text{Números} \end{tikzcd}$$

¿Cómo se calcula este morfismo? Pues bien, hay varias *reglas* posibles. Una de ellas es: "restar 32, después multiplicar por 5/9". Otra regla es: "sumar 40, multiplicar por 5/9 y luego restar 40". Noten que cada una de estas reglas es ella misma una composición de morfismos, de tal forma que podemos dibujar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & \text{Números} \arrow[dr, "\times 5/9"] & \\ \text{Números} \arrow[ur, "-32"] \arrow[rr, "\text{Paso de }{^\circ}\text{F a }{^\circ}\text{C}"'] \arrow[d, "+40"'] & & \text{Números} \\ \text{Números} \arrow[rr, "\times 5/9"'] & & \text{Números} \arrow[u, "-40"'] \end{tikzcd}$$

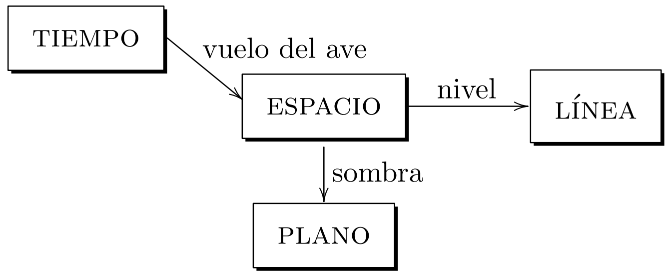
El ejemplo anterior muestra que un morfismo particular puede surgir de diversas maneras como la composición de otros morfismos.

3. Diagramas externos

Pegar un diagrama con otro para calcular la composición de morfismos es conveniente porque de él pueden leer lo que hace f, lo que hace g y también lo que hace el morfismo compuesto $g{\circ}f$, mucha más información que la contenida solamente en $g{\circ}f$. De hecho, los diagramas internos no siempre son dibujados. Usamos diagramas esquemáticos como aquellos de nuestro ejemplo de la "temperatura", o como

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, "g"] & \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "g \circ f"'] & & C \end{tikzcd}$$

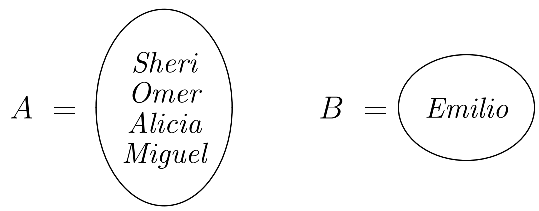
Éstos se llaman **diagramas externos** pues no muestran lo que ocurre adentro. Encontramos un diagrama externo en la sesión 1 cuando discutíamos las ideas de Galileo:



4. Problemas acerca del número de morfismos de un conjunto a otro

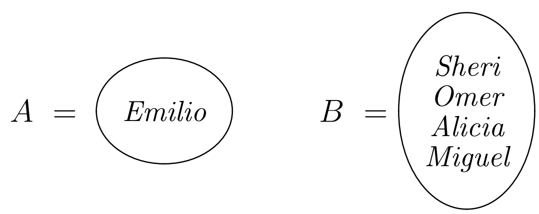
Resolvamos ahora algunos problemas que no fueron incluídos en el artículo I. ¿Cuántos morfismos hay del conjunto A al conjunto B en los siguientes ejemplos?

(1)



Respuesta: Exactamente un morfismo; todos los elementos de A van a *Emilio*.

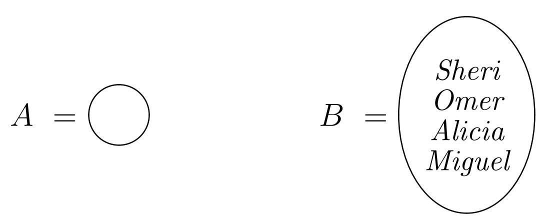
(2)



Respuesta: Hay cuatro morfismos porque todo lo que hace un morfismo es decir a dónde va Emilio y hay cuatro opciones para esto.

Ahora bien, el conjunto A es... ¿Qué debo decir? ¡Ah! El conjunto de todos los comegente púrpuras que hay en este salón de clases y B es como antes:

(3)



Respuesta: Hay exactamente un morfismo y su diagrama interno es

Este diagrama no tiene flecha alguna, pero no las necesita. Un diagrama interno necesita una flecha por cada elemento del dominio y en este caso el dominio no tiene elementos. Traten de convencerse a sí mismos de que esto es correcto, ¡pero no se quiebren la cabeza!

Ahora invertimos el ejemplo anterior, es decir:

(4)


Respuesta: Cero. Tenemos cuatro tareas y cada una de ellas es imposible.

Tanto A como B son vacíos, esto es:

(5)


Respuesta: Hay un morfismo y su diagrama interno es

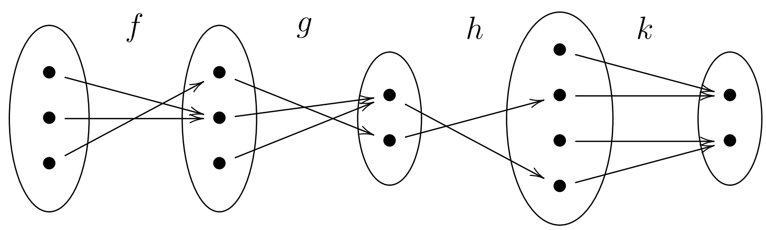
el cual es un diagrama válido por la misma razón que el diagrama en (3) es válido. ¿Por qué el razonamiento de (4) no se aplica en este caso?

No se preocupen *demasiado* acerca de estos casos extremos. La razón por la cual los menciono es que conforme aprendan el marco general verán que éstos encajan con bastante precisión.

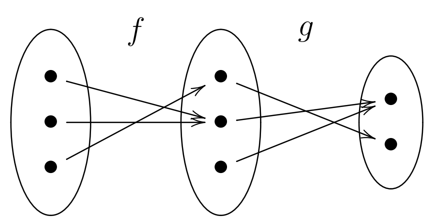
Sesión 3

Componer y contar morfismos

Veamos algunos de los ejercicios del artículo I, empezando con los ejercicios 2 y 3. ¿Pueden explicar por qué los resultados $h{\circ}(g{\circ}f)$ y $(h{\circ}g){\circ}f$ siempre son los mismos? ¿Qué pueden decir acerca de cuatro morfismos seguidos, como éstos?

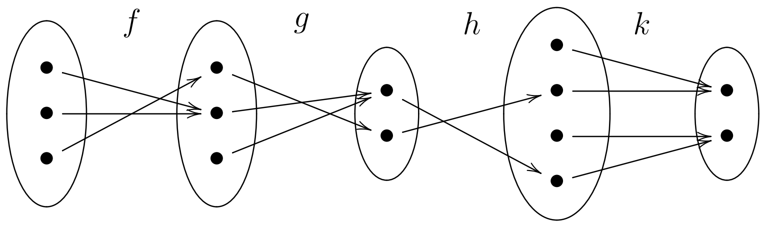


El esclarecimiento de estas preguntas fue el objetivo que tenía cuando les relaté la historia de mi madre y las tareas de enjabonar, enjuagar, secar y guardar los platos. El propósito de las tareas era el de hacer una analogía con los morfismos, de tal forma que la tarea de cuatro pasos correspondiera al morfismo que resulta de la composición. Cuando explicamos por primera vez la composición de morfismos, dijimos que lo básico es componer dos morfismos, por ejemplo aquellos en el diagrama

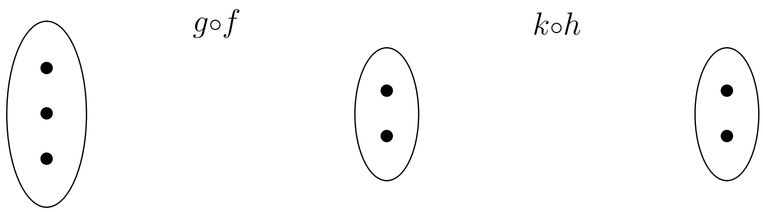


Este diagrama, como lo mencionamos en la última sesión, puede considerarse como una regla para calcular la función compuesta $g{\circ}f$, es decir, la regla "Ver los diagramas y seguir las flechas". El diagrama interno de $g{\circ}f$,

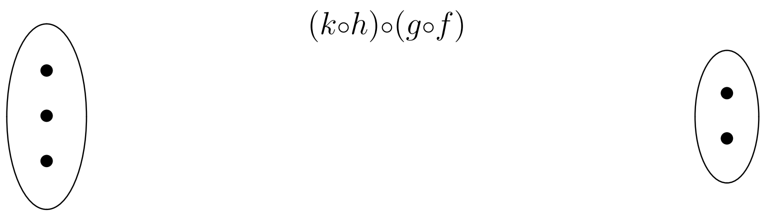
es simplemente una regla simplificada para calcular el mismo morfismo. Si hacemos lo mismo con h y k, podemos omitir pasos de



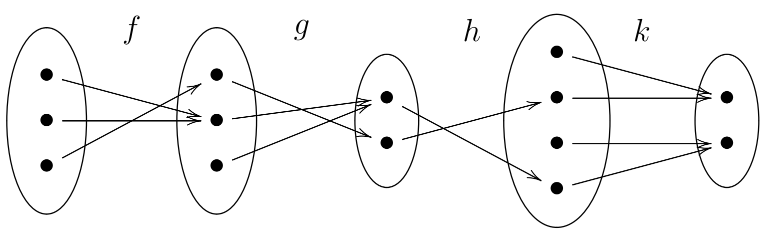
a



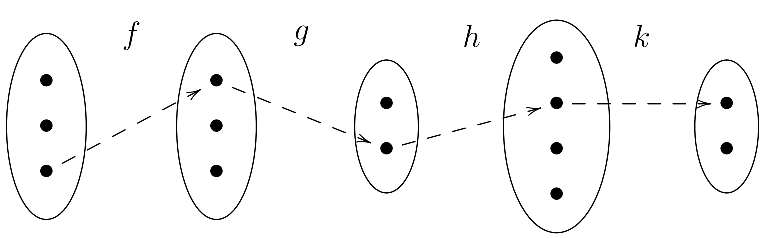
(Dibujen ustedes las flechas que faltan.) Después, repitiendo el proceso, obtenemos



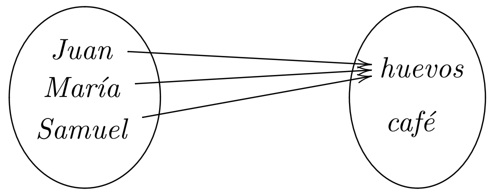
Pero esta labor fragmentaria es innecesaria. El objetivo de la analogía de *enjabonar*, después *enjuagar*, después *secar*, después *guardar* es el de sugerir que podemos ir desde el principio al final en un paso, si nos adherimos a la idea de que el mismo diagrama



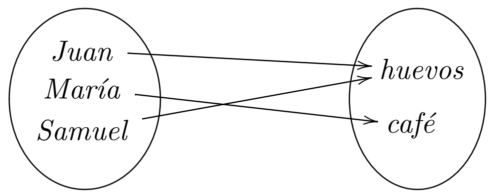
brinda una buena regla para calcular $k \circ h \circ g \circ f$. Simplemente "observen todo el diagrama y sigan las flechas"; por ejemplo:



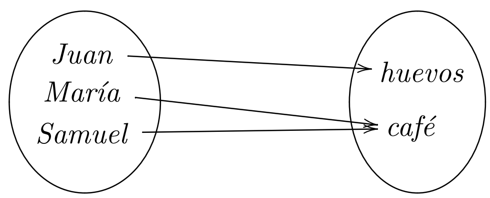
Veamos ahora si podemos encontrar una forma de determinar el número de morfismos entre cualesquiera dos conjuntos finitos. Para esto debemos empezar ensayando con los casos simples. Por ejemplo, el ejercicio 4 consiste en encontrar el número de morfismos de un conjunto con tres elementos a un conjunto con dos elementos. ¿Cómo podemos hacerlo? La forma más inmediata que se me ocurre es dibujarlos (teniendo cuidado de no repetir ninguno y de no omitir ninguno) y después contarlos. Digamos que comenzamos con



Podemos entonces hacer algo más,



y después quizá



Y ahora veamos... ¿Tenemos todos los morfismos en que Juan va a huevos? Correcto, necesitamos uno más, en que María va a huevos y Samuel a café. Hay cuatro morfismos en que Juan va a huevos y también hay cuatro morfismos en que Juan va a café —sus diagramas son los mismos que los tres anteriores, pero cambiando la flecha que sale de Juan— ocho morfismos en total. El mismo método de dibujar todas las posibilidades les debe dar las respuestas a los ejercicios 5, 6 y 7, así que pueden empezar a llenar una tabla como ésta:

Número de DOMINIO	3	3	2	2	
Número de CODOMINIO	2	3	3	2	
Número de MORFISMOS	8	27	9	4	

esperando encontrar un patrón que les permita responder igualmente otros casos.

ALICIA: Parece ser que el número de morfismos es igual al número de elementos del codominio elevado a una potencia (al número de elementos del dominio).

Ésa es una muy buena idea. Uno tiene que descubrir la razón detrás de la misma. Veamos si también funciona con los casos extremos que encontramos al final de la última sesión.

Añadiendo esos resultados a nuestra tabla obtenemos:

# de DOM.	3	3	2	2	4	1	0	4	0
# de COD.	2	3	3	2	1	4	4	0	0
# de MOR.	8	27	9	4	1	4	1	0	1
	2^3	3^3	3^2	2^2	1^4	4^1	4^0	0^4	0^0

y

n	1	0	$n \neq 0$
1	n	n	0
1	n	1	0
1^n	n^1	n^0	0^n

donde n es cualquier número natural, con la única excepción de que en la última columna debe ser distinto de cero. Ahora deben pensar en alguna razón que justifique esto.

CHAD: Por cada elemento del dominio hay tantas posibilidades como elementos del codominio haya y como las opciones para los diferentes elementos del dominio son independientes, debemos multiplicar todos estos valores, de tal manera que el número de morfismos es el número de elementos del codominio multiplicado por sí mismo tantas veces como elementos en el dominio hay.

La respuesta de Chad me parece bastante correcta. Sin embargo, necesitamos una explicación más a fondo. ¿Por qué multiplicar? ¿Qué significa "independiente"? Si Juan tiene algunas manzanas y María tiene algunas manzanas, ¿no son las manzanas de María independientes de las de Juan? Así que, si las ponen todas en una bolsa, ¿las suman o las multiplican? ¿Por qué?

Regresando a la fórmula de Alicia para el número de morfismos de un conjunto A a un conjunto B, ésta sugiere una notación razonable, la cual adoptaremos. Ésta consiste en denotar el conjunto de morfismos de A a B con el símbolo B^A, de tal manera que nuestra fórmula pueda escribirse así

$$\#(B^A) = (\#B)^{(\#A)} \quad \text{ó} \quad |B^A| = |B|^{|A|}$$

donde las notaciones $\#A$ y $|A|$ se usan para indicar el número de elementos del conjunto A. La notación $\#A$ no requiere explicación ya que el símbolo $\#$ se utiliza con frecuencia para denotar "número"; y $|A|$ es similar a la notación que se utiliza para el valor absoluto de un número. Las barras indican que se olvidan de todo, excepto del "tamaño"; para los números se olvidan del signo, mientras que para conjuntos se olvidan de cuáles son los elementos y solo recuerdan cuántos de estos hay. Así que, por ejemplo, si

$P =$ *Juan* *Chad* $\qquad R =$ *sala* *comedor*

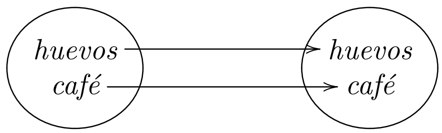
no diríamos $P = R$, sino más bien $|P| = |R|$. Para recordar cuál conjunto va en la base y cuál en el exponente pueden imaginarse que los morfismos son perezosos y por esto descienden del exponente a la base. Otra forma de recordar esto es pensando en un caso particularmente simple, por ejemplo el caso en el cual el codominio sólo tiene un elemento y por lo tanto el conjunto de morfismos también tiene sólo un elemento (y, por supuesto, recordar que $1^n = 1$).

En el ejercicio 9 no pedimos el número total de morfismos de un conjunto a sí mismo, sino solamente el número de morfismos g

de 

a 

tales que $g \circ g = g$. ¿Pueden pensar en alguno? Correcto,



Éste es el primer ejemplo que se le ocurriría a cualquiera. Recuerden que en el artículo I vimos que este morfismo se llama **morfismo identidad**. Cualquier conjunto B tiene un morfismo identidad, el cual se denota

$$B \xrightarrow{1_B} B$$

y envía cada elemento del dominio a sí mismo. Este morfismo ciertamente satisface $1_B \circ 1_B = 1_B$. De hecho, satisface mucho más; a saber, para cualquier morfismo $A \xrightarrow{f} B$ y cualquier morfismo $B \xrightarrow{g} C$,

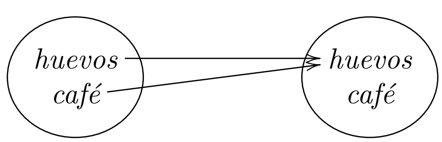
$$1_B \circ f = f \quad \text{y} \quad g \circ 1_B = g$$

(Estas dos ecuaciones brindan dos pruebas distintas de la propiedad $1_B \circ 1_B = 1_B$: una, al tomar $f = 1_B$ y la otra, al tomar $g = 1_B$.) Estas propiedades de los morfismos identidad son como la propiedad del número 1, que al ser multiplicado por cualquier otro número da ese mismo número. Así pues, los morfismos identidad se comportan con respecto a la composición como lo hace el número 1 con respecto a la multiplicación. Ésa es la razón por la cual se usa un "*1*" para denotar los morfismos identidad. ¿Qué otro morfismo g

de 

a 

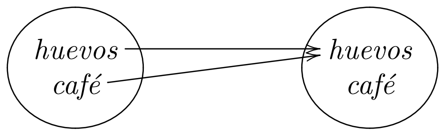
satisface $g \circ g = g$? ¿Qué tal el morfismo



?

Este morfismo también tiene la propiedad, ya que la composición

es



Intenten ahora hacer de nuevo los ejercicios en caso de que hayan tenido alguna dificultad anteriormente. Una sugerencia es usar los diagramas especiales disponibles sólo para los endomorfismos que explicamos en el artículo I.

He aquí algunos ejercicios acerca de las "reglas de contabilidad" sobre dominios y codominios de morfismos compuestos.

Ejercicio 1
A, B y C son tres conjuntos distintos (o incluso tres objetos distintos en cualquier categoría); f, g, h y k son morfismos cuyos respectivos dominios son como se ilustra:

$$A \xrightarrow{f} B\,, \quad B \xrightarrow{g} A\,, \quad A \xrightarrow{h} C\,, \quad C \xrightarrow{k} B$$

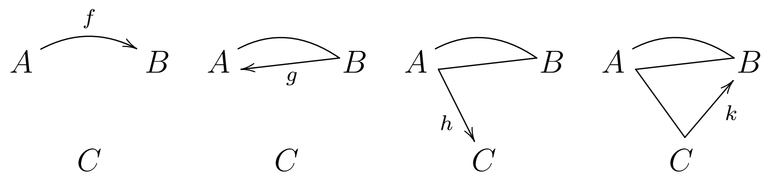
Dos de las siguientes expresiones tienen sentido. Encuéntrelas y diga cuáles son el dominio y el codominio:

(a) $k \circ h \circ g \circ f$ (b) $k \circ f \circ g$ (c) $g \circ f \circ g \circ k \circ h$

Ejercicio 2
Haga nuevamente el ejercicio 1, dibujando primero este diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, bend left, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & B \arrow[ll, "g"] \\ & C \arrow[ur, "k"'] & \end{tikzcd}$$

Lea ahora cada expresión de derecha a izquierda; por ejemplo, (a) es "f después g después h después k". Conforme vaya leyendo, siga con su dedo las flechas en el diagrama, de esta manera:



La composición tiene sentido y va de A a B. Observe cómo este diagrama externo hace más fácil el no perder de vista los dominios, etcétera.

PARTE II

El álgebra de la composición

Investigamos la analogía: Si la composición de morfismos es similar a la multiplicación de números, ¿qué se parece a la división de números? Las respuestas esclarecen una gran variedad de problemas, incluyendo (en la Sesión 10) problemas "continuos".

ARTÍCULO II

Isomorfismos

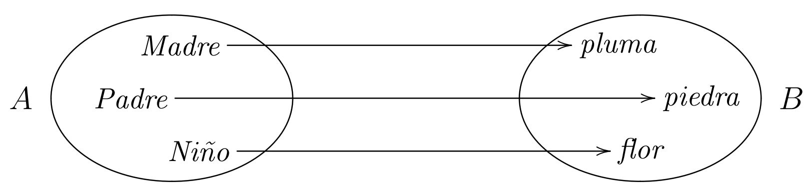
Retracciones, secciones, idempotentes, automorfismos

1. Isomorfismos

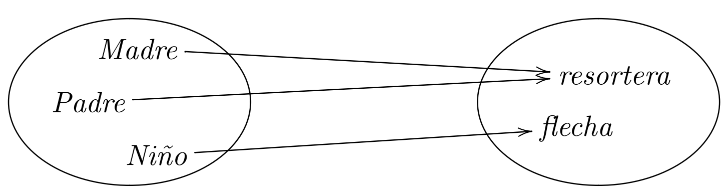
Probablemente antes de que el hombre aprendiera a contar, fue necesario primero que se diera cuenta de que en ocasiones una colección de cosas tiene cierto tipo de similitud con respecto a otra colección. Por ejemplo, estas dos colecciones

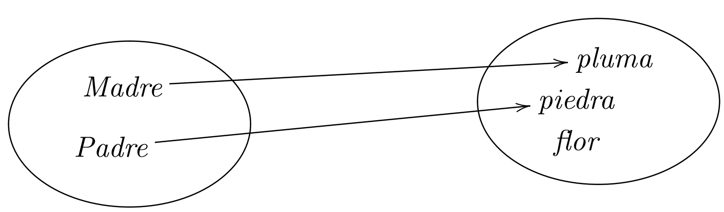
son similares. ¿En qué aspecto? (Recuerde que los números aún no se habían inventado, así que no se vale decir que "la similitud consiste en que cada uno tiene tres elementos".)

Después de pensarlo un poco, podría llegar a la conclusión de que la similitud está de hecho dada por la elección de un morfismo, por ejemplo, éste:

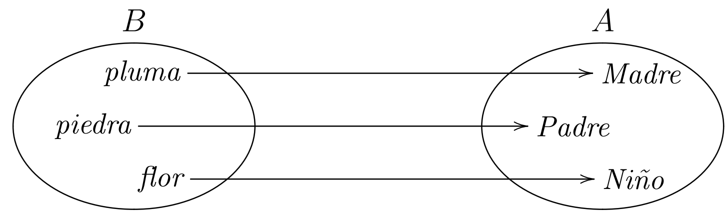


¿Qué propiedades especiales tiene este morfismo f? Nos gustaría que éstas fueran expresadas completamente en términos de la composición de morfismos para así usar después la misma idea en otras categorías, al igual que en la categoría de los conjuntos finitos. Las propiedades deben *excluir* morfismos como éstos:





La propiedad crucial que tiene f, y que los otros dos morfismos no tienen, es que hay un ***morfismo inverso*** g para el morfismo f. He aquí una ilustración de g:



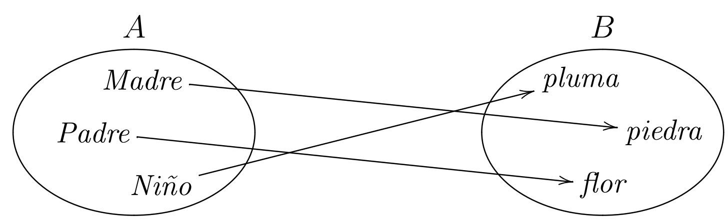
Lo importante es observar que g y f están relacionados mediante *dos ecuaciones*

$$g \circ f = 1_A \quad f \circ g = 1_B$$

Como veremos más adelante, ninguna de estas ecuaciones garantiza por sí sola que A y B sean del mismo tamaño; necesitamos tener las dos. Esto da lugar a los siguientes conceptos:

Definiciones: *Un morfismo* $A \xrightarrow{f} B$ *se llama* **isomorfismo,**[1] *o* **morfismo invertible,** *si hay un morfismo* $B \xrightarrow{g} A$ *para el cual* $g \circ f = 1_A$ y $f \circ g = 1_B$.
Un morfismo g que esté relacionado con f mediante estas dos ecuaciones se llama un **inverso para** f.
Se dice que dos objetos A y B son **isomorfos** *si existe al menos un isomorfismo* $A \xrightarrow{f} B$.

Nótese que hay otros isomorfismos del conjunto {*Madre, Padre, Niño*} al conjunto {*pluma, piedra, flor*}, por ejemplo



pero para demostrar que estos dos conjuntos son isomorfos, sólo necesitamos encontrar uno entre los muchos —¿cuántos?— isomorfismos de A a B.

Una vez que la humanidad hubo notado esta manera de encontrar "similitudes" entre colecciones, probablemente no fue mucho después que aparecieron algunos nombres para los "tamaños" de colecciones pequeñas —palabras como *par* o *terna*. Pero primero se tuvo que haber dado un paso crucial: se tuvo que haber notado que la noción de *isomorfo* o "equinumeroso" o "mismo tamaño", o como quiera que

[1]La palabra *isomorfismo* viene del griego: *iso* = igual, mismo; *morph* = forma; aunque en la categoría de los conjuntos finitos, mismo *tamaño* podría parecer más apropiado.

haya sido llamada (en caso de que en efecto ya haya tenido un nombre), tiene ciertas propiedades:

Reflexiva: A es isomorfo a A.
Simétrica: Si A es isomorfo a B, entonces B es isomorfo a A.
Transitiva: Si A es isomorfo a B y B es isomorfo a C, entonces A es isomorfo a C.

Sorprendentemente, todas estas propiedades provienen directamente de las leyes asociativa y de identidad para la composición de morfismos.

Ejercicio 1

(R) Demostrar que $A \xrightarrow{1_A} A$ es un isomorfismo.
Sugerencia: Encontrar un inverso para 1_A.

(S) Demostrar que si $A \xrightarrow{f} B$ es un isomorfismo y $B \xrightarrow{g} A$ es un inverso para f, entonces g también es un isomorfismo.
Sugerencia: Encontrar un inverso para g.

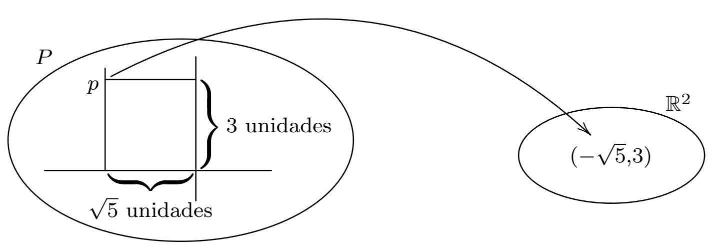
(T) Demostrar que si $A \xrightarrow{f} B$ y $B \xrightarrow{k} C$ son isomorfismos, $A \xrightarrow{k \circ f} C$ también es un isomorfismo.

Estos ejercicios muestran que las tres propiedades listadas anteriormente son correctas, pero los ejercicios son más explícitos: el resolverlos nos dice no sólo que ciertos morfismos *tienen* inversos sino, de hecho, cómo *encontrar* estos inversos.

¡Todo esto podría parecer mucha alharaca acerca de qué es lo que tienen en común todos los conjuntos de tres elementos! Quizá quede parcialmente convencido de que el esfuerzo vale la pena si vemos un ejemplo de geometría debido a Descartes. P es el plano, el plano de la geometría que se extiende indefinidamente en todas las direcciones. $\mathbb{R}^2$ es el conjunto de todos los listados de parejas de números reales (decimales infinitos, positivos o negativos, como $\sqrt{3}$ o $-\pi$ o 2.1397). El enfoque analítico de Descartes comienza con un isomorfismo

$$P \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$$

que le asigna a cada punto su par coordenado, *después* de haber elegido dos líneas perpendiculares en el plano y una unidad de distancia



El morfismo f le asigna a cada punto p en el plano un par de números, llamados “coordenadas de p en el sistema de coordenadas elegido”. (¿Qué hace el morfismo *inverso* g? Este morfismo debe asignarle a cada par de números, como $(\pi, 7)$, un punto. ¿Cuál punto?)

Al usar sistemáticamente este tipo de isomorfismo, Descartes pudo *traducir* problemas en geometría, que incluían líneas, círculos, parábolas, a problemas más fáciles en álgebra, que comprendían ecuaciones que eran satisfechas por los pares coordenados de los puntos en las curvas. Hoy en día aún utilizamos este procedimiento y honramos a Descartes al llamar a estos sistemas de coordenadas "coordenadas cartesianas". Nuestra noción de "isomorfismo" es lo que hace que esta técnica funcione a la perfección: podemos "traducir" cualquier problema concerniente a un plano —esto es, aplicar el morfismo f al plano— a un problema acerca de parejas de números. Este problema acerca de parejas de números puede resultar más fácil de resolver porque disponemos de muchas técnicas algebraicas para abordarlo. Posteriormente, podemos "retraducir" —esto es, aplicar el inverso del morfismo f —para regresar al plano. (Debe mencionarse que el método de Descartes también ha resultado útil en la dirección opuesta —¡algunas veces la manera más fácil de resolver problemas algebraicos es traduciéndolos a la geometría!)

Note que en el transcurso hemos introducido algo clandestinamente. Antes, hablábamos de un inverso para f y ahora hemos cambiado *al* inverso para f. La justificación de esto se encuentra en el siguiente ejercicio, el cual muestra que, aunque un morfismo f puede no tener ningún inverso, ¡*no puede* tener dos inversos diferentes!

Ejercicio 2
Supongamos que $B \xrightarrow{g} A$ y $B \xrightarrow{k} A$ son ambos inversos para $A \xrightarrow{f} B$. Demuestre que $g = k$.

Como el álgebra de la composición de morfismos se parece al álgebra de la multiplicación de números, uno esperaría que nuestra experiencia con los números fuera una buena guía para entender la composición de morfismos. Por ejemplo, las leyes asociativas son paralelas:

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$$
$$3 \times (5 \times 7) = (3 \times 5) \times 7$$

Pero hay que tener cuidado, ya que en general

$$f \circ g \neq g \circ f$$

El tipo de cuidado que hay que tener está ejemplificado en nuestra discusión acerca de los inversos. Para los números, el "inverso de 5", o $\frac{1}{5}$, está caracterizado como *el* número x tal que $5 \times x = 1$; pero para el inverso de un morfismo, necesitamos dos ecuaciones, no sólo una.

Más cuidado de este tipo es necesario cuando llegamos al análogo de la división. Para los números, $\frac{3}{5}$ (o $3 \div 5$) está caracterizado como el número x para el cual

$$5 \times x = 3;$$

pero también puede obtenerse como

$$x = \frac{1}{5} \times 3$$

Así que, para los números, realmente no necesitamos la división en general; una vez que entendemos los inversos (como $\frac{1}{5}$) y la multiplicación, podemos obtener las respuestas a problemas más generales acerca de la división a través de los inversos y de la multiplicación. Más adelante veremos que una idea similar puede usarse para los morfismos, pero que no todos los "problemas sobre la división" se reducen a encontrar inversos; y también que hay casos interesantes de "inversos por un solo lado", donde $f \circ g$ es un morfismo identidad pero no así $g \circ f$.

Antes de abordar "problemas sobre la división para morfismos" en general, es importante adquirir dominio sobre los isomorfismos y algunos de sus usos. Debido a nuestro ejercicio anterior, que muestra que un morfismo $A \xrightarrow{f} B$ puede tener a lo más *un* inverso, es razonable dar un nombre especial, o símbolo, a ese inverso (cuando lo hay).

Notación: Si $A \xrightarrow{f} B$ tiene un inverso, entonces el (único) inverso para f se denota con el símbolo f^{-1} (se lee "f inversa" o "la inversa de f").

Es importante notar dos cosas:

(1) Para demostrar que un morfismo $B \xrightarrow{g} A$ satisface $g = f^{-1}$, hay que demostrar que

$$g \circ f = 1_A \qquad y \qquad f \circ g = 1_B$$

(2) Si f *no* tiene inverso, entonces el símbolo "f^{-1}" no representa nada; es una expresión sin sentido, como lo son "grlbdear" o "$\frac{3}{0}$".

Ejercicio 3

Si f tiene un inverso, entonces f satisface las dos leyes de la cancelación:

(a) Si $f \circ h = f \circ k$, entonces $h = k$.

(b) Si $h \circ f = k \circ f$, entonces $h = k$.

Precaución: La siguiente "ley de cancelación" *no* es correcta, incluso si f tiene un inverso.

(c) (Incorrecto): Si $h \circ f = f \circ k$, entonces $h = k$.

Cuando un ejercicio es simplemente un enunciado, la tarea es demostrar el enunciado. Hagamos la parte (a). Suponemos que f tiene un inverso y que $f \circ h = f \circ k$ y tratemos de probar que $h = k$. Bueno, como $f \circ h$ y $f \circ k$ son el mismo morfismo, los morfismos $f^{-1} \circ (f \circ h)$ y $f^{-1} \circ (f \circ k)$ también son el mismo:

$$f^{-1} \circ (f \circ h) = f^{-1} \circ (f \circ k)$$

Pero ahora podemos usar la ley asociativa (dos veces –una en cada lado de nuestra ecuación), así que nuestra ecuación se vuelve:

$$(f^{-1} \circ f) \circ h = (f^{-1} \circ f) \circ k$$

la cual se simplifica a

$$1_A \circ h = 1_A \circ k \qquad \text{¿por qué?}$$

que a su vez se simplifica a

$$h = k \qquad \text{¿por qué?}$$

Así que hemos terminado: $h = k$ es lo que queríamos demostrar.

Note que este tipo de cálculo es muy similar al álgebra con cantidades numéricas. Nuestros símbolos $f, h, \ldots$ representan *morfismos*, no números; pero debido a que la composición de morfismos satisface *algunas* de las reglas que la multiplicación de números satisface, con frecuencia podemos llevar a cabo este tipo de cálculos casi por hábito; únicamente debemos tener cuidado de no usar nunca reglas, como la ley conmutativa, que no son válidas para morfismos.

Usted podrá hacer la parte (b) por sí solo. La parte (c), sin embargo, es otra historia. ¿Cómo saber que una regla general es *incorrecta*? Decir que es incorrecta simplemente quiere decir que hay casos (o en realidad, al menos un caso), en los cuales la regla en cuestión es incorrecta. Así que para hacer la parte (c) hay que seleccionar un ejemplo de un morfismo f que tenga un inverso y dos morfismos h y k para los cuales $h \circ f = f \circ k$; pero no cualquier ejemplo, sino uno en el cual h y k sean morfismos distintos. Los ejemplos más interesantes incluyen solamente un conjunto y tres de sus endomorfismos. Usted deberá encontrar tres endomorfismos f, h y k de un conjunto A con dos elementos, con f invertible y $h \circ f = f \circ k$ pero $h \neq k$.

He aquí algunos ejercicios con conjuntos de *números*. "$\mathbb{R}$" representa el conjunto de todos los números reales; "$\mathbb{R}_{\geq 0}$" el de todos los números reales que son ≥ 0. Para describir un morfismo que tenga como dominio a un conjunto infinito, como $\mathbb{R}$, no se puede hacer una lista con el resultado de la aplicación de f para cada elemento en el dominio, así que por lo general usamos *fórmulas*. Por ejemplo:

(1) $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ $\quad f(x) = 3x + 7$

(2) $\mathbb{R}_{\geq 0} \xrightarrow{g} \mathbb{R}_{\geq 0}$ $\quad g(x) = x^2$

(3) $\mathbb{R} \xrightarrow{h} \mathbb{R}$ $\quad h(x) = x^2$

(4) $\mathbb{R} \xrightarrow{k} \mathbb{R}_{\geq 0}$ $\quad k(x) = x^2$

(5) $\mathbb{R}_{\geq 0} \xrightarrow{l} \mathbb{R}_{\geq 0}$ $\quad l(x) = \frac{1}{x+1}$

Ejercicio 4
Para cada uno de los cinco morfismos anteriores: determine si es invertible; y si es invertible, encuentre una "fórmula" para el morfismo inverso.

2. Problemas generales de la división: determinación y elección

En forma análoga a los problemas de la división para los números (como $3 \times x = 21$, con exactamente una solución: $x = 7$; o como $0 \times x = 5$, con ninguna solución; o como

$0 \times x = 0$, con una infinidad de soluciones) encontramos *dos* tipos de problemas de la división para morfismos:

(1) El problema de "*determinación*" (o "extensión"):
Dados f y h como se muestra a continuación, ¿cuáles son todos los morfismos g, si los hay, para los cuales $h = g \circ f$?

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, dashed, "g?"] & \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "h"] & & C \end{tikzcd}$$

(2) El problema de "elección" (o "levantamiento"):
Dados g y h como se muestra, ¿cuáles son todos los morfismos f, si los hay, para los cuales $h = g \circ f$?

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, "g"] & \\ A \arrow[ur, dashed, "f?"] \arrow[rr, "h"] & & C \end{tikzcd}$$

Estudiemos primero el problema de determinación. Si éste tiene alguna solución g, decimos que h está "determinada por" f, o que h "sólo depende de" f. (Una solución particular g puede llamarse una "determinación" de h por f.) La misma idea se expresa, con frecuencia, diciendo que h es "una función de" f. Después de que hayamos estudiado varios ejemplos, quedará más claro por qué este problema de la división se llama el "problema de determinación".

Ejemplo 1, un problema de "determinación"

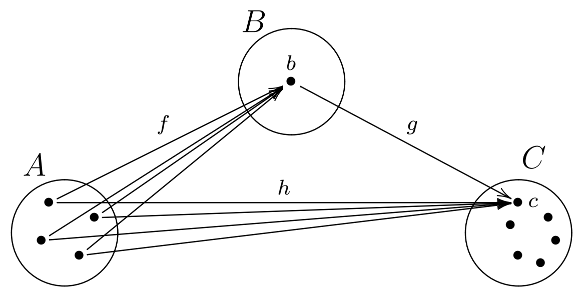
Cuando B es un conjunto con un solo elemento, entonces la posibilidad de factorizar un morfismo $A \xrightarrow{h} C$ dado a través de B es una restricción muy drástica sobre h. Esto es cierto porque solamente hay un morfismo $A \xrightarrow{f} B$, mientras que elegir un morfismo $B \xrightarrow{g} C$ es lo mismo que elegir un solo elemento de C.

$$\begin{tikzcd} & B = \mathbf{1} \arrow[dr, dashed, "g?"] & \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "h"] & & C \end{tikzcd}$$

Por lo tanto, denotando al elemento de B como b,

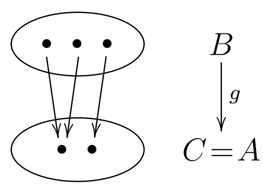
$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(b)$$

para toda x en A. Dicho morfismo h es llamado *constante* porque constantemente tiene el mismo valor a pesar de que x varía.

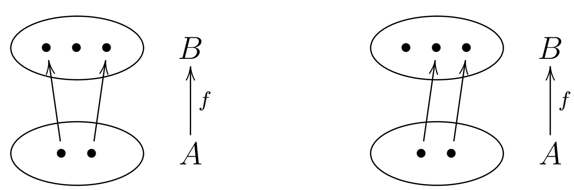


Ejemplo 2, un problema de "elección"

Consideremos ahora el siguiente ejemplo en el cual B tiene tres elementos y $h = 1_A$, donde $A = C$ tiene dos elementos, mientras que $B \xrightarrow{g} C$ es un morfismo dado con la propiedad de que cada elemento de C es un valor de g, tal como



¿Cuántos morfismos f podemos encontrar tales que $g \circ f = 1_A$? Una tal f debe ser un morfismo de $A = C$ a B y debe satisfacer $g(f(x)) = x$ para ambos elementos x. De la figura vemos que esto determina el valor de f en una x pero deja dos elecciones aceptables para el valor de f en la otra x. Por lo tanto, hay exactamente dos soluciones f a la pregunta anterior y son como sigue:



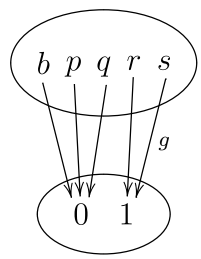
Por otro lado, supongamos que la primera de estas f se considera como dada y pedimos todos los morfismos g para los cuales $g \circ f = 1_A$, lo cual es un problema de "determinación". La ecuación $g(f(x)) = x$ puede ahora ser interpretada como si afirmara que para cada elemento de B que sea de la forma $f(x)$, g está forzada a ser definida de tal forma que lo envíe a x mismo; hay un elemento de B para el cual esto no se aplica, por lo que g puede ser definida de forma tal que a ese elemento lo envíe a cualquiera de los dos elementos de A. Por lo tanto, hay dos morfismos g con esta característica, uno de los cuales es el morfismo g dado al comienzo de la discusión de este ejemplo.

El hecho de que hayamos obtenido la misma respuesta, es decir 2, para ambas partes del ejemplo anterior se debe al tamaño particular de los conjuntos involucrados, como puede verse si consideramos las dos partes para el ejemplo más pequeño

$$\begin{array}{c} \text{conjunto con dos elementos} \\ f \Big\uparrow \Big\downarrow g \qquad\qquad g \circ f = 1_{uno} \\ \text{conjunto con un elemento} \end{array}$$

así como también para el par más grande de conjuntos en el siguiente ejercicio.

Ejercicio 5
Dados



¿cuántos morfismos f hay tales que $g \circ f = 1_{\{0,1\}}$?
Después de elegir uno de tales morfismos f, ¿cuántos morfismos g (incluyendo el que ya está dado) satisfacen la misma ecuación?

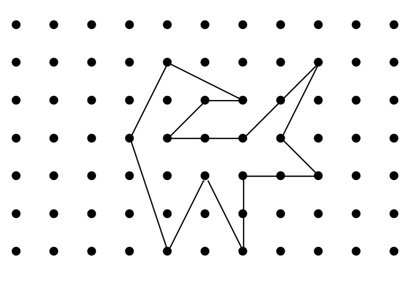
He aquí dos ejemplos más de "determinación".

Ejemplo 3

Mucha gente se sorprendió cuando Galileo descubrió que la distancia que en cierto tiempo recorre un objeto al ser arrojado está determinada por el tiempo (en ausencia de la resistencia del aire). La gente había pensado que la distancia también dependería del peso y/o de la densidad del objeto.

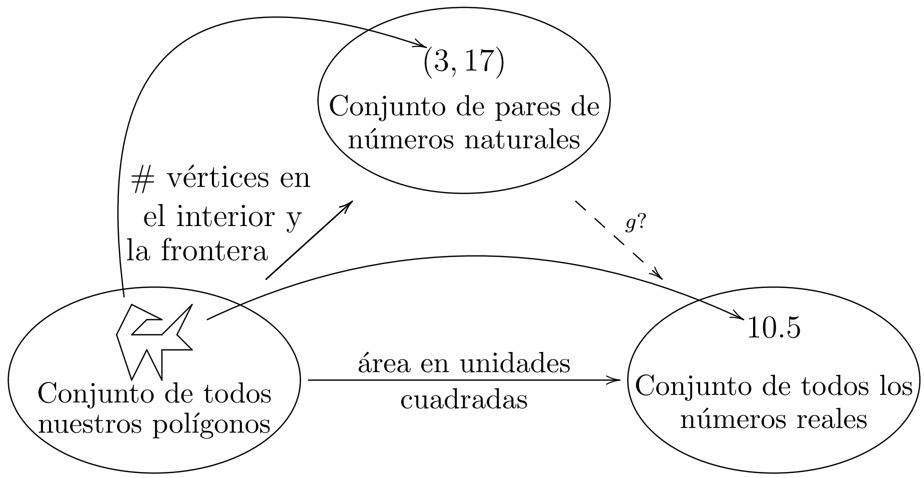
Ejemplo 4, la Fórmula de Pick

Imaginemos una cuadrícula de puntos uniformemente espaciados en el plano y una figura poligonal cuyos vértices son algunos de estos puntos:



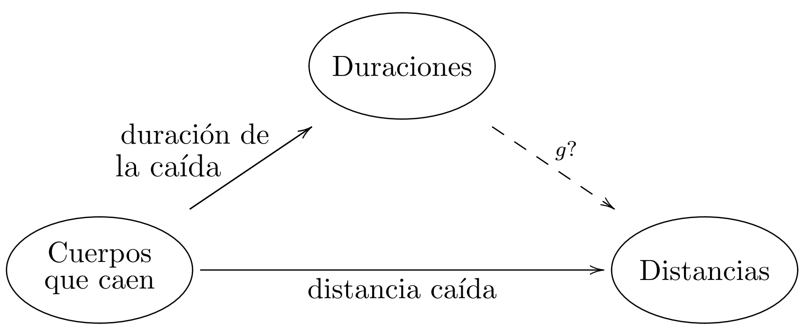
Resulta que el área (en unidades cuadradas) de dicho polígono puede calcularse a partir de muy poca información: sólo basta saber el número de puntos interiores y el número de puntos frontera (en nuestro ejemplo, 3 y 17). ¡Todos los complicados detalles concernientes a la forma del polígono son irrelevantes para calcular su área!

En forma esquemática



Una vez que se ha adivinado que hay un tal morfismo g, no es difícil encontrar una *fórmula* para dicho morfismo. (Sugerimos que primero intente hacerlo con ejemplos simples de polígonos, en lugar de empezar con uno complicado como el nuestro.)

La historia del problema de Galileo es similar: una vez que Galileo se dio cuenta de que el tiempo de la caída determinaba la distancia recorrida, no fueron necesarios demasiados experimentos antes de que encontrara una *fórmula* para la distancia en términos del tiempo; esto es, para g en



En las siguientes sesiones discutiremos más ejemplos.

3. Retracciones, secciones, idempotentes

Los casos especiales de los problemas de determinación y elección en los cuales h es un morfismo identidad se llaman problemas de "retracción" y "sección".

Definiciones: *Si* $A \xrightarrow{f} B$:
una **retracción para** f *es un morfismo* $B \xrightarrow{r} A$ *para el cual* $r \circ f = 1_A$;
una **sección para** f *es un morfismo* $B \xrightarrow{s} A$ *para el cual* $f \circ s = 1_B$.

Si lo dibujamos como un problema de "determinación", el problema de retracción tiene este aspecto:

$$\begin{tikzcd}
& B \arrow[dr, dashed, "r?"] & \\
A \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "1_A"'] & & A
\end{tikzcd}$$

Pero ya que uno de los morfismos es el morfismo identidad, es más sencillo dibujar esto

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[d, dashed, bend left, "r?"] \\
A \arrow[u, bend left, "f"]
\end{tikzcd}$$

donde queremos que r satisfaga $r \circ f = 1_A$.

En forma similar, el problema de la sección es un problema de "elección":

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[dr, "f"] & \\
B \arrow[ur, dashed, "s?"] \arrow[rr, "1_B"'] & & B
\end{tikzcd}$$

pero es más sencillo dibujar solamente

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, bend left, "f"] \\
B \arrow[u, dashed, bend left, "s"]
\end{tikzcd}$$

donde pedimos que s satisfaga $f \circ s = 1_B$.

El dibujo de la figura triangular tiene una ligera ventaja. Nos recuerda la ecuación que queremos que se satisfaga, la cual simplemente dice que el triángulo "conmuta": las dos maneras de ir de la esquina izquierda a la esquina derecha son iguales.

De los ejemplos que acabamos de discutir, sabemos que si un morfismo tiene secciones, puede tener varias, y que un morfismo puede tener varias retracciones. Más aún, algunos morfismos tienen retracciones pero no secciones (o viceversa) y muchos no tienen ninguna de las dos. Hay algunas condiciones importantes, que con frecuencia podemos verificar estudiando el morfismo mismo, que son necesarias para que un morfismo f dado pueda tener secciones o retracciones. Estas condiciones están expresadas en las siguientes proposiciones.

La primera proposición puede considerarse como el análogo para morfismos de la observación de que una vez que tenemos multiplicación y "recíprocos" (números como $x = \frac{1}{3}$ para resolver ecuaciones como $3 \times x = 1$) podemos entonces expresar las respuestas a problemas de división más generales como $3 \times x = 5$ a través de $x = \frac{1}{3} \times 5$. La proposición dice que si el problema de elección particular

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[dr, "f"] & \\
B \arrow[ur, dashed, "?"] \arrow[rr, "1_B"'] & & B
\end{tikzcd}$$

tiene una solución (una sección para f), entonces *todo* problema de elección

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dr, "f"] & \\ T \arrow[ur, dashed, "x?"] \arrow[rr, "y"'] & & B \end{tikzcd}$$

que involucre a esta misma f tiene una solución.

Proposición 1:*Si un morfismo $A \xrightarrow{f} B$ tiene una sección, entonces para cualquier T y para cualquier morfismo $T \xrightarrow{y} B$ existe un morfismo $T \xrightarrow{x} A$ para el cual $f \circ x = y$.*

Demostración: La suposición significa que tenemos un morfismo s para el cual $f \circ s = 1_B$. Entonces para cualquier morfismo dado y como se ilustra a continuación

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dr, bend left, "f"] & \\ T \arrow[ur, dashed, "x?"] \arrow[rr, "y"'] & & B \arrow[ul, bend left, "s"] \end{tikzcd}$$

vemos que podemos definir un morfismo x con al menos el dominio y codominio correctos, tomando la composición s tras y

$$x = s \circ y$$

¿Realmente satisface este morfismo s la ecuación requerida? Haciendo el cálculo

$$f \circ x = f \circ (s \circ y) = (f \circ s) \circ y = 1_B \circ y = y$$

vemos que sí.

Si un morfismo f satisface la *conclusión* de la proposición anterior (para cualquier y existe una x tal que $fx = y$), se dice con frecuencia que dicho morfismo es “suprayectivo para los morfismos con dominio T”. Debido a que entre estos objetos T se encuentran los conjuntos con un elemento, y como un morfismo $T \xrightarrow{y} B$ desde un conjunto con un elemento es simplemente un elemento, concluimos que si el codominio B de f tiene algún elemento que no sea el valor $f(x)$ para alguna x en A, entonces f no puede tener ninguna sección s.

Con frecuencia, una sección s para un morfismo f es considerada como una “elección de representantes”. Por ejemplo, si A es el conjunto de todos los ciudadanos estadunidenses y B es el conjunto de todos los distritos electorales, entonces un morfismo f tal que

$$A \xrightarrow{f = \text{residencia}} B$$

divide a la población en grupos; todos aquellos que radican en un distrito dado y constituyen un grupo. Si s significa la elección del representante para el congreso, entonces la condición $f \circ s = 1_B$ significa que el representante del distrito y debe radicar en y. Es claro que en teoría hay un gran número de dichos morfismos s de elección a menos que haya un distrito que no esté habitado, en cuyo caso no existirán dichos morfismos s, como se sigue de la proposición 1.

La proposición 1 tiene un dual, al que llamaremos proposición 1*. Ésta dice, como es de esperarse, que si el problema de determinación particular

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, dashed, "r?"] & \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "1_A"'] & & A \end{tikzcd}$$

tiene una solución (una retracción para f), entonces *todo* problema de determinación con el mismo morfismo f

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, dashed, "t?"] & \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "g"'] & & T \end{tikzcd}$$

tiene una solución. Como la prueba es muy parecida a la de la proposición 1, la dejamos como ejercicio.

> **Ejercicio 6**
> Si el morfismo $A \xrightarrow{f} B$ tiene una retracción, entonces para cualquier morfismo $A \xrightarrow{g} T$, existe un morfismo $B \xrightarrow{t} T$ para el cual $t \circ f = g$. (Ésta es la proposición 1*.)

He aquí otra propiedad útil de aquellos morfismos que tienen retracciones.

Proposición 2: *Supongamos que un morfismo* $A \xrightarrow{f} B$ *tiene una retracción. Entonces para cualquier conjunto* T *y para cualquier par de morfismos* $T \xrightarrow{x_1} A$ *y* $T \xrightarrow{x_2} A$

$$\textit{si } f \circ x_1 = f \circ x_2 \textit{ entonces } x_1 = x_2$$

Demostración: Si recordamos la definición, vemos que la suposición significa que tenemos un morfismo r para el cual $r \circ f = 1_A$. Utilizando la hipótesis de que x_1 y x_2 son tales que al componerlas con f obtenemos el mismo morfismo $T \longrightarrow B$, podemos volver a componer r de la siguiente manera:

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, shift left, "x_1"] \arrow[r, shift right, "x_2"'] \arrow[rr, bend right] & A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "1_A"] & B \arrow[r, "r"] & A \end{tikzcd}$$

$$x_1 = 1_A \circ x_1 = (r \circ f) \circ x_1 = r \circ (f \circ x_1) = r \circ (f \circ x_2) = (r \circ f) \circ x_2 = 1_A \circ x_2 = x_2$$

Definiciones: *Si un morfismo f satisface la conclusión de la proposición 2 (para cualquier par de morfismos $T \xrightarrow{x_1} A$ y $T \xrightarrow{x_2} A$, si $f \circ x_1 = f \circ x_2$, entonces $x_1 = x_2$), se dice entonces que f es* **inyectivo para morfismos cuyo dominio es T**.

Si para toda T, f es inyectivo para morfismos cuyo dominio es T, se dice que f es **inyectivo**, *o que es un* **monomorfismo**.

Como T podría tener un solo elemento, concluimos que si hubiera dos elementos x_1 y x_2 de A para los cuales $x_1 \neq x_2$ y sin embargo $f(x_1) = f(x_2)$, entonces no podría haber ninguna retracción para f.

Nótese que la proposición 2 dice que si f tiene una retracción, entonces f satisface la "ley de cancelación" (a) del ejercicio 3. La proposición 2 también tiene un "dual", el cual dice que si f tiene una sección, entonces f satisface la ley de cancelación (b) del ejercicio 3.

Ejercicio 7
Supongamos que el morfismo $A \xrightarrow{f} B$ tiene una sección. Entonces para cualquier conjunto T y cualquier par $B \xrightarrow{t_1} T$, $B \xrightarrow{t_2} T$ de morfismos de B a T, si $t_1 \circ f = t_2 \circ f$ entonces $t_1 = t_2$. (Ésta es la proposición 2*.)

Definición: *Un morfismo f que satisface esta ley de cancelación (si $t_1 \circ f = t_2 \circ f$ entonces $t_1 = t_2$) para toda T se llama* **epimorfismo**.

De esta manera, tanto "monomorfismo" como "epimorfismo" son propiedades de cancelación.

Cuando tanto f como r están dadas y $r \circ f = 1_A$, entonces, por supuesto, podemos decir tanto que r *es una retracción para* f como que f *es una sección para* r. ¿Para cuáles conjuntos A y B existen dichos pares de morfismos? Como veremos con más detalle después, esto significa aproximadamente (para A no vacío) que A es más pequeño (o igual) en tamaño que B. Podemos demostrar fácilmente la siguiente proposición, la cual es compatible con esta interpretación.

Proposición 3: *Si $A \xrightarrow{f} B$ tiene una retracción y $B \xrightarrow{g} C$ tiene una retracción, entonces $A \xrightarrow{g \circ f} C$ tiene una retracción.*

Demostración: Sean $r_1 \circ f = 1_A$ y $r_2 \circ g = 1_B$. Un buen candidato para una retracción de la composición sería entonces la composición de las retracciones *en el orden opuesto* (el cual es, en todo caso, el único orden en el cual se pueden componer)

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g\circ f"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[l, bend left, "r_1"] & C \arrow[l, bend left, "r_2"] \arrow[ll, bend left=50, "r = r_1 \circ r_2"] \end{tikzcd}$$

¿Realmente funciona esto?

$$\begin{aligned} r\circ(g\circ f) &= (r_1\circ r_2)\circ(g\circ f) = r_1\circ(r_2\circ g)\circ f = r_1\circ 1_B\circ f \\ &= r_1\circ f = 1_A \end{aligned}$$

demuestra que r es una retracción para $g\circ f$.

Ejercicio 8
Demostrar que la composición de dos morfismos, cada uno de los cuales tiene una sección, también tiene una sección.

Definición: *Un endomorfismo e se llama* **idempotente** *si $e\circ e = e$.*

Ejercicio 9
Supongamos que r es una retracción de f (de manera equivalente, que f es una sección de r) y sea $e = f\circ r$. Demostrar que e es un idempotente. (Como veremos más adelante, en la mayoría de las categorías el recíproco es cierto, todos los idempotentes se pueden "escindir" en esta forma.) Demostrar que si f es un isomorfismo, entonces e es la identidad.

Un morfismo puede tener varias secciones o varias retracciones, pero si tiene de las dos, entonces todas son la misma. Es decir, más precisamente, que tenemos:

Teorema (unicidad de los inversos): *Si f tiene tanto una retracción r como una sección s entonces $r = s$.*

Demostración: De la definición tenemos, si $A \xrightarrow{f} B$, ambas ecuaciones

$$r\circ f = 1_A \qquad \text{y} \qquad f\circ s = 1_B$$

Entonces por las leyes de la identidad y la ley asociativa

$$r = r\circ 1_B = r\circ(f\circ s) = (r\circ f)\circ s = 1_A\circ s = s$$

4. Isomorfismos y automorfismos

Usando "sección" y "retracción", podemos reformular la definición de "isomorfismo".

Definiciones: *Se dice que un morfismo f es un* **isomorfismo** *si existe otro morfismo f^{-1} el cual es tanto una retracción como una sección para f:*

$$A \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} B \qquad\qquad \begin{aligned} f\circ f^{-1} &= 1_B \\ f^{-1}\circ f &= 1_A \end{aligned}$$

Este morfismo f^{-1} se llama **el morfismo inverso para** f*: como se requieren las dos ecuaciones, el teorema de la unicidad de los inversos muestra que sólo hay un* *inverso.*

Ejercicio 10
Si $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ son ambos isomorfismos, entonces $g \circ f$ también es un isomorfismo y $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

La importante (y necesaria) inversión del orden en el enunciado del último ejercicio se puede explicar en términos de zapatos y calcetines. El acto f de ponerse los calcetines puede ser seguido por el acto g de ponerse los zapatos, lo que en conjunto es el acto compuesto $g \circ f$. El inverso de un acto "deshace" el acto. Para deshacer el acto compuesto $g \circ f$, primero debo quitarme los zapatos, que es el acto g^{-1} y a continuación quitarme los calcetines (el acto f^{-1}), lo que en conjunto es llevar a cabo el acto $f^{-1} \circ g^{-1}$.

¿Cuál es la relación de A a B cuando hay un isomorfismo entre ellos? En la categoría de los conjuntos finitos esto simplemente significa que A y B tienen el mismo número de elementos. Pero esto nos permite dar una *definición* práctica de "mismo número" sin tener que depender de contar —una definición que es muy importante incluso para conjuntos infinitos. Esto es, decimos que A y B tienen el mismo número de elementos si son isomorfos en la categoría de los conjuntos, donde el que A y B sean *isomorfos* significa (en cualquier categoría) que existe un isomorfismo de A a B en la categoría. Las categorías que son distintas a la de conjuntos generalmente involucran objetos cuya estructura es más rica y, correspondientemente, los objetos isomorfos se parecerán en mucho más que sólo en el "número de elementos" — tendrán la "misma forma", "la misma estructura", o cualquier otra característica que la categoría en cuestión involucre.

Verifique que la idea anterior de mismo número es correcta para el caso de conjuntos finitos:

Ejercicio 11
Si $A = \{$*Fátima*, *Omer*, *Alicia*$\}$ y $B = \{$*café*, *té*, *chocolate*$\}$, encontrar un ejemplo de un isomorfismo $A \xrightarrow{f} B$. Si $C = \{$*verdadero*, *falso*$\}$, ¿se puede encontrar algún isomorfismo $A \to C$?

Ahora bien, ¿cuántos isomorfismos hay de A a B? Esta pregunta se relaciona inmediatamente a otra pregunta: ¿Cuántos isomorfismos $A \xrightarrow{f} A$ hay? A un morfismo como éste, que es un endomorfismo e isomorfismo a la vez, se le llama simplemente **automorfismo**.

Ejercicio 12
Con A y B como en el ejercicio 11, ¿Cuántos isomorfismos hay de A a B? ¿Cuántos automorfismos de A hay? Las respuestas deben ser menores que 27 —¿por qué?

En general, *si* hay algún isomorfismo $A \to B$, entonces hay el mismo número de éstos que de automorfismos de A. Este hecho lo podemos probar sin tener que contar elementos si recordamos la definición de "mismo número" que dimos anteriormente. Si $Aut(A)$ denota al conjunto de todos los automorfismos de A e $Isom(A,B)$ denota al conjunto de todos los isomorfismos de A a B, la definición dice que sólo necesitamos construir un isomorfismo entre estos dos conjuntos. Ahora bien, $Aut(A)$ siempre es no vacío ya que al menos 1_A es un ejemplo de un automorfismo $A \longrightarrow A$. Si hay un isomorfismo $A \xrightarrow{f} B$, elijamos una tal f y usemósla para construir

$$Aut(A) \xrightarrow{F} Isom(A,B)$$

definiendo $F(\alpha)=f\circ\alpha$ para cualquier automorfismo α de A.

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[dr, "f"] & \\
A \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[rr, "F(\alpha)=f\circ\alpha"'] & & B
\end{tikzcd}$$

$F(\alpha)$ es en efecto un elemento de $Isom(A,B)$ debido a nuestra última proposición que dice que toda composición $f\circ\alpha$ de isomorfismos es un isomorfismo. Para probar que F es un isomorfismo tenemos que construir un inverso

$$Isom(A,B) \xrightarrow{S} Aut(A)$$

para ella, y esto lo podemos hacer de la siguiente manera, usando la misma f que habíamos elegido:

$$S(g) = f^{-1}\circ g$$

para todos los isomorfismos g en $Isom(A,B)$

$$\begin{tikzcd}
& B \arrow[dr, "f^{-1}"] & \\
A \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "f^{-1}\circ g"'] & & A
\end{tikzcd}$$

Esta $f^{-1}\circ g$ es un automorfismo de A. Finalmente, tenemos que demostrar que S es realmente inversa a F, lo cual involucra demostrar dos cosas:

$$\begin{aligned}(F\circ S)(g) &= F(S(g))=F(f^{-1}\circ g)=f\circ(f^{-1}\circ g)\\ &= (f\circ f^{-1})\circ g=1\circ g=g\end{aligned}$$

para toda g, de tal forma que

$$F\circ S=1_{Isom(A,B)}$$

y también

$$\begin{aligned}(S\circ F)(\alpha) &= S(F(\alpha))=S(f\circ\alpha)=f^{-1}\circ(f\circ\alpha)=(f^{-1}\circ f)\circ\alpha\\ &= 1\circ\alpha=\alpha\end{aligned}$$

para toda α, lo que demuestra que

$$S \circ F = 1_{Aut(A)}$$

Un automorfismo en la categoría de conjuntos también se llama una *permutación*, lo cual sugiere que éste mueve de un lado a otro en una forma específica a los elementos del conjunto. Dicha manera específica de mover de un lado a otro los elementos es un tipo simple, pero interesante, de *estructura*, así que podemos utilizar esta idea para describir nuestro segundo ejemplo de una categoría, la *categoría de las permutaciones*. Un *objeto* de esta categoría es un conjunto A *junto con* un automorfismo dado α de A. Un morfismo

$$\text{de} \quad A^{\circlearrowright \alpha} \quad \text{a} \quad B^{\circlearrowright \beta}$$

es un morfismo de conjuntos $A \xrightarrow{f} B$, que "respeta" o "preserva" los automorfismos dados α y β en el sentido de que

$$f \circ \alpha = \beta \circ f$$

Para componer morfismos f y g,

$$\begin{tikzcd}
 & B^{\circlearrowright \beta} \arrow[dr, "g"] & \\
A^{\circlearrowright \alpha} \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "?"'] & & C^{\circlearrowright \gamma}
\end{tikzcd}$$

lo natural parecería ser componer $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ como morfismos de conjuntos, pero necesitamos verificar que la composición como composición de morfismos de conjuntos sigue siendo un morfismo en la categoría de las permutaciones. Es decir, suponemos que f respeta α y β, y que g respeta β y γ, y tenemos que verificar que $g \circ f$ respeta α y γ. Estamos suponiendo

$$f \circ \alpha = \beta \circ f$$
$$g \circ \beta = \gamma \circ g$$

y entonces por asociatividad

$$\begin{aligned}(g \circ f) \circ \alpha &= g \circ (f \circ \alpha) = g \circ (\beta \circ f) = (g \circ \beta) \circ f = (\gamma \circ g) \circ f \\ &= \gamma \circ (g \circ f)\end{aligned}$$

lo cual completa la verificación.

Más adelante aprenderemos que un objeto en la categoría de las permutaciones no sólo tiene un número total de elementos, sino también todo un "espectro" de "longitudes de órbita" y "multiplicidades" de aparición de las mismas. Lo único que aquí queremos adelantar es que los espectros de dos objetos entre los cuales existe un isomorfismo en el sentido de esta categoría serán los mismos.

5. Guía

Hemos discutido varias propiedades importantes que un morfismo puede tener, todas relacionadas con problemas de división; en la página siguiente se encuentra un resumen de éstas. En las sesiones 4-9 se presentarán muchos ejemplos, seguidos por pruebas de muestra y páginas de repaso. La parte II concluye en la sesión 10 con un extenso ejemplo geométrico que ilustra el uso de la composición de morfismos y, en particular, el uso de las retracciones. Si la sesión 10 es muy difícil puede ser omitida; no es necesaria para lo que sigue.

RESUMEN: PROPIEDADES ESPECIALES QUE PUEDE TENER UN MORFISMO $A \xrightarrow{f} B$

Elección y determinación

$\Longrightarrow$ en $\boxed{X} \Longrightarrow \boxed{Y}$ quiere decir "si X, entonces Y" o "X implica Y"

Inverso

f es un *isomorfismo* o *morfismo invertible,* esto es, f tiene un inverso, g:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"'] & B \arrow[l, bend right, dotted, "g"'] \end{tikzcd}$$

que satisface *ambas*, $g \circ f = 1_A$, y $f \circ g = 1_B$

$\Longrightarrow$

f tiene una *sección*: un morfismo s

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"'] & B \arrow[l, bend right, dotted, "s"'] \end{tikzcd}$$

tal que $f \circ s = 1_B$

— O BIEN —

el problema de elección

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dr, "f"] & \\ B \arrow[ur, dotted, "s?"] \arrow[rr, "1_B"] & & B \end{tikzcd}$$

tiene solución

— O BIEN —

para *todo* T, f es "suprayectiva para morfismos desde T" esto es, *todo* problema de elección

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dr, "f"] & \\ T \arrow[ur, dotted, "?"] \arrow[rr, "b"] & & B \end{tikzcd}$$

tiene solución

$\Longrightarrow$

Cancelación

Para *todo* T y *todo*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, shift left, "t_1"] \arrow[r, shift right, "t_2"'] & T \end{tikzcd}$$

si $t_1 \circ f = t_2 \circ f$, entonces $t_1 = t_2$ (f es un "epimorfismo")

(Las tres cajas pequeñas dentro de las cajas grandes son simplemente tres maneras de expresar la *misma* propiedad de f.)

$\Longrightarrow$

f tiene retracción: un morfismo r

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"'] & B \arrow[l, bend right, dotted, "r"'] \end{tikzcd}$$

tal que $r \circ f = 1_A$

— O BIEN —

el problema de determinación

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, dotted, "r?"] & \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "1_A"] & & A \end{tikzcd}$$

tiene solución

— O BIEN —

para *todo* T, *todo* problema de determinación

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, dotted, "?"] & \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "b"] & & T \end{tikzcd}$$

tiene solución

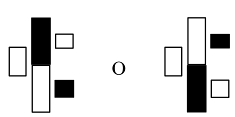
$\Longrightarrow$

Para *todo* T, f es "inyectiva para morfismos desde T", esto es, para *todo*

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, shift left, "a_1"] \arrow[r, shift right, "a_2"'] & A \end{tikzcd}$$

si $f \circ a_1 = f \circ a_2$, entonces $a_1 = a_2$ (f es un "monomorfismo" o "morfismo inyectivo".)

(Nota: de cualquier par de propiedades "diagonalmente opuestas"



¡se puede demostrar que f tiene inversa!)

Sesión 4

División de morfismos; isomorfismos

1. División de morfismos contra división de números

Números	Morfismos
multiplicación	composición
división	¿?

Si la composición de morfismos es análoga a la multiplicación de números, ¿cuál es el análogo de la división de números? Hagamos primero un repaso de las características que tienen en común la composición y la multiplicación. Ambas operaciones son asociativas y tienen identidades. (La identidad para la multiplicación es el número 1.)

Multiplicación de números	Composición de morfismos
Para números x, y, z	Para $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$
$x \times 1 = x = 1 \times x$	$f \circ 1_A = f = 1_B \circ f$
$x \times (y \times z) = (x \times y) \times z$	$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

Al igual que la mayoría de las analogías, ésta es solamente parcial ya que en la multiplicación de números no importa el orden, mientras que en la composición de morfismos sí. Si queremos que tanto "$g \circ f$" como "$f \circ g$" tengan sentido y tengan el mismo dominio, tenemos que tener $A \xrightarrow{f} A$ y $A \xrightarrow{g} A$, e incluso en este caso

Para todos los números x, y,	Para la mayoría de los morfismos f, g,
$x \times y = y \times x$	$f \circ g \neq g \circ f$

Tanto la multiplicación de números como la composición de morfismos son procesos bien definidos: se comienza con un par (de números en un caso, de morfismos en el otro) y se obtiene un resultado. Con frecuencia, cuando se tiene un proceso como este surge la posibilidad de invertirlo, esto es, de encontrar un nuevo "proceso" a través del cual podamos ir ya sea del resultado a los datos iniciales (un par de números o un par de morfismos, según sea el caso), o bien del resultado y uno de los datos iniciales, al otro dato. Este proceso inverso puede no tener una respuesta única.

Para la multiplicación de números este proceso inverso se llama el problema de la **división**, el cual es relativamente simple porque dados uno de los datos iniciales y el resultado final, generalmente hay un solo valor para el otro dato. Por ejemplo, si al multiplicar un número por 3 obtenemos 15

$$3 \times ? = 15$$

sabemos que el número sólo pudo haber sido 5.

Sin embargo, incluso en la multiplicación de números encontramos problemas para los cuales no hay solución así como problemas para los cuales hay muchas soluciones. Esto ocurre cuando multiplicamos por cero. Si nos dicen que al multiplicar un número por cero obtenemos 7, debemos responder que no existe tal número, mientras que si nos piden encontrar un número que al ser multiplicado por cero dé cero, vemos que absolutamente cualquier número constituye una solución.

$$0 \times ? = 7 \ \text{ no hay solución} \qquad 0 \times ? = 0 \ \text{ muchas soluciones}$$

Dichos problemas, que pueden considerarse como excepcionales en la multiplicación, en cambio, son típicos en la composición de morfismos. Para morfismos ocurre con frecuencia que los problemas de "división" tienen varias soluciones o ninguna. Hay, sin embargo, un caso muy útil en el cual la "división de morfismos" produce exactamente una solución, así que primero abordaremos este caso.

2. Inversos contra recíprocos

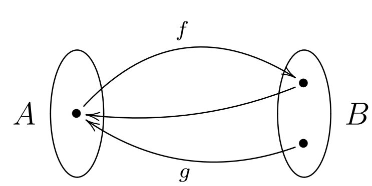
Un "recíproco para el número 2" significa un número que satisface $? \times 2 = 1$ (y por lo tanto también $2 \times ? = 1$.) Como es sabido, 2 tiene precisamente un recíproco, 0.5 o 1/2. La noción correspondiente para la composición de morfismos se llama "inverso".

Definiciones: *Si $A \xrightarrow{f} B$, un* **inverso para** f *es un morfismo $B \xrightarrow{g} A$ que satisface*

$$g \circ f = 1_A \quad y \quad f \circ g = 1_B$$

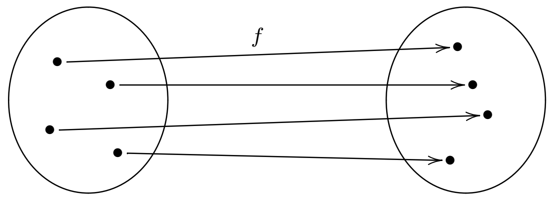
Si f tiene un inverso, decimos que f es un **isomorfismo**, *o* **morfismo invertible**.

Realmente necesitamos las dos ecuaciones, como lo muestra este ejemplo:

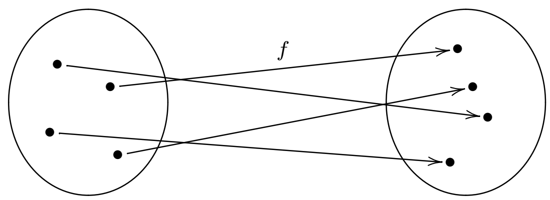


$$g \circ f = 1_A \quad \text{pero} \quad f \circ g \neq 1_B$$

Ustedes mismos pueden crear ejemplos más complicados de este fenómeno. (¿Cuál es el ejemplo más simple de morfismos f, g para los cuales $f \circ g$ es un morfismo identidad, pero $g{\circ}f$ no?) El diagrama interno de un isomorfismo de conjuntos tiene un aspecto bastante simple:



aunque podría dibujarse en una forma menos organizada:



Estas ilustraciones sugieren que un morfismo con un inverso sólo tiene *un* inverso: simplemente "inviertan las flechas en el diagrama interno". Esta afirmación es verdadera y será deducida utilizando solamente las leyes asociativa e identidad para la composición de morfismos:

Unicidad de los inversos: *Cualquier morfismo f tiene a lo más un inverso.*
Demostración: Sea $A \xrightarrow{f} B$ y supongamos que tanto $B \xrightarrow{g} A$ como $B \xrightarrow{h} A$ son inversos para f; entonces

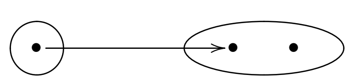
$$\begin{array}{ccc} g{\circ}f = 1_A & \text{y} & f{\circ}g = 1_B \\ h{\circ}f = 1_A & \text{y} & f{\circ}h = 1_B \end{array}$$

Sólo necesitamos dos de estas ecuaciones para probar que g y h son la misma:

$$g = 1_A{\circ}g = (h{\circ}f){\circ}g = h{\circ}(f{\circ}g) = h{\circ}1_B = h$$

(¿Pueden ver la justificación para cada paso? ¿Cuáles dos de las cuatro ecuaciones hemos utilizado? La forma más fácil de recordar esta demostración es comenzando por la mitad: la expresión $h{\circ}f{\circ}g$, con f intercalada entre sus dos supuestos inversos, se simplifica de dos maneras.)

Existen dos notaciones estándares para el recíproco de 2: $1/2$ y 2^{-1}. Para morfismos, sólo se usa la segunda notación: si f tiene un morfismo inverso, entonces su único inverso se denota como f^{-1}. En ambos casos, números y morfismos, no tiene sentido utilizar estos símbolos si no hay un recíproco o inverso: "0^{-1}", "$1/0$", y "f^{-1}" si f es el morfismo



son expresiones sin sentido que no representan nada. Una pequeña advertencia más: el que un número tenga o no un recíproco depende de cuál sea su "universo de números". Si por "números" solamente quieren decir números enteros, esto es, $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$, entonces sólo -1 y 1 tienen recíprocos; 2 no tiene. Pero si por números quieren decir números reales (con frecuencia representados por expansiones decimales infinitas), entonces todo número excepto 0 tiene un recíproco. Exactamente de la misma forma, el que un morfismo tenga o no un inverso depende de en qué "universo de morfismos" (categoría) estén. Por el momento tomaremos la categoría de los conjuntos abstractos (y todos los morfismos), pero mucho de lo que digamos sólo dependerá de las leyes asociativa e identidad para la composición de morfismos, y por lo tanto será válido en cualquier categoría.

3. Isomorfismos como "divisores"

Si alguna vez han llegado al cine unos minutos tarde, sin duda habrán batallado para determinar cuál isomorfismo de conjuntos

$$\text{Nombres de los personajes} \longrightarrow \text{Personajes en la pantalla}$$

es el que está involucrado. Cuando dos personajes discuten "Titus", ustedes tratan de juntar pistas que les puedan indicar si éste es el personaje malo, alto y calvo, o el bajo de cabello oscuro. Posteriormente, si les gustó mucho la película pero los actores no les eran familiares, aprenden el isomorfismo

$$\text{Personajes en la pantalla} \longrightarrow \text{Actores en la película}$$

o si los actores les son familiares, pero no pueden recordar sus nombres, aprenden el isomorfismo

$$\text{Actores en la película} \longrightarrow \text{Nombres artísticos del elenco}$$

(Una costumbre reciente y desafortunada consiste en mostrar al final de la película sólo el morfismo compuesto de estos tres, llamada "reparto".)

Una vez que hayan comprendido estos isomorfismos, es notable lo fácil que les resultará componerlos. Lo que hacen es llevar a cabo una especie de identificación mental del nombre "Espartaco", del esclavo que guió la insurrección, del actor con el mentón partido y del nombre "Kirk Douglas", aun cuando sepan que cada uno de estos isomorfismos de conjuntos fue el resultado de muchas decisiones tomadas en el pasado. Se pudieron haber elegido diferentes actores para desempeñar estos papeles, los actores pudieron haber elegido diferentes nombres artísticos, etcétera; cada flecha en el diagrama interno de cualquiera de estos isomorfismos puede representar en sí misma una historia. Al mismo tiempo, estos cuatro conjuntos permanecen totalmente distintos unos de otros. Uno no cree que el esclavo cenó en el Boulevard Hollywood, así como tampoco que el actor del mentón partido contiene nueve letras. Cada conjunto es una isla que se comunica con los otros conjuntos únicamente a través de morfismos.

A pesar de esta aparente complejidad, al discutir la película ustedes utilizan estos isomorfismos de conjuntos, así como sus composiciones e inversos, de una manera tan libre que parece casi milagrosa. Aparentemente es más fácil adquirir dominio sobre un isomorfismo que sobre otros morfismos, en parte debido a que tiene "dos direcciones": cada isomorfismo trae consigo su inverso, y el ir de una dirección a la otra varias veces a lo largo de cada flecha en el diagrama interno lo cimienta firmemente en su mente. Pero la facilidad para componerlos proviene también de la simplicidad del álgebra de la composición de isomorfismos. *El proceso de seguir* (o preceder) *morfismos a través de un isomorfismo particular es él mismo un "proceso" reversible*, en la misma forma en que el proceso de la multiplicación por 3 es revertido por la multiplicación por 1/3. Existe una sola pequeña diferencia. Debido a que el orden de la composición es importante, hay dos tipos de problemas de división para morfismos. Cada uno tiene exactamente una solución si el "divisor" es un isomorfismo:

Problema:

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, dashed, "g?"] & \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "h"'] & & C \end{tikzcd}$$

Dados f y h, encontrar todas las g para las que $g \circ f = h$.
(Análogo a: $? \times 3 = 6$.)
Solución, *si* el "divisor" f es un isomorfismo:
Hay exactamente un morfismo g para el cual $g \circ f = h$;
es $g = h \circ f^{-1}$.
(Análogo a: $? = 6 \times \frac{1}{3}$.)

Problema:

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, "g"] & \\ A \arrow[ur, dashed, "f?"] \arrow[rr, "h"'] & & C \end{tikzcd}$$

Dados g y h, encontrar todas las f para las que $g \circ f = h$.
(Análogo a: $3 \times ? = 6$.)
Solución, *si* el "divisor" g es un isomorfismo:
Hay exactamente un morfismo f para el cual $g \circ f = h$;
es $f = g^{-1} \circ h$.
(Análogo a: $? = \frac{1}{3} \times 6$.)

Por favor no se preocupen por memorizar estas fórmulas. Es más fácil, y más ilustrativo, aprender la demostración; de esta manera podrán obtener instantáneamente las fórmulas siempre que las necesiten. He aquí la prueba para la columna del lado izquierdo. Si g fuera una solución para $g \circ f = h$, entonces (tratando de obtener g sola del lado izquierdo) $(g \circ f) \circ f^{-1} = h \circ f^{-1}$, pero ahora el lado izquierdo se simplifica (¿cómo?) a g, así que $g = h \circ f^{-1}$. Precaución: todo lo que hemos probado es que la única solución posible para la ecuación es el candidato que encontramos, $h \circ f^{-1}$. Aún tenemos que asegurarnos de que este candidato es realmente una solución. ¿Es cierto que $(h \circ f^{-1}) \circ f = h$? Simplifiquen el lado izquierdo para ver que así es. Noten que en la primera simplificación utilizamos $f \circ f^{-1} = 1_B$ y que en la segunda simplificación utilizamos $f^{-1} \circ f = 1_A$; necesitamos ambas. Desarrollen ahora la demostración para la columna del lado derecho también, así habrán dominado esta técnica.

4. Un pequeño zoológico de isomorfismos en otras categorías

Para apreciar los isomorfismos necesitan ver ejemplos, algunos familiares, otros más exóticos. Esto significa adelantarse un poco, pues involucra explorar otras categorías además de la categoría de conjuntos, pero ustedes pueden hacerlo. Comenzaremos con lo más familiar, pero quizá logremos hacer que adopten un punto de vista nuevo.

En *álgebra*, con frecuencia encontramos un conjunto (generalmente de números) junto con una regla (generalmente la adición o la multiplicación) para combinar cualquier par de elementos y obtener así otro elemento. Denotemos el resultado de combinar a y b como $a * b$, para mantenernos neutros con respecto a si estamos considerando la adición o la multiplicación. Un *objeto* en nuestra categoría algebraica, entonces, es un conjunto A junto con una regla de combinación $*$. He aquí algunos ejemplos:

$(\mathbb{R}, +)$	Números reales (generalmente representados por expansiones decimales infinitas, como $3.14159\ldots$, ó $-1.414\ldots$, ó $2.000\ldots$) con la adición como la regla de combinación.
$(\mathbb{R}, \times)$	Lo mismo, pero con la multiplicación como la regla de combinación.
$(\mathbb{R}_{>0}, \times)$	únicamente los números reales positivos, pero aún con la multiplicación.

Un *morfismo* en esta categoría de un objeto $(A, *)$ a un objeto $(A', *')$ es cualquier morfismo de conjuntos $A \xrightarrow{f} A'$ que "respete las reglas de combinación", esto es,

$$f(a * b) = f(a) *' f(b) \qquad \text{para cada } a \text{ y } b \text{ en } A$$

Ejemplos de morfismos en esta categoría son:

(1) $(\mathbb{R}, +) \xrightarrow{d} (\mathbb{R}, +)$ por "duplicar": $dx = 2x$. Vemos que d es un morfismo en la categoría, ya que

$$d(a + b) = (da) + (db)$$

que quiere decir

$$2(a + b) = (2a) + (2b)$$

(2) $(\mathbb{R}, \times) \xrightarrow{c} (\mathbb{R}, \times)$ por "elevar al cubo": $cx = x^3$. Vemos que c es un morfismo en la categoría ya que

$$c(a \times b) = (ca) \times (cb)$$

que quiere decir

$$(a \times b)^3 = (a^3) \times (b^3)$$

(3) $(\mathbb{R}, +) \xrightarrow{exp} (\mathbb{R}_{>0}, \times)$ por "exponenciación": $exp\, x = e^x$, y exp es un morfismo en la categoría ya que

$$exp(a + b) = (exp\, a) \times (exp\, b)$$

que quiere decir

$$e^{a+b} = (e^a) \times (e^b)$$

(Si no conocen el número $e = 2.718\ldots$, pueden utilizar 10 en su lugar.)

Estos ejemplos de morfismos en esta categoría algebraica fueron elegidos especialmente: cada uno de ellos es un isomorfismo. Esto requiere cierta demostración, y sólo haré la más fácil, la del morfismo de duplicar, d. Adivinarán rápidamente el inverso de d, el morfismo "sacar la mitad":

$$(\mathbb{R}, +) \xrightarrow{m} (\mathbb{R}, +) \text{ por "mitad": } mx = \frac{1}{2}x$$

Ciertamente, debemos verificar que m es un morfismo en la categoría, de $(\mathbb{R}, +)$ a $(\mathbb{R}, +)$. ¿Es cierto, para cualesquiera números reales a y b, que

$$m(a + b) = (ma) + (mb)?$$

Sí. Ahora bien, todavía tenemos que verificar las dos ecuaciones que juntas dicen que m es el inverso para d: ¿Son md y dm los morfismos identidad?

Ejercicio 1
Termine de verificar que d es un isomorfismo en la categoría algebraica: muestre que $m \circ d$ y $d \circ m$ son en efecto los morfismos identidad.

Podemos encontrar ejemplos de objetos en la categoría algebraica que no son conjuntos de números. Probablemente habrán notado que sumar un número par a un número impar siempre da como resultado un número impar: *impar* + *par* = *impar*. También, *impar* + *impar* = *par*, etcétera, así que el conjunto de dos elementos $\{$*par*, *impar*$\}$ junto con la "regla de combinación", +, se ha convertido ahora en un objeto de la categoría algebraica. Asimismo, saben que multiplicar números positivos da un resultado positivo, mientras que *positivo* × *negativo* = *negativo*, etcétera. De esta manera, el conjunto $\{$*positivo*, *negativo*$\}$ junto con la regla de combinación × es también un objeto en la categoría. El siguiente ejercicio es el análogo del importante ejemplo (3) anterior, el cual mostró que la adición de números reales y la multiplicación de números positivos tienen la "misma forma abstracta".

Ejercicio 2
Encuentre un isomorfismo

$$(\{par, impar\}, +) \xrightarrow{f} (\{positivo, negativo\}, \times)$$

Sugerencia: Sólo hay dos morfismos invertibles de conjuntos de $\{$*par*, *impar*$\}$ a $\{$*positivo*, *negativo*$\}$. Uno de ellos "respeta las reglas de combinación", pero el otro no.

Debemos adquirir también cierta experiencia para reconocer cuándo algo no es un isomorfismo; el siguiente ejercicio los reta a que hagan esto.

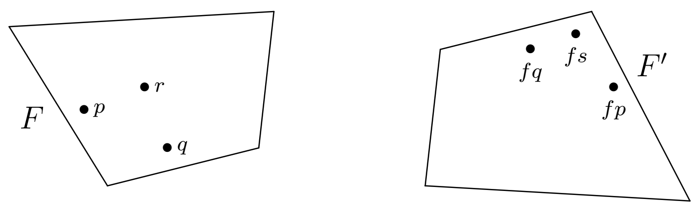
Ejercicio 3
Un importador sin escrúpulos le vendió a la sección de categoría algebraica de nuestro zoológico ciertas criaturas que no son isomorfismos. Desenmascare a los impostores.

(a) $(\mathbb{R},+)\xrightarrow{m_1}(\mathbb{R},+)$ por "más 1": $m_1x=x+1$.
(b) $(\mathbb{R},\times)\xrightarrow{cua}(\mathbb{R},\times)$ por "elevar al cuadrado": $cua\,x=x^2$.
(c) $(\mathbb{R},\times)\xrightarrow{cua}(\mathbb{R}_{\geq 0},\times)$ por "elevar al cuadrado": $cua\,x=x^2$.
(d) $(\mathbb{R},+)\xrightarrow{n}(\mathbb{R},+)$ por "negativo": $nx=-x$.
(e) $(\mathbb{R},\times)\xrightarrow{n}(\mathbb{R},\times)$ por "negativo": $nx=-x$.
(f) $(\mathbb{R},\times)\xrightarrow{c}(\mathbb{R}_{>0},\times)$ por "elevar al cubo": $cx=x^3$.

Sugerencias: Exactamente uno es genuino. Algunos de los impostores más burdos no son morfismos en la categoría, esto es, no respetan las reglas de combinación. El más burdo ni siquiera es un morfismo de *conjuntos* con el dominio y el codominio indicados.

Si siempre les ha parecido que las reglas algebraicas que han surgido en la discusión de estos ejemplos son un tanto misteriosas, no son los únicos. Uno de nuestros objetivos es el de desmitificar estas reglas, encontrando sus raíces. Ya hablaremos de esto y después de que nutramos las raíces se sorprenderán de qué tan lejos las reglas extienden sus ramas. Por el momento, sin embargo, pareció razonable usar las reglas algebraicas para proveer ejemplos. El resto de los ejemplos de isomorfismos será más fácil de ilustrar y no requerirá cálculos algebraicos. Como esto es solamente un esbozo, no seremos muy estrictos.

En *geometría*, la "categoría de Euclides" juega un papel significativo. Un objeto es cualquier figura poligonal que pueda ser dibujada en el plano y un morfismo de una figura F a una figura F' es cualquier morfismo f de conjuntos que "preserve las distancias": si p y q son puntos de F, la distancia de fp a fq (en F') es la misma que la distancia de p a q. (El efecto de esta restricción en los morfismos es más o menos el de asegurar que si F estuviera hecha de algún material perfectamente rígido ustedes podrían levantarla y colocarla precisamente en el espacio ocupado por F'; pero noten que la idea de *mover* de hecho a F no es parte de la definición.) Los objetos que son isomorfos en esta categoría fueron llamados por Euclides figuras "congruentes". Aquí hay un ejemplo:



Objetos isomorfos en la categoría de Euclides

¿Pueden ver cuál es el morfismo f, y cuál es su inverso? Si es así, deben poder localizar los puntos fr y s en el dibujo. Podríamos extender la categoría de Euclides para incluir figuras sólidas, y para permitir fronteras curvas. Así, si ustedes fueran perfectamente simétricos, su mano izquierda sería isomorfa a su mano derecha cuando están en posición de firmes, y la mano derecha de su gemelo o gemela sería isomorfa a sus dos manos.

En *topología*, algunas veces llamada "geometría de hule", no se requiere que los morfismos preserven distancias, sino únicamente que sean "continuos": en términos muy generales, si p está cerca de q, entonces fp está cerca de fq. Los objetos que son isomorfos en una categoría como ésta se dice que son "homeomorfos". La estructura corporal de un hombre alto es homeomorfa a la de uno bajo a menos que alguno de ellos haya tenido un accidente o una cirugía.

Un radiólogo que examina imágenes del cuerpo humano a través de rayos X necesita hacer distinciones más nítidas y puede por tanto utilizar una categoría más refinada. Un *objeto* tendrá como estructura adicional un morfismo que le asocie a cada punto una densidad (medida por la oscuridad de su imagen); y un *morfismo* en la categoría del radiólogo, además de ser continuo, debe tener la propiedad de que si p y q están cercanas la una a la otra y la densidad en p es mayor que la densidad en q, entonces la densidad en fp es mayor que la densidad en fq. El no poder encontrar un isomorfismo en esta categoría que vaya de su cuerpo a un cuerpo "ideal" es considerado como un indicador de que hay algún problema. (Este ejemplo no debe ser tomado demasiado en serio; la intención es darles una idea de cómo trata uno de capturar aspectos importantes de cualquier tópico ideando las categorías apropiadas.)

Sesión 5

División de morfismos: secciones y retracciones

1. Problemas de determinación

Muchas investigaciones científicas comienzan con la observación de que una cantidad f *determina* otra cantidad h. He aquí un ejemplo. Supongamos que tenemos un cilindro con un pistón cargado con peso que empuja hacia abajo algún gas atrapado. Si calentamos el sistema, aumentará el volumen del gas atrapado y el pistón se moverá hacia arriba. Si después enfriamos el sistema hasta que éste adquiera su temperatura original, el gas regresará a su volumen original, y comenzaremos a sospechar que la temperatura *determina* el volumen. (En el siguiente diagrama, f le asigna a cada estado del sistema su temperatura, y h le asigna a cada estado su volumen.)

$$\begin{tikzcd} & \text{Temperaturas} \arrow[dr, dashed, "g?"] & \\ \begin{array}{c}\text{Estados}\\ \text{del sistema}\end{array} \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "h"'] & & \text{Volúmenes} \end{tikzcd}$$

Sospechamos que hay un morfismo g que hace que $h = g \circ f$; dicha g es llamada una *determinación* de h a partir de f. El problema para el científico es entonces el de encontrar una g (o todas las g, si hay más de una) que haga verdadera a $h = g \circ f$. (En este ejemplo, resulta que hay exactamente una tal g. Si elegimos apropiadamente el cero para las temperaturas, g tiene una forma muy simple: multiplicación por una constante.)

Pongamos ahora todo esto en términos más generales. Supongamos que tenemos un morfismo de conjuntos $A \xrightarrow{f} B$, y un conjunto C. Entonces podemos componer cualquier morfismo de B a C con f para obtener un morfismo $A \longrightarrow C$, así que f nos da un proceso que toma morfismos $B \longrightarrow C$ y produce morfismos $A \longrightarrow C$:

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, "\text{de cada } g"] & \\ A \arrow[ur, "\text{Dado } f"] \arrow[rr, "\text{obtenemos } g \circ f"'] & & C \end{tikzcd}$$

y queremos revertir este proceso. El *problema de determinación* es: *dados los morfismos f de A a B, y h de A a C, encontrar todos los morfismos de B a C tales que $g \circ f = h$.* (Véase el siguiente diagrama.)

La pregunta es: "*¿Está h determinada por f?*"; más específicamente, el problema pide encontrar todas las *maneras* de determinar h a partir de f, como se muestra en el diagrama

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, dashed, "g?"] & \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "h"'] & & C \end{tikzcd}$$

He aquí un ejemplo con conjuntos finitos. Sean A el conjunto de los estudiantes y B el conjunto de los géneros "*femenino*" y "*masculino*"; y sea $A \xrightarrow{f} B$ el morfismo obvio que da el género. Si C es el conjunto cuyos elementos son *sí* y *no*, y h es el morfismo que responde a la pregunta: "¿Lleva anteojos este estudiante?", entonces dependiendo de quién lleve anteojos, hay muchas posibilidades para el morfismo h. Pero como hay tan pocos morfismos

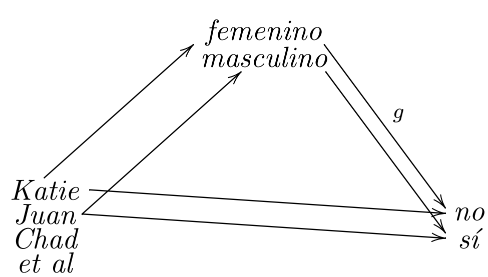
$$\begin{matrix}\textit{femenino}\\ \textit{masculino}\end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix}\textit{sí}\\ \textit{no}\end{matrix}$$

(¿cuántos?), es poco probable que una h dada sea igual a f seguida de uno de los morfismos de B a C.

$$\begin{tikzcd} & \begin{matrix}\textit{femenino}\\ \textit{masculino}\end{matrix} \arrow[dr, dashed, "¿g?"] & \\ \begin{matrix}\text{Conjunto de}\\ \text{los estudiantes}\end{matrix} \arrow[ur, "\text{género}= f"] \arrow[rr, "h\ =\text{¿usa anteojos?}"'] & & \begin{matrix}\textit{sí}\\ \textit{no}\end{matrix} \end{tikzcd}$$

Tratemos de averiguar qué propiedades especiales tiene un morfismo $A \xrightarrow{h} C$ si éste es igual a $g \circ f$ para algún g. Obviamente esto significa que al saber si un estudiante es hombre o es mujer pueden decir si el estudiante lleva anteojos o no. En otras palabras, o todas las mujeres llevan anteojos o ninguna de ellas lleva y, o bien todos los hombres llevan anteojos o ninguno lleva. La existencia de un morfismo g tal que $h = g \circ f$ significaría que h (si un estudiante lleva anteojos) está determinada por f (el género del estudiante.)

La encuesta de la clase reveló que Juan lleva anteojos y que Katie no. Con sólo este mínimo de información g estaría forzada a ser como se muestra aquí:



Pero aun esta g no satisface $g\circ f = h$, ya que Chad es hombre pero no lleva anteojos:

$$(g\circ f)(\textit{Chad}) = g(f(\textit{Chad})) = g(\textit{masculino}) = \textit{sí} \qquad h(\textit{Chad}) = \textit{no}$$

Intenten hacer el siguiente ejercicio para que tengan una idea general de cómo debe estar relacionado un morfismo f con un morfismo h, de tal manera que sea posible encontrar una "prueba" explícita de que h está determinada por f. (Recuerden que "**1**" denota cualquier conjunto con un solo elemento.)

Ejercicio 1
(a) Demuestre que si hay un morfismo g para el cual $h = g\circ f$, entonces para cualquier pareja a_1, a_2 de puntos $\mathbf{1} \longrightarrow A$ del dominio A de f (y de h) tenemos:
si $fa_1 = fa_2$, entonces $ha_1 = ha_2$

(Si para alguna pareja de puntos se tiene que $fa_1 = fa_2$ pero $ha_1 \neq ha_2$, entonces h no está determinada por f.)

(b) ¿Es cierto el recíproco? Es decir, si los morfismos (de conjuntos) f y h satisfacen la condición anterior ("para cualquier pareja $a_1, a_2 \ldots$ entonces $ha_1 = ha_2$"), ¿debe haber un morfismo $B \xrightarrow{g} C$ tal que $h = g\circ f$?)

2. Un caso especial: los morfismos constantes

Supongamos ahora que B es un conjunto con solamente un elemento, así que f ya es conocida: lleva todos los elementos de A al único elemento de B. ¿Para cuáles morfismos h el problema de determinación tiene una solución?

$$\begin{tikzcd} & \odot \arrow[dr, dashed, "g?"] & \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "h"'] & & C \end{tikzcd}$$

De acuerdo al ejercicio 1, dicho morfismo h debe enviar todos los elementos de A al mismo elemento de C. Esto puede concluirse también en forma directa: como B tiene un solo elemento, un morfismo g de B a C es lo mismo que una elección de un elemento en C; y el morfismo compuesto enviará todos los elementos de A a ese elemento de C. Un morfismo tal que toma sólo un valor se llama morfismo *constante*.

Definición: *Un morfismo que puede ser factorizado a través de* **1** *se llama* **morfismo constante**.

3. Problemas de elección

Otro problema de división para morfismos consiste en buscar el otro factor, esto es, buscar f cuando g y h están dadas:

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, "g"] & \\ A \arrow[ur, dashed, "f?"] \arrow[rr, "h"'] & & C \end{tikzcd}$$

Éste se llama el *problema de elección* porque para encontrar un morfismo f tal que $g \circ f = h$, debemos elegir para cada elemento a de A un elemento b de B tal que $g(b) = h(a)$.

He aquí un problema de elección. Sean C un conjunto de ciudades, A el conjunto de las personas que viven en esas ciudades, y sea h el morfismo de A a C que le asigna a cada persona su lugar de residencia. Tomemos como B al conjunto de todos los supermercados y como el morfismo g la ubicación de los supermercados:

$$\begin{tikzcd} & \textit{Supermercados} \arrow[dr, "\textit{ubicación}"] & \\ \textit{Gente} \arrow[ur, dashed, "f?"] \arrow[rr, "\textit{residencia}"'] & & \textit{Ciudades} \end{tikzcd}$$

Para obtener una solución para este problema, cada persona debe elegir un supermercado ubicado en su ciudad. Debe quedar claro que mientras no haya ciudades pobladas que no tengan supermercados, el problema tiene una solución, y por lo general más de una.

Como ocurrió con el problema de determinación (ejercicio 1), hay un criterio para la existencia de morfismos de "elección":

Ejercicio 2
(a) Demuestre que si hay una f tal que $g \circ f = h$, entonces h y g satisfacen: para cualquier a en A hay al menos una b en B para la cual $h(a) = g(b)$.

(b) ¿Es cierto el recíproco? Es decir, si h y g satisfacen la condición anterior, ¿debe haber un morfismo f tal que $h = g \circ f$?

4. Dos casos especiales de división: secciones y retracciones

Un caso importante del problema de elección surge si el conjunto A es el mismo que C, y el morfismo h es el morfismo identidad.

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, "g"] & \\ A \arrow[ur, dashed, "f?"] \arrow[rr, "1_A"'] & & A \end{tikzcd}$$

Esto requiere que tengamos un morfismo $A \xrightarrow{f} B$ que elija para cada elemento a de A un elemento b de B para el cual $g(b) = a$. Esto es menos que ser un inverso para

g ya que sólo se pide una de las dos condiciones que se requieren para un inverso. Aun así, esta relación de f a g es de tal importancia que le hemos dado un nombre:

Definición: $A \xrightarrow{f} B$ *es una* **sección de** $B \xrightarrow{g} A$ *si* $g \circ f = 1_A$.

Una de las aplicaciones importantes de una sección es que ésta nos permite dar una solución al problema de elección para cualquier morfismo $A \xrightarrow{h} C$. ¿Cómo? Esto es una variante de: "Si tienes 1/2 no necesitas *dividir* por 2; puedes *multiplicar* por 1/2." Supongamos que tenemos un problema de elección, como el de los supermercados, y supongamos que el $B \xrightarrow{g} C$ dado tiene una sección s. Si dibujamos todos los morfismos que tenemos en un sólo diagrama externo,

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, shift left, "g"] & \\ A \arrow[ur, dashed, "f?"] \arrow[rr, "h"'] & & C \arrow[ul, shift left, "s"] \end{tikzcd}$$

vemos que hay una forma de ir de A a B: el morfismo compuesto $s \circ h$. Veamos si al poner $f = s \circ h$ obtenemos una solución; es decir, si $g \circ f = h$. Esto se puede verificar fácilmente haciendo el siguiente cálculo

$$\begin{aligned} g \circ f &= g \circ (s \circ h) && \text{(porque } f = s \circ h\text{)} \\ &= (g \circ s) \circ h && \text{(ley asociativa)} \\ &= 1_C \circ h && \text{(porque } s \text{ es una sección de } g\text{)} \\ &= h && \text{(ley identidad)} \end{aligned}$$

Este cálculo es otro ejemplo del álgebra de la composición de morfismos, pero debería parecerles familiar. Fue la mitad del cálculo con el que hemos mostrado que un problema de elección con un divisor invertible g tiene *exactamente una* solución. Aunque cada sección de g da una solución a cualquier problema de elección con g como divisor, por lo general hay otras soluciones además de aquellas dadas por las secciones de g (y secciones diferentes pueden dar la misma solución). Así, el número de secciones difiere del número de soluciones del problema de elección.

FÁTIMA: ¿Cómo se aplicaría esto al ejemplo de los supermercados?

Bien, una sección para el morfismo $g =$ *ubicación de los supermercados* le asigna a cada ciudad un supermercado *en esa ciudad*. Por ejemplo, imaginen que hay una cadena que tiene un supermercado en cada ciudad. Entonces una solución al problema de elección (la solución que proviene de la *sección* de g dada por la cadena) es que cada uno elije el supermercado de esa cadena en su ciudad. Notarán que aquellas soluciones al problema de elección que provienen de secciones son bastante aburridas: en cada ciudad, todo el mundo compra en el mismo supermercado. Lo mismo pasará para problemas de determinación y retracciones. Las retracciones dan soluciones a los problemas de determinación, como lo muestra el ejercicio 6 del artículo II, pero los casos interesantes de determinación son en general aquellos que no provienen de retracciones.

OMER: Parece ser que para el morfismo identidad el orden no debería importar, ¿o sí?

Me alegra que preguntes, porque es fácil cometer este error. Mientras que las leyes identidad son $1\circ f=f$ y $f\circ 1=f$, en donde parece que el orden carece de importancia, el orden es importante en ecuaciones como $f\circ g=1$. Para tenerlo todo limpiamente organizado, comparemos el problema de elección para el morfismo identidad con el problema de determinación para el morfismo identidad. Esto queda más claro si no les damos nombres a los conjuntos y morfismos (ya que cada vez que utilicen estas ideas los morfismos implicados pueden tener nombres diferentes) y solamente dibujamos los diagramas externos esquemáticos:

Sección

$$\begin{tikzcd} & \bullet \arrow[dr, "dado"] & \\ \bullet \arrow[ur, dashed, "?"] \arrow[rr, "1"'] & & \bullet \end{tikzcd}$$

elección

Retracción

$$\begin{tikzcd} & \bullet \arrow[dr, dashed, "?"] & \\ \bullet \arrow[ur, "dado"] \arrow[rr, "1"'] & & \bullet \end{tikzcd}$$

determinación

Pueden ver cómo podría surgir la confusión; la única diferencia es cuál morfismo es visto como dado. Hagamos un repaso.

Digamos que $A \xrightarrow{f} B$ es un morfismo.

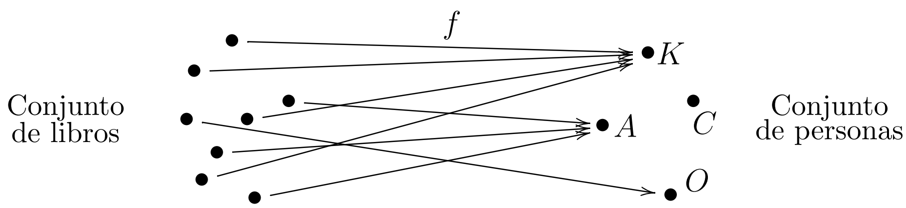
(a) Una *sección de* f es cualquier morfismo s tal que $f\circ s=1_B$.
(b) Una *retracción de* f es cualquier morfismo r tal que $r\circ f=1_A$.

Al comparar las definiciones, vemos que una sección de f no es lo mismo que una retracción de f. La simetría surge al notar que una sola relación entre dos morfismos puede ser descrita de dos maneras: si $g\circ f$ es un morfismo identidad podemos decir que g es una retracción de f o bien que f es una sección de g. La relación sección/retracción es como la relación tía/sobrina; decir que Penélope es una tía de Dolores es decir que Dolores es una sobrina de Penélope. Sólo tengan cuidado de no utilizar estas palabras en forma aislada. No pueden preguntar si un morfismo es un inverso, o sección, o retracción. Sólo tiene sentido preguntar si es un inverso (o sección o retracción) *de un morfismo especificado.*

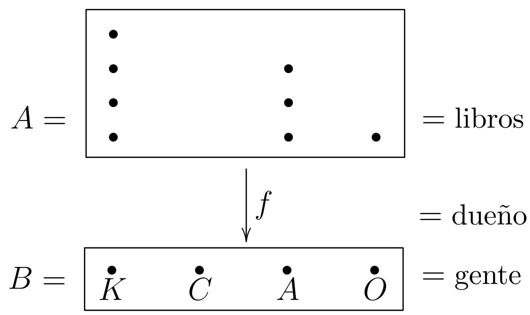
Intenten hacer los ejercicios 6 y 7 del artículo II para ver cómo una retracción da soluciones a problemas de determinación, y cómo una sección da soluciones a problemas de elección.

5. Apilar o clasificar

Para encontrar todas las secciones de un morfismo $A \xrightarrow{f} B$ dado, es útil ver al morfismo como una forma de "apilar" o "clasificar" a los elementos de A. He aquí un ejemplo. Supongamos que A es el conjunto de todos los libros en el aula y B el conjunto de gente en el aula. Tenemos un morfismo $A \xrightarrow{\textit{pertenece a}} B$ que le asigna a cada libro la persona que lo trajo a la clase. Una manera de ilustrar este morfismo es el diagrama interno:

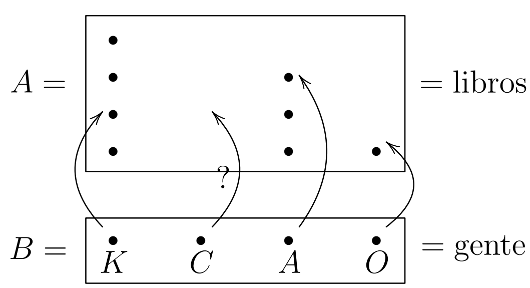


Pero se puede dibujar otro diagrama en el cual ponemos a toda la gente en una fila, y en una columna le colocamos a cada quien todos los libros que le pertenecen:



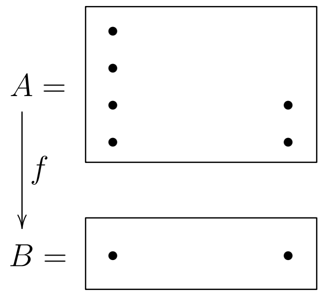
En este dibujo podemos interpretar fácilmente lo que hace f, y al mismo tiempo ver claramente la pila de libros que le pertenecen a cada estudiante. Acomodar el dominio y el codominio para obtener el “dibujo en pilas” podría implicar una gran cantidad de trabajo, pero una vez hecho esto, el dibujo es muy útil y, en principio, todo morfismo puede ser visto de esta manera.

Consideremos de nuevo las secciones y veamos cómo el dibujo en pilas de un morfismo nos puede ayudar a encontrar todas las secciones de ese morfismo. ¿Qué sería una sección del morfismo f que le asigna a cada libro la persona que lo trajo a la clase? Sería un morfismo que le asigne a cada persona uno de sus libros, tal como:



¡Ay! Chad no trajo libro alguno. No hay manera de asignarle a Chad uno de sus libros, entonces no hay una sección para f. Esta disposición en pilas nos permite ver de inmediato que este morfismo particular no tiene secciones. En general, para que un morfismo $f{:}A \to B$ pueda tener una sección es necesario que para cada elemento de B su pila correspondiente no esté vacía. En otras palabras, para cada elemento b de B necesitamos al menos un elemento a de A tal que $f(a)=b$.

El dibujo en pilas de un morfismo nos permite encontrar una fórmula para el número de secciones de un morfismo. Supongamos que f es como sigue:



Ejercicio 3
Dibuje los diagramas internos de todas las secciones de f.

Deben obtener ocho secciones, mucho menos que el número total de morfismos de B a A, que de acuerdo a la fórmula de Alicia es, ¿cuánto? Correcto, $6^2=36$. ¿Alguien tiene alguna idea del número de secciones que tiene un morfismo arbitrario?

CHAD: Se multiplica el número de elementos en una pila por el número de elementos en la siguiente y así sucesivamente.

Correcto. Hay que multiplicarlos porque la elección que hagan en cualquier pila es independiente de las elecciones que hagan en las otras pilas.

SHERI: Entonces, si un punto tiene su pila vacía, ¿qué se hace?

También la tomas en cuenta. Si esa pila tiene cero elementos, uno de los números que se multiplican es cero. Y, por supuesto, el resultado es cero: no hay secciones.

Ahora bien, como vimos antes, la misma ecuación que dice que s es una sección para f significa que f es una retracción para s, así que siempre que tengamos un "diagrama conmutativo" (esto es, que las dos formas de ir de B a B den el mismo resultado)

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "s"] \arrow[rr, bend right, "1_B"'] & A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

estaremos hablando de una pareja sección-retracción.

DANILO: Si quieres expandir ese diagrama para incluir a la retracción, ¿tendrías que poner a la identidad de A?

No, tal y como está, el diagrama significa ambas cosas: que s es una sección para f y que f es una retracción para s. La identidad de A estaría implicada sólo si tuviéramos una retracción para f. Ya vimos que cuando ambos diagramas conmutan, esto es, que si *también* tenemos $s \circ f = 1_A$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "1_A"'] & B \arrow[r, "s"] & A \end{tikzcd}$$

entonces s es la única sección de f y se llama el *inverso* de f.

6. Apilar en un restaurante chino

Permítanme explicarles un ejemplo interesante de apilamiento basado en la práctica de un restaurante chino en la ciudad de Nueva York que solíamos visitar después del seminario de matemáticas. El ejemplo ilustra que el uso de la categoría de conjuntos puede ser más directo que el traducir todo en términos de números, que son más abstractos.

En este restaurante, el apilamiento de los platos de acuerdo a su forma es utilizado conscientemente, y de manera sistemática, para determinar la cuenta total para cada mesa de clientes sin tener que hacer absolutamente cuenta alguna por escrito.

En cualquier restaurante tenemos el morfismo básico

$$\boxed{\begin{array}{c}\textit{Tipos de}\\ \textit{platillo}\end{array}} \xrightarrow{\ \textit{precio}\ } \boxed{\begin{array}{c}\textit{Cantidades de}\\ \textit{dinero}\end{array}}$$

que podría asociarle cinco dólares a "cerdo moo shu", un dólar a "arroz al vapor", etcétera.

Cada grupo específico de clientes en una mesa específica en una ocasión específica da lugar (al ordenar y consumir) a otro morfismo

$$\boxed{\begin{array}{c}\textit{Platillos consumidos}\\ \textit{en la mesa}\end{array}} \xrightarrow{\quad \textit{tipo} \quad} \boxed{\begin{array}{c}\textit{Tipos de}\\ \textit{platillo}\end{array}}$$

el cual no es ni inyectivo ni suprayectivo porque más de un platillo del mismo tipo pudo haber sido consumido y también algunos tipos de platillos pudieron no haber sido ordenados. Los precios de los platillos consumidos en la mesa en esa ocasión están dados por el morfismo compuesto $f = \textit{precio} \circ \textit{tipo}$:

$$\begin{tikzcd} \boxed{\begin{array}{c}\textit{Platillos consumidos}\\ \textit{en la mesa}\end{array}} \arrow[d, "\textit{tipo}"'] \arrow[dr, "f"] & \\ \boxed{\begin{array}{c}\textit{Tipos de}\\ \textit{platillo}\end{array}} \arrow[r, "\textit{precio}"] & \boxed{\begin{array}{c}\textit{Cantidades de}\\ \textit{dinero}\end{array}} \end{tikzcd}$$

La cuenta total para la mesa se obtiene como la suma ($\sum$) de los productos

$$\sum_t \textit{precio}(t) \cdot (\text{tamaño de la pila de } \textit{tipo} \text{ sobre } t)$$

donde t varía sobre todos los tipos de platillos. Pero, al conocer f, la cuenta total para la mesa también se puede obtener utilizando f solamente, como la suma de los productos

$$\sum_x x \cdot (\text{tamaño de la pila de } f \text{ sobre } x)$$

donde x varía sobre cantidades de dinero. En la mayoría de los restaurantes la especificación de f se registra por escrito en un pedazo de papel, y la aritmética la hace el mesero y la verifica el cajero.

En este restaurante chino particular, el problema de lograr un servicio rápido, a pesar de que los cocineros, clientes, meseros y cajeros podrían hablar distintos idiomas, queda limpiamente resuelto sin tener que escribir palabras ni números (y se prescinde completamente de los pedazos de papel); el morfismo f queda en cambio asentado de una manera física y directa al apilar los platos.

De hecho f se calcula mediante otro morfismo $\overline{f}$, construido como el morfismo compuesto de dos morfismos $\overline{\mathit{precio}}$ y $\overline{\mathit{tipo}}$. La clave para el plan es tener varias formas diferentes de platos: tazones redondos pequeños, tazones redondos grandes, platos cuadrados, platos redondos, platos triangulares, platos elípticos, etc. (de tal forma que sea difícil apilar un plato encima de un plato de forma diferente), y que los cocineros en la cocina siempre pongan un tipo dado de comida en platos de determinada forma. Entonces se establece un morfismo

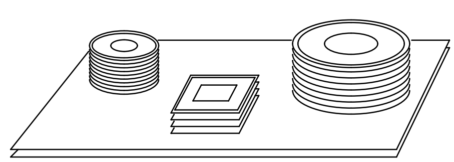
$$\begin{tikzcd} \boxed{\begin{array}{c}\textit{Tipos de}\\ \textit{platillo}\end{array}} \arrow[r, "\mathit{forma}"] & \boxed{\begin{array}{c}\textit{Formas de}\\ \textit{plato}\end{array}} \end{tikzcd}$$

pero no arbitrariamente: se hace de tal manera que el precio de un platillo esté *determinado* por la forma del plato en el que es servido. Es decir, hay un morfismo $\overline{\mathit{precio}}$ para el cual $\mathit{precio} = \overline{\mathit{precio}} \circ \mathit{forma}$:

$$\begin{tikzcd} \boxed{\begin{array}{c}\textit{Tipos de}\\ \textit{platillo}\end{array}} \arrow[r, "\mathit{forma}"] \arrow[dr, "\mathit{precio}"'] & \boxed{\begin{array}{c}\textit{Formas de}\\ \textit{plato}\end{array}} \arrow[d, dashed, "\overline{\mathit{precio}}"] \\ & \boxed{\begin{array}{c}\textit{Cantidades de}\\ \textit{dinero}\end{array}} \end{tikzcd}$$

El cajero conoce el morfismo $\overline{\mathit{precio}}$, pero no necesita conocer los morfismos *forma* ni *precio*.

Los meseros toman de los cocineros muchos platos diferentes y los circulan por el restaurante, los comensales en las mesas seleccionan los platillos que les apetecen sin que nadie anote nada. Después de usados, los platos se apilan en la mesa de acuerdo a su forma.



Entonces, cuando los comensales en la mesa han terminado de cenar, quedan los platos vacíos apilados de acuerdo a su forma, como se muestra en el dibujo. Esto define un morfismo cuyo diagrama externo es

$$\begin{array}{c} \boxed{\begin{array}{c}\textit{Platos vacíos que se}\\ \textit{dejaron en la mesa}\end{array}} \\ \Big\downarrow \overline{\mathit{tipo}} \\ \boxed{\begin{array}{c}\textit{Formas de}\\ \textit{plato}\end{array}} \end{array}$$

Este morfismo, que resulta de las elecciones particulares hechas por los clientes sentados en una mesa específica, se puede componer con el morfismo $\overline{\mathit{precio}}$ que resulta de la organización general del restaurante, para producir un morfismo $\overline{f}$ (con su propia estructura abstracta de apilamiento)

$$\begin{tikzcd} \boxed{\begin{array}{c}\textit{Platos vacíos que se}\\ \textit{dejaron en la mesa}\end{array}} \arrow[d, "\overline{\mathit{tipo}}"'] \arrow[dr, "\overline{f}"] & \\ \boxed{\begin{array}{c}\textit{Formas de}\\ \textit{plato}\end{array}} \arrow[r, "\overline{\mathit{precio}}"] & \boxed{\begin{array}{c}\textit{Cantidades de}\\ \textit{dinero}\end{array}} \end{tikzcd}$$

Un vistazo a la mesa es suficiente para que el cajero calcule rápidamente la cuenta total como la suma de productos

$$\sum_p \overline{\mathit{precio}}(p) \cdot (\text{tamaño de la pila de } \overline{\mathit{tipo}} \text{ sobre } p)$$

(donde p varía sobre todas las formas de plato). El total también puede calcularse utilizando solamente el morfismo $\overline{f}$ ya que

$$\begin{aligned} &\sum_p \overline{\mathit{precio}}(p) \cdot (\text{tamaño de la pila de } \overline{\mathit{tipo}} \text{ sobre } p) \\ &\qquad = \sum_x x \cdot \text{tamaño de la pila } \overline{f} \text{ sobre } x \end{aligned}$$

donde x varía sobre las posibles cantidades de dinero.

Para demostrar que la última fórmula en términos de $\overline{f}$ da el mismo resultado que la más comúnmente usada fórmula anterior en términos de f, sólo necesitamos ver que para cada cantidad x, los tamaños de las "pilas" de f y $\overline{f}$ son iguales. Pero esto se sigue del hecho más básico de que f y $\overline{f}$ son ellos mismos "isomorfos", como lo explicaremos a partir del siguiente diagrama que muestra todos nuestros morfismos.

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\begin{array}{c}\textit{Platillos consumidas}\\ \textit{en la mesa}\end{array}} \arrow[rr, "cenar", "\cong"'] \arrow[d, "tipo"'] \arrow[drr, phantom, "\text{PARTICULAR}"] \arrow[ddr, bend right=60, "f"'] & & \boxed{\begin{array}{c}\textit{Platos vacíos que se}\\ \textit{dejaron en la mesa}\end{array}} \arrow[d, "\overline{tipo}"] \arrow[ddl, bend left=60, "\overline{f}"] \\
\boxed{\begin{array}{c}\textit{Tipos de}\\ \textit{platillo}\end{array}} \arrow[rr, "forma"] \arrow[rr, phantom, shift right=6ex, "\text{GENERAL}"] \arrow[dr, "precio"'] & & \boxed{\begin{array}{c}\textit{Formas de}\\ \textit{plato}\end{array}} \arrow[dl, "\overline{precio}"] \\
& \boxed{\begin{array}{c}\textit{Cantidades de}\\ \textit{dinero}\end{array}} &
\end{tikzcd}$$

Aquí hemos introducido explícitamente el morfismo *cenar*, que transforma cada platillo que se consume en la mesa en un plato vacío. Entonces es claro que

$$forma \circ tipo = \overline{tipo} \circ cenar$$

en el cuadrado "particular" y $precio = \overline{precio} \circ forma$ en el triángulo "general". El morfismo *forma* que ocurre en estas dos ecuaciones es el contacto clave del restaurante entre lo general y lo particular. También es crucial en la demostración, por la asociatividad y por la definición de f y $\overline{f}$, el hecho de que

$$f = \overline{f} \circ cenar$$

Pero por cada plato vacío en la mesa hubo exactamente un platillo consumido, así que el morfismo *cenar* tiene un inverso. Podemos decir que los dos morfismos f y $\overline{f}$ (con codominio *cantidades de dinero*) son isomorfos, lo que implica que los tamaños de sus pilas sobre cada x son los mismos.

Mientras que conocer a fondo la explicación detallada de estas relaciones puede llevar un poco de tiempo, en la práctica los meseros pueden trabajar a una velocidad sorprendente y los comensales también quedan muy satisfechos. Más aún, el cajero puede realizar la $\overline{f}$-suma por lo menos tan rápido como los cajeros en otros restaurantes realizan la f-suma, con lo que la expresión francesa "*l'addition s'il vous plaît*" adquiere un sorprendente giro chino.

Este ejemplo ilustra un principio general: aun a pesar de que los números cargan menos información que los conjuntos, y de que puede parecer más sencillo operar con números, frecuentemente resulta ser más natural y más eficiente usar conjuntos y morfismos directamente.

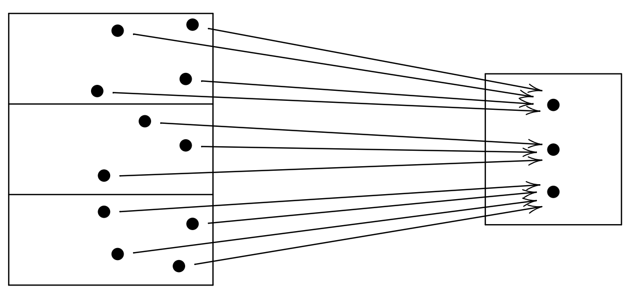
Sesión 6

Dos aspectos generales del uso de morfismos

1. Clasificación del dominio mediante una propiedad

Los conjuntos abstractos son poco más que números, pero esta pequeña diferencia es suficiente para permitirles tener estructuras fructíferas que los números no pueden tener. En el ejemplo del restaurante chino que discutimos en la sesión 5, utilicé la palabra "apilar". Quisiera ahora introducir algunas otras palabras que frecuentemente se utilizan para expresar la misma idea.

Para un morfismo general $X \xrightarrow{g} B$, podemos decir que g genera una **clasificación** de X en B "tipos", o que el morfismo g es una clasificación de X mediante B. (Noten que hablamos de "B tipos" como si B fuera un número.) Una vez que g está dada, cada elemento b de B determina cuáles elementos de X son de **tipo** b, es decir, aquellos elementos cuya imagen bajo g es b. Por ejemplo, supongamos que B tiene tres elementos. Entonces, sin cambiar el morfismo g, podemos acomodar a los elementos de X en los tres tipos de tal forma que g podría ilustrarse así:



(Para otros morfismos g algunos de los bloques podrían ser vacíos.) Aquí hemos agrupado juntos a todos los elementos de X que van al mismo elemento (tipo) en B.

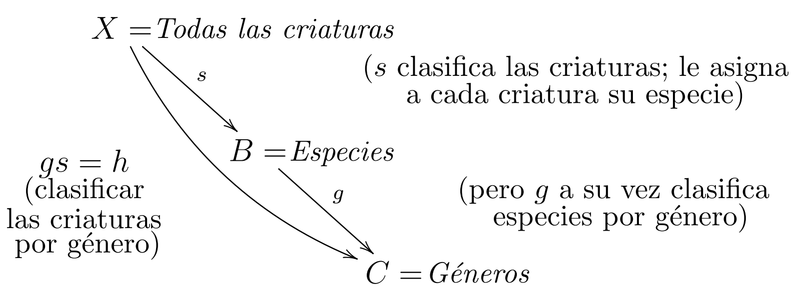
Con esta manera de ver un morfismo podemos decir que g es una **propiedad** en X con valores en B. Esto es lo mismo que decir que g **apila** los elementos de X en B pilas. El número de pilas siempre es igual al número de elementos de B, y los elementos de X son apilados. Un ejemplo es el morfismo obvio del conjunto de presidentes de los Estados Unidos al conjunto de los partidos políticos que han existido en este país. Este morfismo le asigna a cada presidente el partido político al que perteneció. Los presidentes son clasificados por los partidos en el sentido de que a cada partido político le corresponde un tipo de presidentes, a saber, los presidentes que pertenecieron a ese partido. Algunos tipos están vacíos ya que hay algunos partidos cuyos miembros nunca han sido presidentes.

Las pilas se llaman también **fibras** por analogía con la agricultura, en la cual cada pila se concibe como si tuviera la forma de una línea o fibra. Decimos entonces que X se divide en B fibras. Si una fibra es vacía, el morfismo no tiene secciones. Más aún, para morfismos entre conjuntos finitos el recíproco también es verdadero: si ninguna fibra es vacía, entonces el morfismo tiene una sección. Para un morfismo de conjuntos sin fibra vacía se usa también la palabra **partición**.

Por lo tanto, los términos "apilamiento" y "clasificación" se ven aquí como sinónimos, mientras que "partición" tiene un significado más restringido. Todos estos términos destacan que un morfismo dado $X \longrightarrow B$ produce una "estructura" en el *dominio* X, y cuando queramos destacar este efecto nos podremos referir al morfismo mismo como una **propiedad** B-valuada. Un ejemplo es el morfismo del conjunto de las personas al conjunto de los colores, que le asigna a cada persona su color de cabello. La gente queda clasificada por la propiedad del color del cabello.

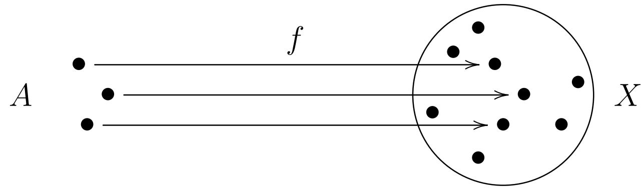
Ejemplo

Los tipos pueden a su vez ser clasificados. Sea X el conjunto de todas las criaturas y B el conjunto de las especies. Entonces $X \xrightarrow{s} B$ le asigna a cada criatura la especie a la que pertenece. Podemos ir más lejos: las especies son clasificadas en géneros por un morfismo $B \xrightarrow{g} C$ que le asigna a cada especie su género; y al componer los dos morfismos obtenemos una clasificación menos refinada $h = g \circ s$ de X.



2. Nombrar o parametrizar el codominio; figuras

Todas las palabras que hemos discutido hasta ahora expresan una forma de ver a los morfismos. Pero existe un segundo punto de vista que uno puede tomar acerca de un morfismo. Dado un morfismo $A \xrightarrow{f} X$, podemos decir que f es una familia de A elementos de X. Por ejemplo, supongamos que A tiene tres elementos. Entonces un morfismo



es una familia de tres elementos de X. (Algunos de los tres elementos pueden coincidir en otros ejemplos.) Otra vez, utilizamos A como si fuera un número. Otra palabra para este punto de vista (que proviene de la geometría) es "figura": un morfismo de A a X es una **figura** de forma A en X. También podemos decir **A-elemento**, que significa lo mismo que "figura de forma A".

Un antiguo prinicipio de las matemáticas mantiene que una figura es el *locus* de un elemento variable. Una familia A-parametrizada $A \to X$ es un "elemento variable" debido a que

(a) si la evaluamos en varios $\mathbf{1} \to A$, la variaremos a través de varios puntos de X; más en general, si remplazamos a $\mathbf{1}$ por cualquier objeto D,
(b) el morfismo $A \to X$ produce varios D-elementos de X, uno para cada $D \to A$. Por ejemplo, podemos tomar $D=A$ y el morfismo identidad $D \to A$, revelando así que
(c) el elemento variable, como una unidad, es la figura sola o el elemento $A \to X$ mismo.

También podemos decir que un morfismo $A \to X$ nombra a los elementos de X con A, o que es una lista de los elementos de X hecha con A. He aquí un ejemplo. Supongamos que le pedimos a cada estudiante que señale un país en el globo terráqueo. Obtenemos entonces un morfismo del conjunto de estudiantes al conjunto de países, y en una discusión podríamos hablar del "país de Sheri", el "país de Danilo", etc. No todos los países se nombran necesariamente y algunos países podrían ser mencionados más de una vez. La palabra "lista", en general, tiene la connotación de "orden"; esto no es lo que significa en esta discusión. Otras dos palabras para este punto de vista acerca de los morfismos son "ejemplificar" (en el sentido de "tomar una muestra") y "parametrizar": decimos que dar $A \xrightarrow{f} X$ es parametrizar parte de X al recorrer A.

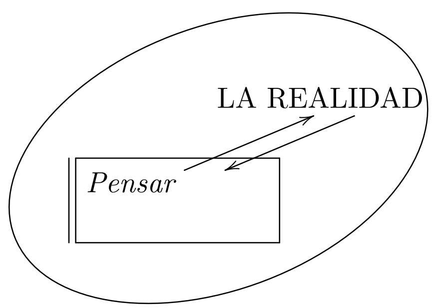
El ejemplo anterior, en el que utilizamos a los estudiantes como nombres de países, destaca que nombrar o listar se hace con frecuencia sólo por conveniencia y puede no tener un significado permanente o inherente, ya que no preguntamos por qué cada estudiante eligió determinado país. En otros ejemplos, el nombrar puede tener un significado más permanente. Por ejemplo, sea A el conjunto de todos los *símbolos* para las fracciones, que simplemente son *parejas* de números enteros $3/5$, $2/7$, $13/4$, $2/6$, $1/3, \ldots$, y sea B el conjunto de todas las longitudes posibles. Podemos utilizar los símbolos para las fracciones para nombrar las longitudes con ayuda de una unidad que elijamos tal como el metro, de la manera siguiente. El morfismo $A \to B$ le asigna a la fracción $3/4$ la longitud que se obtiene al dividir el metro en 4 partes iguales, y después desplegar 3 de éstas, mientras que $f(3/5)$ es la longitud que se obtiene al dividir el metro en 5 partes y después desplegar 3 de *ésas*, etcétera. Muchos nombres nombran la misma longitud ya que $f(2/4)=f(3/6)$, pero $2/4$ y $3/6$ son nombres diferentes. La mayoría de las longitudes, tales como $\sqrt{2}$ metros, no son nombrados en absoluto por f.

Los términos "nombrar", "listar", "tomar una muestra", "parametrizar" destacan que un morfismo $A \longrightarrow X$ produce una "estructura" en el *codominio* X, y cuando queramos destacar este efecto nos podemos referir al morfismo mismo como a una figura de forma A (o como a una familia A-parametrizada) en el codominio.

El punto de vista acerca de los morfismos indicado por los términos "nombrar", "listar", "ejemplificar" y "parametrizar" debe considerarse como opuesto al punto de vista que indican las palabras "apilar", "clasificar", "hebrar" o "hacer una partición". El sentido de esta oposición puede ser explicado filosóficamente de la siguiente manera.

3. Explicación filosófica de los dos aspectos

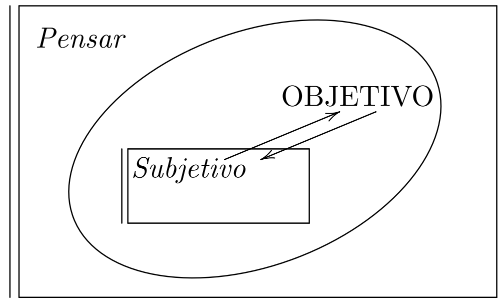
Una explicación de estos dos aspectos de un morfismo proviene de la filosofía. La **realidad** consiste de peces, ríos, casas, fábricas, campos, nubes, estrellas, esto es, cosas en su movimiento y desarrollo. Hay una parte especial de la realidad: por ejemplo, las palabras, las discusiones, los libros de apuntes, el lenguaje, los cerebros, las computadoras, los libros, la televisión; los cuales, en su movimiento e interacción, son parte de la realidad, y sin embargo tienen una relación especial con la realidad, a saber, la **reflejan**.



Pensar es salir y mirar, manipular, percibir, considerar...

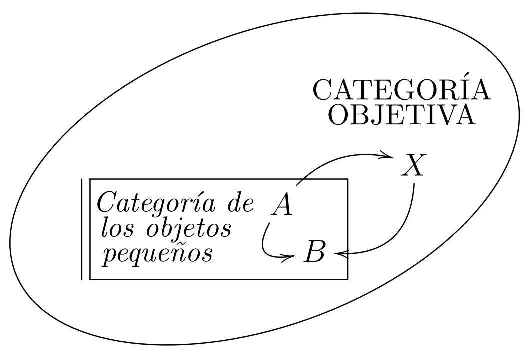
El resultado de este proceso de reflexión es el **conocimiento**, y la totalidad del conocimiento acumulado, con sus relaciones internas, es la **ciencia** (uno de cuyos propósitos es el de manipular más ampliamente la realidad). La ciencia es de hecho un complejo de ciencias interrelacionadas que se concentran en distintos aspectos de la realidad.

Una de las ciencias particulares es la **filosofía**, que refleja (como conocimiento general) esta relación particular dentro de la realidad, la relación entre el pensamiento y la realidad. Así que dentro del complejo de todo el pensamiento científico está la relación particular entre lo **objetivo** y lo **subjetivo**:



En lo objetivo nos esforzamos por tener una imagen lo más clara posible de la realidad, cómo es y cómo se mueve en sí misma, independiente de nuestros pensamientos particulares; en lo subjetivo nos esforzamos por conocer tan claramente como sea posible las leyes del pensamiento (como se definió antes) en sí mismo, llegando a las leyes de la gramática, de la lógica pura, del álgebra, etcétera.

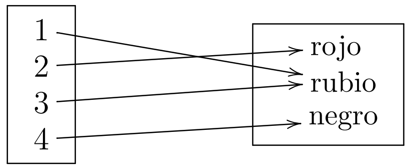
Una reflexión adicional dentro del pensamiento matemático acerca de esta relación entre lo objetivo y lo subjetivo surge cuando dentro de una categoría objetiva dada (tal como la categoría de los conjuntos) seleccionamos algunos de los objetos A, B (por ejemplo, los conjuntos con menos de cuatro elementos) para utilizarlos como instrumentos subjetivos en la investigación de objetos más generales, tales como el conjunto de todas las criaturas, todos los países, etcétera. Entonces un objeto seleccionado A puede ser utilizado como el dominio para hacer una lista de los elementos de X, y un objeto seleccionado B puede ser utilizado como el codominio para las propiedades de X. Las composiciones de tales listas y propiedades se convierten en estructuras expresadas en términos de morfismos entre los objetos seleccionados A, B, ... mismos, y estas estructuras registran como conocimiento los resultados de investigar a X.



Con una especificación tal de una subcategoría de objetos "pequeños" dentro de todos los objetos, las dos maneras de considerar un morfismo se convierten ya no sólo en dos meras "actitudes", sino en una diferencia real: los morfismos cuyo dominio es pequeño (listas) en contraste con los morfismos cuyo codominio es pequeño (propiedades). Por supuesto, si X mismo resulta ser pequeño, aún tenemos dos aspectos: una propiedad de índices es lo mismo que una lista de valores

$$I \xrightarrow{h} V$$

por ejemplo, el morfismo



puede ser un registro del morfismo compuesto de dos morfismos a través de algún conjunto X de gente real; tomamos una I-muestra de gente en X y después observamos su color de cabello; a partir únicamente de este morfismo (esto es, sin investigaciones adicionales, registradas por morfismos similares) no podemos determinar —y esto podría ser crucial en una investigación criminal— si la primera y la tercera persona eran la misma persona o si simplemente tenían el mismo color de cabello. La "lista h de valores" resultante tiene una repetición, o (equivalentemente) la "propiedad h de índices" tiene un tipo con más de un elemento.

Sesión 7

Isomorfismos y coordenadas

1. Un uso de los isomorfismos: sistemas de coordenadas

La idea de "lo subjetivo dentro de lo objetivo", o "lo familiar dentro de lo general", que discutimos en la última sesión, es particularmente simple si el morfismo que nombra algunos elementos de un objeto es un isomorfismo. Es decir, un isomorfismo de un objeto "conocido" A a un objeto X nos permite conocer a X también. Para que concuerden con las aplicaciones, démosle al isomorfismo y a su inverso estos nombres:

$$A \underset{\textit{coordenada}}{\overset{\textit{posición}}{\rightleftarrows}} X$$

$$\textit{coordenada} \circ \textit{posición} = 1_A \quad \text{y} \quad \textit{posición} \circ \textit{coordenada} = 1_X$$

He aquí un ejemplo. Imaginen una línea geométrica L, que se extiende para siempre en ambas direcciones. Con frecuencia es útil *elegir* un isomorfismo del conjunto $\mathbb{R}$ de números reales a la línea L. La manera acostumbrada de hacer esto es eligir primero un punto p en L, llamado un "origen", y decidir que $\textit{posición}(0) = p$. Elijan también una "vara para medir", o unidad de distancia (pie, metro, año luz, etcétera.), y elijan una dirección en L para llamarla la dirección "positiva". Una vez hechas estas elecciones, obtenemos un morfismo

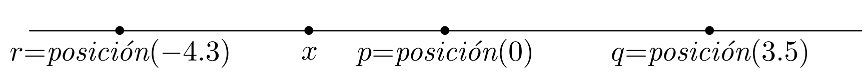
$$\mathbb{R} \xrightarrow{\textit{posición}} L$$

de una manera que probablemente les sea familiar. Por ejemplo, si sus elecciones son como las que se listan abajo, entonces $\textit{posición}(3.5)$ es el punto q y $\textit{posición}(-4.3)$ es el punto r.

$\vdash\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!\dashv$ unidad de distancia elegida

$\longrightarrow$ dirección positiva elegida

p (abajo) origen elegido



La extraordinaria utilidad del morfismo $\mathbb{R} \xrightarrow{\textit{posición}} L$ proviene de su invertibilidad; hay un inverso (y por lo tanto exactamente un inverso) para *posición*:

$$\mathbb{R} \xleftarrow[\textit{coordenada}]{} L$$

que le asigna a cada punto un número. (¿Qué es *coordenada*(x), aproximadamente, para el punto x en el dibujo?)

Consideramos a $\mathbb{R} \xrightarrow{posición} L$ como si “nombrara” a los puntos en la línea, así que el morfismo inverso *coordenada* le asigna a cada punto su nombre numérico. (La decisión sobre qué objetos han sido incorporados en nuestro reino “subjetivo” no queda fija para siempre. Euclides hubiera encontrado más natural tratar a la línea geométrica como conocida, y usar puntos como nombres para los números.)

Hay otros isomorfismos bien establecidos que tienen a $\mathbb{R}$ como dominio. Decir que Colón zarpó hacia América en 1492, depende de que hayamos fijado un isomorfismo de $\mathbb{R}$ a la “línea del tiempo.” (¿Cuál es la elección del origen, de la dirección positiva y de la unidad de “distancia”, que están implicadas en la especificación de este isomorfismo? ¿Cuáles de éstos le parecerían naturales a un habitante de otro planeta?) Si han leído artículos de divulgación de la teoría de la relatividad, dudarían de qué tan bien establecida está la línea del tiempo, por no mencionar un isomorfismo de ésta a $\mathbb{R}$. Sin embargo, tal isomorfismo ha resultado ser extremadamente útil. Los conductores de carreras de automóviles, los historiadores y los geólogos están igualmente renuentes a desprenderse de él. Las teorías científicas modernas acerca del tiempo aún toman nuestra descripción como una excelente primera aproximación a una teoría más refinada.

Regresemos a la geometría. La idea cartesiana de utilizar un isomorfismo de $\mathbb{R}^2$, las parejas (x, y) de números reales, al plano geométrico P fue esbozada en el artículo II. (¿Qué elecciones se necesitan para especificar tal isomorfismo?)

$$\mathbb{R}^2 \underset{coordenada}{\overset{posición}{\rightleftarrows}} P$$

Si escriben “*posición*$(2, 1.5)$” en una computadora programada para hacer gráficas, aparecerá un punto en la pantalla. La computadora muestra en realidad el resultado de aplicar *posición* a $(2, 1.5)$. Pero antes de todo esto, le tienen que decir a la computadora qué morfismo particular *posición*, de parejas de números al plano de la pantalla, desean utilizar. Deben darle sus elecciones del origen, la unidad de distancia, e incluso las direcciones de los ejes, si es que no quieren que sean la horizontal y la vertical. En este ejemplo son pertinentes dos morfismos adicionales, que pueden ser llamados *primera* y *segunda*:

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{primera} \mathbb{R} \qquad\qquad \mathbb{R}^2 \xrightarrow{segunda} \mathbb{R}$$
$$primera(x, y) = x \qquad\qquad segunda(x, y) = y$$

Por ejemplo, *primera*$(3.12, 4.7) = 3.12$. Ahora bien, si q es un punto en el plano, podemos componer estos tres morfismos

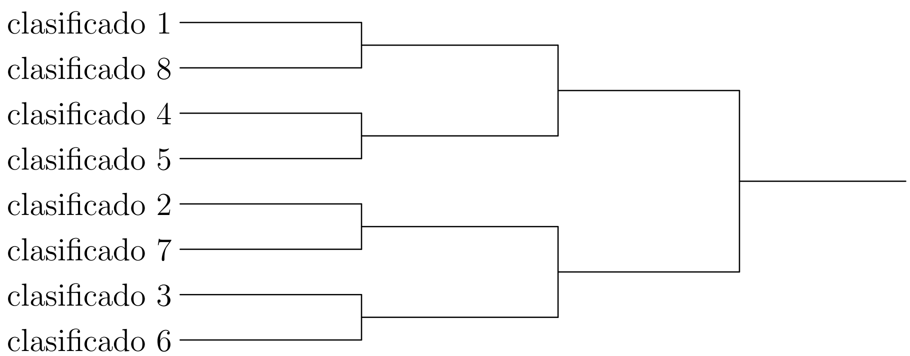
$$\mathbf{1} \xrightarrow{q} P \xrightarrow{coordenada} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{primera} \mathbb{R}$$

para obtener un número, $primera \circ coordenada \circ q$, llamado, de manera bastante natural, "la primera coordenada de q".

He aquí un ejemplo que no implica a $\mathbb{R}$. En general, los torneos de tenis están diseñados de tal forma que la pérdida de un juego elimina al perdedor. Para simplificar, tomemos un torneo de ocho jugadores. Los "corchetes" están configurados como se indica en el siguiente diagrama. Los nombres de los ocho jugadores deben listarse en la columna izquierda. En la primera ronda cada "pareja en corchetes" jugará un juego y el nombre del ganador se colocará en el espacio adyacente en la segunda columna, y después se repetirá todo el proceso con los cuatro jugadores restantes, etcétera. Sin embargo, antes de que el torneo pueda comenzar, está la tarea de sembrar a los jugadores, esto es, de elegir un isomorfismo de conjuntos finitos (y por tanto a su inverso también):

$$\{1,2,3,4,5,6,7,8\} \underset{\textit{sembrar}}{\overset{\textit{clasificar}}{\rightleftarrows}} J = \textit{conjunto de jugadores}$$

Por ejemplo, *clasificar*(1) podría ser Venus Williams, por lo que la sembrada número 1 sería Venus. Así, sin importar quiénes sean los jugadores, se los coloca en corchetes de acuerdo al siguiente esquema:



Se hace todo esfuerzo para hacer el sembrado de acuerdo a las reglas, de tal manera que el mejor jugador tal y como éste es juzgado en términos de su actuación pasada, sea sembrado el número uno, el siguiente mejor el número dos, y así sucesivamente. (Notarán en este ejemplo un aspecto de lo "particular en contraste con lo general". La asignación de números a las posiciones en el esquema anterior es general, y se aplica a cada torneo de ocho jugadores, mientras que el isomorfismo *sembrar* es particular con relación a las actuaciones pasadas de los ocho jugadores que participan en este torneo.) A propósito, ¿pueden encontrar alguna explicación racional para la peculiar clasificación anterior? ¿Cuál podría ser un esquema por clasificación que sea adecuado para cuatro jugadores, o para dieciséis jugadores?

El resto de nuestra discusión se aplica a todos los ejemplos. Una vez que un sistema de coordenadas, una pareja

$$A \underset{\textit{coordenada}}{\overset{\textit{posición}}{\rightleftarrows}} X$$

de morfismos inversos el uno del otro, es establecido, tendemos a pasar libremente de A a X y viceversa como si fueran el mismo objeto. En el ejemplo del plano hablamos de "el punto $(2, 3.7)$", con lo que queremos decir "el punto *posición*$(2, 3.7)$". En el torneo de tenis, decimos: "Ha habido una victoria inesperada; el número ocho venció al número uno." Una práctica tan común, que rara vez causa confusión (pero véase "abusos" más adelante), debe tener su explicación y, de hecho, la tiene. Una vez que hemos *fijado* un isomorfismo $A \xrightarrow{f} X$, es inofensivo tratar a A y a X como si fueran el mismo objeto, precisamente porque tenemos morfismos f y f^{-1} para "traducir". Por ejemplo, si queremos especificar un morfismo $X \xrightarrow{g} Y$ podemos en cambio especificar un morfismo $A \xrightarrow{G} Y$, y todos los que estén enterados del morfismo elegido entenderán que lo que queremos decir es el morfismo compuesto $X \xrightarrow{f^{-1}} A \xrightarrow{G} Y$. Pero ¿por qué importunar a todos para que hagan esta traducción? No deberíamos hacerlo, a menos que A sea un objeto "mejor conocido" que X, esto es, un objeto incorporado en nuestra categoría "subjetiva" dentro de la gran categoría "objetiva". O, como en el ejemplo del tenis, podría ocurrir que el objeto A le sea más familiar a la audiencia que el objeto X. Alguien que entienda los torneos en general, pero que no haya visto ninguno en años recientes, podría no sorprenderse si Arantxa vence a Venus, y sin embargo entender que es digno de comentario si el número uno resulta derrotado por el número ocho. Noten, sin embargo, que esto es así solamente porque el isomorfismo *clasificar* de los números a los jugadores no fue arbitrario. En un torneo amistoso en la escuela, podrían asignarse números a jugadores en forma azarosa; en tal caso, si el número uno es vencido por el número ocho, esto no resultaría sorprendente. Nuestro sembrado del torneo profesional no fue solamente un isomorfismo de conjuntos, sino un isomorfismo en la categoría de los "conjuntos ordenados", conjuntos cuyos elementos están dispuestos en un orden que debe ser "respetado" por los morfismos de la categoría. El estudio de varios tipos de "estructura", y de las categorías a las que dan origen, será un tema recurrente en el resto del libro; ustedes verán cómo hacer precisa esta idea acerca de "respetar la estructura".

2. Dos abusos de los isomorfismos

Como uno de los usos principales de los isomorfismos es el de dar sistemas de coordenadas, se esperaría que los abusos principales de los isomorfismos provengan de este uso, y así es. Hay dos errores fundamentales que hay que evitar. Éstos ocurren con mayor frecuencia cuando el objeto "familiar" A es algún conjunto de números (o cuando está relacionado con los números, como $\mathbb{R}^2$ en nuestro ejemplo del "plano"). Estén alertas ante estos abusos cuando sospechen que las matemáticas no están siendo aplicadas correctamente.

El primer abuso consiste en suponer que un isomorfismo de conjuntos $A \longrightarrow X$ significa que alguna estructura adicional que A tenga, por ejemplo, en virtud de ser un conjunto de números, tendrá sentido en X. Un ejemplo lo vimos anteriormente:

no es ni un honor ni una ventaja el ser colocado en un torneo en el rango número uno si los rangos están hechos al azar. De manera similar, identificar puntos en una línea con números no hace que el añadir dos puntos para obtener un tercero sea una operación razonable.

El segundo abuso es más sutil, e implica a un objeto familiar A y a dos objetos X y Y coordenados por A. Les daré sólo un ejemplo al cual han estado sujetos muchos estudiantes. (¡Espero que ustedes no!) El físico Richard Feynman se alegró al ver que el libro de texto de primaria de su hijo le otorgaba significado a números grandes listando las distancias de los planetas al sol, las masas de los planetas y otros datos astronómicos diversos. Pero entonces, para su consternación, seguían unos ejercicios de este tipo: suma la distancia de Venus al Sol, la masa de Marte, y la . . . . Vaya, ustedes entienden lo que quiero decir. Sólo parecía tener sentido sumar una distancia y una masa porque los objetos "distancias" y "masas" habían sido, cada uno por separado, identificados con el objeto "números", mediante la elección de una unidad de medida para cada uno.

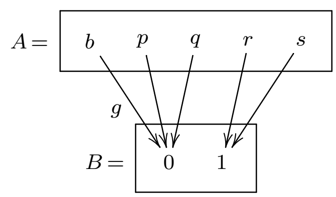
Aunque estos sencillos ejemplos pueden parecer absurdos, errores de exactamente estos dos tipos han sido cometidos por gente que debería saber que es incorrecto. En poco tiempo, cuando ya se hayan familiarizado con algunos "tipos de estructura", estarán en poco riesgo de cometer estos abusos. Por el momento, el mejor consejo que les puedo dar es éste:

Para decidir qué cálculos hacer, *piensen en la categoría "objetiva" grande*. Como ya veremos, hay de hecho una variedad sorprendente de cálculos que se pueden llevar a cabo en las categorías objetivas. Pero si es necesario, *después* de determinar qué cálculos se van a realizar, pueden elegir sistemas de coordenadas y llevar a cabo los cálculos en la categoría "subjetiva" más pequeña y, después, traducir los resultados a la categoría objetiva.

Sesión 8

Dibujos de un morfismo que hacen evidentes sus características

Comencemos con el ejercicio 5 del artículo II. Dado el morfismo g del conjunto A al conjunto B dibujado abajo,



¿cuántos morfismos f hay con $g \circ f = 1_{\{0,1\}}$ (el morfismo identidad en $\{0,1\}$)?

Obviamente un tal morfismo f debe ir de B en A, de manera que podemos dibujar esquemáticamente los morfismos f y g como

$$A \underset{f}{\overset{g}{\rightleftarrows}} B$$

Un morfismo f con esta propiedad se llama una sección de g, así que otra manera de expresar el problema es: *¿Cuántas secciones tiene el morfismo g?* ¿Alguien encontró alguna?

KATIE: Sí, yo encontré dos.

Dime una de ellas.

KATIE: El que manda 0 a q, y 1 a r.

Está bien, o sea que tienes $f(0) = q$ y $f(1) = r$. Para ver si este morfismo es realmente una sección para g debemos verificar la ecuación $g \circ f = 1_{\{0,1\}}$. Ahora tenemos dos morfismos $g \circ f$ y $1_{\{0,1\}}$ y queremos saber si son iguales. ¿Cuándo son iguales dos morfismos?

FÁTIMA: Deben tener el mismo dominio y el mismo codominio.

Entonces lo que estás dicendo es:

(1) el dominio de $g \circ f$ debe ser el mismo que el dominio de $1_{\{0,1\}}$ y

(2) el codominio de $g \circ f$ debe ser el mismo que el codominio de $1_{\{0,1\}}$.

¿Es esto todo? No. Revisemos la prueba para la igualdad de morfismos de conjuntos.

Un morfismo de conjuntos $X \xrightarrow{f} Y$ está especificado por una regla que a cada elemento de X (el *dominio* de f) le asocia exactamente un elemento de Y (el *codominio* de

f). La pregunta es: si tenemos dos reglas, ¿cuándo decimos que especifican el mismo morfismo? Llamemos a estas dos reglas h y k. Para verificar que $h=k$ tienen que verificar que *para cada* entrada particular obtienen la misma salida con ambas reglas. En resumen, decir que $h=k$ quiere decir tres cosas:

(1) el dominio de h es el mismo que el dominio de k,
(2) el codominio de h es igual al codominio de k, y *lo más importante*,
(3) para cada x en el dominio de h y k, debemos tener $h(x)=k(x)$.

En la tercera condición, el número de cosas que uno tiene que verificar es igual al número de elementos del dominio porque la condición tiene que ser verificada *para cada* elemento del dominio.

Veamos: f va de B en A y g va de A en B, entonces $g\circ f$ va de B en B, y $1_{\{0,1\}}$ también va de $B=\{0,1\}$ en B, de manera que sí tenemos

(1) el dominio de $g\circ f$ es $B=\{0,1\}$, que es igual al dominio de $1_{\{0,1\}}$ y
(2) el codominio de $g\circ f$ es $B=\{0,1\}$, el mismo codominio que $1_{\{0,1\}}$.

Sin embargo, toda esta escritura no es realmente necesaria. Pueden ver directamente del diagrama con las flechas f y g yendo y viniendo entre A y B que (1) y (2) son ciertas. Cuando se acostumbren a esto, las condiciones (1) y (2) no son problemáticas porque ni siquiera preguntarán si dos morfismos son iguales si no tienen el mismo dominio y el mismo codominio. Es como preguntar si dos viajeros siguieron la misma *ruta*; no *preguntarían* esto si uno de ellos viajó de Berlín a París y el otro de Nueva York a Boston.

Lo que es *esencial* verificar para que $g\circ f=1_{\{0,1\}}$ es la condición (3); tenemos que verificar que $g\circ f$ actuando en cualquier elemento de su dominio (el conjunto $\{0,1\}$) da lo mismo que $1_{\{0,1\}}$. En otras palabras, como la identidad $1_{\{0,1\}}$ manda 0 a 0 y 1 a 1, tenemos que verificar

$$(g\circ f)(0)\stackrel{?}{=}0 \qquad \text{y} \qquad (g\circ f)(1)\stackrel{?}{=}1$$

Ahora bien, ¿qué quiere decir $g\circ f$?

OMER: Primero calcula f y luego pégale g a eso.

Correcto. Primero calculamos $f(0)$, esto es ... q y $g(q)=0$; y para $(g\circ f)(1)$, primero $f(1)$, esto es r y luego $g(r)=1$. Entonces, realmente tenemos

(3) $(g\circ f)(0)=0$ y $(g\circ f)(1)=1$

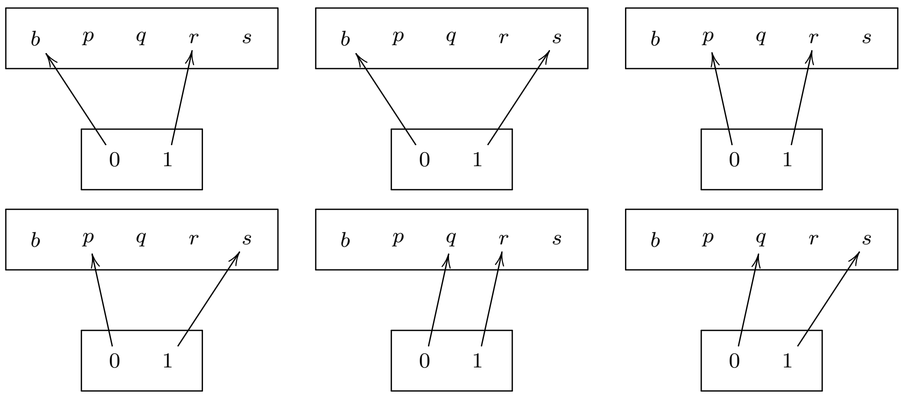
y ya hemos terminado. El morfismo que Katie nos dió era verdaderamente una sección de g.

Pero si encontraron ése, deben ser capaces de encontrar los otros. Veamos cómo puede verse todo esto directamente en los dibujos. Necesitamos un morfismo $f: B\longrightarrow A$. Las condiciones (1) y (2) se satisfacen automáticamente. Ahora tenemos que garantizar $(g\circ f)(0)=0$ y $(g\circ f)(1)=1$. La primera quiere decir que $g(f(0))=0$. Pero g manda a cero solamente los elementos b, p y q, de manera que $f(0)$ tiene que ser una de estas tres. Igualmente, los únicos elementos que g manda a 1 son r y s;

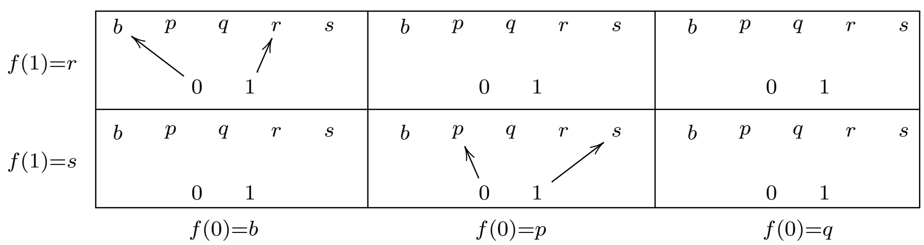
para que $g(f(1))=1$ debe suceder que $f(1)$ sea igual a r o s. Por eso, encontrar una sección se reduce a encontrar un morfismo $f\colon B \longrightarrow A$ tal que $f(0)$ es b, p o q y $f(1)$ es r o s. ¿Cuántas de éstas hay?

KATIE: Seis, porque si 0 va a b, 1 puede ir a r o s...

Correcto. Y si 0 va a p obtenemos dos posibilidades más y dos más si 0 va a q. Los dibujos de estas posibilidades son:

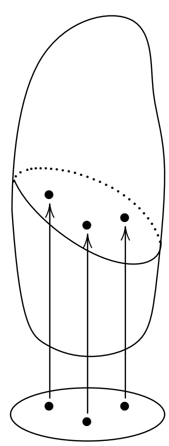


Será aún mejor acomodar las posibilidades sistemáticamente, algo como esto:

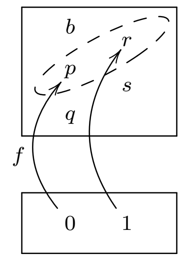


(Agregen ustedes mismos el resto de las flechas.)

Alguien preguntó por qué estos morfismos se llaman *secciones*. La palabra "sección" es aquí una abreviación de "sección transversal". Imaginen que sostienen un pepino verticalmente sobre la mesa. Hay el morfismo que proyecta cada punto en el pepino perpendicularmente a su sombra en la mesa. Si toman un cuchillo y cortan el pepino como en el dibujo de abajo, ¡obtienen una sección de ese morfismo! En general, una sección de ese morfismo proyección puede tener cualquier forma extraña, no solamente un corte derecho.

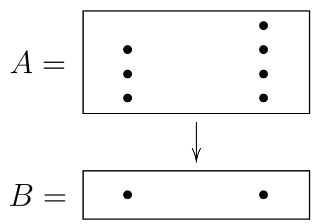


Hay un dibujo similar para la sección f que Katie dió para el morfismo g



donde hemos puesto directamente encima de 0 sólo los elementos que son enviados por g a 0 y encima de 1 los elementos que son enviados por g a 1. En ambos casos la "sección transversal" es una copia del conjunto más pequeño abajo (el codominio de g) dentro del conjunto de arriba.

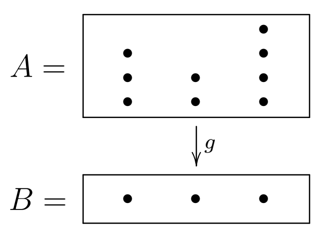
Deben ser capaces ahora de contestar cualquier pregunta de este tipo. Veamos si pueden. Consideren el morfismo



¿Cuántas secciones tiene?

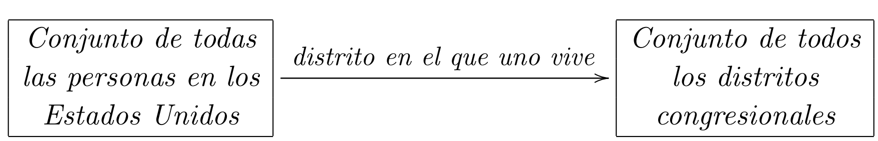
KATIE: Doce.

Correcto. Tres elecciones para un punto y cuatro para el otro ... ¿Qué tal



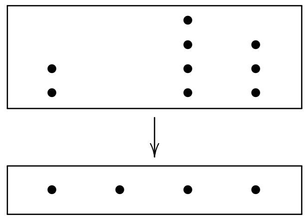
donde, otra vez, el morfismo g le asocia a cada punto del conjunto de arriba ese punto en el conjunto de abajo que se encuentra directamente debajo? ¿Cuántas secciones tiene g? Correcto, $24 = 3 \times 2 \times 4$. Ésa es la fórmula que nos dio Chad antes.

Una sección puede ser también llamada una **elección de representantes**. De hecho, un muy buen ejemplo es la sección de la población de los Estados Unidos constituida por los representantes congresionales. Tenemos un morfismo del conjunto de las personas en los Estados Unidos al conjunto de todos los distritos congresionales porque cada persona vive en algún distrito congresional:



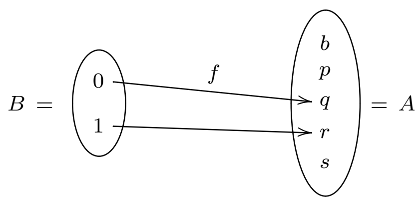
Por ley, una elección de representantes congresionales debe ser hecha de tal forma que cada congresista viva en el distrito que representa. Esto es precisamente decir que una elección de representantes debe ser una sección del morfismo de arriba.

Debemos hacer otro ejemplo para que nos recuerde algo que notamos antes. Supongamos que tenemos el morfismo



¿Cuántas secciones hay? Cero. La fórmula de Chad también da la respuesta correcta: $2 \times 0 \times 4 \times 3 = 0$.

El siguiente problema es encontrar el número de retracciones para un morfismo dado. Por ejemplo, podemos comenzar con el morfismo



y preguntar cuántos morfismos $h{:}A \longrightarrow B$ son retracciones para f. Retracción quiere decir que $h \circ f$ es la identidad en ... Bueno, ustedes resuelvan esto. Primero aplican f que va de B en A, luego aplican h, que va de A de regreso a B. Entonces $h \circ f$ va de B en B y debe ser igual a la identidad en $B = \{0, 1\}$. Entonces debemos tener $h \circ f = 1_{\{0,1\}}$, de manera que h debe satisfacer las condiciones

$$(h \circ f)(0) = 0 \qquad (h \circ f)(1) = 1$$

que son lo mismo que

$$h(f(0)) = 0 \qquad h(f(1)) = 1$$

Solamente dos condiciones. Como sabemos $f(0)$ y $f(1)$ porque nos fueron dadas (son q y r respectivamente), las dos condiciones son realmente

$$h(q) = 0 \qquad h(r) = 1$$

Fuera de esto, h puede mandar cada uno de b, p, s a cualquiera de 0 y 1.

DANILO: Entonces, para el resto, h es como cualquier otro morfismo de $\{b, p, s\}$ en $\{0, 1\}$.

Eso es correcto. Esta idea puede ser usada para encontrar una fórmula para el número de retracciones cuando éstas existen. En este caso muestra que el morfismo f tiene ocho retracciones ya que $2^3 = 8$.

OMER: ¿Por qué sucede que algunos morfismos tienen sección pero no retracción y otros morfismos tienen retracción pero no sección?

Una sección para $A \xrightarrow{r} B$ es un morfismo de regreso s,

$$
\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "r"] & B \arrow[l, shift left, "s"] \end{tikzcd}
$$

tal que $r \circ s = 1_B$. De acuerdo con la discusión anterior, *esto implica que B es a lo más tan grande como A.* Recuerden que en los problemas de encontrar secciones, el conjunto grande estaba siempre arriba y era el codominio de la sección. Esto nos permite saber si un conjunto es más pequeño que otro sin usar números. Si hay morfismos $\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "r"] & B \arrow[l, shift left, "s"] \end{tikzcd}$ tales que $r \circ s = 1_B$ entonces B es más pequeño que (o a lo más tan grande como) A.

De hecho, aún antes de que los números fueran inventados las personas sabían cómo decidir cuál de los dos conjuntos era más pequeño; solamente tenían que formar parejas hechas de elementos de un conjunto con elementos del otro, y ver a qué conjunto le sobraban elementos. Esto también es práctico. Imaginen que están poniendo la sillas para que las personas se sienten en un concierto de música de cámara. ¿Cuál es la mejor manera de saber si tienen suficientes sillas? No comenzarán a contar a toda la gente y luego a contar las sillas. Simplemente le piden a todo el mundo que se siente. Si alguien permanece parado, necesitan más sillas. Esto es algo que vale la pena recordar; la noción primitiva es ISOMORFISMO; la noción abstracta sofisticada es NÚMERO.

Ahora tratemos con el ejercicio 8 del artículo II. Demuestre que el morfismo compuesto de dos morfismos que tienen secciones tiene una sección. Entonces, supongan que tenemos dos morfismos que podemos componer. Llamémoslos k y p,

$$
\begin{tikzcd} A \arrow[r, "k"] \arrow[rr, bend right, "p \circ k"'] & B \arrow[r, "p"] & C \end{tikzcd}
$$

y supongan que cada uno tiene una sección. Una sección para p va de C en B (llamémosla s) y una sección para k va de B en A (llamémosla s'). Si ponemos todo esto en el diagrama, tenemos

$$
\begin{tikzcd} A \arrow[r, "k"] \arrow[rr, bend left, "p \circ k"] & B \arrow[r, "p"] \arrow[l, bend left, "s'"] & C \arrow[l, bend left, "s"] \end{tikzcd}
$$

Ahora bien, ¿qué quiere decir que s sea una sección para p?

OMER: ¿Es que s tras p sea la identidad en B?

No. Eso querría decir que s es una retracción para p. Recuerden que el dominio de la sección es el conjunto “más pequeño” y que la condición siempre involucra la identidad en el conjunto más pequeño; “es una sección de p” quiere decir “p tras

s es la identidad en C", o $p \circ s = 1_C$. Y ¿cuál es la condición para que s' sea una sección para k?

ALICIA: k tras s' es la identidad en B.

Correcto. Lo que tenemos hasta aquí es

$$p \circ s = 1_C \qquad k \circ s' = 1_B$$

Y lo que queremos es una sección para $p \circ k$, un morfismo de C en A

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "p \circ k"] & B \arrow[l, bend left, dashed, "S"] \end{tikzcd}$$

tal que $(p \circ k) \circ S = 1_C$.

OMER: Compón s y s'.

Eso es lo más simple que podemos intentar. Hay otras maneras de ir de C a A, pero tratemos con la más simple primero. Tratemos entonces de demostrar que $s' \circ s$ es una sección para $p \circ k$. En otras palabras, nos enfrentamos a la pregunta:

$$¿(p \circ k) \circ (s' \circ s) = 1_C?$$

¿Alguna sugerencia?

OMER: Podemos componer k con s' y substituirlo con la identidad en B.

Correcto,

$$(p \circ k) \circ (s' \circ s) = p \circ (k \circ s') \circ s = p \circ 1_B \circ s$$

¿Y ahora qué?

CHAD: $1_B \circ s$ es igual a s.

Muy bien, entonces podemos poner $p \circ 1_B \circ s = p \circ (1_B \circ s) = p \circ s$ y ahora estamos listos para usar la condición de que s es una sección para p, que es que $p \circ s$ es la identidad en C. Por lo tanto el morfismo $S = s' \circ s$ sí es una sección para $p \circ k$.

Observen cuán similar a la multiplicación de números es este cálculo. La diferencia principal es que la multiplicación de números es conmutativa. Ahora deben intentar resolver el resto de los ejercicios.

Sesión 9

Retractos e idempotentes

1. Retractos y comparaciones

Hemos visto que una noción razonable de “mismo tamaño” está dada por los *isomorfismos:* $A \cong B$ (léase “A es isomorfo a B”) quiere decir que hay al menos un morfismo invertible (isomorfismo) de A en B. Para conjuntos finitos, $A \cong B$ nos dice precisamente que A y B tienen el mismo número de *puntos* o morfismos desde un conjunto singulete $\mathbf{1}$. (En otras categorías, veremos que esto nos dice mucho más.) ¿Cuál sería una buena manera de expresar que A es “a lo más tan grande como” B? Hay varias respuestas y discutiremos dos de ellas. La primera es:

Definición: *$A \trianglelefteq B$ quiere decir que hay al menos un morfismo de A en B.*

Esto tiene dos propiedades razonables que la noción de “más pequeño que” (realmente “a lo más tan grande como”) debe tener:

(R, por “reflexiva”):	$A \trianglelefteq A$, ya que está la identidad $A \to A$.
(T, por “transitiva”):	Si $A \trianglelefteq B$ y $B \trianglelefteq C$, entonces $A \trianglelefteq C$, ya que el morfismo compuesto de un morfismo de A a B y un morfismo de B a C es un morfismo de A a C.

Para conjuntos, la relación $A \trianglelefteq B$ no nos dice mucho, excepto que si A tiene un punto, entonces B también: un punto $\mathbf{1} \longrightarrow A$ seguido de un morfismo $A \to B$ da un punto de B.

> **Ejercicio 1**
> (En la categoría de conjuntos.) Demuestre que, a menos de que A tenga un punto y B ninguno, se tiene que $A \trianglelefteq B$.

En otras categorías esta manera de comparar objetos puede ser muy interesante, pero en los conjuntos necesita complementarse con otro método. La idea viene de recordar que siempre que hemos encontrado dos conjuntos finitos A, B y un par sección-retracción, $A \xrightarrow{s} B \xrightarrow{r} A$ con $rs = 1_A$, hemos visto que A es a lo más tan grande como B.

Definición: *A es un* **retracto de** *B quiere decir que existen morfismos r y s, $A \xrightarrow{s} B \xrightarrow{r} A$, con $rs = 1_A$. (Escribimos esto como $A \leq_R B$.)*

(Las notaciones $\trianglelefteq$ y $\leq_R$ no son estándares y han sido escogidas para sugerir “flecha” y “retracto”. No las utilizaremos después de esta sesión sin recordarles lo que quieren decir.)

Ejercicio 2
(En cualquier categoría.) Demuestre que

(R) $A \leq_R A$.
(T) Si $A \leq_R B$ y $B \leq_R C$, entonces $A \leq_R C$.

Sugerencia: Ya han demostrado (T) cuando demostraron que si una pareja de morfismos que se pueden componer es tal que cada uno tiene una retracción, entonces el morfismo compuesto también.

Si $A \leq_R B$, entonces en particular hay morfismos $A \longrightarrow B$ y $B \longrightarrow A$, de manera que cada uno de A y B es, en nuestro sentido anterior, a lo más tan grande como el otro: $A \trianglelefteq B$ y $B \trianglelefteq A$. Nuestro sentido anterior era bueno para distinguir conjuntos no vacíos de conjuntos vacíos, mientras que nuestro nuevo sentido es bueno para organizar a los conjuntos no vacíos. De hecho, si A y B son conjuntos finitos no vacíos, $A \leq_R B$ dice exactamente que A tiene a lo más tantos puntos como B. (En otras categorías veremos que esta comparación también nos dice mucho más, así que ambas ideas para comparar tamaños relativos serán utilizadas.)

2. Idempotentes como registros de retractos

Supongamos que tenemos un retracto $A \xrightarrow{s} B \xrightarrow{r} A$ en conjuntos, de manera que $rs = 1_A$. Entonces hemos visto que el endomorfismo e de B dado por la composición de los morfismos r y s en el otro orden, $e = sr$, es un idempotente: $ee = e$. ¿Recuerdan la demostración?

$$ee = (sr)(sr) = s(rs)r = s1_A r = sr = e$$

Este endomorfismo e es un vestigio en B de ambos morfismos s y r, pero no esperarían que pudiéramos reconstruir s y r del morfismo compuesto e. ¿Cómo podríamos reconstruir A? Quizás ayude si pensamos un ejemplo.

$$\begin{tikzcd} B = \boxed{\textit{Personas en EEUU}} \arrow[d, shift left, "r = \textit{residencia}"] \\ A = \boxed{\textit{Distritos congresionales}} \arrow[u, shift left, "\substack{\textit{elección de}\\ \textit{representantes}} = s"] \end{tikzcd}$$

Hemos visto que, por ley, $rs = 1_A$: la residencia del representante de cada distrito es ese distrito. ¿Cómo se ve el morfismo idempotente $B \xrightarrow{e = sr} B$? Por ejemplo, ¿quién es e(Fátima)?

FÁTIMA: $e(\text{yo}) = s(r(\text{yo})) = s(\text{mi distrito}) =$ la honorable persona o bandido que representa a mi distrito.

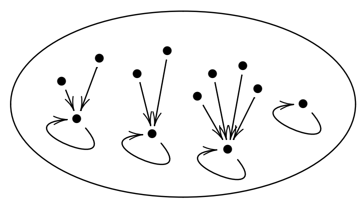
Justamente eso. e(Fátima) es el o la congresista de Fátima. Éste o ésta no es la misma Fátima, pero hay personas que son sus *propios* representantes al congreso. ¿Cuáles?

KATIE: Las personas que son miembros de la Casa de Representantes.

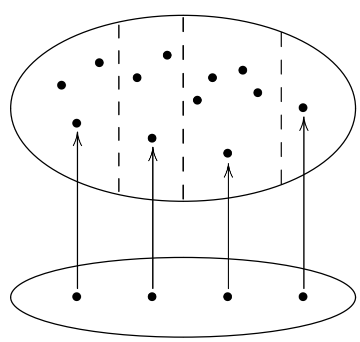
Exactamente. Esas personas son los *puntos fijos* del endomorfismo e. Esto es quizá una decepción, no debido a la calidad de los representantes sino porque estábamos esperando que del endomorfismo e de B pudiéramos "reconstruir" el conjunto A de distritos congresionales. Fallamos, pero hicimos algo igualmente bueno: encontramos un conjunto (los puntos fijos de e, miembros de la Casa de Representantes) que está relacionado de una manera muy agradable con el conjunto de distritos congresionales. ¿De qué manera?

SHERI: Es *isomorfo* al conjunto de distritos congresionales.

¡Bravo! Veamos también el proceso con dibujos. ¿Cómo se ve el diagrama interno de un endomorfismo idempotente típico? Para cada punto x, el punto ex tiene que ser un punto fijo de e, porque $e(ex)=(ee)x=ex$; así cada punto, si no queda ya fijo bajo e, al menos alcanza un punto fijo en un paso. Esto quiere decir que el dibujo de un idempotente es muy simple. Se ve algo parecido a esto:



Aquí tenemos solamente el conjunto B y el morfismo idempotente e; no sabemos qué conjunto A ni qué morfismos r y s dieron lugar a esto, si de hecho existieron. Aún así, podemos usar el procedimiento que descubrimos con los representantes para obtener una A, una r y una s que lo hagan. Simplemente copiamos el conjunto de los puntos fijos de e para que sirva como A, y luego los morfismos r y s que debemos usar son claros. Dibujaremos s y dibujaremos a r como una organización de B mediante A.



Con un poco de práctica, pueden "ver" A, r y s en el diagrama interno de e. De hecho podemos ver a A como el conjunto de puntos fijos de e o como las clases en las que e "agrupa" a B. Démosle un nombre a esta relación de e con A, r y s.

Definición: *(En cualquier categoría.) Si $B \xrightarrow{e} B$ es un morfismo idempotente, una* **escisión** *de e consiste de un objeto A junto con dos morfismos $A \underset{r}{\overset{s}{\rightleftarrows}} B$ con $rs=1_A$ y $sr=e$.*

Resulta que en muchas categorías, un recurso muy similar al que utilizamos en conjuntos dará una escisión para cualquier endomorfismo idempotente. En cualquier caso, no puede haber dos escisiones esencialmente distintas para e, como lo muestra el siguiente ejercicio.

Ejercicio 3
(En cualquier categoría.) Suponga que ambos $A \underset{r}{\overset{s}{\rightleftarrows}} B$ y $A' \underset{r'}{\overset{s'}{\rightleftarrows}} B$ escinden el mismo idempotente $B \xrightarrow{e} B$. Use estos morfismos para construir un isomorfismo $A \xrightarrow{f} A'$.

Uno puede demostrar que este isomorfismo f es el único que es "compatible" con los morfismos con los que empezamos y puede además estudiar cómo reconstruir morfismos entre retractos de morfismos entre los objetos grandes B; pero esto debe ser suficiente para darles la idea crucial: toda la información esencial acerca de A, r y s está realmente contenida en B y e.

Aquí tenemos un ejemplo de la aritmética. Sea B el conjunto de todos los "símbolos fraccionarios" n/d con n y d números enteros y $d \neq 0$. Símbolos fraccionarios diferentes, como 8/6 y 4/3, pueden representar al mismo número racional. En la escuela les enseñaron un proceso de reducción $B \xrightarrow{e} B$: cancelen el máximo común divisor en el numerador y en el denominador y entonces, si el denominador es negativo, cambien los signos de ambos, numerador y denominador. Por ejemplo $e(6/-4) = -3/2$. Este morfismo e es idempotente, porque reducir una fracción reducida no la cambia. Un número racional puede describirse ahora como una fracción reducida (punto fijo de e) o como el cúmulo de todas las fracciones que se reducen a esa fracción reducida. En este ejemplo hay una manera de verificar si dos símbolos fraccionarios están en el mismo cúmulo sin reducirlos: $e(n/d) = e(m/c)$ exactamente cuando $nc = md$. Esto es conveniente ya que es más fácil multiplicar números grandes que encontrar su máximo común divisor. Curiosamente, mediante un proceso llamado el "algoritmo de Euclides", es más fácil encontrar el máximo común divisor de dos números que ¡factorizar cualquiera de ellos en sus factores primos! Códigos inviolables (¿?) recientes dependen de la aparente dificultad de factorizar números grandes.

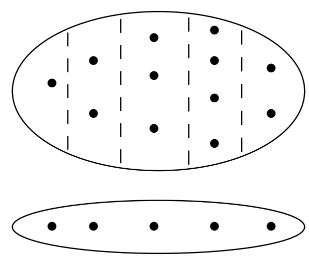
3. Un acertijo

Si pensamos a B como un conjunto conocido, incorporado a nuestra categoría "subjetiva", lo que hemos logrado es que el conjunto menos conocido A esté capturado por una descripción en nuestra categoría subjetiva, a saber, por B y su endomorfismo idempotente e. Esto parece un acertijo. ¿Por qué querríamos describir al conjunto más pequeño A en términos del conjunto más grande B? Normalmente no querríamos, y no se hace muy a menudo en la categoría de conjuntos finitos abstractos (pero vean los ejemplos en la sección de abajo). Una excepción ocurre en la programación de computadoras, donde la clase de conjunto que es más fácil de manejar consiste de todas las sucesiones de ceros y unos de una longitud particular n. Hay 2^n de éstas y pueden ver que podría ser útil representar a cualquier conjunto A en el que estén interesados como un retracto de un conjunto B de n-sucesiones, siempre y cuando puedan registrar de manera adecuada el endomorfismo idempotente de B. El estudio de cómo hacer esto lo mete a uno a "álgebra booleana", que es un tema básico en ciencia de la computación. Aún así, el uso principal de "describir lo pequeño en términos de lo grande" ocurre en otras categorías. A menudo ocurre que aún a pesar de que B es más grande, es "estructuralmente más simple" que A.

4. Tres clases de problemas de retracción

Regresemos a los aspectos generales de los morfismos. Hemos visto que si es dado un morfismo $B \xrightarrow{r} A$ y buscamos secciones para él, una buena manera de dibujar la situación es la de considerar a r como una "organización de B en A tipos":

$$\begin{tikzcd} B \arrow[d, "r"] \\ A \arrow[u, dashed, bend left, "s?"] \end{tikzcd}$$



lo que nos permite dibujar una sección s de r escogiendo para cada tipo un "ejemplo" de ese tipo. Esto puede ser llamado el "problema del director de museo". Supongan que necesitan armar una exhibición de mamíferos con un mamífero de cada especie. Entonces comienzan con un morfismo organizador r del conjunto B de mamíferos:

$$\begin{tikzcd} B = \textit{mamíferos} \arrow[d, "r"] \\ A = \textit{especies de mamíferos} \arrow[u, dashed, bend left, "s?"] \end{tikzcd}$$

Su trabajo es elegir una sección s de r; eso involucra seleccionar un espécimen de ejemplo para cada especie.

El problema opuesto o dual es el "problema del observador de aves". El observador de aves comienza con un manual que da un ejemplo de cada especie, un morfismo "muestra" o "ejemplificador" s:

$$\begin{tikzcd} B = \textit{aves observadas} \arrow[d, dashed, "r?"] \\ A = \textit{especies de aves} \arrow[u, bend left, "s"] \end{tikzcd}$$

Su trabajo es asignarle a cada ave que ve (real o dibujada) una especie, y su manual le da al menos suficiente dirección para asegurar que $rs = 1_A$.

A los jóvenes se les da el problema más difícil. Un niño pequeño ve una variedad de animales y, con la asistencia que pueda obtener de libros de dibujos y de sus padres, trata de seleccionar un endomorfismo idempotente e:

$$\begin{tikzcd} B = \mathit{Animales} \arrow[loop right, "e"] \end{tikzcd}$$

El morfismo e debe asociarle a cada animal el animal familiar al cual se parezca más. Habiendo seleccionado e, al niño se le pide (otra vez, con un poco de asistencia) que escinda este endomorfismo: que forme la idea abstracta de “tipos de animales” (por ejemplo, gato, burro, vaca) y que domine los morfismos:

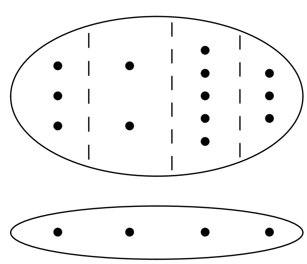
$$\begin{tikzcd} B = \mathit{Animales} \arrow[d, shift left, "r"] \\ A = \mathit{Tipos\ de\ animales} \arrow[u, shift left, "s"] \end{tikzcd} \qquad \begin{array}{l} sr = e \\ \\ rs = 1_A \end{array}$$

El morfismo s le asocia a cada “tipo” de animal, digamos “burro”, el ejemplo más familiar, digamos Platero; r le asocia a cada animal particular, digamos “el bicho peludo que se echa en el zócalo al sol y ronronea”, su tipo.

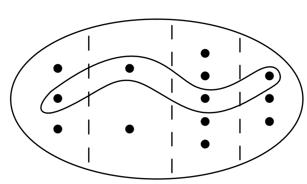
Estas tres clases de problemas se describieron de manera que parecía que una solución podría ser preferible a otra. En el mundo enrarecido de los conjuntos abstractos éste no será el caso; los conjuntos en nuestros ejemplos tienen estructura adicional.

Quizá no estén fuera de lugar algunos dibujos abstractos para ilustrar que los tres problemas se resuelven dándole al conjunto grande B “estructura” adicional.

El problema del director de museo: Dado $B \xrightarrow{r} A$, elija $A \xrightarrow{s} B$ que satisfaga $rs = 1_A$. Dibujo mental: ver a r como una organización de B en A clases:

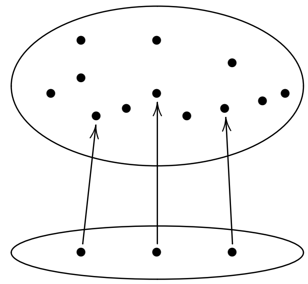


Entonces elija una “sección transversal”:

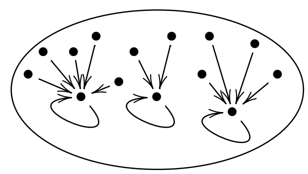


El problema del observador de aves: Dado $A \xrightarrow{s} B$, elija $B \xrightarrow{r} A$ que satisfaga

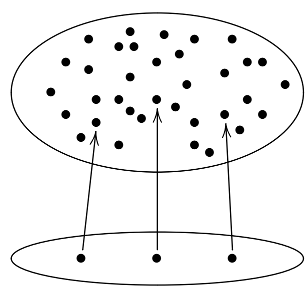
$rs = 1_A$. Dibujo mental: ver a s como un muestreo de B mediante A:



Entonces elija, para cada ave no identificada, el ave más similar que está identificada en el manual s:



Esto construye al idempotente e, haciendo cúmulos de aves alrededor de las aves de muestra, pero entonces r es fácil de encontrar. Ya que estamos aquí, debemos ver si podemos calcular el número de soluciones del problema del observador de aves. Supongan que hay mil aves y solamente tres especies, de manera que el morfismo muestra se vería como algo así:

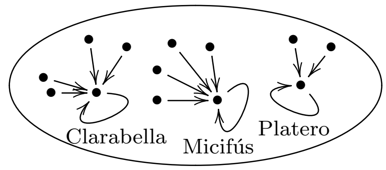


¿Cuántas retracciones hay para este morfismo?

DANILO: Las tres aves que están en la muestra deben ir de regreso al lugar de donde vinieron, pero para el resto es solamente cualquier morfismo al conjunto de tres elementos de las especies; entonces hay $3^{(1000-3)}$ o 3^{997} retracciones para s.

Bien. Pueden ver que el método de Danilo encuentra el número de retracciones para cualquier morfismo de conjuntos que tiene alguna, esto es, cualquier morfismo que "preserva distinciones": si $x \neq y$, entonces $sx \neq sy$.

El problema del niño: Dado B, elija un morfismo $B \xrightarrow{e} B$ que satisfaga $ee = e$. Habiendo observado niños por años todavía me sigue pareciendo un misterio, como siempre, la selección del endomorfismo idempotente e que le asocia a cada animal el animal más familiar al cual se parece. Sin embargo, después de que eso se ha hecho, el resto del trabajo (escindir el idempotente) es fácil:



Los "tipos" son los tres en el dibujo mental y todo lo que se necesita es aprender los nombres "vaca", "gato" y "burro" para estos tipos. Como esbozo del proceso de aprendizaje real, esta descripción está simplificada en exceso, porque la selección del morfismo idempotente y el aprendizaje de los nombres-tipos suceden de manera concurrente.

5. Comparación de conjuntos infinitos

Hay una flagrante omisión de nuestro tratamiento de "mismo tamaño" (isomorfismo) y "al menos tan grande como" (retracto). De nuestra experiencia con conjuntos finitos, esperaríamos que si ambas $A \leq_R B$ y $B \leq_R A$, entonces $A \cong B$. De manera sorprendente, esto no es consecuencia solamente de las leyes asociativa e identidad: hay categorías en las que esto es falso. En conjuntos (especialmente los infinitos), su veracidad es el "teorema de Cantor-Bernstein". De hecho este tema comenzó con Georg Cantor (1845-1918) quien al estudiar el análisis de las ondas de sonido de una cuerda de violín (o cualquier movimiento periódico) en sus varias frecuencias, encontró que le era necesario explorar el tamaño de los conjuntos infinitos. Sus sorprendentes resultados han apenas sido mencionados aquí; y hemos también dejado de lado el descubrimiento anterior, de Galileo, de uno de los aspectos característicos de los conjuntos infinitos: un conjunto puede ser isomorfo a una parte propia de sí mismo, como lo muestra el isomorfismo

$$\{0, 1, 2, \ldots\} \xrightarrow{f} \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$$

definido por $f(n) = 2n$. Las ideas de Cantor, desarrolladas para conjuntos infinitos, han probado ser igualmente útiles en otras categorías llevando, por ejemplo, a los "teoremas de incompletitud" en lógica (veáse la sesión 29). En la sesión 10 veremos cuán importante es conocer en otras categorías, para ciertos objetos especiales A y B, si $A \leq_R B$ o no.

La expresión "cada conjunto es un número" se refiere a la posición hacia los conjuntos en general en la que consideramos relaciones como $\cong$ o $\leq_R$ pero no nos preocupamos de los detalles de las "demostraciones", f y f^{-1} o r y s, de estas relaciones. No siempre debe uno dejar éstas de lado; veremos más adelante que una demostración dada de que A tiene el mismo número que sí mismo (un automorfismo de A) es una estructura rica que necesita muchos números para describirla.

CUESTIONARIO

1. Dé un ejemplo de dos conjuntos explícitos, A y B, y un morfismo explícito $A \xrightarrow{f} B$ que satisfaga:
   (a) hay una retracción para f *pero*
   (b) *no* hay una sección para f.

2. Si $C \underset{q}{\overset{p}{\rightleftarrows}} D$ satisfacen $p \circ q \circ p = p$, ¿puede concluir que
   (a) $p \circ q$ es idempotente? ¿Por qué sí o por qué no?
   (b) $q \circ p$ es idempotente? ¿Por qué sí o por qué no?

PREGUNTAS OPCIONALES

2*. Si $C \underset{q}{\overset{p}{\rightleftarrows}} D$ satisfacen $p \circ q \circ p = p$, utilice los morfismos dados p y q para diseñar un morfismo q' que satisfaga *ambas:*

$$p \circ q' \circ p = p$$

y

$$q' \circ p \circ q' = q'$$

1*. Misma pregunta que el problema 1 al principio de la página, excepto que se requiere que ambos conjuntos A y B sean conjuntos *infinitos.*

Cómo resolver las preguntas del cuestionario

He escrito los pensamientos que pudieron haber pasado razonablemente por sus cabezas al tratar de resolver los problemas para mostrar cómo pudieron haber llegado a una solución; y cómo podría verse una solución. Notarán que el proceso de pensamiento parece largo, si lo escriben todo, y que, en comparación, una solución, después de que la han hallado, se ve corta.

Cómo utilicen esto para ayudarlos a aprender a resolver problemas depende, por supuesto, completamente de ustedes. Sugiero que lean solamente un poco de la descripción del proceso de pensamiento cada vez y luego regresen al problema para ver si son capaces de terminarlo sin leer el resto. Después, pueden comparar la manera en la que llegaron a una solución con la manera en que este estudiante imaginario lo hizo y tal vez aprendan nuevas estrategias para agregarlas a sus técnicas para pensar los problemas.

1. Problema 1

Veamos … aquí se me pide que *elija* un montón de cosas del aire. Tengo que elegir conjuntos A y B, *y* el morfismo f. El problema es que conozco un montón de ejemplos de conjuntos y un montón de ejemplos de morfismos de un conjunto a otro —¿cuál debo elegir?

Primero, sería bueno decidir qué tan grandes necesito hacer estos conjuntos —mientras más pequeños pueda hacerlos, mejor. ¿Qué quiero? Se supone que $A \xrightarrow{f} B$ debe elegirse de manera que haya una *retracción* para f —le doy un nombre a la retracción para f, quizá "r" me ayude a recordar que se supone que es una retracción para f. Le agrego r al dibujo $A \xrightarrow{f} B$. ¿Para dónde debe ir r? Esto es fácil —cualquier retracción o sección para f va en sentido contrario a f. Así, mi "diagrama externo" se verá como esto:

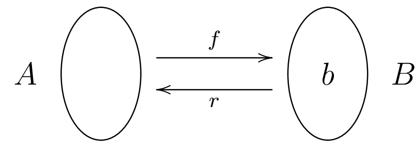
$$\boxed{A \underset{r}{\overset{f}{\rightleftarrows}} B}$$

Claro que tengo que recordar la *definición* de la frase "r es una retracción para f". *Memoricé las definiciones:* "r es una retracción para f" *significa* $r \circ f = 1_A$. (Hice caso del consejo que se repitió tantas veces en clase de que debía memorizar la diferencia entre "g es una retracción para f" y "g es una sección para f", porque ¡quieren decir cosas diferentes!)

Ahora quiero elegir dos conjuntos A y B, y dos morfismos r y f acomodados como en la caja de arriba; pero *no cualesquiera dos morfismos*, tienen que satisfacer la ecuación:

$$\boxed{r \circ f = 1_A}$$

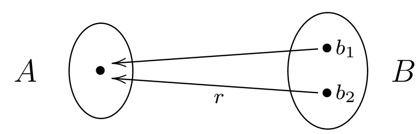
Si me acuerdo bien, una retracción para un morfismo tiende a ir de un conjunto más grande a uno mas chico. Debo escojer mis conjuntos de manera que B sea por lo menos tan grande como A. De hecho, creo que sería más seguro si lo escojo un poco más grande. Quizá si comienzo probando con A sin miembros y B con un miembro, ¿funcionaría?



¡Ay! No puedo tener un morfismo r que vaya de B en A porque ¡no hay miembros en A que puedan ser $r(b)$!

Otro intento: quizá A con un miembro, B con dos miembros:

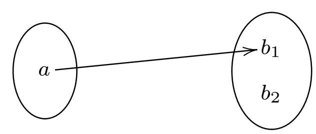
Aún tengo que hacer los morfismos r y f. Hay solamente un morfismo de B en A ($1^2 = 1$), no hay opción para r, se ve así:



¿Qué pasa al elegir mi morfismo

$$A \xrightarrow{f} B?$$

Aquí hay dos opciones, simplemente elegiré una, puesto que se parecen mucho de cualquier manera.



¿Funcionó? Se suponía que debía elegir r y f tales que

$$r \circ f = 1_A$$

Esto quiere decir que necesito, para cada miembro de A, que

$$r(f(\textit{ese miembro})) = \textit{ese miembro}$$

¡Pero hay solamente *un* miembro en A! Lo que necesito es $r(f(a)) = a$, eso es todo. Verifiquemos: $r(f(a)) = r(b_1) = a$. Sí, ¡es verdad!

(De hecho, ahora me doy cuenta de que ¡ni siquiera tenía que verificarlo! Hay solamente *un* morfismo de A en A ($1^1 = 1$); cualesquiera dos morfismos, como $r \circ f$ y $\mathit{1}_A$, de A en A *tienen* que ser el mismo morfismo.)

¿Ya terminé? Releeré el problema... Sí, ya hice todo, *excepto* demostrar que no hay una sección para f. ¿Cómo hago eso? Bueno, una *sección para* f sería un morfismo $B \xrightarrow{s} A$ que satisface $f \circ s = \mathit{1}_B$. (¡Qué bueno que me aprendí las definiciones!) ¿Hay un morfismo s que satisfaga esa ecuación? Bueno, hay solamente *un morfismo* de B en A, mi s tendría que ser ese morfismo. Y ya le puse el nombre "r". Necesito saber:

$$¿\text{Es } f \circ r = \mathit{1}_B \text{ o no?}$$

Eso diría

$$f(r(b_1)) = b_1 \quad (*)$$

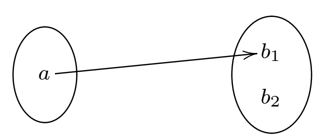
y

$$f(r(b_2)) = b_2 \quad (**)$$

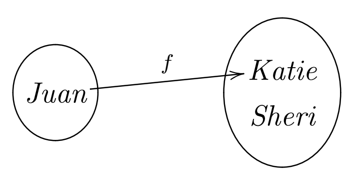
¿Son verdaderas?

Como $f(r(b_1)) = f(a) = b_1$, $(*)$ es verdadera; y $f(r(b_2)) = f(a) = b_1$, $(**)$ es falsa.

Este morfismo r no es una sección de f; y r era el *único* morfismo de B en A. Por lo tanto f no tiene sección. ¡Mala suerte! No, esperen ... ¡eso es lo que quería! f tiene una retracción pero no tiene una sección. ¡BIEN! Quizá sólo para hacerlo más bonito y para satisfacer a este profesor tan quisquilloso que pidió hacer los conjuntos y los morfismos "explícitos", daré este ejemplo con conjuntos "concretos", pero manteniendo el dibujo que hice:

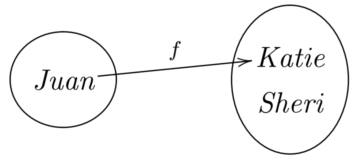


Sea A el conjunto cuyo único miembro es *Juan*; y sean $B = \{Katie, Sheri\}$ y $A \xrightarrow{f} B$ dada por $f(Juan) = Katie$.

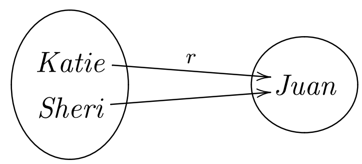


He aquí cómo se vería escrita una buena solución:

Elijo:



Primero: Afirmo que f tiene una retracción, un morfismo $B \xrightarrow{r} A$ que satisface $r \circ f = 1_A$. ¿Cuál es? ¡r es el único morfismo de B en A! Y como $r \circ f$ y 1_A son ambos morfismos de A en A y hay solamente un morfismo de A en A, estos dos morfismos deben ser el mismo: $r \circ f = 1_A$. Aquí hay un dibujo de r, si lo quieren ver:



Segundo: Afirmo que no hay una sección para f. Una sección para f sería un morfismo $B \xrightarrow{s} A$ que satisface $f \circ s = 1_B$. El *teorema de unicidad de inversos* dice: *si s es una sección para f, y r es una retracción para f, entonces $r = s$.* ¡Así que la única *posible* sección para f es r! Y r *no* es una sección para f porque $f(r(\mathit{Sheri})) = f(\mathit{Juan}) = \mathit{Katie}$, muestra que $f \circ r \neq 1_{\{\mathit{Katie},\ \mathit{Sheri}\}}$.

Nota: Después de haber encontrado su solución original, este estudiante encontró un argumento alternativo para demostrar que esta f no tiene sección. Cualquiera de los dos argumentos hubiera estado bien; pero éste es tal vez ligeramente mejor porque utiliza un principio general: si saben que un morfismo $A \xrightarrow{f} B$ tiene una retracción r, entonces la única posible sección para f es la misma r; si r no es una sección para f, entonces ¡f no tiene sección!

2. Problema 2(a)

Éste parece más fácil: no tengo que inventarlo todo. Lo que sé es que

$$C \underset{q}{\overset{p}{\rightleftarrows}} D$$

(léase "p es un morfismo de C en D y q es un morfismo de D en C") y que

$$p \circ q \circ p = p$$

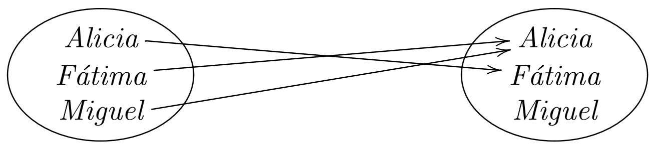
¿Qué es lo que necesito averiguar? Necesito ver que $p \circ q$ es *idempotente*; claro que necesito saber qué *significa* que un morfismo sea "idempotente". Afortunadamente aprendí que un morfismo e es idempotente si satisface la ecuación

$$e \circ e = e$$

Eso me pareció un poco extraño al principio, ya que usualmente, si tienes un morfismo $A \xrightarrow{f} B$, "$f \circ f$" *no tiene sentido alguno*. Puedes seguir un morfismo de otro, como $f \circ g$, sólo si el dominio y el codominio coinciden adecuadamente:

$$X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} Z.$$

El único caso en el que $f \circ f$ tiene sentido es cuando el dominio y el codominio de f son el *mismo conjunto*, como



Esto es, f tiene que ser —¿cuál era la palabra?— un ***endomorfismo***. Sólo los *endomorfismos* tienen una oportunidad de ser *idempotentes*; y aun así, la *mayoría* de los endormorfismos *no* son idempotentes. Sólo para asegurarme de que no están tratando de engañarme, será mejor que cheque: ¿es $p \circ q$ un *endomorfismo*? Bueno, su dominio es —veamos, *primero* se hace q, así que el dominio de $p \circ q$ es el dominio de q, que era D. Y el codominio de $p \circ q$ es el codominio de p, que era ... sí, D. Como $D \xrightarrow{p \circ q} D$ *es* un endomorfismo, al menos tiene una *oportunidad* de ser idempotente. Escribamos exactamente qué es lo que quiero demostrar de $p \circ q$. Necesito demostrar que si sigues este complicado morfismo consigo mismo, lo obtienes de regreso; esto es, necesito demostrar:

$$\boxed{(p \circ q) \circ (p \circ q) = p \circ q}$$

Lo que yo *sé* es: $p \circ q \circ p = p$. Mi problema se reduce a:

CONOCIDO: $\boxed{p \circ q \circ p = p}$ $*$

QUIERO DEMOSTRAR: $\boxed{(p \circ q) \circ (p \circ q) = p \circ q}$ $**$

Esto debe ser más o menos fácil —ya he hecho problemas como éste antes. Aquí está mi solución:

$$\begin{aligned} (p \circ q) \circ (p \circ q) &= p \circ q \circ p \circ q && \text{(puedo omitir los paréntesis)} \\ &= (p \circ q \circ p) \circ q && \text{(reescribo paréntesis para usar } *) \\ &= p \circ q && \text{(por } *) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $p \circ q$ es idempotente.

Ahora intenten el problema 2(b) ustedes solos.

Composición de morfismos opuestos

Debemos examinar con detalle algunos ejemplos de composición de morfismos de conjuntos. Mientras que el álgebra de la composición es muy simple, involucrando solamente las leyes asociativa e identidad, la comprensión de cómo se aplica dicha álgebra se facilita en gran medida con la práctica con ejemplos concretos, primero en la categoría de conjuntos y después en categorías más ricas.

Consideremos los siguientes morfismos:

$$\mathit{Hombres} \underset{\mathit{padre}}{\overset{\mathit{madre}}{\rightleftarrows}} \mathit{Mujeres}$$

Uno de ellos le asocia a cada hombre su madre y el otro le asocia a cada mujer su padre. ¿Qué es la composición $\mathit{madre} \circ \mathit{padre}$ o, más brevemente, $g \circ f$, donde $g = \mathit{madre}$ y $f = \mathit{padre}$? Por ejemplo, hagámosle la pregunta a Sheri: ¿Quién es $g \circ f \circ \mathit{Sheri}$? Deben decidir primero quién es $f \circ \mathit{Sheri}$.

SHERI: Mi padre es Mike.

Y ¿quién es $g \circ \mathit{Mike}$?

SHERI: La madre de mi padre era Lee.

Bien, por lo tanto $g \circ f \circ \mathit{Sheri} = \mathit{Lee}$. ¿Es el morfismo $f \circ g \circ f$ igual al morfismo f? ¿Cómo comprobamos si dos morfismos de conjuntos son iguales?

CHAD: Cuando la misma entrada produce la misma salida.

Entonces, ¿qué pasa con estos dos morfismos?

ALICIA: Son iguales.

¿En serio? Calculemos ambos para la entrada

$$\mathbf{1} \xrightarrow{\mathit{Alicia}} \mathit{Mujeres}$$

¿Quién es $f \circ \mathit{Alicia}$?

ALICIA: Rocco.

Y ¿quién es $g \circ \mathit{Rocco}$?

ALICIA: Dolores.

Y ¿$f \circ \mathit{Dolores}$?

ALICIA: No recuerdo su primer nombre, pero su apellido era R.

Está bien, entonces $f \circ g \circ f \circ \mathit{Alicia} = \mathit{Sr.\ R.}$ ¿Es $\mathit{Sr.\ R} = \mathit{Rocco}$?

ALICIA: No, $f \circ g \circ f$ y f son morfismos diferentes.

Correcto. Hay una entrada para la cual producen distintas salidas, y entonces son diferentes.

Observen que la *prueba para la igualdad de morfismos* $A \underset{h}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$ *de* conjuntos

$$\boxed{f = h} \quad \text{si y sólo si} \quad \boxed{f \circ a = h \circ a \text{ para todo punto } \mathbf{1} \xrightarrow{a} A}$$

es equivalente a lo siguiente:

$$\boxed{f \neq h} \quad \text{si y sólo si} \quad \boxed{\text{para al menos un } \mathbf{1} \xrightarrow{a} A \quad f \circ a \neq h \circ a}$$

Cualquier elemento a para el cual f es diferente de h es un *contraejemplo* que demuestra la diferencia de f y h. Entonces, Alicia, ¿cuál es el contraejemplo que demuestra que f y $f \circ g \circ f$ son diferentes?

ALICIA: Yo.

Correcto. Porque tú eres el miembro del conjunto de mujeres para el cual verificamos que

$$f \circ g \circ f \circ Alicia \neq f \circ Alicia$$

De hecho, para estos dos morfismos, $f \circ g \circ f \circ x \neq f \circ x$ para *toda* mujer x, porque en caso contrario tendríamos la situación biológicamente imposible de que el padre de x, $y = fx$, satisfaría $y = f \circ g \circ y$; él sería el padre de su madre. A menudo el resultado de una composición de morfismos tiene un nombre especial por su importancia. Con $g = madre$ y $f = padre$, la composición $g \circ f$, *madre de padre*, se llama "abuela paterna". Observen qué tan seguido es posible leer el símbolo "$\circ$" como "de" en lugar de "tras". Esto es cierto también para el símbolo "$\times$" para la multiplicación de números. Usualmente lo leemos como "por" pero para factores fraccionarios, como en $\frac{2}{3} \times 6 = 4$, a menudo decimos: "Dos tercios de seis es cuatro."

CUESTIONARIO DE PARES DE MORFISMOS “OPUESTOS”

0. $\boxed{A \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} B}$ Llene los espacios vacíos; cuando ocurra $\boxed{\text{¿contra?}}$, tache la alternativa falsa.

1. Dados dos morfismos f, g con dominios y codominios como arriba, podemos (a veces $\boxed{\text{¿contra?}}$ siempre) formar los morfismos compuestos $g \circ f$ y $f \circ g$. Todo lo que podemos decir de $g \circ f$ y $f \circ g$ como morfismos es que son ____________.

2. Si sabemos que g es una retracción para f, eso quiere decir que $g \circ f$ es de hecho ____________; entonces podemos demostrar que $f \circ g$ no es solamente un ____________, sino que de hecho es un ____________. Esto último quiere decir que la ecuación ___________ es verdadera.

3. Si sabemos que f es un isomorfismo y que $g \circ f = 1_A$, entonces $f \circ g$ no solamente es un idempotente sino que es ____________. Si, además, s es un morfismo para el cual $f \circ s = 1_B$, concluimos que $s =$ __________.

4. Regresando a 0, esto es, sin suponer ecuación alguna, solamente las afirmaciones de dominio y codominio sobre f y g, la composición $f \circ g \circ f$ (puede ser diferente de $\boxed{\text{¿contra?}}$ debe ser igual a) f. De la misma forma $f \circ g \circ f \circ g$ (puede ser diferente de $\boxed{\text{¿contra?}}$ debe ser igual a) $f \circ g$.

RESUMEN: SOBRE LA ECUACIÓN $p\circ j = 1_A$

Si los morfismos $A \xrightarrow{j} X \xrightarrow{p} A$ satisfacen $(*)$ $p\circ j = 1_A$,
se siguen varias **consecuencias**:

En cualquier categoría.

El endomorfismo $X \xrightarrow{j\circ p} X$ (llámenlo "α" para abreviar) satisface $\alpha\circ\alpha = \alpha$; decimos que α es **idempotente**. Escrito completo, esto es $(j\circ p)\circ(j\circ p) = (j\circ p)$. Veremos más consecuencias más adelante.

En la categoría de conjuntos finitos.

(1) p satisface: para cada miembro a de A, hay al menos un miembro x de X para el cual $p(x) = a$; decimos que p es **suprayectiva.**
(2) j satisface: si $j(a_1) = j(a_2)$, entonces $a_1 = a_2$; decimos que j es **inyectiva**.
(3) $\#A \leq \#X$ y si $\#A = 0$, entonces ¡$\#X = 0$ también!

PROBLEMAS QUE INVOLUCRAN LA ECUACIÓN $(*)$: CUATRO CLASES

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, shift left, "p"] \\ A \arrow[u, shift left, "?j"] \end{tikzcd}$$

Dado $X \xrightarrow{p} A$, *encuentre* todas las $A \xrightarrow{j} X$ que satisfacen $(*)$. Una tal j es llamada una **sección** para p.

En conjuntos finitos, j es también llamada una "elección de representantes" para p. A menos de que p sea suprayectiva, *no* habrá secciones para p. Más en general, el *número* de secciones para p es $\prod_{1 \xrightarrow{a} A} \#(p^{-1}a)$ (la "fórmula de Chad").

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, shift left, "p?"] \\ A \arrow[u, shift left, "j"] \end{tikzcd}$$

Dado $A \xrightarrow{j} X$, *encuentre* todas las $X \xrightarrow{p} A$ que satisfacen $(*)$. Una tal p es llamada una **retracción** para j.

En conjuntos finitos, a menos que j sea inyectiva, *no* habrá retracciones para j. Si j es inyectiva el *número* de retracciones para j es $(\#A)^{\#X-\#A}$ (la "fórmula de Danilo").

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, shift left, "p?"] \\ A \arrow[u, shift left, "?j"] \end{tikzcd}$$

Dados sólo X y A, *encuentre* todas las p, j que satisfacen $(*)$. Si hay al menos un par, decimos que A es un **retracto** de X (vía p y j) y a veces escribimos "$A \leq X$".

A menos que $\#A \leq \#X$, no puede haber tales pares p, j, esto es, A no puede ser un retracto de X. La fórmula para el número de pares p, j en términos de $\#A$ y $\#X$ es un poco complicada.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[loop right, "\alpha"] \arrow[d, shift left, "p?"] \\ ?A \arrow[u, shift left, "?j"] \end{tikzcd}$$

Dado sólo un endomorfismo $X \xrightarrow{\alpha} X$, *encuentre* una A y j, p que satisfagan $(*)$ y $j\circ p = \alpha$. Un tal par se llama una **escisión** para α. A menos que α sea idempotente, no puede haber una escisión para α.

En la categoría de conjuntos finitos, para cada endomorfismo idempotente α hay una escisión p, j. El número de elementos de la A deseada resulta ser el número de **puntos fijos** de α (elementos x de X que satisfacen $\alpha(x) = x$).

REVISIÓN DE LAS "PALABRAS CON I"

Morfismo identidad: Para cada objeto X hay un morfismo identidad $X \xrightarrow{1_X} X$. Éste satisface $1_X f = f$ y $g 1_X = g$ siempre que (los dominios y codominios coincidan, de manera que) el lado izquierdo esté definido.

Inverso, isomorfismo: "Inverso" es la palabra básica e involucra *dos* morfismos

$$A \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} B$$

Decir que "g es un inverso para f" quiere decir $fg = 1_B$ *y* $gf = 1_A$. Si f tiene un inverso, tiene sólo uno y podemos llamarlo f^{-1}. Si f tiene un inverso, podemos decir que f es un **isomorfismo**.

He aquí una analogía para tener la gramática a punto:

MORFISMOS	**PERSONAS**
g es INVERSO para f.	Ginger es CÓNYUGE de Fred.
No todos los morfismos tienen inversos, pero un morfismo no puede tener dos inversos.	No todas las personas tienen cónyuge, pero no se permite tener dos cónyuges.
f es un ISOMORFISMO.	Fred es CASADO.
Significado: hay algún g que es un inverso para f, de hecho, exactamente uno.	Significado: hay alguna persona que es cónyuge para Fred, de hecho, exactamente una.
f^{-1} (el inverso de f).	Cónyuge de Fred.
Está prohibido usarlo como un nombre de un morfismo, a menos que f tenga inverso.	Está prohibido usarlo para especificar a una persona, a menos que Fred tenga cónyuge.
$(f^{-1})^{-1} = f$	El cónyuge del cónyuge de F. es F.
Con más precisión, si f tiene un inverso, entonces f^{-1} también tiene un inverso y este inverso es f.	Con más precisión, si Fred tiene cónyuge, la cónyuge también tiene cónyuge y este cónyuge es Fred.

Idempotente, involución: (ver artículo III) Ambas son propiedades que sólo un endomorfismo $A \xrightarrow{f} A$ puede tener, ya que involucra a $f \circ f$.
Si $f \circ f = f$, decimos que f es (un) **idempotente**.
Si $f \circ f = 1_A$, decimos que f es (una) **involución**.

Observaciones: El único idempotente que tiene un inverso es el morfismo identidad.
Toda involución tiene un inverso: él mismo.

EXAMEN 1

1. En todo este problema:

$$A = \left\{ \begin{array}{c} \textit{Ivonne} \\ \textit{Quico} \\ \textit{Iván} \end{array} \right\}$$

(a) Encuentre un morfismo *invertible* $A \xrightarrow{f} A$, distinto del morfismo identidad 1_A.

(b) Encuentre un morfismo *idempotente* $A \xrightarrow{e} A$, distinto del morfismo identidad 1_A.

(Dibuje los "diagramas internos especiales" de sus morfismos f y e —dichos diagramas están disponibles solamente para endomorfismos.)

(c) Encuentre otro conjunto B y dos morfismos

$$B \underset{r}{\overset{s}{\rightleftarrows}} A$$

para los cuales $r \circ s = 1_B$ y $s \circ r = e$.

(Dibuje los diagramas internos de r y s. En esta parte, e sigue siendo morfismo que eligió en la parte (b).)

2. $\mathbb{R}$ es el conjunto de los números reales y $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ es el morfismo dado por la fórmula explícita $f(x) = 4x - 7$ para cada entrada x. Demuestre que f tiene un morfismo inverso. Para hacer esto, dé una fórmula explícita para el morfismo inverso g y luego demuestre que

(a) $(g \circ f)(x) = x$ para cada número real x, y que

(b) $(f \circ g)(x) = x$ para cada n˙mero real x.

Sesión 10

Los teoremas de Brouwer

1. Bolas, esferas, puntos fijos y retracciones

El matemático holandés L. E. J. Brouwer (1881-1966) demostró algunos teoremas sobresalientes sobre morfismos "continuos" entre objetos familiares: circunferencia, disco, bola sólida, etcétera. El ambiente para éstos era la "categoría de espacios topológicos y morfismos continuos". Para nuestros propósitos no es necesario tener una descripción precisa de esta categoría; en su lugar descubriremos una lista de ciertos hechos que llamaremos "axiomas" y deduciremos conclusiones de estos axiomas. Claro que los axiomas no serán elegidos aleatoriamente sino que reflejarán nuestra experiencia con "conjuntos cohesivos" (conjuntos en los que tiene sentido hablar de cercanía entre puntos) y "morfismos continuos". (Burdamente, un morfismo f es continuo si $f(p)$ no brinca instantáneamente de una posición a otra posición lejana conforme movemos paulatinamente p. Encontramos este concepto cuando discutimos la idea de Galileo de un movimiento continuo de una partícula, esto es, un morfismo continuo de un intervalo de tiempo en el espacio.) Hay una ventaja en no especificar con precisión nuestra categoría: nuestro razonamiento se aplicará a cualquier categoría en la que los axiomas sean ciertos y hay, de hecho, muchas categorías en las que esto es así ("espacios topológicos", "espacios suaves", etcétera).

Comenzaremos enunciando los teoremas de Brouwer y tratando de ver si nuestra intuición sobre morfismos continuos los hace parecer posibles. Primero describiremos los *teoremas del punto fijo de Brouwer.*

(1) *Sea I un segmento de línea, incluyendo sus extremos (I por Intervalo) y supongan que $f\colon I \to I$ es un endomorfismo continuo. Entonces este morfismo debe tener un punto fijo: un punto x en I para el cual $f(x)=x$.*

Ejemplo

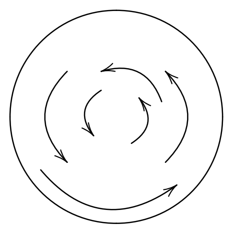
Supongan que I es un intervalo de tiempo y que R es un intervalo de camino, digamos la carretera de Oaxaca a Puebla. Supongan que dos automóviles circulan por este camino. El primer automóvil viaja a velocidad constante de Oaxaca a Puebla, de manera que su movimiento está descrito por $I \xrightarrow{u} R$ (u por movimiento "uniforme"). Mientras tanto, el segundo auto comienza en cualquier lugar de la carretera y se mueve erráticamente, quizás estacionándose por un rato, regresando después en el sentido en el que llegó y terminando su recorrido en cualquier lugar del camino. Denotemos el movimiento de este segundo auto mediante $I \xrightarrow{m} R$. Ahora bien, u es un morfismo invertible, así es que obtenemos un morfismo $R \xrightarrow{u^{-1}} I$ y sea $I \xrightarrow{f} I$ el morfismo compuesto $f = u^{-1} \circ m$. El teorema de Brouwer nos dice que debe existir un tiempo t en I en el cual $f(t)=t$; esto es, $u^{-1}mt=t$; por lo que $mt=ut$, que dice que hay un tiempo t en el cual los dos automóviles están en el mismo punto de la carretera. Esto no parece sorprendente; si el primer auto circula de Oaxaca a Puebla y el segundo siempre está en la carretera, entonces, por supuesto, el primer auto debe encontrarse con el segundo en algún momento.

El siguiente teorema es similar pero acerca de un disco, en lugar de un intervalo, y lo encuentro mucho menos obvio.

(2) *Sean D un disco cerrado (la figura plana que consiste de todos los puntos dentro de una circunferencia incluyendo la frontera) y f un endomorfismo de D. Entonces f tiene un punto fijo.*

Ejemplo

Rotar el disco un cierto ángulo nos da un endomorfismo continuo del disco; f podría ser el proceso "girar 90 grados".



ALICIA: ¿Qué tal el centro?

¡Exacto! Ése es un punto fijo. Para este morfismo fue fácil ver que tiene un punto fijo pero para otros morfismos puede no ser tan fácil; aún así, el teorema dice que, porque f es continua, tiene al menos un punto fijo. Este teorema me parece mucho más sorprendente que el anterior.

Ejemplo

Supongan que mi disco es una porción del área de Washington D.C., digamos la parte interior a, o sobre, el periférico circular. Traigo un mapa de la región dibujado en un pedazo de papel P. El mapa es entonces un morfismo continuo $D \xrightarrow{m} P$. Si soy tan insensible como para arrugar el mapa y tirarlo por la ventanilla del automóvil, de manera que cae dentro del periférico, obtengo un morfismo continuo adicional $P \xrightarrow{p} D$ (p por "proyección"), que le asocia a cada punto del papel arrugado el punto en el suelo directamente debajo de él. El teorema de Brouwer, aplicado al morfismo $f=p{\circ}m{:}D \longrightarrow D$, me dice que algún punto x dentro del periférico se encuentra exactamente debajo del punto $m(x)$ que representa a x en el mapa. ¿Encuentran esto sorprendente? Yo sí cuando lo escuché por primera vez. Pueden intentar el experimento pero, por favor, recojan el mapa después.

Si se les ocurrió que un mapa perfecto mostraría cada detalle del área, incluyendo un dibujo del mapa tirado, congratúlense. Han descubierto la idea detrás del *teorema del punto fijo de Banach* para morfismos "contracción". Sólo tienen que ir un paso más allá: el mapa tirado tiene un pequeño dibujo del mapa tirado y ese dibujo tiene un dibujo más chico que tiene un dibujo más chico... Estos dibujos gradualmente se cierran en el único punto fijo de nuestro endomorfismo. Esta idea bellamente simple funciona, sin embargo, sólo para un endomorfismo que encoje las distancias. El teorema de Brouwer se aplica a *cualquier* endomorfismo continuo del disco.

Ejemplo:

Tenemos aquí un morfismo para el cual se aplica el teorema de Brouwer pero no el de Banach. Supongan que D es un cuarto con forma de disco en una casa de muñecas y que F es un plano de ese cuarto pero más grande que el original; arrugamos F y lo tiramos en D como antes. El morfismo compuesto $D \xrightarrow{m} F \xrightarrow{p} D$ no encojerá distancias esta vez, de manera que la idea de Banach no se aplica. (De hecho, $p \circ m$ puede tener muchos puntos fijos pero no es tan fácil localizarlos. Sucede a menudo que si un problema tiene una sola solución es fácil encontrarla, pero si hay muchas soluciones resulta difícil encontrar una de ellas.) El siguiente teorema es sobre ... ¿Alguien adivina?

FÁTIMA: ¿Una bola?

¡Exactamente! Una bola sólida. Dice lo siguiente:

(3) *Todo endomorfismo continuo de una bola sólida tiene un punto fijo.*

Para imaginarse un endomorfismo, piensen en deformar la bola de cualquier manera arbitraria pero sin romperla.

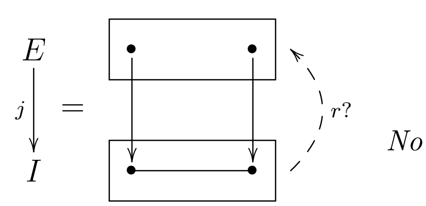
DANILO: ¿Algo así como amasar?

Sí, pero sin romper la masa en partes separadas. Yo encuentro más fácil imaginar este endomorfismo de la bola si tengo primero *dos* "objetos", un poco de masa W y una región B en forma de bola en el espacio. Entonces puedo encontrar dos morfismos de W en B; una colocación "uniforme" $u{:}W \longrightarrow B$ en el que la masa llena exactamente la región B y una nueva colocación después de amasar, $p{:}W \longrightarrow B$. Ahora bien, u es invertible y el endomorfismo que queremos es pu^{-1}. Le asocia a cada punto en la región la nueva colocación del punto en la masa que estaba originalmente allí; es una clase de morfismo "cambio de dirección".

Ahora describimos la secuencia de teoremas conocidos como los *teoremas de retracción de Brouwer.*

(I) *Considere el morfismo inclusión $j{:}E \longrightarrow I$ del conjunto de dos puntos E como frontera del intervalo I. No existe un morfismo continuo que sea una retracción para j.*

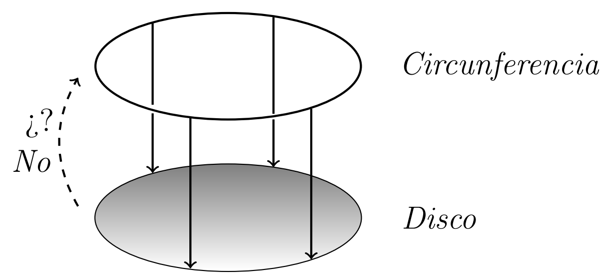
Recuerden que esto quiere decir que no existe un morfismo continuo $r: I \longrightarrow E$ tal que $r \circ j = 1_E$.



En otras palabras, no es posible mandar al intervalo contínuamente a sus dos puntos extremos y dejar los puntos extremos en su lugar. ¿No es razonable? ¿No es obvio que uno no puede poner una parte del intervalo en uno de los puntos extremos y otra parte en el otro sin romperlo?

El siguiente teorema de retracción es acerca del disco y su frontera.

(II) *Considere la inclusión* $j\colon C \rightarrowtail D$ *de la circunferencia* C *como frontera del disco* D. *No hay un morfismo continuo que sea una retracción para* j.



Otra vez, debe parecer razonable. Supongamos que tenemos un tambor hecho con una piel extremadamente flexible. Para obtener una retracción de la inclusión de la frontera podemos imaginarnos tomar la piel y apachurrarla contra el borde pero sin mover a su frontera. Uno puede pensar que esto no es posible sin perforar o romper la piel. Lo que dice este teorema es que este pensamiento es correcto.

El tercer teorema de retracción es, como pueden imaginar, acerca de la bola y su frontera (la esfera).

(III) *Considere la inclusión* $j\colon S \rightarrowtail B$ *de la esfera* S *como frontera de la bola* B *en la bola. No hay un morfismo continuo que sea una retracción para* j.

Ahora bien, aquí está el punto de todos estos teoremas: (1) y (I) de hecho son teoremas equivalentes como lo son los teoremas (2) y (II), y también (3) y (III). En otras palabras, después de demostrar los teoremas de retracción, que parecen tan razonables, Brouwer pudo fácilmente obtener como consecuencias los teoremas de punto fijo (que parecen mucho menos intuitivos). Lo ilustraremos explicando cómo demostró Brouwer que (II) implica (2) y les dejaremos los otros casos para que los piensen.

Escribamos claramente lo que Brouwer prometió demostrar:

> *Si no hay una retracción continua del disco a su frontera, entonces todo morfismo continuo del disco en sí mismo tiene un punto fijo.*

Sin embargo, Brouwer no demostró esto directamente. En su lugar demostró lo siguiente:

> *Dado un endomorfismo continuo del disco sin puntos fijos, uno puede construir una retracción continua del disco a su frontera.*

Éste es un ejemplo de la forma *contrapositiva* de una afirmación lógica. La forma contrapositiva de "A implica B" es "*no* B implica *no* A", que carga exactamente la misma información que "A implica B", simplemente está expresada de manera diferente. Abajo hay un ejemplo de cómo se utiliza.

2. Digresión sobre la regla contrapositiva

Una amiga mía, Meeghan, tiene muchos tíos. Todos los tíos de Meeghan son doctores. En el mundo de Meeghan

$$\textit{tío} \xrightarrow{(\textit{implica})} \textit{doctor} \qquad\qquad \text{(SITUACIÓN PARTICULAR)}$$

Fui a su boda y conocí a algunos de ellos. Allí tuve una discusión interesante con un hombre inteligente que yo pensé que era otro tío, pero en el transcurso de la conversación él dijo que era un mecánico. Entonces yo pensé

$$\textit{mecánico} \xrightarrow{(\textit{implica})} \textit{no doctor} \qquad\qquad \text{(CONOCIMIENTO GENERAL sobre nuestra sociedad)}$$

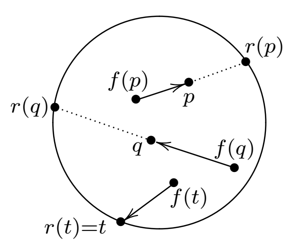
$$\textit{no doctor} \xrightarrow{(\textit{implica})} \textit{no tío de Meeghan} \qquad\qquad \text{(CONTRAPOSITIVA de lo que se sabe de la situación particular)}$$

Por lo tanto este hombre no es uno de los tíos de Meeghan.

$$\begin{tikzcd}
 & M \arrow[d] & & \\
\mathbf{1} \arrow[ur, "\textit{su afirmación}"] \arrow[dr, "\textit{mi conclusión}"'] & \textit{no } D \arrow[d] & & T \arrow[d, "\textit{hecho acerca de la familia de Meeghan}"] \\
 & \textit{no } T & & D
\arrow[from=2-4, to=2-2, Rightarrow, "\text{CONTRAPOSITIVA}"']
\end{tikzcd}$$

3. La demostración de Brouwer

Regresemos a los teoremas de Brouwer. Para demostrar que la no existencia de una retracción implica que todo endomorfismo continuo tiene un punto fijo, todo lo que necesitamos hacer es suponer que hay un endomorfismo continuo del disco que no tiene punto fijo alguno y construir a partir de él una retracción continua para la inclusión de la circunferencia en el disco.



Entonces, sea $j\colon C \longrightarrow D$ el morfismo inclusión de la circunferencia en el disco como su frontera y supongamos que tenemos un endomorfismo del disco $f\colon D \longrightarrow D$, *que no tiene punto fijo alguno*. Esto quiere decir que para cada punto x en el disco D, $f(x) \neq x$.

De esto vamos a construir una retracción para j, esto es, un morfismo $r{:}D \to C$ tal que $r \circ j$ es la identidad en la circunferencia. La clave para la construcción es la propiedad que supusimos que f tenía, es decir, que para cada punto x en el disco, $f(x)$ es diferente de x. Dibuje una flecha con su cola en $f(x)$ y su cabeza en x. Esta flecha "apuntará hacia" algún punto $r(x)$ en la frontera. Cuando x ya es un punto en la frontera, $r(x)$ es el mismo x, y entonces r es una retracción para j, esto es, $rj = 1_C$.

Hay dos cosas que vale la pena notar: primero, que algo que parece imposible o difícil de demostrar puede ser deducido fácilmente de algo que parece mucho más razonable y es, de hecho, más fácil de demostrar y, segundo, que saber que un morfismo no tiene una retracción tiene a menudo consecuencias muy poderosas.

El razonamiento que llevó a la demostración del teorema del punto fijo de Brouwer puede ser resumida en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\textit{f sin punto fijo} \arrow[rr, Rightarrow, "\textit{demostración}"] & & \textit{retracción en la frontera} \\
& \Downarrow \ \textit{principio contrapositivo} & \\
\substack{\textit{no retracción} \\ \text{(razonable y verdadero)}} \arrow[rr, Rightarrow] & & \substack{\textit{no f sin punto fijo} \\ \text{(sorprendente pero ahora se} \\ \text{sabe que es verdadero)}}
\end{tikzcd}$$

DANILO: Tu conclusión suena extraña. En lugar de "toda f tiene un punto fijo" obtuviste "no hay f sin punto fijo".

Tienes razón. Necesitamos usar otro principio de la lógica, que *no*(*no* A) implica A, para alcanzar "toda f tiene un punto fijo". El mismo Brouwer cuestionó muy seriamente esta regla de la lógica y veremos más adelante que hay ejemplos de categorías útiles en cuya lógica "interna" esta regla no se satisface. (Esta dificultad "lógica" resulta estar conectada con la dificultad de realmente localizar a un punto fijo para f, si f no es un "morfismo contracción".)

4. Relación entre puntos fijos y teoremas de retracción

Aunque que el resto de la sesión 10 es más difícil que la mayor parte de este libro, queremos animar al lector a que intente los ejercicios; uno a menudo aprende más luchando con un problema difícil, aun si uno no logra solucionarlo. No pierdan el ánimo; pueden entender el resto del libro sin dominar esta sesión.

Ejercicio 1
Como antes, sea $j\colon C \longrightarrow D$ la inclusión de la circunferencia en el disco. Suponga que tenemos dos morfismos continuos $D \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} D$ y que g satisface $g \circ j = j$. Use el teorema de retracción para demostrar que debe haber un punto x en el disco en el cual $f(x) = g(x)$.
Sugerencia: El teorema de punto fijo es el caso especial $g = 1_D$; trate de generalizar el argumento que usamos en ese caso especial.

Mencioné que cada teorema de retracción es equivalente a un teorema de punto fijo. Eso quiere decir que no sólo podemos deducir el teorema de punto fijo del teorema de retracción, como lo hicimos, sino que podemos también deducir el teorema de retracción del teorema de punto fijo. Es más fácil y no require una construcción geométrica brillante. He aquí cómo va.

Ejercicio 2
Supongamos que A es un "retracto" de X, esto es, que hay morfismos $A \underset{r}{\overset{s}{\rightleftarrows}} X$ con $r \circ s = 1_A$. Suponga asimismo que X tiene la propiedad del punto fijo para morfismos desde T, esto es, para cada endomorfismo $X \xrightarrow{f} X$ existe un morfismo $T \xrightarrow{x} X$ para el cual $fx = x$. Demuestre que A tiene también la propiedad de punto fijo para morfismos desde T.
Sugerencia: La demostración debe funcionar en cualquier categoría, así que debe utilizar solamente el álgebra de la composición de morfismos.

Ahora pueden aplicar el ejercicio 2 a los casos: T es **1** (cualquier espacio con un solo punto), X es el intervalo, el disco o la bola y A es su frontera (dos puntos, circunferencia o esfera). Observen en todos estos casos hay un endomorfismo obvio "antipodal" a de A, que manda a cada punto en el punto diametralmente opuesto a él, y a no tiene punto fijo.

Ejercicio 3
Use el resultado del ejercicio anterior y el hecho de que el morfismo antipodal no tiene punto fijo, para deducir cada uno de los teoremas de retracción del teorema de punto fijo correspondiente.

Al resolver estos ejercicios notarán que han hecho más de lo que les era requerido. Por ejemplo, del teorema de punto fijo para el disco habrán concluido no solamente que el morfismo inclusión $C \longrightarrow D$ no tiene retracción, sino que C no es un retracto de D (mediante *cualquier* par de morfismos). De hecho, el argumento muestra que *ninguno* de E, C, S es un retracto de *ninguno* de I, D, B.

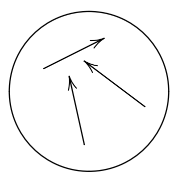
Probablemente habrán notado que el mismo razonamiento se usa en todas las dimensiones; por ejemplo, el ejercicio 1 se aplica al intervalo o a la bola igual que al disco. En la siguiente sección enunciamos las cosas para el caso “bola”, pero hacemos los dibujos para el caso “disco”.

5. Cómo entender una demostración: la objetivización y “morfización” de conceptos

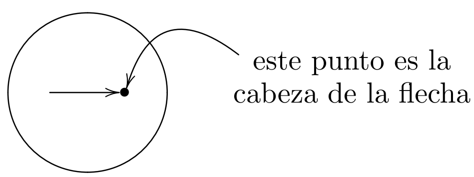
Quizás hayan sentido que ninguno de nuestros razonamientos acerca de los teoremas de Brouwer era válido, ya que no tenemos una noción precisa de “morfismo continuo”. Lo que deseamos hacer en seguida es extraer aquellas propiedades que son necesarias para nuestro razonamiento y ver que nuestras conclusiones son válidas en cualquier categoría en la que estas propiedades (que llamaremos axioma 1 y axioma 2) se satisfacen.

Brouwer introduce en su demostración, además de la esfera S, la bola B y el morfismo inclusión $S \xrightarrow{j} B$, algunos nuevos *conceptos*:

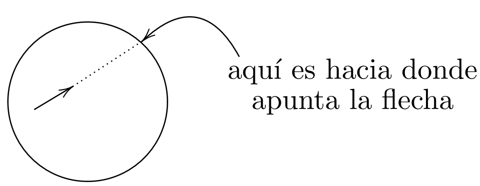
(1) *Flechas* en B:



(2) Cada flecha tiene una *cabeza* en B:



(3) Cada flecha en B *apunta* hacia un punto en S:



Para analizar su demostración, entonces, debemos llevar estos conceptos dentro de nuestra categoría $\mathcal{C}$. Quiere decir que necesitaremos:

(1) un *objeto* F (cuyos puntos son las *flechas* en B);

(2) un *morfismo* $F \xrightarrow{h} B$ (asociándole a cada flecha su *cabeza*); y

(3) un *morfismo* $F \xrightarrow{p} S$ (diciendo adónde apunta cada flecha).

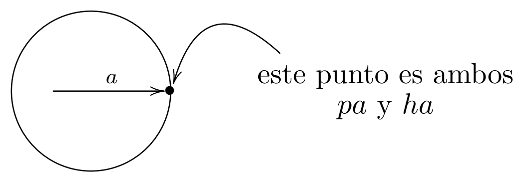
(Recuerden que un morfismo en $\mathcal{C}$ *significa* un morfismo “continuo”; entonces cualquier morfismo obtenido mediante composición con morfismos en $\mathcal{C}$ será automáticamente continuo.)

Ahora tenemos tres objetos y tres morfismos:

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[dl, "p"'] \arrow[d, "h"] \\ S \arrow[r, "j"'] & B \end{tikzcd}$$

y podemos comenzar a preguntar: ¿qué propiedades especiales de estos conceptos (ahora "objetivizados") son usados en la demostración de Brouwer?

Primero, observamos que si una flecha tiene su cabeza en la frontera, entonces su cabeza *es* el lugar hacia donde apunta la flecha:



Llevaremos esto a nuestra categoría notando que un morfismo $T \xrightarrow{a} F$ es una lista (suave) de flechas: $T \xrightarrow{a} F$.

Axioma 1: *Si T es cualquier objeto en $\mathcal{C}$, y $T \xrightarrow{a} F$ y $T \xrightarrow{s} S$ son morfismos que satisfacen $ha = js$, entonces $pa = s$.*

El diagrama de abajo muestra todos los morfismos que están involucrados.

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "a"] \arrow[d, "s"'] & F \arrow[dl, "p"'] \arrow[d, "h"] \\ S \arrow[r, "j"'] & B \end{tikzcd}$$

(En lugar de solamente una flecha, imaginamos una "familia parametrizada" de flechas, una para cada punto en un "espacio de parámetros" u "objeto de prueba" T; esto es, un morfismo $T \xrightarrow{a} F$. El resto del proceso de traducción que lleva al axioma 1 simplemente requiere el cuidado de notar que p de una flecha está en S, mientras que h de una flecha está en B; por lo que para compararlas necesitamos utilizar a la inclusión $S \xrightarrow{j} B$.)

Ya con el axioma 1 podemos llevar a cabo parte del argumento de Brouwer:

Teorema 1: *Si $B \xrightarrow{\alpha} F$ satisface $h\alpha j = j$, entonces $p\alpha$ es una retracción para j.*

Demostración: Tomemos $T = S$, $s = 1_S$, y $a = \alpha j$ en el axioma 1.

Corolario: *Si $h\alpha = 1_B$, entonces $p\alpha$ es una retracción para j.*

Segundo, observamos que, si dos puntos de B son *diferentes*, hay una flecha del primero al segundo; de hecho cada flecha en F debe ser pensada con cabeza y cola *distintas*, de otra forma no apuntaría hacia un punto definido en la frontera S. Utilizamos el método de objetos de prueba otra vez, con la idea de que, para cada t, αt sea la flecha de ft en gt.

Axioma 2: *Si T es cualquier objeto en $\mathcal{C}$ y $T \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} B$ son cualesquiera dos morfismos, entonces hay un punto $\mathbf{1} \xrightarrow{t} T$ con $ft = gt$ o hay un morfismo $T \xrightarrow{\alpha} F$ con $h\alpha = g$.*

Ahora podemos terminar el argumento:

Teorema 2: *Supongamos que tenemos morfismos*

$$B \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} B$$

y que $gj = j$, entonces hay un punto $\mathbf{1} \xrightarrow{b} B$ con $fb = gb$ o hay una retracción para $S \xrightarrow{j} B$.

Demostración: Tomemos $T = B$ en el axioma 2. Obtenemos: hay un punto $\mathbf{1} \xrightarrow{b} B$ con $fb = gb$ o hay un morfismo $B \xrightarrow{\alpha} F$ con $h\alpha = g$; pero entonces $h\alpha j = gj = j$, por lo que el teorema 1 dice que $p\alpha$ es una retracción para j.

Si tomamos $g = \mathit{1}_B$ en el teorema 2, obtenemos un corolario:

Corolario: *Si $B \xrightarrow{f} B$, entonces hay un punto fijo para f o hay una retracción para $S \xrightarrow{j} B$.*

(En el teorema 2 dimos la versión más general del teorema de Brouwer; el corolario es la versión original.)

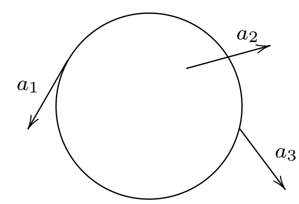
Veremos más adelante que en muchas categorías $\mathcal{C}$ un objeto T puede ser grande y sin embargo no tener “puntos” $\mathbf{1} \xrightarrow{t} T$. En una categoría tal, debemos notar que en realidad no usamos toda la fuerza de los axiomas 1 y 2 en nuestras demostraciones. Fue suficiente con tener el axioma 1 solamente para $T = S$ y el axioma 2 para $T = B$.

Lo principal que hay que estudiar, sin embargo, es la manera en que mediante la objetivización de ciertos conceptos como morfismos en una categoría, la combinación de conceptos ¡se convierte en *composición* de morfismos! Entonces podemos condensar un argumento complicado en un simple cálculo utilizando la ley asociativa. Hace varios cientos de años, Hooke, Leibniz y otros grandes científicos anticiparon la posibilidad de un “álgebra filosófica” que tuviera tales atributos. Esta sección ha sido algo condensada y puede tomarles un poco de esfuerzo dominarla. Necesitarán regresar a nuestra discusión previa de la demostración de Brouwer y compararla cuidadosamente con esta versión. Tal estudio ayudará porque este ejemplo es un modelo para el método de “pensar categóricamente”.

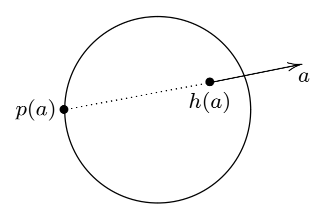
6. El ojo de la tormenta

Imaginen un fluido (líquido o gas) moviéndose en un recipiente esférico. (Si quieren un ejemplo en dos dimensiones, pueden imaginar agua dando vueltas en una taza de té y observar la corriente en la superficie imaginando, digamos, botes diminutos a la deriva.) En este mismo momento, cada punto en nuestra bola se está moviendo y dibujamos una flecha con la cola en ese punto para representar su velocidad. Esto es, la longitud de la flecha es proporcional a la rapidez del punto y la flecha apunta en la dirección del viaje. ¿Es posible que cada punto se esté moviendo con velocidad no cero o debe haber al menos un "ojo de la tormenta" instantáneo?

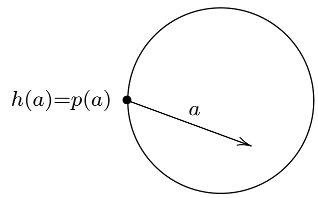
Para contestar esta pregunta tomamos un objeto-flecha F ligeramente distinto del que imaginamos antes. Sus puntos serán las posibles flechas velocidad de partículas moviéndose en nuestra bola a velocidad no cero. Estas flechas están un poco menos constreñidas que en nuestro objeto-flecha ya que la cabeza de la flecha puede quedar fuera de la bola; la única restricción es que si el punto está en la superficie de la bola, su flecha velocidad no puede apuntar "hacia afuera" —lo peor que puede ocurrir es que sea tangente a la esfera. He aquí un dibujo en dos dimensiones:



Las flechas a_1 y a_2 son puntos permitidos en F pero a_3 está prohibido. Supondremos ahora que todo punto se está moviendo, de manera que obtenemos un morfismo $B \xrightarrow{\alpha} F$, que le asocia a cada punto de B la "flecha velocidad" en ese punto. Como morfismo $F \xrightarrow{h} B$, tomamos el morfismo que le asocia a cada flecha su "casa". (Recuerden que se supone que una flecha representa la velocidad de un punto en movimiento, de manera que la cola de la flecha es la casa actual del punto.) Finalmente, como morfismo $F \xrightarrow{p} S$, le asociamos a cada flecha su "lugar imaginario de nacimiento". (Se acostumbra nombrar a los vientos de esta manera, como si un viento que llega del norte hubiera siempre soplado en una dirección y viniera desde el punto más lejano que se pudiera.)



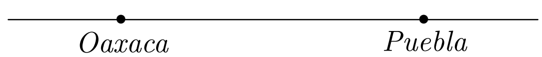
El axioma 1 dice que si el punto que se está moviendo está en la esfera, entonces su “lugar de nacimiento” es su locación actual:



Esto es, el punto en el dibujo de arriba es ambos, $h(a)$ (como un punto de la bola) y $p(a)$ (como un punto en la esfera). Ahora ya pueden ver ustedes mismos que el corolario del teorema 1 nos dice que si hubiera una tormenta sin un “ojo” instantáneo, habría una retracción para la inclusión de la esfera en la bola.

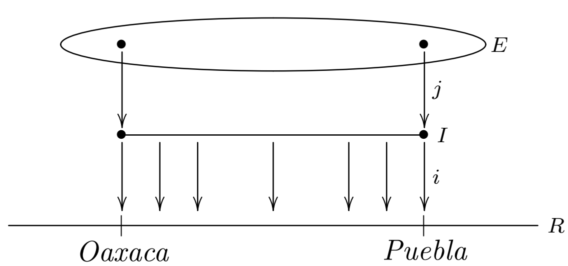
7. Usar morfismos para formular conjeturas

Regresemos al caso unidimensional, los dos automóviles viajando en la carretera:



De hecho, la carretera se extiende más allá de estas dos ciudades. Supongan que manejo a lo largo del camino, comenzando en Oaxaca y terminando en Puebla; alguno de ustedes comienza y termina al mismo tiempo, comenzando y terminando en cualesquiera dos puntos entre Oaxaca y Puebla. Durante nuestros viajes se nos permite ir a cualquier lugar a lo largo de la carretera, aun al sur de Oaxaca y al norte de Puebla. ¿Están convencidos de que nos encontraremos en algún momento? ¿Por qué?

Noten que hay ahora tres objetos involucrados: I, un intervalo; E sus puntos terminales y R, el camino largo. (Pueden imaginar R como toda la línea, si quieren.) Tenemos también dos “morfismos inclusión”:



Mi viaje da un morfismo adicional: $I \xrightarrow{m} R$, y su viaje otro: $I \xrightarrow{y} R$. Las relaciones entre estos cuatro morfismos se investigan en el siguiente ejercicio.

Ejercicio 4
(a) Exprese las restricciones dadas arriba en los viajes mediante ecuaciones que involucren composición de morfismos, introduciendo otros objetos como vaya siendo necesario.

(b) Formule la conclusión de que en algún momento se encontrarán en términos de la composición de morfismos. (Necesitará introducir al objeto **1**.)

(c) Adivine una versión más fuerte del teorema de punto fijo de Brouwer en dos dimensiones, reemplazando E, I y R por la circunferencia, el disco y el plano. (Puede hacerlo en tres dimensiones también, si quiere.)

(d) Trate de poner a prueba su conjetura en (c); por ejemplo, trate de inventar morfismos para los cuales su teorema conjeturado no sea cierto.

PARTE III

Categorías de conjuntos estructurados

Usamos morfismos para expresar "estructura" extra en conjuntos, lo que lleva a gráficas, sistemas dinámicos y otros ejemplos de "tipos de estructura". Después investigamos morfismos que "preservan la estructura".

ARTÍCULO III

Ejemplos de categorías

Gráficas dirigidas y otras estructuras

Ahora introducimos categorías en las que los objetos tienen una cierta clase de cohesión que los conjuntos abstractos no poseen. Por ejemplo, en "gráficas dirigidas" tendremos no solamente puntos, sino también flechas que pegan a los puntos, y se requiere que los morfismos "respeten cohesividad" (no como en conjuntos abstractos, donde son completamente arbitrarios). Muchas categorías útiles exhiben cohesión, por ejemplo, en geometría y topología hay nociones de "cercanía" de puntos; pero estudiaremos en su lugar ejemplos mucho más elementales que son muy útiles e interesantes por derecho propio.

Conforme avancemos notarán que todos nuestros ejemplos están construidos usando un método general: modelamos una categoría conocida de manera imprecisa mediante *estructuras* en la categoría de conjuntos abstractos. Estas estructuras estarán expresadas siempre mediante alguna configuración de morfismos dados. En sesiones subsecuentes las trataremos más despacio y con más detalle; nuestro objetivo prinicipal aquí es el de dar una rápida visión preliminar de algunas nociones posibles de estructura y, de manera especial, proveer una primera introducción a la poderosa idea de *morfismo que preserva la estructura.* Los ejercicios en este artículo, así como los ejercicios anteriores, involucran únicamente la aplicación de la ley asociativa a las definiciones dadas.

1. La categoría $\mathcal{S}^{\circlearrowleft}$ de endomorfismos de conjuntos

Un ejemplo importante, al que ya hemos hecho referencia de manera implícita, es la categoría en la que un objeto es un conjunto equipado de un endomorfismo específico. Antes de definirla denotemos por $\mathcal{S}$ a la categoría de conjuntos y morfismos que hemos estado discutiendo hasta ahora. Los morfismos en $\mathcal{S}$ serán pensados como "*arbitrarios*"; es decir, *cualquier* proceso o esquema concebible, que tenga solamente la propiedad de que para cada punto de un dominio especificado dé un valor único en un codominio especificado, cuenta como un morfismo en $\mathcal{S}$. Como consecuencia, $\mathcal{S}$ no puede asignar alguna propiedad para distinguir un punto de un conjunto A de otro punto de A, a pesar de que el número de puntos de A es un invariante bajo isomorfismo en $\mathcal{S}$. La mayoría de los ejemplos interesantes que hemos discutido, tales como la línea de tiempo, son sólo parcialmente capturados por $\mathcal{S}$ porque, por ejemplo, el orden del tiempo involucra más "estructura"; sin embargo, todos los ejemplos tienen su sombra en $\mathcal{S}$ y los cálculos que podemos hacer en $\mathcal{S}$ (usando composiciones, los productos que pronto vendrán, etcétera) ya esclarecen un poco los ejemplos reales. Cuando ascendamos a la consideración de categorías de objetos más ricamente estructurados que aquellos en $\mathcal{S}$, esperamos ver una imagen mucho más definida sobre la sombra y aclarar mucho más los ejemplos mediante la misma clase de cálculos categóricos. De manera esquemática, el programa es

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M} \arrow[rr, "\textit{imagen más definida}"] \arrow[dr, "\textit{sombra}"'] & & \mathcal{S}^{\mathbf{T}} \arrow[dl] \\
& \mathcal{S} &
\end{tikzcd}$$

donde $\mathcal{M}$ denota una categoría real pero imprecisa, $\mathbf{T}$ denota una noción específica de estructura elegida y $\mathcal{S}^{\mathbf{T}}$ denota la categoría de estructuras de tipo $\mathbf{T}$ que pueden ser construidas en $\mathcal{S}$; las flechas denotan la clase apropiada de morfismos entre categorías, conocidos como *funtores*, que discutiremos más adelante.

Ahora regresemos a la categoría en la cual un objeto es un endomorfismo de un conjunto. Una notación sugestiva es $\mathcal{S}^{\circlearrowleft}$. Un objeto de $\mathcal{S}^{\circlearrowleft}$ es cualquier conjunto X equipado con un endomorfismo α. Pero lo más importante de una categoría son sus morfismos y cómo se componen —¿qué son los morfismos de $\mathcal{S}^{\circlearrowleft}$? Son morfismos que “respetan la estructura dada”, esto es, un morfismo

$$\boxed{X^{\circlearrowleft\alpha}} \xrightarrow{\ f\ } \boxed{Y^{\circlearrowleft\beta}}$$

entre dos objetos de $\mathcal{S}^{\circlearrowleft}$ es un $\mathcal{S}$-morfismo $X \xrightarrow{f} Y$ que además satisface

$$\boxed{f \circ \alpha = \beta \circ f}$$

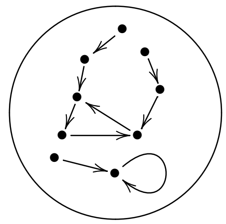
Después de hacer varios ejercicios verán que esta ecuación es realmente la expresión más apropiada de la idea de que f preserva la estructura dada, esto es, que f es una manera de reflejar la estructura de α en la estructura β.

Ejercicio 1
Demuestre que si ambas, f como arriba y también

$$\boxed{Y^{\circlearrowleft\beta}} \xrightarrow{\ g\ } \boxed{Z^{\circlearrowleft\gamma}}$$

son morfismos en $\mathcal{S}^{\circlearrowleft}$, entonces el morfismo compuesto $g \circ f$ en $\mathcal{S}$ define realmente otro morfismo en $\mathcal{S}^{\circlearrowleft}$.
Sugerencia: ¿Cuáles deberían ser el dominio y el codominio (en el sentido de $\mathcal{S}^{\circlearrowleft}$) de este tercer morfismo? Transfiera la definición (dada para el caso f) a los casos g y $g \circ f$; luego haga cálculos para ver que las ecuaciones satisfechas por g y f implican la ecuación deseada para $g \circ f$.

Un objeto de $\mathcal{S}^{\circlearrowright}$ tiene realmente toda la estructura sugerida por nuestro dibujo interno de un endomorfismo α:



X

Esto es debido a que un isomorfismo en $\mathcal{S}^{\circlearrowright}$ tiene un inverso que es *también* un morfismo en $\mathcal{S}^{\circlearrowright}$. Puede entonces demostrarse que si entre dos objetos de $\mathcal{S}^{\circlearrowright}$ hay un isomorfismo de $\mathcal{S}^{\circlearrowright}$, entonces no solamente los dos conjuntos tienen el mismo número total de puntos (como lo implicaría un simple $\mathcal{S}$-isomorfismo) sino que ambos tienen el mismo número de puntos fijos, el mismo número de ciclos de longitud siete, el mismo número de puntos que se mueven cuatro pasos antes de detenerse, el mismo número de puntos que se mueven dos pasos antes de entrar en un ciclo de longitud tres, etcétera, y además, el mismo número de componentes, etcétera. Este arreglo de números (que podríamos aprender a organizar) describe la clase de estructura inherente a un objeto de $\mathcal{S}^{\circlearrowright}$.

2. Aplicaciones típicas de $\mathcal{S}^{\circlearrowright}$

Los objetos de $\mathcal{S}^{\circlearrowright}$ surgen frecuentemente como *sistemas dinámicos* o *autómatas*. La idea es que X es el conjunto de los posibles *estados*, ya sea en un sistema natural o en una máquina, y que el endomorfismo dado α representa la evolución de los estados, ya sea evolución natural en una unidad de tiempo del sistema dejado solo o bien el cambio del estado interno que ocurrirá como resultado de oprimir una vez un botón (o algún otro control) α fuera de la máquina. Si sucede que el sistema está en el estado x ahora, entonces, después de una unidad de tiempo o una activación del control, estará en el estado $\alpha(x)$. Después de dos unidades de tiempo o de oprimir el botón dos veces, estará en el estado

$$\alpha(\alpha(x)) = (\alpha \circ \alpha)(x)$$

De manera similar, $\alpha^3 = \alpha \circ \alpha \circ \alpha$ efectúa la evolución de tres pasos, etcétera. Preguntas que pueden hacerse acerca de un objeto particular de $\mathcal{S}^{\circlearrowright}$ incluyen entonces la cuestión de *accesibilidad*:

> Dado un estado x, ¿es posible llegar a tal estado?, esto es, ¿existe un estado x' tal que $x = \alpha(x')$?

Así como la cuestión de *convergencia al equilibrio*:

> Dado un estado x, ¿es posible, mediante la activación de α un número suficiente de veces (o esperando un tiempo suficiente en la óptica del

sistema natural), llegar a un estado que ya no cambia, esto es, para alguna n, $\alpha^{n+1}(x)=\alpha^{n}(x)$?

3. Dos subcategorías de $\mathcal{S}^{\circlearrowright}$

Si ponemos restricciones en la clase de endomorfismos que se permiten, obtenemos subcategorías

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=tiny]
 & \mathcal{S}^{e} \\
\mathcal{S}^{\circlearrowright} \arrow[ur, phantom, "\supset"] \arrow[dr, phantom, "\supset"] & \\
 & \mathcal{S}^{\overset{\leftarrow}{\circlearrowright}}
\end{tikzcd}$$

donde $\mathcal{S}^{e}$ significa la categoría cuyos objetos son todos los endomorfismos *idempotentes* de conjuntos y $\mathcal{S}^{\overset{\leftarrow}{\circlearrowright}}$ significa la categoría cuyos objetos son todos los endomorfismos *invertibles* de conjuntos (también conocidos como *automorfismos* de conjuntos o simplemente como *permutaciones*); en estas dos categorías la definición de *morfismo* entre objetos es la misma que la enunciada arriba para $\mathcal{S}^{\circlearrowright}$. La descripción numérica (u otra) de los detalles de la estructura de un objeto típico en una de estas dos subcategorías puede considerarse como una especialización (algo menos complicada) de la descripción para $\mathcal{S}^{\circlearrowright}$. Pero, como categorías en sí mismas, estas tres categorías son sorprendentemente muy distintas, como veremos.

4. Categorías de endomorfismos

Si $\mathcal{C}$ es cualquier categoría, podemos construir $\mathcal{C}^{\circlearrowright}$ a partir de $\mathcal{C}$ en la misma forma en que construimos $\mathcal{S}^{\circlearrowright}$ a partir de $\mathcal{S}$. Un objeto es un endomorfismo en $\mathcal{C}$ y un morfismo es un $\mathcal{C}$-morfismo que satisface la misma ecuación que antes. Hay muchas subcategorías de $\mathcal{C}^{\circlearrowright}$ (la categoría cuyos objetos son endomorfismos en $\mathcal{C}$ y cuyos morfismos son morfismos "equivariantes"), por ejemplo:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \mathcal{C}^{\overset{\leftarrow}{\circlearrowright}} = \textit{automorfismos} \arrow[r, phantom, "\supset"] & \mathcal{C}^{\theta} = \textit{involuciones} \arrow[dr, phantom, "\cup"] & \\
\mathcal{C}^{\circlearrowright} = \textit{endomorfismos} \arrow[ur, phantom, "\supset"] \arrow[dr, phantom, "\supset"] & & & \mathcal{C} = \textit{identidades} \\
 & \mathcal{C}^{e} = \textit{idempotentes} \arrow[urr, phantom, "\supset"] & &
\end{tikzcd}$$

donde θ es una *involución* de A si y solo si $\theta\circ\theta = 1_A$. Observen que una involución es automáticamente un automorfismo (esto es, un endomorfismo que es también un isomorfismo) porque tiene un inverso obvio: θ^{-1} es θ mismo si θ es una involución.

Cada objeto A de $\mathcal{C}$ tiene solamente *un* morfismo identidad pero puede tener muchos idempotentes y muchas involuciones, algunos automorfismos que no son involuciones y algunos endomorfismos que no son ni idempotentes ni automorfismos.

Pregunta: ¿Puede un endomorfismo ser al mismo tiempo un automorfismo y un idempotente?

Sí, 1_A es obviamente ambos. ¿Hay otros? Bueno, supongamos que sabemos

$$\begin{aligned} \alpha\circ\alpha &= \alpha \\ \alpha\circ\beta &= 1_A \\ \beta\circ\alpha &= 1_A \end{aligned}$$

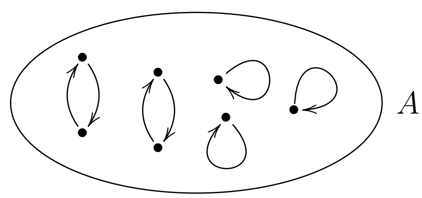
es decir, que α es idempotente y también que tiene un inverso (bilateral) β. Entonces

$$1_A = \alpha\circ\beta = (\alpha\circ\alpha)\circ\beta = \alpha\circ(\alpha\circ\beta) = \alpha\circ 1_A = \alpha$$

en otras palabras, el *único* automorfismo idempotente es la identidad. De la demostración vemos que el único idempotente que tiene una sección es 1_A.

Ejercicio 2
¿Qué puede demostrar acerca de un idempotente que tiene una retracción?

Cuando $\mathcal{C} = \mathcal{S}$, ¿cómo se ven los diagramas internos de tales endomorfismos especiales? Si $\theta\circ\theta = 1_A$, entonces el diagrama interno de θ debe verse como esto:



esto es, un cierto número de "2-ciclos" y cierto número de *puntos fijos* (x para las cuales $\theta(x) = x$).

Ejercicio 3
Un conjunto finito A tiene un número par de elementos si y sólo si A tiene una involución que *no tiene puntos fijos*; A tiene un número impar de elementos si y solo si tiene una involución con solamente *un* punto fijo. Aquí nos apoyamos en ideas conocidas acerca de los números —pero estas propiedades pueden usarse como la *definición* de ser par o ser impar que pueden verificarse sin necesidad de contar si la estructura de una situación real sugiere una involución. El morfismo "gemelo" en un conjunto A de calcetines es un ejemplo obvio.

Ejemplifiquemos los tipos de endomorfismos de arriba en el conjunto

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

de todos los números enteros (positivos y negativos), considerado como un objeto de $\mathcal{S}$.

Ejercicio 4
Si $\alpha(x) = -x$ se considera como un endomorfismo de $\mathbb{Z}$, ¿es α una involución o un idempotente? ¿Cuáles son sus puntos fijos?

Ejercicio 5
La misma pregunta que arriba, pero con $\alpha(x) = |x|$, el valor absoluto.

Ejercicio 6
Si α es el endomorfismo de $\mathbb{Z}$ definido por la fórmula $\alpha(x) = x + 3$, ¿es α un automorfismo? Si lo es, escriba una fórmula para su inverso.

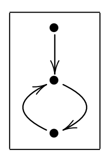
Ejercicio 7
La misma pregunta para $\alpha(x) = 5x$.

Hay muchas otras subcategorías de $\mathcal{C}^{\circlearrowright}$, por ejemplo, aquella cuyos objetos son todos los endomorfismos α en $\mathcal{C}$ que satisfacen

$$\alpha \circ \alpha \circ \alpha = \alpha$$

Ejercicio 8
Demuestre que ambas, $\mathcal{C}^e$ y $\mathcal{C}^\theta$, son subcategorías de la categoría anterior, esto es, que una involución o un idempotente satisface $\alpha^3 = \alpha$.

Ejercicio 9
En $\mathcal{S}$, considere el endomorfismo α de un conjunto de tres elementos definido por el dibujo interno:



Demuestre que satisface $\alpha^3 = \alpha$ pero que *no* es idempotente y *no* es involución.

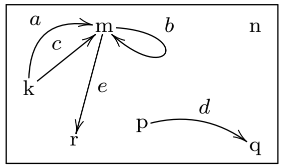
5. Gráficas irreflexivas

Hay otra importante categoría de estructuras de la cual $\mathcal{S}^{\circlearrowright}$ puede considerarse como una subcategoría. Nos referimos a la categoría $\mathcal{S}^{\downdownarrows}$ de (multi-) *gráficas* (irreflexivas dirigidas). Un *objeto* de esta categoría es cualquier par de conjuntos equipados con un par paralelo de morfismos, como en este diagrama:[2]

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, shift right, "s"'] \arrow[d, shift left, "t"] \\ P \end{tikzcd}$$

[2]Los nombres s y t vienen de los términos *source* y *target* respectivamente.

donde X se llama el conjunto de *flechas* y P el conjunto *vértices* de la gráfica. Si x es una "flecha" (un elemento de X), entonces $s(x)$ se llama la *salida* de x y $t(x)$ se llama la *llegada* de x. La terminología se refiere al hecho de que cualquier gráfica tiene un dibujo interno del tipo



Aquí X tiene cinco elementos $(a, b, \ldots)$, P seis $(\mathrm{k}, \mathrm{m}, \ldots)$ y $s(a)=\mathrm{k}$, $t(e)=\mathrm{r}$, $t(d)=\mathrm{q}$, etcétera.

Ejercicio 10
Complete la especificación de los dos morfismos

$$X \xrightarrow{s} P \quad \text{y} \quad X \xrightarrow{t} P$$

que expresa las relaciones de llegada y salida de la gráfica dibujada arriba. ¿Hay algún elemento de X en el que s y t tomen el mismo valor en P? ¿Hay algún elemento al cual t le asigne el valor k?

Los morfismos en $\mathcal{S}^{\downdownarrows}$ se definen, otra vez, de tal manera que respeten la estructura de gráfica. Esto es, un morfismo

$$\boxed{\begin{array}{c} X \\ s\downarrow\downarrow t \\ P \end{array}} \xrightarrow{\quad f \quad} \boxed{\begin{array}{c} Y \\ s'\downarrow\downarrow t' \\ Q \end{array}}$$

en $\mathcal{S}^{\downdownarrows}$ se define como un par de $\mathcal{S}$-morfismos $X \xrightarrow{f_F} Y$, $P \xrightarrow{f_V} Q$ para los cuales *ambas* ecuaciones

$$\boxed{\begin{array}{c} f_V s = s' f_F \\ f_V t = t' f_F \end{array}} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "f_F"] \arrow[d, shift right, "s"'] \arrow[d, shift left, "t"] & Y \arrow[d, shift right, "s'"'] \arrow[d, shift left, "t'"] \\ P \arrow[r, "f_V"'] & Q \end{tikzcd}$$

son válidas en $\mathcal{S}$. Decimos, de manera abreviada, que "f preserva las relaciones de salida y llegada" de las gráficas. (Los subíndices F y V son únicamente para sugerir la parte del morfismo f que opera en las flechas y la parte que opera en los vértices.)

Ejercicio 11
Si f es como arriba y si

$$\boxed{\begin{array}{c} Y \\ s' \Big\downarrow\Big\downarrow t' \\ Q \end{array}} \xrightarrow{\quad g \quad} \boxed{\begin{array}{c} Z \\ s'' \Big\downarrow\Big\downarrow t'' \\ R \end{array}}$$

es otro morfismo de gráficas, demuestre que la pareja $g_F \circ f_F$, $g_V \circ f_V$ de morfismos compuestos en $\mathcal{S}$ es también un $\mathcal{S}^{\downdownarrows}$-morfismo.

Las gráficas tienen muchas aplicaciones importantes —podríamos considerar los vértices como ciudades y las flechas como caminos posibles; o bien, los vértices como sustantivos y las flechas como verbos transitivos con sujeto y objeto especificados. Los diagramas de cableado electrónico, los diagramas de flujo de información, etcétera, se consideran a menudo explícitamente como gráficas, esto es, como objetos en $\mathcal{S}^{\downdownarrows}$, y muchas relaciones importantes entre gráficas se expresan en términos de morfismos en $\mathcal{S}^{\downdownarrows}$.

Entre muchas de las propiedades numéricas de gráficas que permanecen sin cambio por los isomorfismos están, no solamente el número total de flechas y de vértices, sino también el número de lazos y el número de componentes.

6. Endomorfismos como gráficas especiales

¿Por qué dijimos que $\mathcal{S}^{\circlearrowleft}$ puede considerarse como una subcategoría de $\mathcal{S}^{\downdownarrows}$? Cualquier afirmación de esta forma involucra una manera específica de insertar

$$\mathcal{S}^{\downdownarrows} \xleftarrow{I} \mathcal{S}^{\circlearrowleft}$$

que en este caso es el siguiente: dado cualquier conjunto $X^{\circlearrowleft\alpha}$ equipado con un endomorfismo, podemos considerar

$$\begin{array}{c} X \\ 1_X \Big\downarrow\Big\downarrow \alpha \\ X \end{array}$$

como una clase especial de gráfica en la que el número de flechas es igual al número de vértices y en la que, más precisamente, la salida de la flecha llamada x es el vértice también llamado x y la llegada de la flecha llamada x es el vértice llamado $\alpha(x)$. Ahora ustedes pueden ver el método en nuestra locura; ¡el dibujo interno de un endomorfismo es un caso especial del dibujo interno de una gráfica!

Dijimos que la *categoría* $\mathcal{S}^{\circlearrowleft}$ podía considerarse como una subcategoría de $\mathcal{S}^{\downdownarrows}$. Como una gran parte de una categoría son sus morfismos, quiere decir que nuestra idea de inserción debe aplicarse también a los morfismos. De hecho, es fácil ver que, si

$$\boxed{X^{\circlearrowleft\alpha}} \xrightarrow{\quad f \quad} \boxed{Y^{\circlearrowleft\beta}}$$

está en $\mathcal{S}^{\circlearrowright}$, entonces

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, shift right, "1_X"'] \arrow[d, shift left, "\alpha"] & Y \arrow[d, shift right, "1_Y"'] \arrow[d, shift left, "\beta"] \\
X \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}$$

satisface las dos ecuaciones requeridas para ser un morfismo en $\mathcal{S}^{\downdownarrows}$.

Ejercicio 12
Si denotamos el resultado del proceso anterior por $I(f)$, entonces tenemos que $I(g\circ f)=I(g)\circ I(f)$, por lo tanto nuestra inserción I preserva la operación fundamental de categorías.

Decimos que una subcategoría $\mathcal{C}$ de una categoría $\mathcal{D}$ es **plena** si para cada par A, B de objetos en $\mathcal{C}$, los morfismos en $\mathcal{D}$ de A a B son exactamente aquellos en $\mathcal{C}$.

Ejercicio 13
(Plenitud.) Demuestre que si tenemos un $\mathcal{S}^{\downdownarrows}$-morfismo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f_F"] \arrow[d, shift right, "1_X"'] \arrow[d, shift left, "\alpha"] & Y \arrow[d, shift right, "1_Y"'] \arrow[d, shift left, "\beta"] \\
X \arrow[r, "f_V"'] & Y
\end{tikzcd}$$

(entre gráficas especiales que provienen vía I de endomorfismos de conjuntos) entonces se sigue que $f_V=f_F$, así que el morfismo también proviene vía I de un morfismo en $\mathcal{S}^{\circlearrowright}$.

Si consideramos a I como entendida, vemos que nuestros ejemplos están relacionados así:

$$\mathcal{S}^{\downdownarrows} \supset \mathcal{S}^{\circlearrowright} \begin{array}{l} \supset \mathcal{S}^{e} \\ \supset \mathcal{S}^{\circlearrowleft} \end{array}$$

7. La categoría más sencilla $\mathcal{S}^{\downarrow}$: los objetos son simplemente morfismos de conjuntos

Una subcategoría diferente de $\mathcal{S}^{\downdownarrows}$ es $\mathcal{S}^{\downarrow}$, en la que un objeto es un *solo* morfismo arbitrario de conjuntos entre dos conjuntos y un morfismo es un “cuadrado conmutativo de morfismos” en $\mathcal{S}$. Aquí, la pretendida inclusión involucra la consideración de aquellas gráficas para las cuales la estructura de salida y llegada son el *mismo* morfismo (esto es, gráficas para las cuales todas sus flechas son lazos). Como un endomorfismo es una clase especial de morfismo, hay también una inclusión obvia J de $\mathcal{S}^{\circlearrowright}$ en $\mathcal{S}^{\downarrow}$ pero, de manera crucial, *no* satisface “plenitud”. Hay morfismos $J(X^{\circlearrowright\alpha}) \to J(Y^{\circlearrowright\beta})$ en $\mathcal{S}^{\downarrow}$ que no provienen vía J de morfismos $X^{\circlearrowright\alpha} \to Y^{\circlearrowright\beta}$ en $\mathcal{S}^{\circlearrowright}$.

Ejercicio 14
Dé un ejemplo en $\mathcal{S}$ de dos endomorfismos y dos morfismos como en

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f_F"] \arrow[d, "\alpha"'] & Y \arrow[d, "\beta"] \\ X \arrow[r, "f_V"'] & Y \end{tikzcd}$$

que satisfacen la ecuación $f_V \circ \alpha = \beta \circ f_F$ pero para los cuales $f_F \neq f_V$.

Ya que es fácil dar muchos ejemplos como en el ejercicio anterior, podemos decir que la estructura preservada por un $\mathcal{S}^{\downarrow}$-morfismo

$$J(X^{\circlearrowright \alpha}) \to J(Y^{\circlearrowright \beta})$$

es mucho más "relajada" que la estructura preservada por un $\mathcal{S}^{\circlearrowright}$-morfismo

$$\boxed{X^{\circlearrowright \alpha}} \longrightarrow \boxed{Y^{\circlearrowright \beta}}$$

Esto es cierto aun para isomorfismos, de manera que la rica estructura que $\mathcal{S}^{\circlearrowright}$ ve en un endomorfismo se degrada, al considerar el endomorfismo simplemente como un morfismo, a cuestiones mucho más sencillas: ¿cuántos puntos hay en el conjunto y cuántas α-pilas hay de cada tamaño posible?

8. Gráficas reflexivas

Un ejemplo final muy importante es el de las *gráficas reflexivas*: éstas pueden considerarse como gráficas con un tercer morfismo estructural i

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, shift right=2, "s"'] \arrow[d, shift left=2, "t"] \\ P \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd} \qquad \boxed{\begin{array}{l} si = 1_P \\ ti = 1_P \end{array}}$$

del cual ambos, salida y llegada, son retracciones; o equivalentemente i es una sección común dada del morfismo salida y del morfismo llegada. El siguiente ejercicio les pide demostrar ciertas consecuencias de estas ecuaciones.

Ejercicio 15
En una gráfica reflexiva, los dos endomorfismos $e_1 = is$, $e_2 = it$ del conjunto de flechas no sólo son idempotentes sino que además satisfacen las cuatro ecuaciones

$$e_k e_j = e_j \quad \text{para} \quad k, j = 1, 2$$

Claro que se requiere que los morfismos de gráficas reflexivas respeten, además de salida y llegada, el nuevo ingrediente i. Deben formular la definición de morfismo de gráficas reflexivas antes de comenzar el ejercicio 16.

Ejercicio 16
Demuestre que si f_F, f_V en $\mathcal{S}$ constituyen un morfismo de gráficas reflexivas, entonces f_V está determinado por f_F y la estructura interna de las dos gráficas.

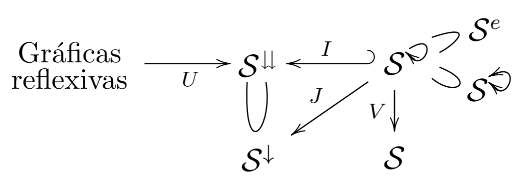
Ejercicio 17
Considere una estructura que involucra dos conjuntos y cuatro morfismos como en

$$\begin{tikzcd} H \arrow[loop right, "\varphi"] \arrow[d, shift right, "\mu'"'] \\ M \arrow[u, shift right, "\varphi'"'] \arrow[loop right, "\mu"] \end{tikzcd} \qquad \text{(sin ecuaciones)}$$

(por ejemplo H=*hombres*, M=*mujeres*, φ y φ' son *padre* y μ y μ' son *madre*). Diseñe una definición racional de *morfismo* entre tales estructuras para integrarlas en una categoría.

9. Resumen de los ejemplos y su relevancia en general

En el diagrama de abajo, las herraduras indican inserciones plenas. Noten que J seguida de la inclusión a $\mathcal{S}^{\downdownarrows}$ *no* es lo mismo que la inserción I. La relación U entre las gráficas reflexivas e irreflexivas no es una inserción plena sino un funtor que *olvida* (simplemente ignora el ingrediente estructural i); de manera similar para V.



En todos los ejemplos, la clase general de "estructura" involucrada puede describirse con mayor precisión. Cada ejemplo involucra una "categoría" (especie o modo) de conjuntos *cohesivos* o *activos*. En contraposición con los conjuntos abstractos $\mathcal{S}$, que tienen cohesión interna o moción interna cero, estos "conjuntos" tienen maneras específicas de mantenerse juntos internamente y/o moverse internamente y los morfismos en estas categorías permiten comparar y estudiar estos objetos sin romperlos o interrumpirlos. Si aplicamos funtores específicos "que olvidan", podemos también estudiar cómo se comparan los objetos si imaginamos que se permite romper o interrumpir (parcialmente) en grados específicos.

10. Retracciones e inyectividad

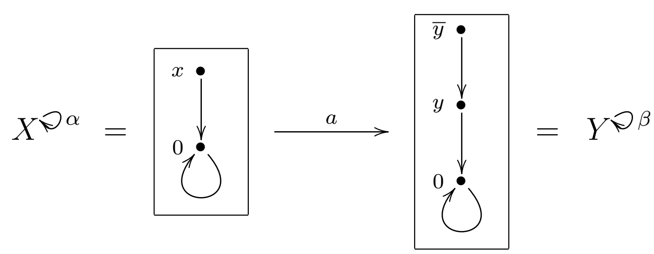
¿Cuándo un morfismo a tiene una retracción? Una condición necesaria importante es que debe ser *inyectivo*. Recordemos la definición:

Definición: *Decimos que un morfismo* $X \xrightarrow{a} Y$ *es* **inyectivo** *si y sólo si para cualesquiera morfismos* $T \xrightarrow{x_1} X$ *y* $T \xrightarrow{x_2} X$ *(en la misma categoría) si* $ax_1 = ax_2$*, entonces* $x_1 = x_2$ *(o, en forma contrapositiva, "el morfismo* a *no destruye diferencias", esto es, si* $x_1 \neq x_2$ *en el diagrama siguiente, entonces* $ax_1 \neq ax_2$*).*

$$\begin{tikzcd} T \arrow[d, shift right, "x_1"'] \arrow[d, shift left, "x_2"] \arrow[dr] & \\ X \arrow[r, "a"] & Y \end{tikzcd}$$

> **Ejercicio 18**
> Si a tiene una retracción, entonces a es inyectiva. (Suponga que $pa = 1_X$ y $ax_1 = ax_2$; trate entonces de demostrar que $x_1 = x_2$.)

En la categoría $\mathcal{S}$ de conjuntos abstractos y morfismos arbitrarios, el recíproco del ejercicio anterior es casi cierto: si $X \xrightarrow{a} Y$ es cualquier morfismo inyectivo en $\mathcal{S}$ para el cual $X \neq 0$, entonces existen morfismos $Y \xrightarrow{p} X$ para los cuales $pa = 1_X$, como ya hemos visto. Sin embargo, es muy importante que este recíproco *no* es cierto en la mayoría de las categorías. Por ejemplo, en una categoría de morfismos continuos, la inclusión a de un círculo X como la frontera de un disco Y *no* tiene una retracción; cualquiera de las $\mathcal{S}$-retracciones de a de los conjuntos subyacentes de puntos tendría que "desgarrar" el disco, esto es, no sería una retracción *continua* de los espacios. Consideremos ahora un ejemplo del mismo fenómeno en $\mathcal{S}^{\circlearrowright}$.



Sea $ax = y$ y $a0 = 0$, con X, Y, α, β como están dibujados arriba.

> **Ejercicio 19**
> Demuestre que a es un morfismo $\boxed{X^{\circlearrowright\alpha}} \xrightarrow{a} \boxed{Y^{\circlearrowright\beta}}$ en $\mathcal{S}^{\circlearrowright}$.
>
> **Ejercicio 20**
> Demuestre que a es inyectiva.

Ejercicio 21
Demuestre que, como morfismo $X \xrightarrow{a} Y$ en $\mathcal{S}$, a tiene exactamente dos retracciones p.

Ejercicio 22
Demuestre que ninguno de los morfismos p encontrados en el ejercicio anterior es un *morfismo* $\boxed{Y^{\circlearrowleft\beta}} \longrightarrow \boxed{X^{\circlearrowleft\alpha}}$ en $\mathcal{S}^{\circlearrowleft}$. Por esto, a no tiene retracciones en $\mathcal{S}^{\circlearrowleft}$.

Ejercicio 23
¿Cuántos de los ocho $\mathcal{S}$-morfismos $Y \to X$ son en realidad $\mathcal{S}^{\circlearrowleft}$-morfismos?

$$\boxed{Y^{\circlearrowleft\beta}} \longrightarrow \boxed{X^{\circlearrowleft\alpha}}$$

Ejercicio 24
Demuestre que nuestro morfismo a no tiene retracciones aun cuando sea considerado (vía la inserción J en la sección 7 de este artículo) como un morfismo en la categoría más "relajada" $\mathcal{S}^{\downarrow}$.

Ejercicio 25
Demuestre que para cualesquiera dos gráficas y cualquier $\mathcal{S}^{\downdownarrows}$-morfismo entre ellas

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f_F"] \arrow[d, shift right, "s"'] \arrow[d, shift left, "t"] & Y \arrow[d, shift right, "s'"'] \arrow[d, shift left, "t'"] \\ P \arrow[r, "f_V"'] & Q \end{tikzcd}$$

la ecuación $f_V \circ s = f_V \circ t$ puede sólo ser verdadera cuando f_F envía cada flecha en X a un *lazo* (relativo a s', t') en Y.

Decir que

$$\mathbb{Z}^{\circlearrowleft 5\times(\ )}$$

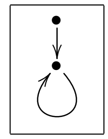
es un automorfismo sería incorrecto porque $\mathbb{Z}$ no tiene fracciones. Por otro lado, habría un germen de verdad en la afirmación porque si $\mathbb{Q}$ denota los números racionales, entonces:

Ejercicio 26
Hay un morfismo "inclusión" $\mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Q}$ en $\mathcal{S}$ para el cual:
(1) $\boxed{\mathbb{Z}^{\circlearrowleft 5\times(\ )}} \xrightarrow{f} \boxed{\mathbb{Q}^{\circlearrowleft 5\times(\ )}}$ es un morfismo en $\mathcal{S}^{\circlearrowleft}$,
(2) $\mathbb{Q}^{\circlearrowleft 5\times(\ )}$ es un automorfismo, y
(3) f es *inyectiva*.

Encuentre f y demuestre las tres afirmaciones.

Ejercicio 27
Considere el idempotente estándar

$$X^{\circlearrowleft\alpha} =$$



y sea $Y^{\circlearrowleft\beta}$ cualquier *automorfismo.* Demuestre que cualquier $\mathcal{S}^{\circlearrowleft}$-morfismo $X^{\circlearrowleft\alpha} \xrightarrow{f} Y^{\circlearrowleft\beta}$ debe ser no inyectivo, esto es, debe mandar *ambos* elementos de X al *mismo* punto (fijo) de β en Y.

Ejercicio 28
Si $X^{\circlearrowleft\alpha}$ es cualquier objeto de $\mathcal{S}^{\circlearrowleft}$ para el cual existe un $\mathcal{S}^{\circlearrowleft}$-morfismo *inyectivo* f a algún $Y^{\circlearrowleft\beta}$ donde β está en la subcategoría de *automorfismos*, entonces la misma α debe ser inyectiva.

11. Tipos de estructura

Un tipo de estructura puede especificarse dando los siguientes ingredientes:

(1) un conjunto de nombres (quizá más de uno o dos) para los objetos que esperamos sean las componentes de cada estructura individual del tipo;

(2) otro conjunto de nombres para los morfismos estructurales cruciales que deben especificarse para determinar cualquier estructura individual del tipo; y

(3) la especificación de qué objeto componente estructural se requiere que sea dominio y codominio de cada morfismo estructural, pero en términos de nombres abstractos.

Se requiere que los morfismos estructurales de cada estructura concreta del tipo se conformen a la especificación abstracta. Por ejemplo, los sistemas dinámicos discretos tienen una componente objeto de "estados" y un morfismo estructural, la "dinámica", mientras que las gráficas tienen dos componentes objeto "flechas" y "vértices" y dos morfismos estructurales "salida" y "llegada". Las gráficas reflexivas tienen tres morfismos estructurales. Nuestra discusión de sistemas de parentesco involucra también conjuntos componentes y morfismos estructurales como veremos en la sesión 12. (Observen que una especificación abstracta de un tipo de estructura puede considerarse, ella misma, como una *gráfica* —veáse la sesión 17.)

El patrón para definir la noción de morfismo en cualquier categoría de estructuras concretas es ahora explícitamente la misma para todos los tipos abstractos. Es decir, supongamos que Y y X son dos estructuras de un tipo dado, modeladas en conjuntos. Entonces para cada nombre de componente A en el tipo, hay conjuntos dados $Y(A)$ y $X(A)$, y se requiere que un morfismo $X \xrightarrow{f} Y$ involucre, para cada A así, un morfismo de conjuntos $X(A) \xrightarrow{f_A} Y(A)$; pero se requiere que estos morfismos *preserven toda la* *estructura* para que se considere que constituyen un solo morfismo de estructuras. Es decir, para cada nombre de morfismo estructural α, X tiene especificado un morfismo

$$\alpha_X\colon X(A) \to X(B)$$

donde A, B son la salida y la llegada de α en el tipo, y también Y tiene especificado un morfismo

$$\alpha_Y\colon Y(A) \to Y(B)$$

con el mismo nombre α y los mismos A, B; entonces el significado natural de la afirmación "f preserva α" es que $\alpha_Y f_A = f_B \alpha_X$

$$\begin{tikzcd}
X(A) \arrow[r, "f_A"] \arrow[d, "\alpha_X"'] & Y(A) \arrow[d, "\alpha_Y"] \\
X(B) \arrow[r, "f_B"'] & Y(B)
\end{tikzcd}$$

con la categoría de conjuntos como ambiente. Para ser un morfismo de estructuras, se requiere que f preserve *todos* los morfismos estructurales nombrados por el tipo de estructura. Entonces, un morfismo en una categoría de estructuras tiene tantos morfismos componentes como hay nombres de componentes objeto en el tipo y se requiere que se satisfaga una ecuación de preservación para cada nombre de morfismo estructural en el tipo.

Hay muchas más categorías, además de aquellas dadas por tipos abstractos de estructura; sin embargo, éstas pueden considerarse como subcategorías plenas de aquellas, esto es, la noción de morfismo no cambia. Para determinar una tal subcategoría plena imponemos condiciones restrictivas en el diagrama que constituye un objeto; la clase más simple de una tal condición es una ecuación que los morfismos deben satisfacer. Por ejemplo, podría requerirse que un sistema dinámico fuera una *involución*, o que una estructura de "lazo preferido" en una gráfica tuviera salida y llegada ambas iguales a la identidad en los vértices para obtener una gráfica reflexiva, etcétera.

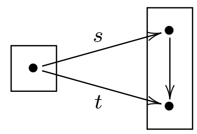
Un tipo abstracto de estructura surge a menudo de un ejemplo particular como sigue. Supongamos que $\mathcal{A}$ es una familia pequeña de objetos y morfismos en una categoría $\mathcal{X}$, con el dominio y codominio de cualquier morfismo de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{A}$. Consideremos cada objeto A en $\mathcal{A}$ como el nombre de "figuras de forma A" y cada morfismo α en $\mathcal{A}$ como el nombre α^* de un morfismo estructural. El dominio de α^* es el codominio de α y el codominio de α^* es el dominio de α. Entonces todo objeto X en $\mathcal{X}$ da lugar a una $\mathcal{A}$-estructura cuya componente A es el conjunto de todos los $\mathcal{X}$-morfismos $A \to X$ y en donde para cada $B \xrightarrow{\alpha} A$ el morfismo estructural en estas figuras tiene para todo x

$$\alpha^*_X(x) = x \circ \alpha$$

Ejercicio 29
Cada morfismo $X \xrightarrow{f} Y$ en $\mathcal{X}$ da lugar a un morfismo en la categoría de $\mathcal{A}$-estructuras, por la ley asociativa.

Por ejemplo, la noción abstracta de estructura de gráfica puede identificarse con el diagrama concreto $\mathcal{A}$ de gráficas siguiente:

$$V \underset{t}{\overset{s}{\rightrightarrows}} F$$



porque para cualquier gráfica X las flechas en X pueden ser identificadas con los morfismos de gráficas $F \xrightarrow{x} X$, los vértices en X con los morfismos de gráficas $V \longrightarrow X$ y la salida de x es entonces $s_X^*(x) = x \circ s$; para cualquier morfismo de gráficas $X \xrightarrow{f} Y$, la asociatividad $f(xs) = (fx)s$ le da substancia, dentro de la misma categoría, al hecho de que f preserva dominios:

$$s_Y^* \circ f = f \circ s_X^*$$

Cualquier instancia de una estructura "opuesta" a un tipo dado (por ejemplo, el tipo "gráfica") en cualquier categoría $\mathcal{C}$ da lugar a una interpretación de $\mathcal{C}$ en la categoría de "conjuntos con estructura" del tipo dado. Por ejemplo, si $\mathcal{C}$ es alguna categoría de espacios cohesivos, podríamos tomar, en lugar de los objetos V y F los objetos $\mathbf{1}$ y E, un espacio de un punto y un objeto que represente el espacio en un cuarto. Adicionalmente necesitamos dos puntos seleccionados en el cuarto, $\mathbf{1} \xrightarrow{s} E$ y $\mathbf{1} \xrightarrow{t} E$. Ya que esta información queda fija, cada objeto en la categoría $\mathcal{C}$ tiene una "interpretación" como una gráfica. Por ejemplo, si T es la línea de temperatura, un vértice en la "gráfica de temperatura" es un punto de T (un morfismo $\mathbf{1} \longrightarrow T$) y una flecha en la gráfica es un "campo de temperatura" en este cuarto (un morfismo $E \longrightarrow T$). La "salida" de un campo de temperatura es la temperatura en el punto s en el cuarto; la "llegada" es la temperatura en t.

Ejercicio 30
Si E, $\mathbf{1} \xrightarrow{s} E$, $\mathbf{1} \xrightarrow{t} E$ es un objeto "bipunteado" dado como arriba en la categoría $\mathcal{C}$, entonces para cada objeto X de $\mathcal{C}$, la gráfica de "X-campos" en E es, de hecho, una gráfica *reflexiva,* y para cada morfismo $X \xrightarrow{f} Y$ en $\mathcal{C}$, los morfismos inducidos en conjuntos constituyen un morfismo de gráficas reflexivas.

12. Guía

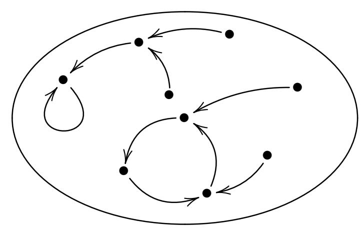
Varios ejemplos útiles de categorías han sido construidos mediante un método común y hemos comenzado a explorar algunas maneras en las que estas categorías se parecen y no se parecen a la categoría de conjuntos. Discusiones más extensas de éstas y otras categorías se dan en las sesiones 11-18, junto con un examen muestra después de la sesión 17.

Sesión 11

Ascender a categorías con estructuras más ricas

1. Una categoría con estructuras más ricas: endomorfismos de conjuntos

Un ejemplo sencillo de un “tipo de estructura” $\boldsymbol{T}$, que se utiliza para construir una categoría más rica que $\mathcal{S}$, es la idea de un endomorfismo solitario $\boldsymbol{T}=\boxed{\bullet\!\circlearrowleft}$. Una estructura de ese tipo en $\mathcal{S}$ es simplemente un conjunto dado *con un endomorfismo dado* y la categoría resultante de conjuntos con endomorfismo se denota por $\mathcal{S}^{\circlearrowleft}$. Si recuerdan que un endomorfismo de un conjunto tiene un tipo especial de diagrama interno, verán por qué un endomorfismo de un conjunto puede considerarse como un tipo particular de estructura en ese conjunto. Por ejemplo, un endomorfismo típico se ve más o menos así:

$X^{\circlearrowleft\alpha} =$ 

(Recuerden que el diagrama interno de un endomorfismo tiene exactamente una flecha *saliendo* de cada punto, pero no hay condición alguna sobre el número de flechas que pueden llegar a cada punto.) Esto realmente se ve como un conjunto con cierta “estructura”. Este conjunto X junto con este endomorfismo particular α es un ejemplo de un *objeto* de la categoría $\mathcal{S}^{\circlearrowleft}$, denotado por $X^{\circlearrowleft\alpha}$.

Además de los objetos, debemos también tener *morfismos* en la categoría $\mathcal{S}^{\circlearrowleft}$. Dados dos conjuntos con endomorfismo, digamos $X^{\circlearrowleft\alpha}$ y $Y^{\circlearrowleft\beta}$, ¿qué querría decir que un morfismo $X \longrightarrow Y$ sea “consistente con” α y β? Unos momentos de reflexión sugerirán que la restricción apropiada en un morfismo de conjuntos $f{:}X \longrightarrow Y$ para que “preserve” o “sea consistente con” las estructuras dadas por los endomorfismos α y β es que la ecuación

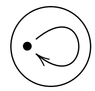
$$f\circ\alpha=\beta\circ f$$

debe ser satisfecha por f.

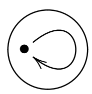
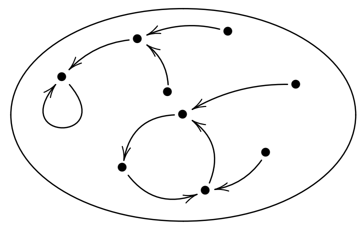
Definición:

$$\boxed{X^{\circlearrowleft\alpha}\xrightarrow{f}Y^{\circlearrowleft\beta}\ \textit{en}\ \mathcal{S}^{\circlearrowleft}} \qquad \textit{quiere decir} \qquad \boxed{\begin{array}{c} X\xrightarrow{f}Y\ \ \textit{en}\ \mathcal{S} \\ y \\ f\circ\alpha=\beta\circ f \end{array}}$$

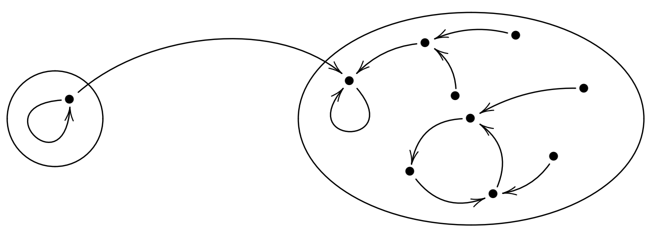
Como ejemplo, tratemos de encontrar un morfismo en la categoría $\mathcal{S}^{\circlearrowleft}$ de un conjunto con un solo elemento al $X^{\circlearrowleft\alpha}$ dibujado arriba. Por supuesto, antes de que lo intentemos, debemos decir qué endomorfismo vamos a utilizar en el conjunto singulete. El endomorfismo siempre debe estar especificado de antemano para cada objeto de $\mathcal{S}^{\circlearrowleft}$. Sin embargo, un conjunto singulete tiene solamente un endomorfismo (su morfismo identidad, por supuesto), así que el objeto de $\mathcal{S}^{\circlearrowleft}$ es el dibujado abajo.



Nuestro problema es dar un "morfismo que preserve la estructura"

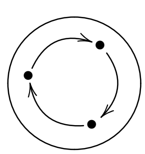
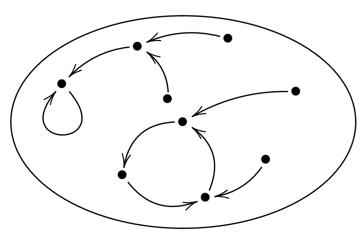
de  a $X^{\circlearrowleft\alpha}$ = 

Podrían adivinar que un morfismo que preserva la estructura no "altera" el lazo y que sólo puede enviarse a otro lazo. Como solamente hay un lazo en el codominio, esta conjetura sugiere que el único morfismo es:



Deben verificar que éste sea realmente el único morfismo que satisface la propiedad que define a los morfismos en $\mathcal{S}^{\circlearrowleft}$.

Supongamos que pedimos morfismos

de  a $X^{\circlearrowleft\alpha}$ = 

> **Ejercicio 1**
> ¿Cuántos morfismos puede encontrar? (Hay menos de siete.)

Hemos estado refiriéndonos a "la categoría $\mathcal{S}^{\circlearrowleft}$", pero no hemos aún terminado de decir qué es. Deben regresar a la definición de "categoría" para ver qué es lo que necesitamos hacer para especificar una categoría en particular. Ya hemos decidido qué son los objetos y qué son los morfismos, pero no hemos especificado aún las otras dos piezas de información: composición de morfismos y morfismos identidad. Creo, sin embargo, que cualquier persona razonable saldría con la siguiente elección para el morfismo compuesto de

$$X^{\circlearrowright\alpha} \xrightarrow{f} Y^{\circlearrowright\beta} \xrightarrow{g} Z^{\circlearrowright\gamma}$$

es decir, el morfismo compuesto como morfismos de conjuntos; esto es,

$$X^{\circlearrowright\alpha} \xrightarrow{g\circ f} Z^{\circlearrowright\gamma}$$

¡Precaución! Es posible que esta elección razonable no sea admisible; quizá $g\circ f$ no sea un morfismo en la categoría $\mathcal{S}^{\circlearrowright}$. Debemos verificar que

$$(g\circ f)\circ\alpha \stackrel{?}{=} \gamma\circ(g\circ f)$$

Éste es el ejercicio 1 en el artículo III. Todo lo que sabemos es que g y f son morfismos en $\mathcal{S}^{\circlearrowright}$ (morfismos que "preservan la estructura"), esto es, $f\circ\alpha=\beta\circ f$ y $g\circ\beta=\gamma\circ g$.

¿Pueden ver alguna manera de deducir la ecuación que necesitamos de las dos ecuaciones que tenemos?

FÁTIMA: Utiliza la ley asociativa.

Correcto, la ley asociativa y sustitución,

$$\begin{aligned}(g\circ f)\circ\alpha &= g\circ(f\circ\alpha) = g\circ(\beta\circ f) = (g\circ\beta)\circ f = (\gamma\circ g)\circ f\\ &= \gamma\circ(g\circ f)\end{aligned}$$

Más adelante, cuando queramos abreviar la escritura, eliminaremos los paréntesis y aun los círculos, escribiendo simplemente:

$$gf\alpha = g\beta f = \gamma gf$$

la primera igualdad, porque $f\alpha=\beta f$; y la segunda, porque $g\beta=\gamma g$. Por el momento, sin embargo, probablemente sea mejor hacer el uso de la ley asociativa más explícito porque es el hecho más importante acerca de la composición de morfismos.

Aún nos falta seleccionar el morfismo identidad para cada objeto $X^{\circlearrowright\alpha}$; parece que la única elección razonable es tomar $X^{\circlearrowright\alpha} \xrightarrow{1_X} X^{\circlearrowright\alpha}$, la identidad que X tiene (como conjunto no estructurado). Claro que debemos mostrar que éste es un morfismo en $\mathcal{S}^{\circlearrowright}$, esto es,

$$1_X\circ\alpha \stackrel{?}{=} \alpha\circ 1_X$$

¿Pueden ver cómo hacerlo?

TODOS: Sí, ambas son iguales a α.

Bien. Ahora tenemos todos los *datos* para especificar una categoría: objetos, morfismos, composición y morfismos identidad. Aún debemos verificar que las leyes asociativa e identidad sean verdaderas. Pero, afortunadamente, estas verificaciones son fáciles porque la composición y los morfismos identidad se eligieron como los de $\mathcal{S}$; y en $\mathcal{S}$ ya sabemos que estas reglas son verdaderas.

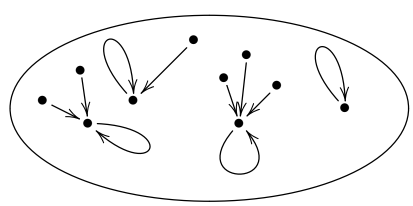
Ahora que ya sabemos que tenemos una categoría, podemos considerar la noción de isomorfismo. En la categoría de conjuntos, dos conjuntos son isomorfos si y sólo si tienen el mismo número de puntos, pero en esta categoría de conjuntos con un endomorfismo, isomorfismo significa mucho más. Quiere decir que la estructura de los dos endomorfismos es la misma. En particular, los dos endomorfismos deben tener el mismo número de puntos fijos, el mismo número de ciclos de longitud 2, el mismo número de ciclos de longitud 3, etcétera, y más.

Con esto se completa lo que quería decir, por el momento, acerca de este nuevo ejemplo de una categoría. Hay muchos otros ejemplos de categorías de estructuras, pero observen que, paradójicamente, estas estructuras están todas construidas a partir de los conjuntos que puede considerarse que carecen de estructura. Algunas personas interpretan esto diciendo que los conjuntos son la fundamentación de la matemática. Lo que realmente se revela es que, aunque un conjunto abstracto queda completamente descrito mediante un solo número, el conjunto tiene el potencial de soportar toda clase de estructuras con la ayuda de los morfismos.

2. Dos subcategorías: idempotentes y automorfismos

$\mathcal{S}^{\circlearrowleft}$ es la categoría de endomorfismos de conjuntos. Si ponemos una restricción en los endomorfismos obtendremos una subcategoría. Los siguientes son dos ejemplos de esto:

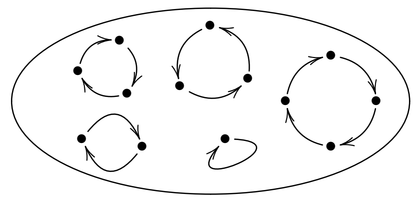
(1) La categoría $\mathcal{S}^{e}$ de conjuntos con un endomorfismo *que es un idempotente.* Entonces un conjunto con un endomorfismo $X^{\circlearrowleft\alpha}$ es un objeto de $\mathcal{S}^{e}$ si y sólo si $\alpha \circ \alpha = \alpha$. El dibujo de un objeto en $\mathcal{S}^{e}$ se ve así:



Cada punto, o es un punto fijo o alcanza un punto fijo en un paso. (En particular no hay ciclos de longitud dos o más.) Un isomorfismo en $\mathcal{S}^{e}$ quiere decir “correspondencia entre puntos fijos y correspondencia entre ramas en puntos fijos correspondientes”.

(2) La categoría $\mathcal{S}^{\overset{\leftarrow}{\circlearrowleft}}$ de conjuntos con un endomorfismo *que es invertible.* $X^{\circlearrowleft\alpha}$ es un objeto en $\mathcal{S}^{\overset{\leftarrow}{\circlearrowleft}}$ si y sólo si el endomorfismo α tiene un inverso, esto es, un

morfismo β tal que $\alpha\circ\beta = \mathit{1}_X$ y $\beta\circ\alpha = \mathit{1}_X$. El endomorfismo puede tener ciclos de cualquier longitud pero no puede tener ramas, de manera que un dibujo de un objeto en $\mathcal{S}^{\circlearrowleft}$ se ve así:



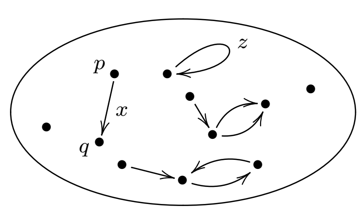
Recuerden que un endomorfismo invertible, esto es, un endomorfismo que es también un isomorfismo, se llama un *automorfismo*. Un automorfismo de un conjunto finito también se conoce como una *permutación* del conjunto.

3. La categoría de gráficas

Además de las dos categorías de arriba, que son subcategorías de $\mathcal{S}^{\circlearrowright}$, podemos dar un ejemplo de una categoría, denotada por $\mathcal{S}^{\downdownarrows}$, de la cual $\mathcal{S}^{\circlearrowright}$ es una subcategoría. Un *objeto* en $\mathcal{S}^{\downdownarrows}$ es un par de morfismos con el mismo dominio y el mismo codominio. Entonces, un objeto en $\mathcal{S}^{\downdownarrows}$ consiste de dos conjuntos X, Y y dos morfismos s y t (que se llaman "salida" y "llegada") de uno al otro:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, shift right, "s"'] \arrow[d, shift left, "t"] \\ Y \end{tikzcd}$$

Ésta es una *gráfica*. (Específicamente, como hay muchas clases de gráficas en uso, éstas son "multigráficas dirigidas irreflexivas".) Para representar una gráfica, dibujamos un punto por cada elemento de Y (a los que llamamos *vértices*) y unimos los vértices con flechas de la siguiente forma: para cada elemento x de X dibujamos una flecha del vértice sx en el vértice tx. El resultado será algo así:



donde los puntos son los elementos de Y y las flechas son los elementos de X. Si X tiene un elemento z tal que $sz = tz$, entonces dibujamos a z como un lazo. Podemos hacer un dibujo como éste para cualquier objeto en $\mathcal{S}^{\downdownarrows}$, y cada dibujo de esta clase representa un par de morfismos con el mismo dominio y el mismo codominio.

Ahora todos se preguntarán: ¿qué querríamos decir con un *morfismo* en esta categoría

$$\text{de} \quad \boxed{\begin{tikzcd} X \arrow[d, shift right, "s"'] \arrow[d, shift left, "t"] \\ Y \end{tikzcd}} \quad \text{a} \quad \boxed{\begin{tikzcd} X' \arrow[d, shift right, "s'"'] \arrow[d, shift left, "t'"] \\ Y' \end{tikzcd}} \; ?$$

La idea es que debería ser un morfismo que "preserve la estructura" de la gráfica. Ahora bien, la estructura de la gráfica consiste de vértices, flechas y las relaciones de salida y llegada entre ellos. Entonces un morfismo en esta categoría debe mandar vértices a vértices y flechas a flechas, de tal manera que si una flecha se manda a otra, el vértice salida de la primera flecha debe mandarse al vértice salida de la segunda (con la restricción similar para la llegada). Si piensan un poco lo que todo esto significa, verán que debemos definir:

Definición: *Un* **morfismo** *de* $\boxed{\begin{tikzcd} X \arrow[d, shift right, "s"'] \arrow[d, shift left, "t"] \\ Y \end{tikzcd}}$ *a* $\boxed{\begin{tikzcd} X' \arrow[d, shift right, "s'"'] \arrow[d, shift left, "t'"] \\ Y' \end{tikzcd}}$ *es un par de morfismos de conjuntos* $X \xrightarrow{f_F} X'$, $Y \xrightarrow{f_V} Y'$ *tales que*

$$f_V \circ s = s' \circ f_F \quad y \quad f_V \circ t = t' \circ f_F$$

Estas ecuaciones pueden recordarse con el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f_F"] \arrow[d, shift right, "s"'] \arrow[d, shift left, "t"] & X' \arrow[d, shift right, "s'"'] \arrow[d, shift left, "t'"] \\ Y \arrow[r, "f_V"'] & Y' \end{tikzcd}$$

Dados dos morfismos en $\mathcal{S}^{\downdownarrows}$,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f_F"] \arrow[d, shift right, "s"'] \arrow[d, shift left, "t"] & X' \arrow[d, shift right, "s'"'] \arrow[d, shift left, "t'"] \\ Y \arrow[r, "f_V"'] & Y' \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd} X' \arrow[r, "g_F"] \arrow[d, shift right, "s'"'] \arrow[d, shift left, "t'"] & X'' \arrow[d, shift right, "s''"'] \arrow[d, shift left, "t''"] \\ Y' \arrow[r, "g_V"'] & Y'' \end{tikzcd}$$

podemos obtener los morfismos compuestos $g_F \circ f_F$ y $g_V \circ f_V$, formar el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g_F \circ f_F"] \arrow[d, shift right, "s"'] \arrow[d, shift left, "t"] & X'' \arrow[d, shift right, "s''"'] \arrow[d, shift left, "t''"] \\ Y \arrow[r, "g_V \circ f_V"'] & Y'' \end{tikzcd}$$

y *definirlo* como la composición de los dos morfismos. ¿Es un morfismo? Necesitamos verificar las ecuaciones

$$(g_V \circ f_V) \circ s = s'' \circ (g_F \circ f_F) \quad \text{y} \quad (g_V \circ f_V) \circ t = t'' \circ (g_F \circ f_F)$$

Ustedes deben verificarlas y también definir los morfismos identidad y verificar las leyes asociativa e identidad.

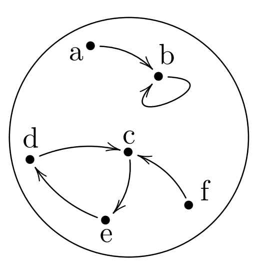
Dos gráficas son isomorfas si podemos identificar exactamente las flechas de una con las flechas de la otra y los vértices de una con los vértices de la otra, teniendo cuidado en que si dos flechas se identifican, entonces también se identifican sus vértices salida y sus vértices llegada. Los ejercicios de abajo ilustran esto. Esta categoría tiene muchas aplicaciones, por ejemplo, en ingeniería eléctrica, en problemas de transporte y aun en lingüística porque las gráficas aparecen en todos estos temas, ya sea como circuitos eléctricos, como sistemas carreteros entre pueblos o como sustantivos y verbos que relacionan a los sustantivos.

¿Qué queremos decir con que $\mathcal{S}^{\circlearrowright}$ es una subcategoría de $\mathcal{S}^{\downdownarrows}$? Significa que hay un procedimiento específico mediante el cual los objetos y los morfismos en $\mathcal{S}^{\circlearrowright}$ pueden verse como gráficas y como morfismos de gráficas. Este procedimiento es sugerido por nuestro dibujo de un endomorfismo, que es también un dibujo de una gráfica. Pero uno puede preguntar: ¿Cuál es el par de morfismos que corresponden a un endomorfismo en el pasaje de $\mathcal{S}^{\circlearrowright}$ a $\mathcal{S}^{\downdownarrows}$? La respuesta es la siguiente:

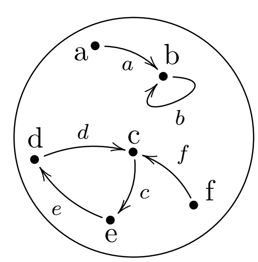
$$X^{\circlearrowright \alpha} \quad \text{corresponde a} \quad \begin{tikzcd} X \arrow[d, shift right, "1_X"'] \arrow[d, shift left, "\alpha"] \\ X \end{tikzcd}$$

y en esta correspondencia

el dibujo

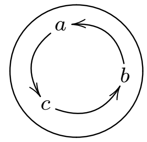


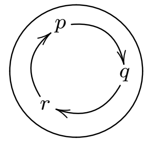
debe considerarse como



Los siguientes cuatro ejercicios conciernen isomorfismos en $\mathcal{S}^{\circlearrowright}$.

Ejercicio 2

$X^{\circlearrowright\alpha} =$ 

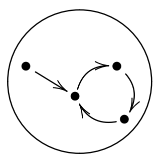
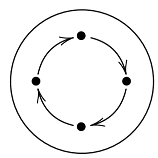
$Y^{\circlearrowright\beta} =$ 

Encuentre un isomorfismo de $X^{\circlearrowright\alpha}$ a $Y^{\circlearrowright\beta}$. ¿Cuántos isomorfismos de esta forma hay?

Sugerencia: Necesita encontrar $X \xrightarrow{f} Y$ tal que $f\alpha = \beta f$ y verificar que esa f tiene un inverso $X \xleftarrow{f^{-1}} Y$ (es decir que $f^{-1}f = 1_X$ y $ff^{-1} = 1_Y$). Necesitará aún verificar que f^{-1} es un morfismo en $\mathcal{S}^{\circlearrowright}$ (es decir, que $f^{-1}\beta = \alpha f^{-1}$), pero vea el ejercicio 4, más adelante.

Ejercicio 3

Demuestre que no hay un isomorfismo (en $\mathcal{S}^{\circlearrowright}$)

de $X^{\circlearrowright\alpha} =$  en $Y^{\circlearrowright\beta} =$ 

Sugerencia: De hecho, una condición más fuerte es verdadera: no hay morfismo alguno (en $\mathcal{S}^{\circlearrowright}$) de $X^{\circlearrowright\alpha}$ en $Y^{\circlearrowright\beta}$.

Ejercicio 4

Suponga que $A^{\circlearrowright\alpha} \xrightarrow{f} B^{\circlearrowright\beta}$ es un morfismo en $\mathcal{S}^{\circlearrowright}$ y que como morfismo de conjuntos $A \xrightarrow{f} B$ tiene un inverso $B \xrightarrow{f^{-1}} A$. Demuestre que f^{-1} es automáticamente un morfismo en $\mathcal{S}^{\circlearrowright}$.

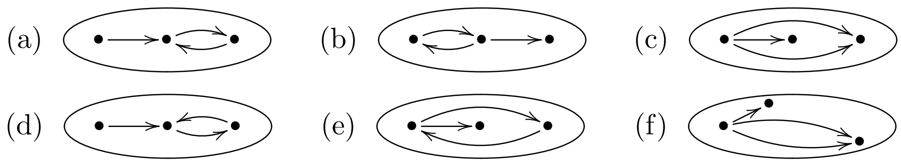
En resumen, vemos que si dos conjuntos con endomorfismo, $A^{\circlearrowright\alpha}$ y $B^{\circlearrowright\beta}$, tienen a A isomorfo a B, *no* podemos concluir que $A^{\circlearrowright\alpha}$ es isomorfo a $B^{\circlearrowright\beta}$. Sin embargo, si ya tenemos un morfismo en $\mathcal{S}^{\circlearrowright}$, $A^{\circlearrowright\alpha} \xrightarrow{f} B^{\circlearrowright\beta}$ que es un isomorfismo de A y B (como conjuntos), entonces es también un isomorfismo de $A^{\circlearrowright\alpha}$ y $B^{\circlearrowright\beta}$ (como conjuntos con endomorfismo).

Ejercicio 5

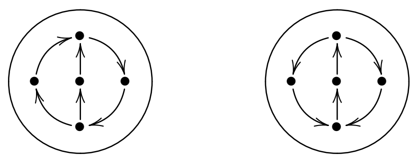
$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ es el conjunto de los enteros y $\mathbb{Z}^{\circlearrowright\alpha}$ y $\mathbb{Z}^{\circlearrowright\beta}$ son los morfismos que suman 2 y 3: $\alpha(n) = n+2$, $\beta(n) = n+3$. ¿Es $\mathbb{Z}^{\circlearrowright\alpha}$ isomorfo a $\mathbb{Z}^{\circlearrowright\beta}$? (Si lo es, encuentre un isomorfismo $\mathbb{Z}^{\circlearrowright\alpha} \xrightarrow{f} \mathbb{Z}^{\circlearrowright\beta}$; si no lo es, explique cómo es que sabe que no son isomorfos.)

Los siguientes dos ejercicios conciernen isomorfismos en $\mathcal{S}^{\downdownarrows}$.

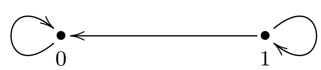
Ejercicio 6
Cada una de las siguientes gráficas es isomorfa a exactamente una de las otras. ¿Cuál?



Ejercicio 7
Si estas dos gráficas son isomorfas, encuentre un isomorfismo entre ellas. Si no son isomorfas, explique cómo es que sabe que no lo son.



Ejercicio 8
(Travesías imposibles.) J es la gráfica

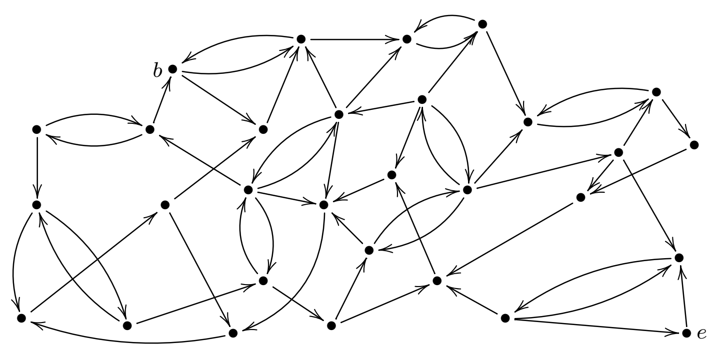


G es cualquier gráfica y b y e son vértices de G.

(a) Suponga que $G \xrightarrow{f} J$ es un morfismo de gráficas con $fb{=}0$ y $fe{=}1$. Demuestre que no hay un camino en G que comience en b y termine en e.

(b) Recíprocamente, suponga que no hay un camino en G que comience en b y termine en e. Demuestre que hay un morfismo $G \xrightarrow{f} J$ con $fb{=}0$ y $fe{=}1$.

Pueden pensar en los vértices como ciudades y en las flechas como vuelos de aerolíneas o a los vértices como estados de un sistema físico y las flechas como procesos simples para obtener un estado de otro, si quieren. Aquí hay un ejemplo:



¿Puede uno llegar de b a e? ¿Hay un morfismo $G \xrightarrow{f} J$ con $fb{=}0$ y $fe{=}1$?

Sesión 12

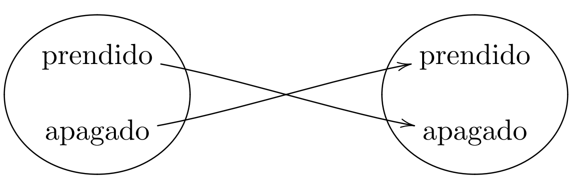
Categorías de diagramas

1. Sistemas dinámicos o autómatas

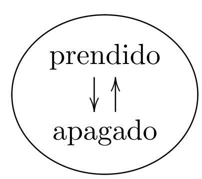
El uso práctico de la categoría $\mathcal{S}^{\circlearrowright}$, estudiada en la última sesión, es sugerido por los dos nombres que le han sido dados: la categoría de sistemas dinámicos o la categoría de autómatas. Recuerden que un objeto en $\mathcal{S}^{\circlearrowright}$ es un conjunto equipado con un endomorfismo $X^{\circlearrowright\alpha}$, y que un morfismo de $X^{\circlearrowright\alpha}$ en $Y^{\circlearrowright\beta}$ es un morfismo de conjuntos de X en Y, $X \xrightarrow{f} Y$, tal que $f\circ\alpha=\beta\circ f$. Podemos recordar esta ecuación dibujando el diagrama de todas las flechas involucradas:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & Y \arrow[d, "\beta"] \\
X \arrow[r, "f"] & Y
\end{tikzcd}$$

En la visión de sistema dinámico tenemos un conjunto X de todos los posibles estados del sistema y el endomorfismo α de X que lleva cada estado x al estado en el que estará el sistema una unidad de tiempo más tarde. Si en lugar de esto pensamos a un objeto de $\mathcal{S}^{\circlearrowright}$ como un autómata o una máquina, X es el conjunto de todos los posibles estados en que puede estar la máquina y α da para cada estado, el estado en que estará la máquina si uno “presiona el botón” una vez. Al componer α consigo misma, $\alpha\circ\alpha=\alpha^2$ produce la operación “presionar el botón dos veces”. Un ejemplo simple de un sistema como éste es un botón que prende y apaga una lámpara. En esta máquina el conjunto de estados tiene solamente dos elementos y el endomorfismo los intercambia, de manera que este autómata puede dibujarse así:



o mejor aún

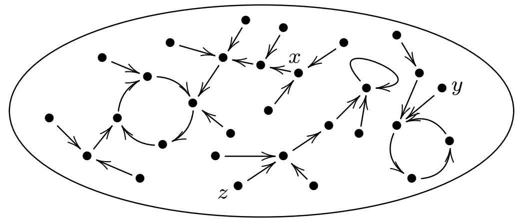


Si $Y^{\circlearrowright\beta}$ y $X^{\circlearrowright\alpha}$ son dos sistemas dinámicos, entonces un morfismo de $X^{\circlearrowright\alpha}$ a $Y^{\circlearrowright\beta}$ manda un estado x del primer sistema a un estado que se transforma bajo la dinámica β “de la misma manera” en que x se transforma bajo la dinámica α. El ejercicio 1 da un ejemplo.

Ejercicio 1
Suponga que $x'=\alpha^3(x)$ y que $X^{\circlearrowright\alpha} \xrightarrow{f} Y^{\circlearrowright\beta}$ es un morfismo en $\mathcal{S}^{\circlearrowright}$. Sean $y=f(x)$, $y'=\beta^3(y)$. Demuestre que $f(x')=y'$.

El ejercicio 2 muestra una característica de los sistemas dinámicos y el ejercicio 3 da una idea de cómo patrones de parentesco pueden ser formulados en una categoría apropiada.

Ejercicio 2
"Con la edad viene la estabilidad." En un sistema dinámico finito, todo estado se estaciona eventualmente en un ciclo.

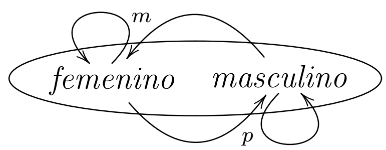


Por dos unidades de tiempo, x vive en los márgenes pero después de eso se estaciona en un comportamiento organizado periódico, repitiendo la misma rutina cada cuatro unidades de tiempo. ¿Qué pasa con y y z? No tome el título en serio; ¡los humanos pueden cambiar el sistema! Sin embargo, esta clase de cosas se aplican a los focos. Si un foco particular puede prenderse cuatro veces antes de fundirse, después, presionar el botón prendido-apagado no tiene efecto alguno. Dibuje el autómata que modela su comportamiento.

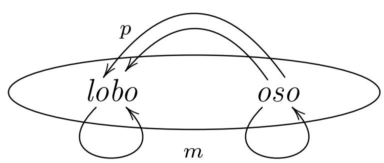
2. Árboles genealógicos

El estudio de árboles genealógicos comienza con el conjunto de todas las personas y dos *endo*morfismos, $p = padre$ y $m = madre$. Esto sugiere una nueva categoría en la cual un objeto es un conjunto con un par especificado de endomorfismos. Manteniéndonos fieles a nuestro esquema general de notación, debemos denotar a esta categoría por $\mathcal{S}^{\circlearrowright\cdot\circlearrowleft}$. Ahora debemos decir cuáles serían los morfismos en esta categoría; espero que ya sepan lo que es una noción razonable de "morfismo que preserva la estructura". Como esta vez nuestra noción de estructura involucra a un conjunto y a dos morfismos estructurales, un morfismo en $\mathcal{S}^{\circlearrowright\cdot\circlearrowleft}$ debe ser un morfismo de conjuntos que satisfaga dos ecuaciones; ustedes deben determinar precisamente cuáles son. Observarán que esta categoría contiene muchos objetos que no pueden interpretarse de manera racional como un conjunto de personas con morfismos "padre" y "madre"; por ejemplo, una "persona" puede ser su propia "madre" o su propia "madre" y su propio "padre". En el ejercicio 3 verán que estos objetos extraños son muy útiles para organizar otros objetos. De la misma manera en que el *conjunto* de todas las personas se puede organizar por géneros mediante un morfismo en el conjunto {masculino, femenino}, podemos organizar el *objeto* de todas las personas mediante un morfismo en cierto "objeto género" en nuestra categoría $\mathcal{S}^{\circlearrowright\cdot\circlearrowleft}$.

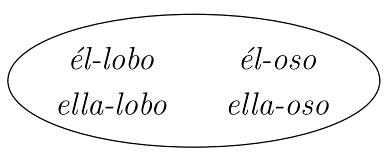
Ejercicio 3
(a) Suponga que $\mathbf{P} = {}^{m}\circlearrowleft\mathsf{P}\circlearrowright^{f}$ es el conjunto P de todas las personas junto con los endomorfismos $m = madre$ y $p = padre$. Demuestre que el "género" es un morfismo en la categoría $\mathcal{S}^{\circlearrowright\cdot\circlearrowleft}$ de $\mathbf{P}$ al objeto

$\mathbf{G} =$ 

(b) En cierta sociedad, todas las personas siempre han sido divididas en dos "clanes", el clan Lobo y el clan Oso. Los matrimonios dentro de un mismo clan están prohibidos, de manera que un "lobo" no puede casarse con una "lobo". El clan de un niño o niña es el mismo que el de su madre. Demuestre que la organización de la gente en clanes es de hecho un morfismo en $\mathcal{S}^{\circlearrowright\cdot\circlearrowleft}$ de $\mathbf{P}$ al objeto

$\mathbf{C} =$ 

(c) Encuentre morfismos "padre" y "madre" apropiados que hagan a

$\mathbf{G} \times \mathbf{C} =$ 

un objeto en $\mathcal{S}^{\circlearrowright\cdot\circlearrowleft}$ de manera que "clan" y "género" puedan ser combinados en un solo morfismo $\mathbf{P} \to \mathbf{G} \times \mathbf{C}$. (Más adelante, cuando tengamos la definición precisa de multiplicación de objetos en categorías, verá que $\mathbf{G} \times \mathbf{C}$ *es* en realidad el producto de $\mathbf{G}$ y $\mathbf{C}$.)

3. Otra visita a sistemas dinámicos

Algunos de los ejercicios recientes usan únicamente las leyes asociativa e identidad y entonces los resultados son válidos en cualquier categoría. A pesar de esta mayor generalidad, éstos son los ejercicios más sencillos; deben serlo, ya que usan tan poco. Otros ejercicios están diseñados para que obtengan cierta experiencia sobre la idea de "morfismo que preserva la estructura"; éstos gradualmente adquirirán mayor importancia conforme estudiemos más ejemplos.

Como se sugirió en la sección 4 del artículo III, podemos construir nuevas categorías a partir de cualquier categoría $\mathcal{C}$ de la misma forma en que construimos nuevas categorías a partir de $\mathcal{S}$. Sea $\mathcal{C}$ una categoría arbitraria y escribamos ahora X o Y

para representar cualquier objeto de $\mathcal{C}$, de manera que una flecha $X \longrightarrow Y$ quiere decir un morfismo de la categoría $\mathcal{C}$.

De la misma forma en que inventamos la categoría $\mathcal{S}^{\circlearrowright}$ podemos hacer una nueva categoría $\mathcal{C}^{\circlearrowright}$ en la que un objeto será un "$\mathcal{C}$-objeto con un endomorfismo". Es decir, un objeto de $\mathcal{C}^{\circlearrowright}$ es de la forma $X^{\circlearrowright\alpha}$, donde X es un objeto de $\mathcal{C}$ y α es un endomorfismo de este objeto en $\mathcal{C}$. Ahora queremos completar la especificación de la categoría $\mathcal{C}^{\circlearrowright}$ y verificar que satisficimos las leyes asociativa e identidad (y, por supuesto, las reglas de "contabilidad" sobre dominios y codominios).

¿Qué necesitamos hacer para completar la especificación de $\mathcal{C}^{\circlearrowright}$? Debemos decidir qué son los morfismos en $\mathcal{C}^{\circlearrowright}$, cuál es la composición de dos morfismos y qué morfismos deben ser los morfismos identidad. De la misma forma que hicimos para $\mathcal{S}$, decidimos:

(1) un morfismo $X^{\circlearrowright\alpha} \xrightarrow{f} Y^{\circlearrowright\beta}$ será un morfismo $X \xrightarrow{f} Y$ en $\mathcal{C}$ que satisface $f \circ \alpha = \beta \circ f$;

(2) la composición de $X^{\circlearrowright\alpha} \xrightarrow{f} Y^{\circlearrowright\beta} \xrightarrow{g} Z^{\circlearrowright\gamma}$ será simplemente la composición en $\mathcal{C}$, $X \xrightarrow{g \circ f} Z$; y

(3) el morfismo identidad en $X^{\circlearrowright\alpha}$ será simplemente el morfismo identidad de X en $\mathcal{C}$, $X \xrightarrow{1_X} X$.

¿Qué debemos verificar para estar seguros de que hemos especificado una categoría? Debemos verificar, primero, que si f y g son morfismos en $\mathcal{C}^{\circlearrowright}$ (esto es, $f \circ \alpha = \beta \circ f$ y $g \circ \beta = \gamma \circ g$) entonces el morfismo compuesto $g \circ f$ en (2) es realmente un morfismo en $\mathcal{C}^{\circlearrowright}$ (esto es, $(g \circ f) \circ \alpha = \gamma \circ (g \circ f)$). Se requiere únicamente la ley asociativa en $\mathcal{C}$.

$$\gamma(gf) = (\gamma g)f = (g\beta)f = g(\beta f) = g(f\alpha) = (gf)\alpha$$

¿Ven la justificación de cada paso? Debido a la ley asociativa en $\mathcal{C}$, podemos simplemente escribir

$$\gamma g f = g \beta f = g f \alpha$$

Para guiarse en el cálculo, ayuda dibujar los siguientes diagramas:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & Y \arrow[d, "\beta"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"'] & Z \arrow[d, "\gamma"] \\ Y \arrow[r, "g"'] & Z \end{tikzcd}$$

o combinarlos en el mismo diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & Z \arrow[d, "\gamma"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \arrow[r, "g"'] & Z \end{tikzcd}$$

Esto nos permite seguir el cálculo de manera gráfica:

$$
\begin{tikzcd}[ampersand replacement=\&] \cdot \arrow[r, "f"] \& \cdot \arrow[r, "g"] \& \cdot \arrow[d, "\gamma"] \\ \& \& \cdot \end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}[ampersand replacement=\&] \cdot \arrow[r, "f"] \& \cdot \arrow[d, "\beta"] \\ \& \cdot \arrow[r, "g"] \& \cdot \end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}[ampersand replacement=\&] \cdot \arrow[d, "\alpha"] \\ \cdot \arrow[r, "f"] \& \cdot \arrow[r, "g"] \& \cdot \end{tikzcd}
$$

Es decir, para guiarnos en ver cómo demostrar que las dos rutas exteriores del noroeste al sureste en el rectángulo grande son lo mismo, utilizamos el hecho de que las dos maneras de llegar del noroeste al sureste en cada uno de los dos cuadrados pequeños son lo mismo.

Obviamente, aún debemos verificar que nuestros supuestos morfismos identidad en $\mathcal{C}^{\circlearrowright}$ son realmente morfismos en $\mathcal{C}^{\circlearrowright}$: lo que significa que para cualquier $X^{\circlearrowright\alpha}$ en $\mathcal{C}^{\circlearrowright}$, 1_X satisface $\alpha \circ 1_X = 1_X \circ \alpha$; pero es fácil, ambos lados son α.

Finalmente, debemos verificar las leyes asociativa e identidad en $\mathcal{C}^{\circlearrowright}$. Sin embargo, yo digo que dichas leyes son obvias para $\mathcal{C}^{\circlearrowright}$, ¿por qué? ¿Cómo se define la composición en $\mathcal{C}^{\circlearrowright}$?

OMER: Mediante la composición en $\mathcal{C}$.

Correcto. Y si verifican verán que las leyes asociativa e identidad para $\mathcal{C}^{\circlearrowright}$ son por lo tanto consecuencias directas de aquéllas para $\mathcal{C}$.

De la misma forma que en el caso de la categoría $\mathcal{S}^{\circlearrowright}$ de endomorfismos de conjuntos, para $\mathcal{C}^{\circlearrowright}$ podemos también formar ciertas subcategorías:

$$
\begin{array}{ccccc}
 & \mathcal{C}^{\overset{\leftarrow}{\circlearrowright}} & \supset & \mathcal{C}^{\theta} & \\
\rotatebox{30}{$\supset$} & & & & \rotatebox{-30}{$\supset$} \\
\mathcal{C}^{\circlearrowright} & & & & \mathcal{C} \\
 & \rotatebox{-30}{$\supset$} & \mathcal{C}^{e} & \rotatebox{30}{$\supset$} &
\end{array}
$$

$\mathcal{C}^{e}$	consiste de aquellos endomorfismos de $\mathcal{C}$ que son idempotentes;
$\mathcal{C}^{\overset{\leftarrow}{\circlearrowright}}$	consiste de aquellos endomorfismos de $\mathcal{C}$ que son invertibles;
$\mathcal{C}^{\theta}$	consiste de aquellos endomorfismos de $\mathcal{C}$ que no sólo son invertibles sino que son sus propios inversos.

DANILO: Sobre la categoría $\mathcal{C}$. ¿Está $\mathcal{C}$ menos especificada que $\mathcal{S}$?

Sí. $\mathcal{C}$ puede ser cualquier categoría, así es que todo lo que dijimos sobre $\mathcal{C}$ es necesariamente cierto para todas las categorías. Por ejemplo, $\mathcal{C}$ puede ser la misma $\mathcal{S}$ o puede ser $\mathcal{S}^{\circlearrowright}$ o $\mathcal{S}^{\downdownarrows}$ o cualquier otra categoría.

Sesión 13

Monoides

En general, para especificar completamente una categoría debo especificar qué son los *objetos*, qué son los *morfismos*, qué objeto es el *dominio de cada morfismo*, qué objeto es el *codominio de cada morfismo*, qué morfismo es la *identidad de cada objeto* y qué morfismo es la composición de cualesquiera dos morfismos "componibles"—seis cosas por especificar. Es claro que no puede hacerse de manera arbitraria. Recordemos que debemos satisfacer:

las leyes de contabilidad
la ley asociativa
las leyes identidad

Aquí tenemos un caso especial. Supongamos que sólo tenemos un objeto, que llamamos "$*$". Quiere decir que todos los morfismos en la categoría son endomorfismos (de este único objeto). Sin embargo, puede haber muchos morfismos en esta categoría. Supongamos que escojo como morfismos a los números naturales: 0 es un morfismo, 1 es un morfismo, 2 es un morfismo y así sucesivamente. Todos ellos son morfismos de $*$ en $*$, por lo que podemos escribir

$$* \xrightarrow{0} *, \quad * \xrightarrow{1} *, \quad * \xrightarrow{2} *, \quad * \xrightarrow{3} *, \quad \text{etcétera.}$$

¿Qué debemos tomar como la composición en esta categoría? Hay muchas posibilidades pero la que yo elegiré es simplemente la multiplicación. En otras palabras, la composición de dos morfismos en esta categoría —dos números— es su producto: $n \circ m = n \times m$. Debido a que hay solamente un objeto, las leyes de contabilidad se satisfacen automáticamente.

Ahora debemos especificar al morfismo identidad del único objeto, $*$. ¿Qué número debemos declarar que sea 1_*? Ahora bien, se supone que 1_* debe satisfacer $1_* \circ n = n$ y $n \circ 1_* = n$ para todo número n y, de acuerdo con nuestras definiciones de composición, estas ecuaciones simplemente significan que 1_* es un número que multiplicado por cualquier otro número n da n. Por lo tanto, la única elección es clara: la identidad de $*$ debe ser el número uno: $1_* = 1$.

Definición: *Una categoría con exactamente un objeto se llama* **monoide**.

Una categoría así parece ser un poco extraña en el sentido de que el objeto parace amorfo. Sin embargo, hay modos de interpretar cualquier categoría así en conjuntos, de manera que los objetos adquieran vida. Llamemos $\mathcal{M}$ a la categoría definida arriba, por multiplicación. Denotamos cualquier interpretación como:

$$\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{S}$$

Una interpretación específica "interpreta" al único objeto $*$ de $\mathcal{M}$ como el conjunto $\mathbb{N}$ de números naturales y cada morfismo en $\mathcal{M}$ (un número natural) se interpreta como un morfismo del conjunto de números naturales en sí mismo

$$\mathbb{N} \xrightarrow{f_n} \mathbb{N}$$

definido por

$$f_n(x) = n \times x$$

Entonces $f_3(x) = 3x$, $f_5(x) = 5x$ y así sucesivamente. De acuerdo con esto, ¿qué morfismo es f_1?

ALICIA: ¿La identidad?

Correcto, $f_1 = 1_{\mathbb{N}}$. Asimismo, la composición de dos morfismos $f_n \circ f_m$ es el morfismo que da en un número x

$$\begin{aligned}(f_n \circ f_m)(x) &= f_n(f_m(x)) = n \times (m \times x) = (n \times m) \times x \\ &= (nm) \times x = f_{nm}(x)\end{aligned}$$

por lo que concluimos que

$$f_n \circ f_m = f_{nm}$$

Esto muestra que esta interpretación preserva la estructura de la categoría porque los objetos van a objetos, los morfismos van a morfismos, la composición se preserva y los morfismos identidad van a morfismos identidad. Tal interpretación que "preserva la estructura" de una categoría en otra se llama **funtor** (de la primera categoría en la segunda). También se requiere que se preserven las nociones de "dominio" y "codominio", pero en nuestro ejemplo esto es automático porque todos los morfismos tienen el mismo dominio y codominio.

Un tal funtor también ilustra el sentido en el que podemos usar el símbolo de elevar a la menos uno como una vasta generalización de "inverso". Si cambiamos el ejemplo ligeramente, tomando números racionales en lugar de números naturales como los morfismos en $\mathcal{M}$, encontramos que $(f_3)^{-1} = f_{(3^{-1})}$. El morfismo inverso de un morfismo en la lista de interpretaciones es también un ejemplo de los morfismos de la lista, de manera que si un morfismo "nombrado" es invertible, el inverso puede también nombrarse. En el ejemplo anterior, f_3 es invertible y su inverso se nombra por el inverso de 3.

Pero si los morfismos en $\mathcal{M}$ consisten únicamente de los números naturales, y $*$ es interpretado como el conjunto de los números racionales, entonces f_3 tiene un inverso, pero ahora no se nombra porque no hay un número natural inverso de 3.

DANILO: Puedo ver que f_3 tiene una retracción, pero ¿por qué tiene una sección?

Bueno, la conmutatividad de la multiplicación de números implica que $f_n \circ f_m = f_m \circ f_n$.

¿Son invertibles todos los morfismos en la lista?

OMER: No, f_0 no lo es.

Correcto. $f_0(x) = 0 \times x = 0$, así que muchos números diferentes se envían a 0; f_0 no es invertible.

Introduzcamos otra categoría que podemos llamar $\mathcal{N}$. Ésta es también un monoide; tendrá solamente un objeto, denotado otra vez por $*$. Los morfismos serán otra vez números pero ahora la composición será la adición en lugar de la multiplicación. ¿Qué número debe ser la identidad de $*$? La elección de 1_* debe satisfacer "sumar 1_* a cualquier número n da n". Por lo tanto 1_* debe ser 0. Dar un funtor $\mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{S}$ quiere decir que interpretemos $*$ como algún conjunto S y cada morfismo $* \xrightarrow{n} *$ en $\mathcal{N}$ como un endomorfismo $S \xrightarrow{g_n} S$ del conjunto S, con $g_0 = 1_S$ y $g_n \circ g_m = g_{n+m}$. Podríamos tomar a S como un conjunto de números y definir

$$g_n(x) = n + x$$

En particular, tomemos $S = \mathbb{N}$ (los números naturales). Por ejemplo, interpretamos al número 2 (como morfismo de $\mathcal{N}$) como el morfismo g_2 (en $\mathcal{S}$) cuyo dibujo es:

$$g_2 = \boxed{\begin{array}{l} 0 \longrightarrow 2 \longrightarrow 4 \longrightarrow 6 \longrightarrow \cdots \\ \quad 1 \longrightarrow 3 \longrightarrow 5 \longrightarrow 7 \longrightarrow \cdots \end{array}}$$

Ahora debemos verificar que $g_{n+m}(x) = g_n(g_m(x))$, que es similar al caso anterior:

$$g_n(g_m(x)) = n + (m + x) = (n + m) + x = g_{n+m}(x)$$

Todo lo anterior sugiere el "ejemplo estándar" de interpretación de un monoide en conjuntos, en el que el objeto del monoide se interpreta como el conjunto de morfismos del mismo monoide. Así obtenemos un funtor estándar de cualquier monoide a la categoría de conjuntos.

Hay muchos otros funtores de $\mathcal{N}$ a conjuntos además del estándar. Supongamos que tomo un conjunto X junto con un endomorfismo α, que interpreto a $*$ como X y mando a cada morfismo n de $\mathcal{N}$ (un número natural) a la composición de α consigo misma n veces, esto es, α^n, y para preservar identidades, mando al número cero al morfismo identidad en X. De esta manera obtenemos un funtor de $\mathcal{N}$ a conjuntos, $h : \mathcal{N} \to \mathcal{S}$ que podemos resumir:

(1) $h(*) = X$,

(2) $h(n) = \alpha^n$ y

(3) $h(0) = 1_X$. (Es razonable definir, para un endomorfismo α de un conjunto X, el símbolo α^0 como 1_X; entonces (3) se vuelve un caso especial de (2).)

Entonces es claro que $h(n + m) = h(n) \circ h(m)$.

Así, siempre que especifiquemos un conjunto con un endomorfismo $X^{\circlearrowright \alpha}$ obtenemos una interpretación funtorial de $\mathcal{N}$ en conjuntos. Esto sugiere que otro nombre razonable para $\mathcal{S}^{\circlearrowright}$ sea $\mathcal{S}^{\mathcal{N}}$ para sugerir que un objeto es un funtor de $\mathcal{N}$ a $\mathcal{S}$. Ésta era la categoría de sistemas dinámicos (más apropiadamente llamada "sistemas dinámicos de tiempo discreto"). Un tal sistema es simplemente un funtor de este monoide $\mathcal{N}$ a la categoría de conjuntos. ¿Qué sería un "sistema dinámico de tiempo continuo"?

DANILO: ¿Simplemente remplaza a los números naturales por los números reales?

Correcto. Permitan todos los números reales como morfismos en el monoide. Entonces, dar un morfismo de este nuevo monoide $\mathcal{R}$ a los conjuntos equivale a dar un conjunto X y un endomorfismo $X \circlearrowleft^{\alpha_t}$ para cada número real t. Para preservar la composición, debemos asegurar que $\alpha_0 = 1_X$ y que $\alpha_{s+t} = \alpha_s \circ \alpha_t$. Podemos pensar X como el conjunto de los "estados" de un sistema físico que, si está en un estado x en cierto tiempo, entonces t unidades de tiempo más tarde estará en el estado $\alpha_t(x)$.

Sesión 14

Los morfismos preservan propiedades positivas

He aquí algunos ejercicios sobre el significado de los morfismos en $\mathcal{S}^{\circlearrowright}$. La idea de estos ejercicios es ver que la condición (en $\mathcal{S}$)

$$f \circ \alpha = \beta \circ f$$

que tomamos como definición de "morfismo"

$$X^{\circlearrowright \alpha} \xrightarrow{f} Y^{\circlearrowright \beta}$$

es realmente la noción apropiada de "morfismo de sistemas dinámicos". Supongan, en estos problemas, que f, α, y β satisfacen la relación de arriba.

Ejercicio 1
Sean x_1 y x_2 dos puntos de X y defina $y_1 = f(x_1)$ y $y_2 = f(x_2)$. Si

$$\alpha(x_1) = \alpha(x_2) \text{ en } X$$

(esto es, al presionar el botón α llegamos al mismo estado si el estado inicial era x_1 o x_2), entonces demuestre que

$$\beta(y_1) = \beta(y_2) \text{ en } Y$$

(la "misma" afirmación con el botón β en la máquina $Y^{\circlearrowright \beta}$ con respecto a sus dos estados y_1, y_2).

Ejercicio 2
Si en lugar de lo anterior ahora sabemos que

$$x_2 = \alpha^5(x_1) \text{ en } X$$

(esto es, que si comenzamos en el estado x_1, con cinco presiones del botón α llevaremos a X al estado x_2), demuestre que la "misma" afirmación es cierta de los estados y_1 y y_2 en $Y^{\circlearrowright \beta}$; esto es,

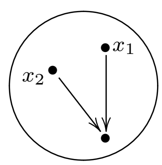
$$y_2 = \beta^5(y_1) \text{ en } X$$

Ejercicio 3
Si $\alpha(x)=x$ (esto es, x es un "estado de equilibrio" o "punto fijo" de α), entonces lo "mismo" es cierto de $y=f(x)$ en $Y^{\circlearrowright\beta}$.

Ejercicio 4
Dé un ejemplo en el que x no es un punto fijo de α pero $y=f(x)$ sí es un punto fijo de β. Esto ilustra que a pesar de que ciertas propiedades importantes son "preservadas" por f, no son necesariamente "reflejadas". Sugerencia: El ejemplo más simple concebible de $Y^{\circlearrowright\beta}$ hará el truco.

Ejercicio 5
Demuestre que si $\alpha^4(x)=x$, entonces lo "mismo" es cierto de $y=f(x)$. (La misma idea que en el ejercicio 2.) Pero dé un ejemplo donde $\alpha^4(x)=x$ y $\alpha^2(x)\neq x$, mientras que $\beta^2(y)=y$ y $\beta(y)\neq y$. Esto ilustra que mientras f preserva la propiedad de estar en un ciclo pequeño, el tamaño del ciclo puede disminuir.

Vamos ahora a trabajar algunos de estos ejercicios. En el primero tenemos un morfismo $X^{\circlearrowright\alpha} \xrightarrow{f} Y^{\circlearrowright\beta}$ en $\mathcal{S}^{\circlearrowright}$, esto es, que satisface la condición $f\circ\alpha=\beta\circ f$, y tenemos dos puntos x_1 y x_2 de X tales que $\alpha(x_1)$ es igual a $\alpha(x_2)$, de manera que *parte* del diagrama interno de α es:



El problema es demostrar que los puntos y_1 y y_2 obtenidos al aplicar f a x_1 y x_2 —esto es, $y_1=f(x_1)$ y $y_2=f(x_2)$— satisfacen la "misma propiedad" que x_1 y x_2. En otras palabras, el problema es demostrar que $\beta(y_1)=\beta(y_2)$.

Solución: Mediante sustitución directa y el uso de la ley asociativa resulta inmediato que $\beta(y_1)$ es igual a $f(\alpha(x_1))$ y que $\beta(y_2)$ es igual a $f(\alpha(x_2))$. Por ejemplo,

$$\beta(y_1)=\beta(f(x_1))=(\beta\circ f)(x_1)=(f\circ\alpha)(x_1)=f(\alpha(x_1))$$

y si reemplazamos el subíndice 1 por 2 se demuestra la otra igualdad. Pero sabemos que $f(\alpha(x_1))=f(\alpha(x_2))$ porque por hipótesis $\alpha(x_1)=\alpha(x_2)$. Por lo tanto, concluimos que $\beta(y_1)=\beta(y_2)$.

La idea del ejercicio es la de aprender que un morfismo para el cual

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & Y \arrow[d, "\beta"] \\
X \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}$$

conmuta ($f\circ\alpha=\beta\circ f$) *preserva la propiedad* de que dos puntos "alcanzan el mismo punto en un paso". La mayoría de estos ejercicios son de la misma naturaleza:

demostrar que alguna relación entre los puntos en el dominio también se satisface entre sus imagenes en el codominio.

Nota: A la frase "punto de un objeto" se le dará más adelante una definición precisa, que será útil en muchas categorías. Encontraremos que para un sistema dinámico $X^{\circlearrowright\alpha}$ hay dos nociones relevantes de punto: (1) un punto del *conjunto* X, $\mathbf{1} \to X$ y (2) un punto del *sistema dinámico* $X^{\circlearrowright\alpha}$, que resultará ser una clase muy especial de punto de X, un punto *fijo*, una x para la cual $\alpha(x)=x$. En esta sesión discutimos únicamente *puntos de* X, no puntos de $X^{\circlearrowright\alpha}$; mencionamos esta distinción ahora para evitar confusión si releen esta sesión después de que hayan aprendido la noción de *punto de* $X^{\circlearrowright\alpha}$.

Ahora veamos el ejercicio 2. Suponemos que tenemos dos puntos x_1, x_2 en X tales que $\alpha^5(x_1)=x_2$. Si $X^{\circlearrowright\alpha}$ es una máquina, podemos interpretar que esa propiedad dice que si comenzamos en el estado x_1 y presionamos el botón cinco veces terminamos en el estado x_2. Si $X^{\circlearrowright\alpha} \xrightarrow{f} Y^{\circlearrowright\beta}$ es un morfismo en $\mathcal{S}^{\circlearrowright}$, $y_1=f(x_1)$ y $y_2=f(x_2)$, el problema es demostrar que $\beta^5(y_1)=y_2$. Dicho de otra manera, este problema equivale a demostrar que si $f\circ\alpha=\beta\circ f$ entonces $f\circ\alpha^5=\beta^5\circ f$.

DANILO: Entonces, simplemente sustituye α^5 y β^5 por α y β.

No, no es tan inmediato. El hecho de que $f\circ\alpha=\beta\circ f$ sea cierto para morfismos particulares α y β no te permite sustituir a α y a β por cualesquiera morfismos. Uno tiene que demostrar que funciona para α^5 y β^5 mediante el uso de la ley asociativa. Esto implicará que f es también un morfismo para los nuevos sistemas dinámicos determinados por los endomorfismos α^5 y β^5, pero tiene que ser demostrado, no podemos suponerlo. La demostración consiste en aplicar la ley asociativa varias veces:

$$\begin{aligned}
f\circ\alpha^5 &= f\circ(\alpha\circ\alpha^4) = (f\circ\alpha)\circ\alpha^4 = (\beta\circ f)\circ\alpha^4 = \beta\circ(f\circ\alpha^4)\\
&= \beta\circ((f\circ\alpha)\circ\alpha^3) = \beta\circ((\beta\circ f)\circ\alpha^3) = (\beta\circ(\beta\circ f))\circ\alpha^3\\
&= (\beta^2\circ f)\circ\alpha^3 = \beta^2\circ(f\circ\alpha^3)\\
&= \dots\\
&= \dots\\
&= \beta^4\circ(\beta\circ f) = \beta^5\circ f
\end{aligned}$$

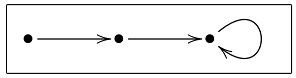
Ahora podemos escribir

$$\begin{aligned}
\beta^5(y_1) &= \beta^5(f(x_1)) = (\beta^5\circ f)(x_1) = (f\circ\alpha^5)(x_1) = f(\alpha^5(x_1))\\
&= f(x_2) = y_2
\end{aligned}$$

El ejercicio 3 concierne a los puntos fijos de un endomorfismo $X^{\circlearrowright\alpha}$ y consiste en demostrar que un morfismo $X^{\circlearrowright\alpha} \xrightarrow{f} Y^{\circlearrowright\beta}$ (lo que quiere decir, como siempre, que $f\circ\alpha=\beta\circ f$) lleva cada punto fijo de $X^{\circlearrowright\alpha}$ a un punto fijo de $Y^{\circlearrowright\beta}$. Un punto fijo de α es un elemento x de X tal que $x=\alpha(x)$. Tales puntos pueden pensarse como "estados de equilibrio" de la dinámica determinada por α. Por ejemplo, el endomorfismo

$$\boxed{\bullet \rightleftarrows \bullet}$$

no tiene puntos fijos, mientras que para el endomorfismo



sólo uno de sus tres puntos es un punto fijo.

Para hacer el ejercicio suponemos $\alpha(x)=x$ y $y=f(x)$, y demostramos $\beta(y)=y$.

OMER: Simplemente sustituye y aplica asociatividad.

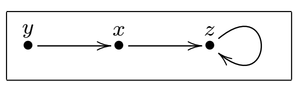
Correcto. Entonces la demostración es: $\beta(y)=\beta f x=f\alpha x=fx=y$.

OMER: Dejaste fuera los pequeños círculos y te faltan los paréntesis.

Sí. Les dejo eso para que ustedes lo completen. Después de algo de práctica con la ley asociativa, se darán cuenta de que no cometerán error alguno omitiéndolos y que las demostraciones se vuelven mucho más cortas al hacerlo. Por ejemplo, la última demostración tomó cuatro pasos. Si escriben todos los paréntesis les tomará seis pasos y muchos más símbolos. Por el momento, les sugiero que en sus ejercicios hagan las demostraciones de las dos maneras, para asegurar que entienden perfectamente bien la justificación para cada paso.

1. Propiedades positivas contra propiedades negativas

Una propiedad que puede tener un elemento x de $X^{\circlearrowright\alpha}$ es la de *ser un valor de* α. Esto quiere decir que hay un elemento $\overline{x}$ tal que $x=\alpha(\overline{x})$. Llamemos a esta propiedad de x "accesibilidad"; dice que hay un "acceso" (la $\overline{x}$) para alcanzar x. Por ejemplo, en el sistema que vimos antes



los elementos x y z tienen esta propiedad pero y no la tiene porque no hay quien vaya a y. (Ésta es una *propiedad positiva.* Regresaremos a esto más adelante.) Yo afirmo que la accesibilidad es preservada por los morfismos en $\mathcal{S}^{\circlearrowright}$. En otras palabras, si tenemos $X^{\circlearrowright\alpha}\xrightarrow{f}Y^{\circlearrowright\alpha}$ en $\mathcal{S}^{\circlearrowright}$ y x es un valor de α, entonces $f(x)$ es un valor de β.

Para demostrar esto, supongamos que tenemos $\overline{x}$ tal que $\alpha(\overline{x})=x$ y tratemos de encontrar $\overline{y}$ tal que $f(x)=\beta(\overline{y})$. Lo natural es tratar con $f(\overline{x})=\overline{y}$. Resulta inmediato demostrar que esto funciona, esto es,

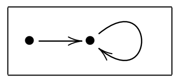
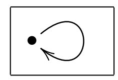
$$\beta(\overline{y})=\beta f\overline{x}=f\alpha\overline{x}=fx$$

OMER: ¿Lo puedes poner en el otro sentido, poniendo $y=f\alpha\overline{x}=\beta f\overline{x}$?

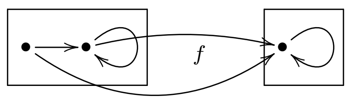
Sí, y tu manera ayuda a descubrir qué tomar como $\overline{y}$.

Esta charla sobre propiedades positivas es para preparar el terreno para hablar de *propiedades negativas.* Un ejemplo de una propiedad negativa es *que x no sea un punto fijo*, esto es, $\alpha(x)\neq x$. Las propiedades negativas normalmente no son preservadas pero, en lugar de esto, son *reflejadas.* Decir que un morfismo $X^{\circlearrowright\alpha}\xrightarrow{f}Y^{\circlearrowright\alpha}$ en

$\mathcal{S}^{\circlearrowright}$ refleja una propiedad quiere decir que si el valor de f en x tiene la propiedad, entonces x misma tiene la propiedad. En el caso de no ser un punto fijo, significa que si $f(x)$ no es un punto fijo (esto es, $\beta(f(x)) \neq f(x)$), entonces x tampoco es un punto fijo (esto es, $\alpha(x) \neq x$). Esto es claro porque ya se ha demostrado que f preserva puntos fijos. El ejercicio 4 ilustra que las propiedades negativas tienden a no ser preservadas y pide que encuentren un ejemplo que muestre que la propiedad de *no* ser un punto fijo no siempre se preserva. La sugerencia dice que el ejemplo más simple será suficiente. Debemos elegir $X^{\circlearrowright\alpha}$ que tenga al menos un punto no fijo y $Y^{\circlearrowright\beta}$ que tenga al menos un punto fijo. El ejemplo más simple es:

$X^{\circlearrowright\alpha} =$  y $Y^{\circlearrowright\beta} =$ 

Hay solamente un posible morfismo $X^{\circlearrowright\alpha} \xrightarrow{f} Y^{\circlearrowright\beta}$ en $\mathcal{S}^{\circlearrowright}$, que es



DANILO: Si quieres hacer un ejemplo con números quizá puedas usar la identidad para el endomorfismo β.

Sí. Toma, por ejemplo, $X = \mathbb{Z}$ y $\alpha = \textit{sumar } 2$ (esto es, $\alpha(n) = 2 + n$), y $f = \textit{paridad}$ (esto es, $f(n) = \textit{par}$ o *impar* dependiendo de lo que sea n). Entonces podemos tomar a Y como el conjunto $\{\textit{par}, \textit{impar}\}$ y como β al morfismo identidad.

$$\mathbb{Z}^{\circlearrowright 2+(\ )} \xrightarrow{f=\textit{paridad}} \{\textit{par}, \textit{impar}\}^{\circlearrowright Id}$$

Observen que sumar 2 no cambia la paridad del número, lo que quiere decir que f es un morfismo en la categoría $\mathcal{S}^{\circlearrowright}$ y que además ningún punto de X es fijo, pero todos los puntos son fijos en Y, de manera que f lleva puntos no fijos a puntos fijos.

Otro ejemplo es el morfismo

$$\mathbb{Z}^{\circlearrowright 2\times(\ )} \xrightarrow{f=\textit{paridad}} \{\textit{par}, \textit{impar}\}^{\circlearrowright\beta}$$

donde esta β es el morfismo que manda ambos, *par* e *impar*, a *par*.

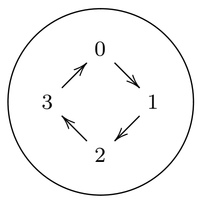
Intenten el ejercicio 5 por su cuenta.

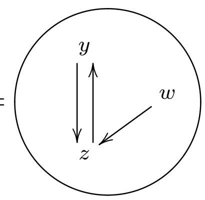
Sesión 15

Objetivización de propiedades en sistemas dinámicos

1. Morfismos que preservan la estructura de un ciclo a otro endomorfismo

Sean $X^{\circlearrowright\alpha}$ y $Y^{\circlearrowright\beta}$ los siguientes objetos de la categoría $\mathcal{S}^{\circlearrowright}$:

$X^{\circlearrowright\alpha} =$ 

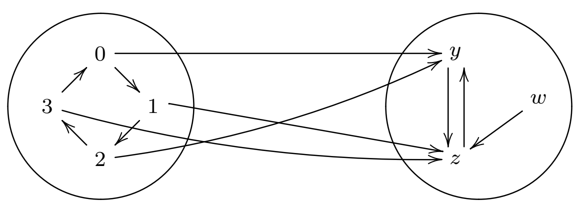
$Y^{\circlearrowright\beta} =$ 

Queremos encontrar un morfismo f de $X^{\circlearrowright\alpha}$ en $Y^{\circlearrowright\beta}$ en $\mathcal{S}^{\circlearrowright}$ que mande 0 a y. Hay $3^3 = 27$ morfismos de X en Y que mandan 0 a y. ¿Cuántos de estos preservan la estructura?

Para que f preserve la estructura (esto es, $f(\alpha(x)) = \beta(f(x))$ para cada x en X) debemos tener que $f(1)$ es z, porque

$$f(1) = f(\alpha(0)) = \beta(f(0)) = \beta(y) = z$$

Por la misma razón, $f(2)$ debe ser $\beta(z)$, que es y, y $f(3) = z$; así que f es



Pero esto está basado en la *suposición* de que el morfismo f preserva la estructura. Debemos verificar que los dos morfismos $f \circ \alpha$ y $\beta \circ f$ sean iguales, esto es, que coincidan en todos los cuatro elementos de su dominio común X:

$$\begin{array}{lll} \text{en } 0\text{:} & f\alpha 0 = f1 = z \quad \text{y} & \beta f 0 = \beta y = z \\ \text{en } 1\text{:} & f\alpha 1 = f2 = y \quad \text{y} & \beta f 1 = \beta z = y \\ \text{en } 2\text{:} & f\alpha 2 = f3 = z \quad \text{y} & \beta f 2 = \beta y = z \\ \text{en } 3\text{:} & f\alpha 3 = f0 = y \quad \text{y} & \beta f 3 = \beta z = y \end{array}$$

Revisamos en los tres primeros elementos conforme construimos f; solamente $f\alpha 3 = \beta f 3$ necesitaba revisarse. Entonces los dos morfismos $f \circ \alpha$ y $\beta \circ f$ coinciden en los cuatro elementos de X, mostrando que f preserva la estructura. De hecho hay *dos* morfismos que preservan la estrucutra de $X^{\circlearrowright\alpha}$ en $Y^{\circlearrowright\beta}$ uno que manda 0 a y, y uno que manda 0 a z, pero no hay uno que mande 0 a w. ¿Pueden ver por qué?

Estos morfismos ilustran asimismo que los morfismos que preservan la estructura no preservan propiedades negativas: todo elemento x de $X^{\circlearrowright\alpha}$ tiene la propiedad negativa de que $\alpha^2(x) \neq x$, pero la imagen de x tiene que ser y o z y ninguno de éstos tiene esta propiedad negativa. Por otro lado, la propiedad positiva $x=\alpha^4(x)$ es preservada por un morfismo que preserva la estructura; como 0 tiene esta propiedad, $f(0)$ debe también tenerla.

Observen la diferencia en el tipo de demostración que tenemos para los dos hechos:

(1) *todos los morfismos en $\mathcal{S}^{\circlearrowright}$ preservan propiedades positivas,* y

(2) *algunos morfismos en $\mathcal{S}^{\circlearrowright}$ no preservan propiedades negativas.*

La demostración de (1) es algebraica mientras que la demostración de (2) es mediante un “contraejemplo”.

JUAN: ¿Hay alguna regla general para saber cuántos morfismos que preservan la estructura hay entre dos conjuntos con endomorfismos dados?

No hay una regla general simple pero en algunos casos particulares es fácil encontrar el número de morfismos. Por ejemplo, el número de morfismos de la $X^{\circlearrowright\alpha}$ de arriba a cualquier otro objeto $Y^{\circlearrowright\beta}$ es igual al número de elementos en $Y^{\circlearrowright\beta}$ que tienen periodo cuatro. Decimos que un elemento y en $Y^{\circlearrowright\beta}$ tiene **periodo** cuatro si $\beta^4(y)=y$. Todos los elementos que tienen periodo uno o dos están *incluidos* en esto, porque si $\beta(y)=y$ o $\beta^2(y)=y$, entonces también $\beta^4(y)=y$. Ahora bien, como ya vimos antes, un morfismo de $\mathcal{S}^{\circlearrowright}$ con dominio $X^{\circlearrowright\alpha}$ está completamente determinado por su valor en 0 y este puede ser cualquier elemento de $Y^{\circlearrowright\beta}$ de periodo cuatro. Entonces los morfismos de $X^{\circlearrowright\alpha}$ en $Y^{\circlearrowright\beta}$ corresponden exactamente a los elementos de periodo cuatro en $Y^{\circlearrowright\beta}$. El número de éstos puede también expresarse como la suma de tres números:

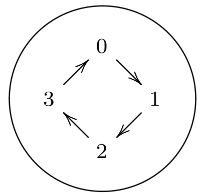
$$\begin{aligned}
&(\textit{número de puntos fijos en } Y^{\circlearrowright\beta})\\
&+ 2 \times (\textit{número de ciclos de longitud 2 en } Y^{\circlearrowright\beta})\\
&+ 4 \times (\textit{número de ciclos de longitud 4 en } Y^{\circlearrowright\beta})
\end{aligned}$$

2. Nombrar los elementos que tienen un periodo dado mediante morfismos

Definimos el “ciclo de longitud n”, para cualquier número natural n, como el conjunto de n elementos $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ con el endomorfismo “sucesor”, siendo 0 el sucesor de $n-1$.

$$C_n = \boxed{\begin{tikzcd} \overset{0}{\bullet} \arrow[r] & \overset{1}{\bullet} \arrow[r] & \overset{2}{\bullet} \arrow[r] & \overset{3}{\bullet} \arrow[r] & \bullet \cdots \arrow[r] & \overset{n-1}{\bullet} \arrow[lllll, bend left] \end{tikzcd}}$$

El objeto $X^{\circlearrowright\alpha}$ de nuestro ejemplo es C_4, ya que de acuerdo con esta definición

$C_4 =$ 

De la misma forma que con C_4, los morfismos de C_n en cualquier objeto $Y^{\circlearrowright\beta}$ corresponden precisamente a los elementos y de $Y^{\circlearrowright\beta}$ que tienen periodo n. Observen que si un elemento tiene periodo n también tiene periodo igual a cualquier múltiplo de n. En particular, los puntos fijos tienen periodo 1 y, por lo tanto, también tienen periodo n para cada entero positivo n.

Entonces una propiedad fundamental del ciclo C_n es que los morfismos de él a cualquier objeto $Y^{\circlearrowright\beta}$ "nombran" exactamente los elementos de periodo n en $Y^{\circlearrowright\beta}$. Cada morfismo $C_n \xrightarrow{f} Y$ nombra el elemento $f(0)$ en Y. Esta correspondencia biyectiva se expresa simbólicamente así:

$$\frac{C_n \to Y^{\circlearrowright\beta}}{\textit{elementos } y \textit{ en } Y^{\circlearrowright\beta} \textit{ que tienen periodo } n}$$

En particular, como los elementos de periodo 1 son precisamente los puntos fijos,

$$\frac{C_1 \to Y^{\circlearrowright\beta}}{\textit{puntos fijos de } \beta}$$

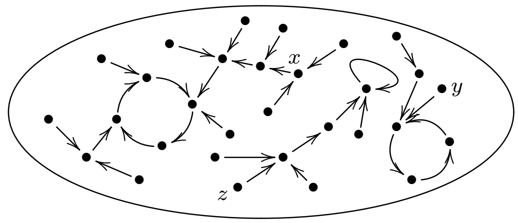
DANILO: No veo cómo pueda haber un morfismo de C_5 a C_2.

Correcto, no hay, porque C_2 no tiene elementos de periodo cinco. Hay un patrón general que vale la pena observar. Si un elemento tiene cualquier periodo positivo, debe tener un periodo mínimo. De hecho, ¡todos sus periodos son múltiplos de este mínimo! (Por supuesto que todo elemento de C_n tiene a n como periodo mínimo.)

Ejercicio 1
Demuestre que un elemento que tiene ambos, periodo 5 y periodo 7, debe ser un punto fijo.

3. Nombrar elementos arbitrarios

¿Podemos encontrar un objeto $X^{\circlearrowright\alpha}$ de la categoría $\mathcal{S}^{\circlearrowright}$ tal que los morfismos desde él a cualquier otro objeto nombren todos los elementos? Un $X^{\circlearrowright\alpha}$ tal debe contener un elemento que no tenga en absoluto propiedades positivas especiales. En particular, tiene que ser un elemento sin periodo alguno. Un elemento sin un periodo es uno que no es parte de un ciclo, como x en:



Sin embargo, el elemento x tiene la propiedad positiva de que "entra en un ciclo en tres pasos". ¿Es posible tener un elemento que carezca completamente de propiedades positivas especiales?

DANILO: ¿Usando adición?

¿Cómo es adición un endomorfismo?

DANILO: Toma los números naturales con el endomorfismo que suma uno.

Ésa es una buena idea. El "morfismo sucesor" $\sigma:\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definido por $\sigma(n)=n+1$ se ve así (indicando a todo el sistema dinámico por N):

$$N = \mathbb{N}^{\circlearrowright\sigma} = \boxed{0 \to 1 \to 2 \to 3 \to \ \cdots}$$

Aquí el elemento 0 no tiene propiedad positiva y efectivamente los morfismos en $\mathcal{S}^{\circlearrowright}$ de $\mathbb{N}^{\circlearrowright\sigma}$ a cualquier objeto $Y^{\circlearrowright\beta}$ dan precisamente los elementos de Y, mediante la evaluación en 0. Esto puede ser demostrado como sigue.

De un morfismo $\mathbb{N}^{\circlearrowright\sigma} \xrightarrow{f} Y^{\circlearrowright\beta}$ en $\mathcal{S}^{\circlearrowright}$ obtenemos el elemento $y=f(0)$ de Y. De esta manera obtenemos elementos diferentes de morfismos diferentes: Si obtuvimos el mismo elemento de f y g, esto es, si $f(0)=g(0)$ entonces como f y g son morfismos de $\mathcal{S}^{\circlearrowright}$, podemos deducir

$$f(1)=f(\sigma(0))=\beta(f(0))=\beta(g(0))=g(\sigma(0))=g(1)$$

y de manera similar $f(2)=g(2)$ y en general

$$f(n+1)=f(\sigma(n))=\beta(f(n))=\beta(g(n))=g(\sigma(n))=g(n+1)$$

así $f=g$ puesto que coinciden en cada entrada. Para cada elemento y de Y hay un morfismo $\mathbb{N}^{\circlearrowright\sigma} \xrightarrow{f} Y^{\circlearrowright\beta}$ en $\mathcal{S}^{\circlearrowright}$ tal que $f(0)=y$, definido por $f(1)=\beta(y)$, $f(2)=\beta^2(y)$ y, en general, para cualquier número natural n, $f(n)=\beta^n(y)$. Puede verificarse fácilmente que es un morfismo en $\mathcal{S}^{\circlearrowright}$.

Un elemento y en $Y^{\circlearrowright\beta}$ tiene periodo cuatro precisamente cuando el morfismo correspondiente $\overline{y} : \mathbb{N}^{\circlearrowright\sigma} \to Y^{\circlearrowright\beta}$ (con $\overline{y}(0)=y$) se factoriza a través del único morfismo de $\mathbb{N}^{\circlearrowright\sigma}$ en C_4 que manda a 0 en 0, así:

$$\begin{tikzcd} N \arrow[rr, "\overline{y}"] \arrow[dr] & & Y^{\circlearrowright\beta} \\ & C_4 \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Esto ilustra que uno puede expresar hechos sobre y propiedades de sistemas dinámicos sin recurrir a nada fuera de $\mathcal{S}^{\circlearrowright}$; cualquier sistema dinámico complicado puede "explorarse" mediante morfismos de objetos simples como $\mathbb{N}^{\circlearrowright\sigma}$ y C_n.

> **Ejercicio 2**
> Encuentre todos los morfismos de $\mathbb{N}^{\circlearrowright\sigma}$ en C_4, el ciclo de longitud 4.

Para cualquier $Y^{\circlearrowright\beta}$ encontramos dos procesos (morfismos de conjuntos):

$$\boxed{\begin{array}{c}\textit{Morfismos en } \mathcal{S}^{\circlearrowright}\\ \mathbb{N}^{\circlearrowright\sigma} \longrightarrow Y^{\circlearrowright\beta}\end{array}} \underset{\textit{iteración}}{\overset{\textit{evaluación en } 0}{\rightleftarrows}} \boxed{\begin{array}{c}\textit{Morfismos en } \mathcal{S}\\ \mathbf{1} \longrightarrow Y\end{array}}$$

"Iteración" le asocia a cada y en Y el morfismo f dado por $f(n)=\beta^n(y)$.

> **Ejercicio 3**
> Demuestre que la *evaluación* en 0 y la *iteración* son inversos (uno del otro).

Ahora bien, habiendo encontrado una manera de "recapturar" a Y de información completamente dentro de la categoría $\mathcal{S}^{\circlearrowright}$, nos gustaría también recapturar a β. ¡También podemos hacerlo! Los siguientes dos ejercicios muestran cómo.

> **Ejercicio 4**
> Para cualquier sistema dinámico $X^{\circlearrowright\alpha}$, demuestre que la misma α es un morfismo de sistemas dinámicos $X^{\circlearrowright\alpha} \xrightarrow{\alpha} X^{\circlearrowright\alpha}$.

En particular $\mathbb{N}^{\circlearrowright\sigma} \xrightarrow{\sigma} \mathbb{N}^{\circlearrowright\sigma}$ es un morfismo en $\mathcal{S}^{\circlearrowright}$.

> **Ejercicio 5**
> Si $\mathbb{N}^{\circlearrowright\sigma} \xrightarrow{f} Y^{\circlearrowright\beta}$ corresponde a y, entonces $\mathbb{N}^{\circlearrowright\sigma} \xrightarrow{f\circ\sigma} Y^{\circlearrowright\beta}$ corresponde a $\beta(y)$.

Los resultados de los ejercicios 3 a 5 demuestran que tenemos, para cualquier sistema dinámico $S=Y^{\circlearrowright\beta}$, la correspondencia

$$\frac{\textit{estados de } S \ (= \textit{elementos } y_0 \textit{ de } Y)}{\textit{morfismos de sistemas dinámicos } N \xrightarrow{y} S}$$

y que si y_0 en Y corresponde (mediante $y(n)=\beta^n(y_0)$) a

$$N \xrightarrow{y} S$$

entonces el "siguiente estado" $\beta(y_0)$ corresponde a $\sigma\circ y$:

$$N \xrightarrow{\sigma} N \xrightarrow{y} S$$

Esto sugiere un esquema alternativo de notación en el cual una sola letra, digamos S o T, representa un sistema dinámico completo y una sola letra σ se usa para el endomorfismo de cada sistema dinámico, pero con subíndice: σ_S para el endomorfismo del sistema S, σ_T para T, etcétera. (Aquí σ está pensada como el "acto de oprimir el botón" universal —o "siguiente estado", desde el punto de vista de sistemas dinámicos— y el subíndice nos dice en cuál sistema está siendo aplicado el acto.) En esta notación, la observación de arriba se convierte en $\sigma_S(y)=y\circ\sigma$; el acto de oprimir el botón se convierte en el acto de precomponer con $N \xrightarrow{\sigma} N$.

En 1872 Felix Klein propuso que la manera de estudiar un objeto es investigar todos sus automorfismos, que él llamó *simetrías*. Efectivamente, la investigación de simetrías demostró ser muy útil, en cristalografía y en otras áreas; pero la "exploración" de un objeto mediante morfismos desde unos pocos objetos estándar ha demostrado ser aún más útil. En nuestros sistemas dinámicos, esta utilidad proviene del hecho de que mientras que $Y^{\circlearrowleft\beta}$ puede tener muy pocas simetrías (probablemente solo una, el morfismo identidad) siempre tendrá suficientes morfismos de $\mathbb{N}^{\circlearrowleft\sigma}$ en él para describirlo completamente, como lo han mostrado los ejercicios.

4. El papel filosófico de N

En la sesión 6 destacamos la noción de que para estudiar una categoría objetiva grande $\mathcal{X}=\mathcal{S}$, la categoría de todos los conjuntos abstractos y morfismos, un mínimo $\mathcal{C}$ que es adecuado es la categoría con ocho morfismos cuyos dos objetos son un conjunto $\mathbf{1}$ con un punto y un conjunto $\mathbf{2}$ con dos puntos; esto se debe a que:

(1) los morfismos $\mathbf{1} \to X$ son los puntos de X;
(2) los morfismos $\mathbf{2} \to X$ son los pares de puntos de X;
(3) los morfismos $X \to \mathbf{2}$ son suficientes para expresar todas las propiedades *sí/no* de los puntos de X;
(4) precomponer con un morfismo $\mathbf{2} \to \mathbf{2}$ intercambia los papeles de los dos puntos en una pareja;
(5) siguir por un morfismo $\mathbf{2} \to \mathbf{2}$ efectua la negación de la propiedad y
(6) componer $\mathbf{1} \to X \to \mathbf{2}$ registra en $\mathcal{C}$ si un punto particular tiene una propiedad particular.

Estos son ingredientes básicos suficientes para analizar cualquier morfismo $X \to Y$ en $\mathcal{X}$. Si agregamos un conjunto con tres puntos a $\mathcal{C}$ (obteniendo una categoría con solamente 56 morfismos, la mayoría de los cuales pueden expresarse como composiciones de unos pocos sabiamente elegidos), entonces nuestra "categoría subjetiva" fortalecida será adecuada en un sentido aún más fuerte, al menos para conjuntos finitos arbitrariamente grandes X. Entonces *y* y *o* y otras operaciones lógicas cruciales sobre propiedades se vuelven internas a $\mathcal{C}$.

Este método se aplica también a todos nuestros ejemplos más profundos de categorías objetivas $\mathcal{X}$ —por ejemplo a $\mathcal{X}=\mathcal{S}^{\circlearrowleft}$, la categoría de sistemas dinámicos discretos. Después de un poco de investigación inicial de algunos de los objetos más simples de $\mathcal{X}$, podremos determinar sabiamente una subcategoría pequeña apropiada $\mathcal{C}$ que reconoceremos y mantendremos como nuestro instrumento subjetivo para el estudio posterior de objetos más complejos en $\mathcal{X}$.

Para demostrar que una $\mathcal{C}$ propuesta es adecuada debemos, por supuesto, demostrar teoremas apropiados. En el caso de $\mathcal{X}=\mathcal{S}^{\circlearrowright}$, ya hemos visto que cualquier subcategoría $\mathcal{C}$ que incluya al objeto especial

$$N = \mathbb{N}^{\circlearrowright \sigma} = \boxed{0 \to 1 \to 2 \to 3 \to \ \cdots}$$

será adecuada para discutir los estados de cualquier $S=Y^{\circlearrowright \beta}$ porque:

(1) los morfismos $N \xrightarrow{y} S$ "son" los estados de S, y

(2) precomponer con $N \xrightarrow{\sigma} N$ efectúa la operación "siguiente estado".

Preguntas acerca de un estado tales como: "¿Regresa a sí mismo después de siete unidades de tiempo?", pueden también *objetivizarse dentro de lo subjetivo* si incluimos en $\mathcal{C}$ objetos tales como C_7. Otras preguntas tales como: "¿llega el estado al reposo después de tres unidades de tiempo?", pueden también objetivizarse dentro de lo subjetivo si incluimos en $\mathcal{C}$ sistemas tales como:

$$\boxed{\bullet \to \bullet \to \bullet \to \bullet \circlearrowright}$$

Los morfismos $X \to B$ con B en $\mathcal{C}$ pueden expresar propiedades muy importantes de los estados. Por ejemplo, si consideramos un sistema con dos estados y un punto fijo

$$B = \boxed{\begin{tikzcd} \bullet\ \textit{masculino} \arrow[d] \\ \bullet\ \textit{femenino} \arrow[loop left] \end{tikzcd}}$$

y si $X^{\circlearrowright \alpha}$ representa el aspecto de la línea materna de una sociedad (esto es, X es el conjunto de las personas, presentes y pasadas, en una sociedad y $m(x) = \textit{la madre de } x$, entonces:

> **Ejercicio 6**
> Demuestre que el morfismo género $X^{\circlearrowright \alpha} \xrightarrow{g} B$ es un morfismo en la categoría $\mathcal{S}^{\circlearrowright}$.

Incluir este objeto B en $\mathcal{C}$ permitirá comenzar la *objetivización en lo subjetivo* del género como propiedad.

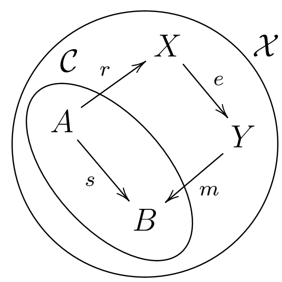
La inclusión en $\mathcal{C}$ del sistema dinámico

$$\Omega = \boxed{\circlearrowright \overset{0}{\bullet} \leftarrow \overset{1}{\bullet} \leftarrow \overset{2}{\bullet} \leftarrow \overset{3}{\bullet} \leftarrow \cdots \qquad \overset{\infty}{\bullet} \circlearrowright}$$

con dos estados en reposo (∞ y 0) y con un número infinito de estados "finitos", cada uno de los cuales se convierte finalmente en el estado en reposo 0, permite el registro en $\mathcal{C}$ de cualquier propiedad estable de los estados en cualquier sistema dinámico discreto, en un sentido que discutiremos más sistemáticamente después, y juega entonces un papel similar al papel de la inclusión de **2** en $\mathcal{S}$, pero más poderoso.

El papel fundamental de Ω es el de describir propiedades *estables* de los estados de $X^{\circlearrowright\alpha}$: aquellas propiedades que no se pierden al aplicar α. La pregunta: "¿cuántos pasos del endomorfismo dinámico se requieren desde el estado dado x para hacer que la propiedad se *vuelva* verdadera?", ¡se contesta por un número, un estado de Ω! Entonces, una propiedad estable es un morfismo $X \longrightarrow \Omega$ en $\mathcal{S}^{\circlearrowright}$; solamente si la propiedad *nunca* se vuelve verdadera de x toma este morfismo el valor "falso" $(=\infty)$ en x. (Veáse la sesión 33 para mayor discusión de Ω-objetos.)

Una tal interpretación "lo subjetivo dentro de lo objetivo" de una inclusión de categorías, $\mathcal{C}$ contenida en $\mathcal{X}$, incluye (por lo menos) una división en cuatro partes de las clases de morfismos:



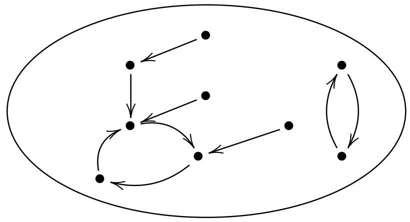
En el caso de los sistemas dinámicos $(\mathcal{X} = \mathcal{S}^{\circlearrowright})$, una descripción burda de algunos de los muchos usos posibles de esta división puede expresarse en palabras como:

morfismos equivariantes e de sistemas dinámicos;
modelar m o simulación o un sistema natural en un sistema teórico;
interpretación o simulación s de una teoría en una computadora;
realización r de un diseño para una máquina.

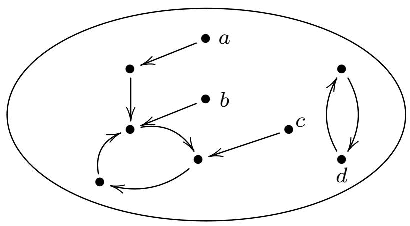
Es posible que, si queremos hacer estas descripciones burdas más precisas, se requiera una categoría de sistemas con una estructura más profunda que aquélla dada por solamente un endomorfismo, por eso en este momento estas palabras son solamente sugerentes.

5. Presentaciones de sistemas dinámicos

¿Hay una regla simple para determinar el número de $\mathcal{S}^{\circlearrowright}$-morfismos de $X^{\circlearrowright\alpha}$ a $Y^{\circlearrowright\beta}$? Esta pregunta merece más atención de la que le dimos antes. La respuesta depende de cómo nos sean "presentados" $X^{\circlearrowright\alpha}$ y $Y^{\circlearrowright\beta}$; pero hay una manera sistemática de describir un sistema finito que es muy útil. Aquí tenemos un ejemplo:

$X^{\circlearrowleft \alpha} =$ 

(1) Elijan nombres para *algunos* de los elementos; si un ciclo tiene cabellos, etiqueten sólo los extremos pero si no tiene cabellos, etiqueten uno de los elementos del ciclo:



Los elementos etiquetados se llaman “generadores” para X.

(2) Elijan un orden en el cual enlistar los generadores; aquí a, b, c, d parece ser un orden razonable.

(3) Comiencen con el primer elemento en la lista y apliquen α hasta que obtengan una repetición al ir más allá; $a, \alpha a, \alpha^2 a, \alpha^3 a, \alpha^4 a$ son distintos, pero aquí nos detenemos porque

(i) $\alpha^5 a = \alpha^2 a$

(4) Ahora pasen al siguiente elemento de la lista a, b, c, d y continúen como antes: $a, \alpha a, \alpha^2 a, \alpha^3 a, \alpha^4 a, b$ son distintos, pero aquí nos detenemos porque

(ii) $\alpha b = \alpha^2 a$

(5) Repitan el paso (4) hasta que se agote la lista a, b, c, d.

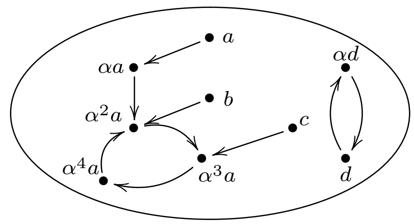
Si hacen esto correctamente, obtendrán esta lista de etiquetas:

$$(\mathbf{E}) \quad a, \alpha a, \alpha^2 a, \alpha^3 a, \alpha^4 a, b, c, d, \alpha d$$

y habrán encontrado estas ecuaciones:

$$(\mathbf{R}) \quad \begin{array}{ll} \text{(i)} & \alpha^5 a = \alpha^2 a \\ \text{(ii)} & \alpha b = \alpha^2 a \\ \text{(iii)} & \alpha c = \alpha^3 a \\ \text{(iv)} & \alpha^2 d = d \end{array}$$

Estas ecuaciones se llaman “relaciones” entre los generadores. De la manera como la construimos, la lista (**E**) etiqueta a cada elemento de X exactamente una vez:



Para encontrar estas ecuaciones es útil ir haciendo este etiquitado sobre la marcha.

Por supuesto que cualquier morfismo $X^{\circlearrowright\alpha} \xrightarrow{f} Y^{\circlearrowright\beta}$ manda a, b, c y d a elementos $f(a)=\overline{a}$, $f(b)=\overline{b}$, etcétera, en Y que satisfacen las "mismas relaciones":

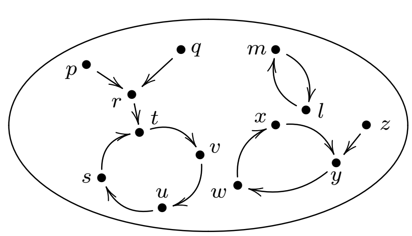
$$
\begin{array}{lll}
(\overline{\mathbf{R}}) & \text{(i)} & \beta^5\overline{a} = \beta^2\overline{a} \\
& \text{(ii)} & \beta\overline{b} = \beta^2\overline{a} \\
& \text{(iii)} & \beta\overline{c} = \beta^3\overline{a} \\
& \text{(iv)} & \beta^2\overline{d} = \overline{d}
\end{array}
$$

La sorpresa es que este proceso puede invertirse: dados cualesquiera elementos $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, $\overline{d}$ en Y que satisfacen las relaciones $\overline{\mathbf{R}}$, hay exactamente una f con $f(a)=\overline{a}$, $f(b)=\overline{b}$, $f(c)=\overline{c}$ y $f(d)=\overline{d}$. De manera simbólica:

$$
\frac{\mathcal{S}^{\circlearrowright}\textit{-morfismos } X^{\circlearrowright\alpha} \xrightarrow{f} Y^{\circlearrowright\beta}}{\textit{listas } \overline{a},\ \overline{b},\ \overline{c},\ \overline{d} \textit{ en } Y \textit{ que satisfacen } \overline{\boldsymbol{R}}}
$$

Una familia de etiquetas (como a, b, c, d) para elementos de X, junto con una familia de ecuaciones (como (**R**)) que éstos satisfacen, se llama una **presentación** de $X^{\circlearrowright\alpha}$, si tiene la sorprendente "propiedad universal" de arriba: que los morfismos de $X^{\circlearrowright\alpha}$ en cada $Y^{\circlearrowright\beta}$ corresponden exactamente a las familias en Y que satisfacen las "mismas" ecuaciones. El método que hemos descrito da una presentación "mínima" de $X^{\circlearrowright\alpha}$.

¿Realmente ayuda a encontrar todos los morfismos $X^{\circlearrowright\alpha} \xrightarrow{f} Y^{\circlearrowright\beta}$ y, en particular, a contar cuántos morfismos hay? A mi me parece que lo hace. Supongamos que $X^{\circlearrowright\alpha}$ es el sistema que dibujamos antes y que:

$Y^{\circlearrowright\beta} =$ 

Una manera sistemática para encontrar todos los morfismos $X^{\circlearrowright\alpha} \xrightarrow{f} Y^{\circlearrowright\beta}$ es ésta:

(1) Encuentren todas las posibles elecciones para $f(a)$; esto es, elementos $\overline{a}$ que satisfagan la relación
$$\beta^5(\overline{a})=\beta^2(\overline{a})$$
Encontrarán que w, x, y y z satisfacen esta ecuación pero l, m, p,..., v no lo hacen.

(2) Para cada una de las elecciones en (1), busquen los elementos $\overline{b}$ que satisfacen la ecuación (ii). Por ejemplo si elegimos $\overline{a}=w$, vemos que
$$\beta^2(\overline{a})=\beta^2(w)=y$$
así la ecuación (ii) se convierte en $\beta(\overline{b})=y$, lo cual quiere decir que $\overline{b}$ debe ser x o z.

(3) Para cada elección de $\overline{a}$ y $\overline{b}$, encuentren todas las de $\overline{c}$ que satisfacen (iii).

(4) Finalmente vayan a $\overline{d}$.

Ejercicio 7
Encuentre todos los morfismos de $X^{\circlearrowright\alpha}$ de arriba al $Y^{\circlearrowright\beta}$ de arriba. (A menos de que haya cometido un error, hay 14 de ellos.)

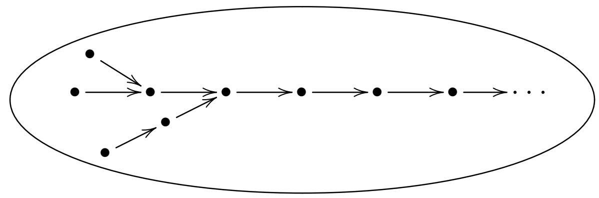
He aquí un consejo: seguir ciegamente un "algoritmo", un proceso sistemático como éste, es siempre un poco tedioso y a menudo ineficiente. Pero si mantienen con ustedes su capacidad de razonamiento mientras lo hacen, a menudo descubrirán cosas interesantes. Por ejemplo, en nuestro ejemplo las elecciones de $\overline{d}$ son completamente independientes de las elecciones que hicieron de $\overline{a}$, $\overline{b}$ y $\overline{c}$; pero las elecciones que hicieron para $\overline{b}$ y $\overline{c}$ dependen de las elecciones anteriores. ¿Está relacionado con el aspecto obvio del dibujo de $X^{\circlearrowright\alpha}$, que parece mostrar una "suma" de dos sistemas más simples? También, $Y^{\circlearrowright\beta}$ es una suma así de tres partes. ¿Ayuda?

Ejercicio 8
Dibuje algunos sistemas dinámicos simples y encuentre presentaciones para ellos. (¡Es más interesante si comienza con un sistema dinámico que surja de un problema real!)

Ejercicio 9
Nuestro procedimiento trató a $X^{\circlearrowright\alpha}$ y a $Y^{\circlearrowright\beta}$ de manera muy diferente. Suponga que, además de una presentación de $X^{\circlearrowright\alpha}$, tuviera una presentación de $Y^{\circlearrowright\beta}$. Trate de encontrar un método para calcular las soluciones de las ecuaciones $\overline{\mathbf{R}}$ sin tener que hacer el dibujo de $Y^{\circlearrowright\beta}$, trabajando solamente con una presentación. Uno puede programar una computadora para que encuentre todos los morfismos f a partir de presentaciones de $X^{\circlearrowright\alpha}$ y $Y^{\circlearrowright\beta}$.

Aún los sistemas dinámicos infinitos pueden tener presentaciones finitas. Por ejemplo, $\mathbb{N}^{\circlearrowright\sigma}$ es presentado por un generador, 0, y ¡*sin* ecuaciones!

Ejercicio 10
Encuentre una presentación para este sistema, que continúa hacia la derecha para siempre:



Ejercicio 11
Piense en presentaciones de gráficas. Si no se le ocurre nada, piense en ellas después de la sesión 22.

Ejercicio 12
Un sistema dinámico no-autónomo S es uno en el cual la "regla de evolución" $\mathbb{N} \times S \xrightarrow{r} S$ depende del tiempo. Éstos pueden ser estudiados si se reducen al sistema ordinario, o autónomo, en el espacio de estados $X = \mathbb{N} \times S$, con la dinámica dada por $\rho(n, s) = \langle n+1, r(n, s)\rangle$. Demuestre que para cualquier r hay exactamente una sucesión u en S para la cual $u(n+1) = r(n, u(n))$ y para la cual $u(0) = s_0$ es un punto de inicio dado. (Sugerencia: Reduzca esto a la propiedad universal de $N = (\mathbb{N}, \sigma)$ en $\mathcal{S}^{\circlearrowright}$.)

Sesión 16

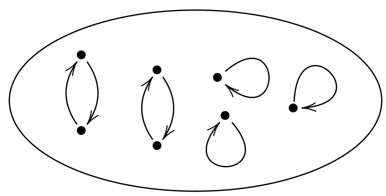
Idempotentes, involuciones, gráficas

1. Solución a ejercicios de idempotentes e involuciones

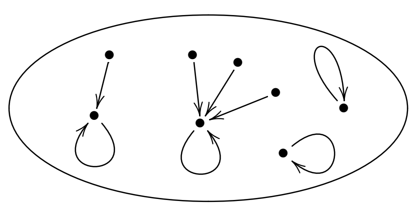
En el artículo III hay algunos ejercicios sobre automorfismos, involuciones e idempotentes. El ejercicio 4 pregunta si el endomorfismo α de los números enteros que le asocia a cada entero su negativo: $\alpha(x) = -x$ es una involución o un idempotente, y cuáles son sus puntos fijos. ¿Qué es una involución?

OMER: Un endomorfismo que compuesto consigo mismo es la identidad.

Correcto. Quiere decir que para cada elemento x, su imagen se envía de regreso a x, así o va a un ciclo de longitud 2 o es un punto fijo. El diagrama interno de una involución consiste de algunos ciclos de longitud 2 y algunos puntos fijos:



Por otra parte, un endomorfismo idempotente es uno que aplicado dos veces (esto es, compuesto consigo mismo) tiene el mismo efecto que aplicado una vez. Esto quiere decir que la imagen de cualquier elemento es un punto fijo y, por lo tanto, cualquier elemento, si no es aún un punto fijo, alcanza un punto fijo en un paso. El diagrama interno de un endomorfismo idempotente consiste de algunos puntos fijos que pueden tener pegados algunos cabellos, como en el dibujo:

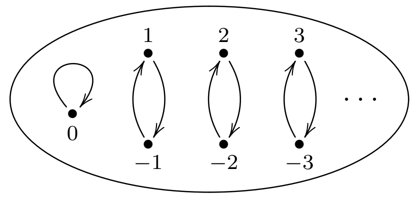


Este dibujo representa *un* endomorfismo que es idempotente y no es una involución, aún a pesar de que tiene algunos aspectos comunes con la involución que dibujamos arriba, es decir, algunos puntos fijos.

Los ejercicios ilustran estos tipos de morfismos con algunos ejemplos con conjuntos de números, en particular, la involución del conjunto $\mathbb{Z}$ de enteros mencionada al principio, $\alpha(x) = -x$. La demostración de que es una involución está basada en el hecho de que el opuesto del opuesto es el mismo número, esto es, $-(-x) = x$, así

$$\alpha^2(x) = \alpha(\alpha(x)) = -(-x) = x$$

y por lo tanto $\alpha^2 = \mathit{1}_{\mathbb{Z}}$. El diagrama interno de esta involución es:

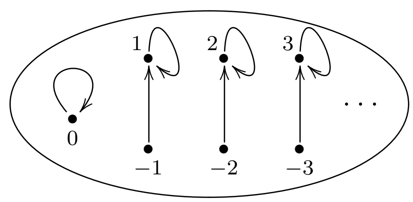


que efectivamente tiene solamente ciclos de tamaño 2 y puntos fijos (solamente un punto fijo en este caso).

El ejercicio 5 hace la misma pregunta sobre el morfismo "valor absoluto" en el mismo conjunto. El morfismo cambia el signo de los enteros negativos pero lo deja igual para los otros números. ¿Qué será este morfismo?

CHAD: Idempotente.

Correcto. Todas las imagenes son no-negativas y, por lo tanto, no son modificadas. El diagrama interno de este morfismo es:



un punto fijo solo y un número infinito de puntos fijos con un cabello cada uno.

El ejercicio 6 es sobre el endomorfismo de los enteros que "suma 3", esto es, el morfismo α dado por $\alpha(x) = x + 3$. ¿Es una involución o un idempotente?

CHAD: Ninguna de las dos.

Correcto, si suman 3 dos veces a un número es lo mismo que sumarle 6; el resultado no es ni el número con el que empezaron (con lo que no es una involución) ni el mismo que sumar 3 una sola vez (con lo que no es un idempotente). ¿Es este morfismo un automorfismo?

OMER: Sí, porque tiene un inverso.

¿Quién es el inverso?

OMER: El morfismo "sumar -3".

Eso es correcto. Si $\alpha(x) = x + 3$, entonces el inverso está dado por $\alpha^{-1}(x) = x - 3$. ¿Qué pasa con el ejecicio 7, donde tenemos el morfismo $\alpha(x) = 5x$? Éste no es un automorfismo de $\mathbb{Z}$ porque el inverso tendría que satisfacer en particular

$$2 = \alpha(\alpha^{-1}(2)) = 5\alpha^{-1}(2)$$

pero no hay un entero x con $2 = 5x$. Pero los enteros son parte de los racionales y este morfismo se "extiende" al conjunto $\mathbb{Q}$ de números racionales:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, hook] \arrow[d, "5\times(\ )"'] & \mathbb{Q} \arrow[d, "5\times(\ )"] \\ \mathbb{Z} \arrow[r, hook] & \mathbb{Q} \end{tikzcd}$$

El morfismo extendido tiene un inverso:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \arrow[r, hook] \arrow[d, "5\times(\ )"'] & \mathbb{Q} \arrow[d, shift right, "5\times(\ )"'] \\
\mathbb{Z} \arrow[r, hook] & \mathbb{Q} \arrow[u, shift right, "1/5\times(\ )"']
\end{tikzcd}$$

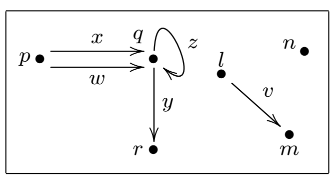
2. Resolver ejercicios de morfismos de gráficas

El ejercicio 11 del artículo III trata de gráficas irreflexivas. Recuerden que una gráfica irreflexiva es una pareja de morfismos con el mismo dominio y el mismo codominio, como:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, shift right, "s"'] \arrow[d, shift left, "t"] \\
P
\end{tikzcd}$$

El dominio puede interpretarse como el conjunto de flechas de la gráfica y el codominio como el conjunto de los vértices, mientras que los morfismos se interpretan como "salida" y "llegada", esto es, $s(x)$ es el vértice que es la salida de la flecha x mientras que $t(x)$ es el vértice llegada de la misma flecha.

Si interpretamos las cosas de esta manera, todo par así de morfismos paralelos puede dibujarse como una gráfica como ésta:



mientras que dada una tal gráfica siempre podemos reconstruir los conjuntos y los morfismos. Por ejemplo, para la gráfica anterior los conjuntos serían $X=\{x,y,z,v,w\}$ y $P=\{p,q,r,l,m,n\}$, y los morfismos están dados por la tabla:

X	salida	llegada
x	p	q
y	q	r
z	q	q
v	l	m
w	p	q

Viendo esta tabla podemos contestar todas las preguntas sobre la gráfica. Por ejemplo, ¿hay un lazo? Tenemos que buscar una flecha cuya salida y llegada sean la misma; vemos que la flecha z es un lazo.

Ahora queremos hablar acerca de morfismos de gráficas; esto es, una manera de dibujar una gráfica dentro de otra. Un morfismo en la categoría de gráficas irreflexivas $\mathcal{S}^{\downdownarrows}$

$$\text{de la gráfica } \boxed{\begin{array}{c} X \\ s\,\Big\downarrow\Big\downarrow\, t \\ P \end{array}} \quad \text{a la gráfica } \boxed{\begin{array}{c} Y \\ s'\,\Big\downarrow\Big\downarrow\, t' \\ Q \end{array}}$$

es un par de morfismos de conjuntos, uno de flechas (X) a flechas (Y) (denotado por el subíndice "F" de "flechas") y el otro de vértices (P) en vértices (Q) (denotado por el subíndice "V" de "vértices"). Por lo tanto

$$\boxed{\begin{array}{c} X \\ s\,\Big\downarrow\Big\downarrow\, t \\ P \end{array}} \xrightarrow{\quad f \quad} \boxed{\begin{array}{c} Y \\ s'\,\Big\downarrow\Big\downarrow\, t' \\ Q \end{array}}$$

en $\mathcal{S}^{\downdownarrows}$ quiere decir

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f_F"] \arrow[d, shift right, "s"'] \arrow[d, shift left, "t"] & Y \arrow[d, shift right, "s'"'] \arrow[d, shift left, "t'"] \\ P \arrow[r, "f_V"'] & Q \end{tikzcd}$$

dos morfismos, pero no arbitrarios. Deben satisfacer dos condiciones, a saber, preservar salida y preservar llegada. Estas condiciones son dos ecuaciones muy fáciles de recordar simplemente viendo el diagrama de arriba. Ellas son:

Preservar salida: $\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f_F"] \arrow[d, "s"'] & Y \arrow[d, "s'"'] \\ P \arrow[r, "f_V"'] & Q \end{tikzcd} \qquad s' \circ f_F = f_V \circ s$

Preservar llegada: $\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f_F"] \arrow[d, "t"'] & Y \arrow[d, "t'"'] \\ P \arrow[r, "f_V"'] & Q \end{tikzcd} \qquad t' \circ f_F = f_V \circ t$

Como es usual, debemos definir la composición de dos morfismos tales, uno después del otro, como esto:

$$\boxed{\begin{array}{c} X \\ s\,\Big\downarrow\Big\downarrow\, t \\ P \end{array}} \xrightarrow{\quad f \quad} \boxed{\begin{array}{c} Y \\ s'\,\Big\downarrow\Big\downarrow\, t' \\ Q \end{array}} \xrightarrow{\quad g \quad} \boxed{\begin{array}{c} Z \\ s''\,\Big\downarrow\Big\downarrow\, t'' \\ R \end{array}}$$

Ambas, la definición de composición y la demostración de que la composición es otra vez un morfismo de gráficas, son fáciles si dibujan el diagrama de esta forma:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f_F"] \arrow[d, shift right, "s"'] \arrow[d, shift left, "t"] & Y \arrow[r, "g_F"] \arrow[d, shift right, "s'"'] \arrow[d, shift left, "t'"] & Z \arrow[d, shift right, "s''"'] \arrow[d, shift left, "t''"] \\ P \arrow[r, "f_V"'] & Q \arrow[r, "g_V"'] & R \end{tikzcd}$$

Las ecuaciones que sabemos que son ciertas son:

$$s'\circ f_F = f_V\circ s,\ t'\circ f_F = f_V\circ t,\ s''\circ g_F = g_V\circ s',\ t''\circ g_F = g_V\circ t',$$

Los únicos morfismos razonables que podemos tomar de X en Z y de P en R son los morfismos compuestos

$$X \xrightarrow{g_F\circ f_F} Z \quad \text{y} \quad P \xrightarrow{g_V\circ f_V} R$$

Esto es lo mismo que definir $(g\circ f)_F = g_F\circ f_F$ y $(g\circ f)_V = g_V\circ f_V$, y las ecuaciones que tenemos que demostrar son:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "(g\circ f)_F"] \arrow[d, shift right, "s"'] \arrow[d, shift left, "t"] \arrow[dr, phantom, "?"] & Z \arrow[d, shift right, "s''"'] \arrow[d, shift left, "t''"] \\ P \arrow[r, "(g\circ f)_V"'] & R \end{tikzcd}$$

$$s''\circ(g\circ f)_F \overset{?}{=} (g\circ f)_V\circ s \quad \text{y} \quad t''\circ(g\circ f)_F \overset{?}{=} (g\circ f)_V\circ t$$

o, utilizando las definiciones de arriba:

$$s''\circ(g_F\circ f_F) \overset{?}{=} (g_V\circ f_V)\circ s \quad \text{y} \quad t''\circ(g_F\circ f_F) \overset{?}{=} (g_V\circ f_V)\circ t$$

Éstas deben demostrarse utilizando las ecuaciones conocidas. La demostración es muy fácil si seguimos simplemente las flechas en el diagrama. Por ejemplo, la demostración de que las salidas se preservan va así: $s''\circ(g_F\circ f_F)$ es la composición

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f_F"] & Y \arrow[r, "g_F"] & Z \arrow[d, "s''"] \\ & & R \end{tikzcd}$$

que por las ecuaciones conocidas es igual a

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f_F"] & Y \arrow[d, "s'"] & \\ & Q \arrow[r, "g_V"'] & R \end{tikzcd}$$

y esto a su vez es igual a

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "s"] & & \\ P \arrow[r, "f_V"'] & Q \arrow[r, "g_V"'] & R \end{tikzcd}$$

Por lo tanto, hemos demostrado que $s''\circ(g_F\circ f_F) = (g_V\circ f_V)\circ s$. La otra se demuestra de manera muy similar. Para demostrar que tenemos una categoría, debemos también decidir qué son los morfismos identidad y verificar las leyes identidad y asociativa. Todo esto es fácil pero deben hacerlo.

Los ejercicios 15 y 16 son un poco diferentes. Allí, en lugar de gráficas irreflexivas lidiamos con gráficas reflexivas, que es una estructura más rica. Recuerden que una gráfica reflexiva es lo mismo que una gráfica irreflexiva pero con estructura adicional dada por un morfismo $i{:}P \to X$ que le asocia a cada vértice una flecha especial o "preferida" que tiene a ese vértice como salida y llegada y es, por lo tanto, un lazo en ese vértice. En otras palabras, se requiere que el morfismo i satisfaga las ecuaciones

$$s \circ i = 1_P \quad \text{y} \quad t \circ i = 1_P$$

y, por lo tanto, i es una sección tanto para s como para t.

Entonces, la estructura de una gráfica reflexiva involucra dos conjuntos y tres morfismos estructurales. ¿Qué debe involucrar un morfismo de gráficas reflexivas tal como éste?

$$\boxed{\begin{tikzcd} X \arrow[d, shift right=2, "s"'] \arrow[d, shift left=2, "t"] \\ P \arrow[u, "i"] \end{tikzcd}} \xrightarrow{\ f\ } \boxed{\begin{tikzcd} Y \arrow[d, shift right=2, "s'"'] \arrow[d, shift left=2, "t'"] \\ Q \arrow[u, "j"] \end{tikzcd}}$$

Otra vez, esto involucra dos morfismos de conjuntos,

$$X \xrightarrow{f_F} Y$$

$$P \xrightarrow{f_V} Q$$

pero ahora deben satisfacer tres ecuaciones, que expresan que f preserva salidas, preserva llegadas y preserva el lazo preferido en cada vértice. Del diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f_F"] \arrow[d, shift right=2, "s"'] \arrow[d, shift left=2, "t"] & Y \arrow[d, shift right=2, "s'"'] \arrow[d, shift left=2, "t'"] \\ P \arrow[r, "f_V"'] \arrow[u, "i"] & Q \arrow[u, "j"] \end{tikzcd}$$

leemos fácilmente las tres ecuaciones, que son las mismas que para gráficas irreflexivas pero incluyen la ecuación adicional $f_F \circ i = j \circ f_V$, o:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f_F"] & Y \\ P \arrow[u, "i"] \arrow[r, "f_V"'] & Q \arrow[u, "j"'] \end{tikzcd}$$

El ejercicio 15 es de los morfismos idempotentes que obtenemos componiendo *salida* y *llegada* con su sección común i. Estos se llaman: $e_0 = i \circ s$ y $e_1 = i \circ t$. El ejercicio es demostrar que e_0 y e_1 no solamente son endomorfismos idempotentes del conjunto de flechas de X sino que además satisfacen las ecuaciones

$$e_0 \circ e_1 = e_1 \quad \text{y} \quad e_1 \circ e_0 = e_0$$

Si agregamos a éstas las ecuaciones que dicen que son idempotentes, podemos resumir las cuatro ecuaciones diciendo que al componer cualesquiera dos de los endomorfismos e_0, e_1 en cualquier orden, el resultado es siempre el de la derecha. O con símbolos:

$$e_i \circ e_j = e_j$$

donde los subíndices pueden ser 0 o 1.

El ejercicio 16 es demostrar que para especificar un morfismo de gráficas reflexivas es suficiente dar el morfismo en el nivel de flechas (esto es, dar f_F) porque automáticamente determina el morfismo al nivel de los vértices (f_V). ¿Cómo ocurre? La respuesta es que para gráficas reflexivas cada vértice "es" (en cierto sentido) una clase especial de flecha. Entonces, para evaluar el morfismo en el nivel de los vértices todo lo que necesitamos hacer es identificar cada vértice con la flecha preferida en ese vértice y evaluar allí el morfismo en el nivel de las flechas. Formalmente una respuesta a este ejercicio es como sigue.

Supongamos que tenemos un morfismo de gráficas reflexivas:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f_F"] \arrow[d, shift right=3, "s"'] \arrow[d, shift left=3, "t"] & Y \arrow[d, shift right=3, "s'"'] \arrow[d, shift left=3, "t'"] \\
P \arrow[u, "i"] \arrow[r, "f_V"'] & Q \arrow[u, "j"]
\end{tikzcd}$$

Entonces, en particular $s' \circ j = 1_Q$ y $j \circ f_V = f_F \circ i$, por lo tanto tenemos

$$f_V = 1_Q \circ f_V = s' \circ j \circ f_V = s' \circ f_F \circ i$$

Esto demuestra que al nivel de los vértices f puede evaluarse mediante el conocimiento de f al nivel de las flechas y los morfismos de estructura s' e i. No hay nada especial sobre s' que t' no tenga y un razonamiento similar muestra que podemos evaluar f_V como $t' \circ f_F \circ i$.

Uno puede, en el mismo espíritu, demostrar que dentro de la categoría de gráficas reflexivas, un punto de una gráfica G (esto es, un morfismo $\mathbf{1} \to G$ desde el objeto terminal) corresponde a un lazo *preferido* (no a un lazo arbitario como en el caso de las gráficas irreflexivas) o simplemente a un vértice de G. Entonces, la distinción entre puntos y vértices desaparece y, de hecho, cuando se trabaja en la categoría de gráficas reflexivas se utiliza un dibujo ligeramente distinto: solamente los lazos no preferidos se dibujan *como* lazos, los lazos preferidos en un vértice se consideran como implicitos en el vértice. Un aspecto crucial de la categoría de gráficas reflexivas es que un morfismo $G \to H$ puede hacer que una flecha de G "degenere" en un punto de H.

Ejercicio 1
Para un objeto dado G en una categoría $\mathcal{C}$, la categoría $\mathcal{C}/G$ tiene por objetos a los objetos de $\mathcal{C}$ equipados con una $\mathcal{C}$-organización $X \xrightarrow{s} G$ y como morfismos triángulos conmutativos en $\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "s"'] & & X' \arrow[dl, "s'"] \\
& G &
\end{tikzcd}$$

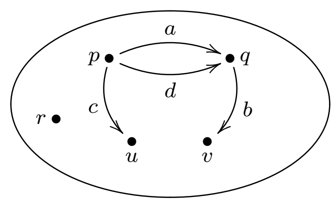
Por ejemplo, en la sesión 12, ejercicio 3, una categoría para modelar relaciones familiares se consideró como $\mathcal{C}/G$ donde un objeto de $\mathcal{C} = \mathcal{S}^{\circlearrowleft\bullet\circlearrowright}$ se piensa como un conjunto de personas equipado con endomorfismos *padre* y *madre* y G como el objeto de géneros. Por otro lado, en el ejercico 17 del artículo III, se dio otra descripción en términos de *dos* conjuntos y cuatro morfismos estructurales. Explique en qué sentido estas dos descripciones dan la “misma” categoría.

Sesión 17

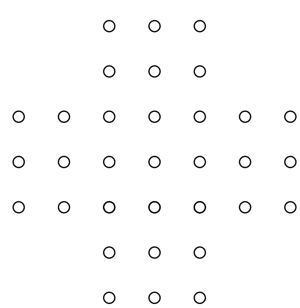
Algunas gráficas útiles

1. Trayectorias

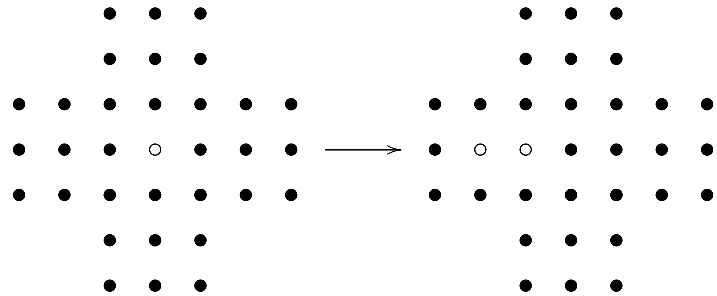
¿Qué clase de problemas puede sugerir el uso de gráficas irreflexivas, $\mathcal{S}^{\downdownarrows}$? Recuerden que un objeto en esta categoría se ve como esto:



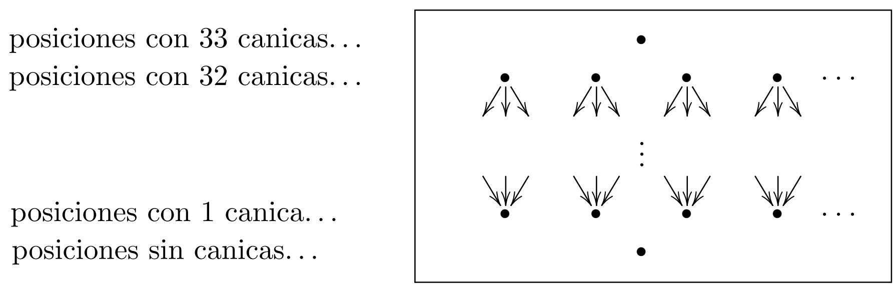
¿Por qué es útil esta clase de dibujo? Los vértices pueden representar ubicaciones físicas y las flechas pueden representar caminos uniéndolas; así este dibujo es un mapa esquemático de caminos y puede ser útil para planear un viaje. (En la práctica, un camino de doble sentido en realidad es dos caminos de un solo sentido, separados por un poco de pasto o por lo menos una línea de pintura.) Los vértices pueden representar estados de un sistema físico y las flechas las diferentes operaciones simples que se pueden llevar a cabo para llevarlo de un estado a otro. Por ejemplo, un juego que jugaba cuando era niño involucra un tablero con agujeros colocados así:



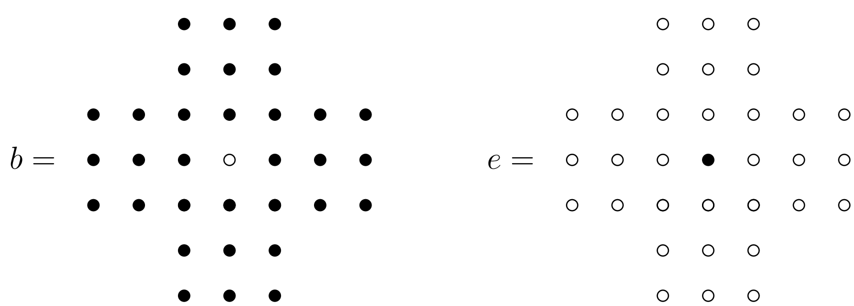
y canicas que se pueden colocar en estos agujeros. El juego comienza con cada agujero ocupado con excepción del agujero central, y el objetivo es remover todas las canicas menos una mediante el uso de movidas permitidas únicamente. (En la versión de experto, esta última canica debe de quedar en el agujero central.) Una movida permitida hace saltar a una canica sobre otra situada en uno de los cuatro agujeros adyacentes y retira del tablero a la canica que fue saltada. Entonces una de las cuatro movidas permitidas iniciales es:



¿Qué tiene que ver este juego con gráficas? Bueno, hay una gráfica asociada con este juego, cuyos vértices son las 2^{33} posibles distribuciones de canicas en el tablero, con una flecha de una distribución a otra indicando que la segunda puede obtenerse de la primera mediante una movida legal. Noten que hay a lo más una flecha conectando cualesquiera dos vértices y que esta gráfica no tiene un lazo ni ciclo ya que una movida legal produce un estado con una canica menos. Entonces, la gráfica asociada con este juego se ve como algo así:

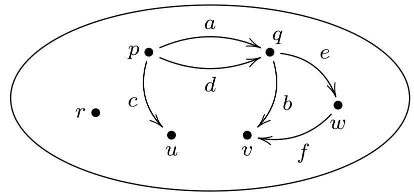


El objetivo del juego es encontrar una trayectoria en esta gráfica de la configuración inicial b a la configuración final deseada e:

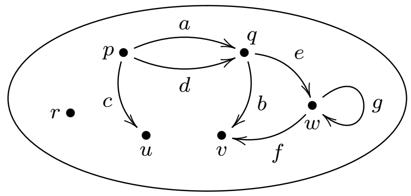


Algunas de las preguntas razonables que puede uno hacer sobre una gráfica son: dados dos nodos b y e, ¿hay una trayectoria de b a e? ¿Cuántas? ¿Cuál es la más corta? Por ejemplo, en la gráfica dada al principio, hay dos trayectorias más cortas de p en v. (De hecho son las únicas dos trayectorias de p a v.)

Pero en la gráfica



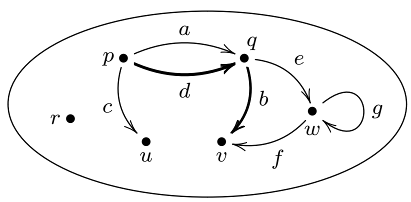
hay también trayectorias más largas de p a v y en la gráfica de abajo, hay trayectorias arbitrariamente largas de p a v (ya que el lazo puede ser repetido).



El ambiente categórico está bien adaptado para describir preguntas como éstas y la claridad resultante con frecuencia es la clave para encontrar las respuestas. Por ejemplo, consideren la idea de una flecha o trayectoria de longitud uno entre dos nodos de una gráfica G. Este concepto está contenido en la categoría como un morfismo de la gráfica: $\boxed{\bullet \longrightarrow \bullet}$ en G y, de la misma forma, una trayectoria de dos pasos es simplemente un morfismo de gráficas:

$$\boxed{\bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet} \longrightarrow G$$

Un ejemplo de una trayectoria de dos pasos se indica con las flechas más gruesas d y b:



Observen, sin embargo, que una trayectoria, además de sus flechas, involucra también el orden en que fueron usadas. Solamente ensanchar flechas no nos dará esta información si hay "ciclos" en la gráfica; así, la definición de trayectoria como morfismo de gráficas es la correcta. (Comparen esto con la idea de Galileo de que un movimiento de una partícula en el espacio no es simplemente su trayectoria sino que es un morfismo del intervalo de tiempo en el espacio.)

DANILO: ¿Podemos decir que una trayectoria de dos pasos es la composición de dos trayectorias de un paso?

Sí, y es una buena idea hacer una categoría de la gráfica dada. Un objeto es simplemente un vértice de la gráfica, y un morfismo de un vértice a otro es una trayectoria, de cualquier longitud. Deben ser cuidadosos e incluir trayectorias de longitud cero para que sirvan de morfismos identidad. Esta categoría se llama la *categoría libre* en la gráfica dada.

ALICIA: ¿Cómo usas todo esto para resolver problemas?

DANILO: Puedes usar gráficas para representar reacciones químicas.

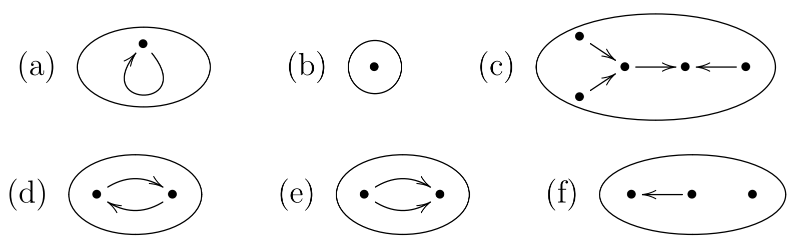
Sí. El primer paso es *formular* el problema claramente y para esto ayuda mucho tener un ambiente común, el de las categorías, en el que se pueda expresar la mayoría de los problemas y sus soluciones. Una de las muchas ventajas de un ambiente común es que cuando dos problemas, uno familiar y el otro no, se formulan de la misma manera, vemos con mayor precisión sus aspectos comunes, de manera que la experiencia con uno nos guía hacia la solución del otro. Así, construimos una familia pequeña de conceptos y métodos que pueden ser usados para resolver más problemas.

Un punto más: resolver problemas particulares no es la única, ni siquiera la principal, meta de la ciencia. El *entender* las cosas y tener ideas claras acerca de ellas es una meta también. Piensen en el descubrimiento de Newton de un solo principio general que gobierna la caída de una manzana y el movimiento de los planetas, por ejemplo. La búsqueda de un entendimiento claro del movimiento es lo que nos llevó a la posibilidad de viajar en el espacio.

OMER: Me parece que las categorías son a la ciencia lo que el compás es al navegante.

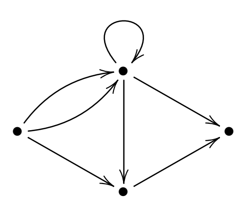
Sí. Claro que la primera vez que exploran un nuevo territorio, un compás no parece un guía adecuado, pero al menos les ayuda a dibujar un mapa de manera que la siguiente vez puedan encontrar su camino con mayor facilidad.

Ejercicio 1
Danilo observó que de una gráfica G podemos construir una categoría $\mathcal{F}(G)$, la *categoría libre en la gráfica G.* Un objeto es un vértice de G y un morfismo es una trayectoria en G. ¿Para cuáles de las siguientes gráficas tiene la categoría de Danilo un objeto terminal?



2. Gráficas como formas de diagrama

El parecido entre las gráficas y nuestros diagramas externos de objetos y morfismos en una categoría sugiere uno de los usos principales de las gráficas. Si G es una gráfica, por ejemplo:



entonces en cualquier categoría $\mathcal{C}$ podemos tener diagramas de forma G en $\mathcal{C}$. Un tal diagrama le asocia a cada vértice en G un objeto de $\mathcal{C}$ y a cada flecha de G un morfismo en $\mathcal{C}$ con el dominio y codominio adecuados. Podría llamarse una “figura de forma G en $\mathcal{C}$". Podría solamente utilizar dos objetos *diferentes*, como esto:

$$
\begin{tikzcd}
 & B \arrow[loop above, "h"] \arrow[dr, "j"] \arrow[dd, "k"] & \\
A \arrow[ur, bend left, "f"] \arrow[ur, "g"'] \arrow[dr, "1_A"'] & & A \\
 & A \arrow[ur, "i"'] &
\end{tikzcd}
$$

En nuestra analogía de "figura", podríamos llamar a esto un diagrama *singular* porque varios de los vértices se mandan al mismo objeto A. Por el momento, lo más fácil sería pensar a $\mathcal{C}$ como la categoría de los conjuntos, pero pueden ver que podemos tener diagramas de forma G en cualquier categoría.

Ahora bien, si tenemos una trayectoria en G, por ejemplo la trayectoria de flechas gruesas abajo

$$
\begin{tikzcd}
 & \bullet \arrow[loop above] \arrow[dr] \arrow[dd, thick] & \\
\bullet \arrow[ur, bend left, thick] \arrow[ur] \arrow[dr] & & \bullet \\
 & \bullet \arrow[ur, thick] &
\end{tikzcd}
$$

nuestro diagrama en $\mathcal{C}$ nos permite "interpretar" esto como un morfismo de $\mathcal{C}$, el morfismo ikf. Funciona aún para trayectorias de longitud cero: la trayectoria de longitud cero del vértice extremo izquierdo en G a sí mismo se interpreta como el morfismo identidad en A.

3. Diagramas conmutativos

Definición: *Decimos que un diagrama de forma G en $\mathcal{C}$* **conmuta** *si para cada par p, q de vértices de G, todas las trayectorias en G de p a q son interpretadas como el mismo morfismo en $\mathcal{C}$.*

He aquí algunos ejemplos de gráficas G y, para cada gráfica, qué quiere decir que un diagrama de forma G conmute.

Ejemplo 1

Un diagrama de forma $\begin{tikzcd} \bullet \arrow[rr] \arrow[dr] & & \bullet \\ & \bullet \arrow[ur] & \end{tikzcd}$ en $\mathcal{C}$ se ve como $\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & B \\ & C \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$.

Decir que conmuta significa que $hg = f$.

Ejemplo 2

Un diagrama de forma $\boxed{\bullet \circlearrowright}$ es un sistema dinámico en $\mathcal{C}$, esto es, $A^{\circlearrowleft f}$, un objeto junto con un endomorfismo. En la gráfica $\boxed{\bullet \circlearrowright}$ hay un número infinito de trayectorias del vértice en sí mismo, una para cada uno de los números $0, 1, 2, \ldots$ Estos se interpretan como los morfismos $1_A, f, ff, fff, \ldots$. Podemos abreviar estos como $f^0, f^1, f^2, f^3, \ldots$. Observen que sólo utilizamos exponentes en endomorfismos;

si $A \xrightarrow{f} B$, entonces f^2, f^3 etcétera no tendrían sentido y no sería claro *qué* morfismo identidad debería estar representado por f^0. (Esto hace más sorprendente el hecho de que sí utilizamos de manera coherente al símbolo f^{-1} para el inverso de *cualquier* morfismo que tenga uno.) Para que nuestro diagrama conmute, todos estos endomorfismos deben ser iguales. Parece que necesitamos un número infinito de condiciones:

$$1_A = f, \quad f = f^2, \quad f^2 = f^3, \quad \text{etcétera.}$$

Pero realmente no las necesitamos todas: ¡la ecuación $1_A = f$ implica a todas las demás!

Ejemplo 3

Como en la gráfica flecha $\boxed{\bullet \longrightarrow \bullet}$ hay a lo más una trayectoria de cualquier vértice a cualquier otro, *todo* diagrama de esta forma conmuta —aún si el diagrama resulta ser $A \xrightarrow{f} A$. Si comparan con el ejemplo 2, verán que tienen que ver la gráfica-forma y no solamente los $\mathcal{C}$-morfismos utilizados para decidir si un diagrama conmuta o no.

Ejemplo 4

La forma:

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[d] \\
\bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet
\end{tikzcd}$$

nos da diagramas:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i"'] & C \arrow[d, "j"] \\
D \arrow[r, "k"'] & E \arrow[r, "l"'] & F
\end{tikzcd}$$

¿Qué ecuaciones necesitamos para hacer que un diagrama tal conmute? Tenemos que ver aquellos pares de puntos entre los que hay más de una trayectoria:

(1) de arriba a la izquierda a abajo enmedio necesita $kh = if$;
(2) de arriba enmedio a abajo a la derecha necesita $li = jg$, y
(3) de arriba a la izquierda a abajo a la derecha necesita que los tres morfismos jgf, lif, lkh sean iguales pero se puede demostrar que son iguales a partir de (1) y (2). (¿Cómo?)

Como los ejemplos están sugiriendo, para gráficas que tienen ciclos puede ser un problema difícil encontrar una lista mínima de ecuaciones que impliquen que el diagrama de esa forma conmute, mientras que para gráficas sin ciclos es más fácil. Los casos que aparecen más a menudo no son, afortunadamente, difíciles; así, no necesitaremos describir la teoría general. En cada instancia, simplemente verifiquen que las ecuaciones que demostramos implican cualquier ecuación adicional que utilicemos.

Ejercicio 2
Demuestre que un diagrama de forma $\boxed{\bullet \rightleftarrows \bullet}$ conmuta si y sólo si los morfismos asociados a las dos flechas son inversos.

Ejercicio 3
En el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "j"'] & C \arrow[r, "h"] \arrow[d, "k"] & D \arrow[d, "l"] \\
E \arrow[r, "m"'] & F \arrow[r, "n"'] & G \arrow[r, "p"'] & H
\end{tikzcd}$$

las tres ecuaciones (1) $jf = mi$, (2) $kg = nj$, (3) $lh = pk$ de hecho fuerzan a que conmute el diagrama; pero sólo se le pide demostrar:

$$pnmi = lhgf$$

Ejercicio 4
Para cada uno de estos diagramas, encuentre una lista mínima de ecuaciones que hagan que conmute:

(a) $\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "f"] & B \arrow[l, "g"'] \arrow[l, bend left, "h"] \end{tikzcd}$ (b) $\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] & & B \arrow[dl, "g"] \\ & C \arrow[ul, "h"] & \end{tikzcd}$ (c) $\begin{tikzcd} A \arrow[rr, bend left, "f"] \arrow[rr, "g"'] & & B \arrow[dl, "h"] \\ & C \arrow[ul, "j"] \arrow[loop below, "i"] & \end{tikzcd}$

Después de que haya encontrado las respuestas, trate de explicar claramente cómo sabe, de las ecuaciones que haya elegido, que *todas* las posibles trayectorias dan compuestos iguales.

4. ¿Un diagrama es un morfismo?

Si G es una gráfica, un diagrama de forma G en una categoría $\mathcal{C}$ le asocia a cada vértice de G un objeto de $\mathcal{C}$ y a cada flecha de G un morfismo en $\mathcal{C}$; además respeta la estructura de G. Esto sugiere que un diagrama de forma G en $\mathcal{C}$ es un "morfismo de gráficas" de G en $\mathcal{C}$, ¡pero no tiene sentido! $\mathcal{C}$ es una *categoría*, no una gráfica. Sin embargo, asociada a cualquier categoría $\mathcal{C}$ hay una gráfica grande cuyos vértices son los objetos de $\mathcal{C}$, sus flechas son los morfismos de $\mathcal{C}$, la salida es el dominio y la llegada es el codominio. Llamemos a esta gráfica grande $\mathcal{U}(\mathcal{C})$. La gráfica olvida cómo se componen los morfismos en $\mathcal{C}$ y sólo registra qué son los objetos y los morfismos, y qué son el dominio y el codominio de cada morfismo. Así, el diagrama *es* un morfismo. Un diagrama de forma G en $\mathcal{C}$ es un morfismo de gráficas, pero de G en $\mathcal{U}(\mathcal{C})$, que de hecho se extiende de manera única a un funtor de la categoría libre $\mathcal{F}(G)$ a $\mathcal{C}$. Las operaciones $\mathcal{U}$ y $\mathcal{F}$ permiten un tratamiento eficiente de las relaciones básicas entre gráficas y categorías.

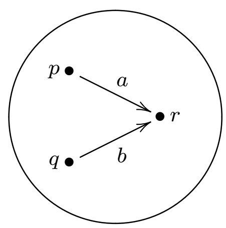
EXAMEN 2

1. Suponga que:

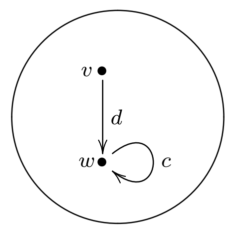
$$\boxed{X^{\circlearrowleft \alpha}} \xrightarrow{f} \boxed{Y^{\circlearrowleft \beta}}$$

es un morfismo en $\mathcal{S}^{\circlearrowleft}$. Demuestre que si α tiene un punto fijo, entonces β debe también tener un punto fijo.

2. Encuentre todos los morfismos de gráficas (irreflexivas) de:



en



(No hay más de media docena de ellos.)

3. Encuentre un ejemplo de un conjunto X con un endomorfismo $X \xrightarrow{\alpha} X$ con $\alpha^2 = \alpha^3$ pero $\alpha \neq \alpha^2$.

Sesión 18

Revisión del examen 2

La historia de la ciencia demuestra que la precisión en las ideas fundamentales se desarrolla lentamente y cristaliza después —al menos en matemáticas— en definiciones precisas. Éstas juegan entonces un papel importante en el desarrollo subsecuente del tema, así que al estudiar, el dominio de las definiciones es un paso esencial. Los exámenes ilustran esto: para comenzar, debemos conocer las definiciones precisas y, si sabemos las definiciones, un cálculo simple nos lleva a menudo a la solución.

Ahora Danilo nos mostrará su solución al primer problema, Katie la suya al tercero y Omer la suya al segundo.

DANILO: (1) Supongamos que $X^{\circlearrowleft\alpha} \xrightarrow{f} Y^{\circlearrowleft\beta}$ y que α tiene un punto fijo, entonces demostremos que β debe también tener un punto fijo.

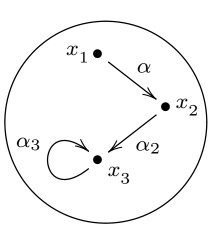
Respuesta: Supongamos que x es un punto fijo de α y tomemos y como fx:

$$\begin{aligned} \alpha x &= x \\ y &= fx \end{aligned}$$

Demostraré que $\beta y = y$.

$$\begin{aligned} \beta y &= \beta(fx) && \text{por la elección de } y \\ &= (\beta f)x \\ &= (f\alpha)x && \text{porque } f \text{ es morfismo de } \mathcal{S}^{\circlearrowleft} \\ &= f(\alpha x) \\ &= fx \\ &= y \end{aligned}$$

KATIE: (3) $X \longrightarrow X$



Demostración de $\alpha \neq \alpha^2$:

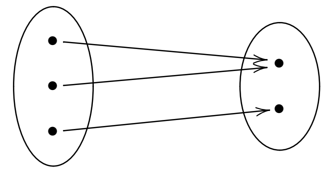
$$\alpha^2 x_1 = \alpha(\alpha x_1) = \alpha x_2 = x_3 \neq x_2 = \alpha x_1$$

por lo tanto $\alpha \neq \alpha^2$.

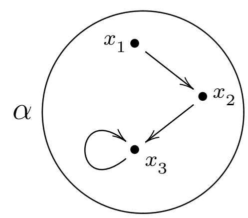
Demostración de $\alpha^2 = \alpha^3$:

$$\begin{aligned} \alpha^2 x_1 &= \alpha(\alpha x_1) = \alpha x_2 = x_3 \\ &= \alpha x_3 = \alpha(\alpha x_2) = \alpha(\alpha(\alpha x_1)) \\ &= \alpha^3 x_1. \end{aligned}$$

Katie dibujó el diagrama interno y le puso a cada flecha una etiqueta distinta, pero es más bien todo el diagrama lo que es el endomorfismo α. Cuando dibujamos el diagrama interno de un morfismo $f\colon A \to B$,



no etiquetamos cada flecha de manera diferente; es todo el diagrama lo que es f. El endomorfismo de Katie podría haberse dibujado:



Ahora ella ve que α y α^2 le hacen cosas diferentes a x_1. Esto demuestra que $\alpha \neq \alpha^2$. A continuación, queremos demostrar que $\alpha^2 = \alpha^3$. ¿Cómo demuestra uno que dos morfismos son iguales?

CHAD: Verifica que para cada entrada dan la misma salida.

Correcto. En este caso tenemos tres entradas y tenemos que verificar tres cosas:

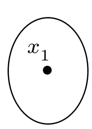
$$\alpha^2(x_1)=\alpha^3(x_1), \quad \alpha^2(x_2)=\alpha^3(x_2) \;\text{ y }\; \alpha^2(x_3)=\alpha^3(x_3)$$

Katie verificó la primera pero no hizo las otras dos. Son tan fáciles como la primera pero tienen que hacerse. Primero verifiquen: $\alpha^2(x_2)=x_3$ y entonces se sigue que $\alpha^3(x_2)=\alpha(\alpha^2(x_2))=\alpha(x_3)=x_3$. La última ecuación es aún más fácil porque $\alpha(x_3)=x_3$, entonces $\alpha^2(x_3)=x_3$ y también $\alpha^3(x_3)=x_3$.

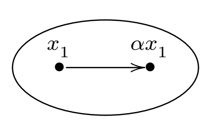
CHAD: También se le pasó verificar las otras dos en la primera parte.

No. En la primera parte ella está haciendo lo opuesto de verificar que dos morfismos son iguales, está demostrando que dos morfismos no son iguales dando un contraejemplo. Es parecido a esto: si yo digo que todos en este cuarto son hombres, un ejemplo (una mujer) basta para demostrar que estoy equivocado.

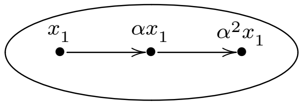
Es notable que todas las personas que contestaron esta pregunta dieron el mismo ejemplo. ¿Es un accidente? No, hay un proceso definido de pensamiento que lleva a esta respuesta. Queremos un punto, llamémoslo x_1, con $\alpha^3(x_1)=\alpha^2(x_1)$. Decidimos no hacer especial a x_1 de ninguna otra manera y gradualmente construimos nuestro ejemplo:



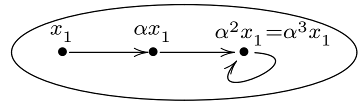
después



después



después



Podemos decir que éste es el sistema dinámico *genérico* con un punto x_1 que satisface $\alpha^3(x_1)=\alpha^2(x_1)$. (Si estudiaron las *presentaciones* en la sesión 15, verán que este sistema dinámico está presentado por un solo generador x_1 junto con una relación, $\alpha^3(x_1)=\alpha^2(x_1)$.) Esta idea ya genera el ejemplo. Esta perspectiva también simplifica el cálculo. Como cada punto x es de la forma $\alpha^r(x_1)$ para algún número natural r, podemos demostrar:

$$\alpha^3 x = \alpha^3\alpha^r x_1 = \alpha^r\alpha^3 x_1 = \alpha^r\alpha^2 x_1 = \alpha^2\alpha^r x_1 = \alpha^2 x$$

Entonces, no tenemos que verificar $\alpha^3 x = \alpha^2 x$ para cada uno de los puntos x mediante un cálculo individual. Si el problema fuera producir un α con $\alpha^{100}=\alpha^{200}$ pero $\alpha^{77}\neq \alpha^{99}$, ¡realmente apreciarían el ahorro!

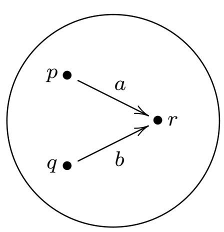
Vayamos ahora al problema 2, que es probablemente el más difícil. Omer nos mostrará su propio esquema elegante para dibujar un morfismo de gráficas. Recordemos que una gráfica (irreflexiva) es dos conjuntos y dos morfismos acomodados como en este diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, shift right, "s"'] \arrow[d, shift left, "t"] \\ P \end{tikzcd}$$

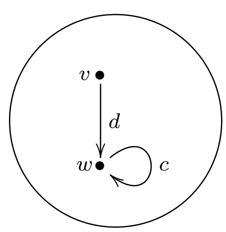
Un morfismo de gráficas (irreflexivas) es un par de morfismos, uno entre los conjuntos de flechas, $f_F{:}X \to Y$, y el otro, entre los conjuntos de vértices $f_V{:}P \to Q$, que satisfacen dos ecuaciones: "respetan salidas", $f_V s = s' f_F$ y "respetan llegadas", $f_V t = t' f_F$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f_F"] \arrow[d, shift right, "s"'] \arrow[d, shift left, "t"] & Y \arrow[d, shift right, "s'"'] \arrow[d, shift left, "t'"] \\ P \arrow[r, "f_V"'] & Q \end{tikzcd}$$

En el examen especificamos dos gráficas mediante estos diagramas internos:

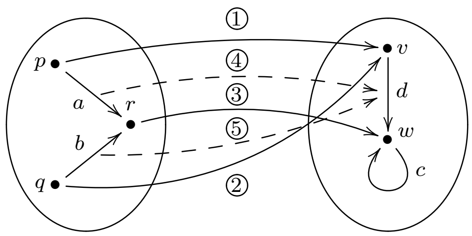


y



La pregunta es: ¿cuántos morfismos de gráficas hay de la primera gráfica en la segunda? Para dar un morfismo de gráficas necesitamos dos morfismos, f_F y f_V, que satisfagan las ecuaciones dadas arriba. Omer encontró una manera de incorporar toda esta información en un dibujo. Necesitamos dos morfismos definidos en la primera gráfica, uno actuando en los vértices y el otro actuando en las flechas.

OMER: (2)



vértices a vértices, flechas a flechas

f_V indicada por flechas sólidas:
① p a v
② q a v
③ r a w

f_F indicada por flechas punteadas:
④ a a d
⑤ b a d

Su dibujo muestra flechas enviadas a flechas y vértices enviados a vértices y necesitamos solamente verificar que estos morfismos satisfacen las propiedades de un morfismo de gráficas, esto es, $f_V s = s' f_F$ y $f_V t = t' f_F$. ¿Cuántas cosas debemos hacer para verificar que $f_V s = s' f_F$? Los dos morfismos $f_V s$ y $s' f_F$ tienen solamente dos entradas porque su dominio es el conjunto con elementos a, b. Entonces tenemos que verificar dos cosas:

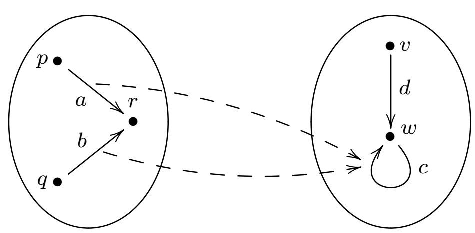
$$f_V s(a) = s' f_F(a) \quad \text{y} \quad f_V s(b) = s' f_F(b)$$

Éstas son muy fáciles de verificar en el dibujo de Omer. Luego, verificar que las otras dos composiciones son iguales:

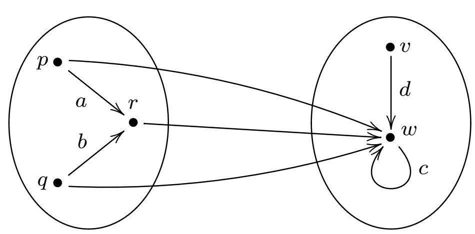
$$f_V t(a) = t' f_F(a) \quad \text{y} \quad f_V t(b) = t' f_F(b)$$

también es inmediato, de manera que Omer ha dado un morfismo de gráficas genuino.

Hay más morfismos entre estas gráficas. Para descubrirlos fácilmente, observen que en su ejemplo (contra lo que sucede en uno en que la gráfica dominio tiene un vértice que no es ni la salida ni la llegada de flecha alguna), tan pronto como digan a dónde van las flechas, las imagenes de los vértices están forzadas por las condiciones de que las salidas y las llegadas son preservadas. Por ejemplo, supongan que queremos mandar ambas flechas, a, b, a la flecha c. Usando el diagrama tipo Omer:

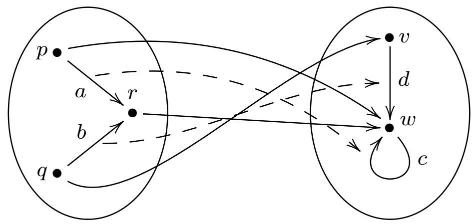


entonces obliga:



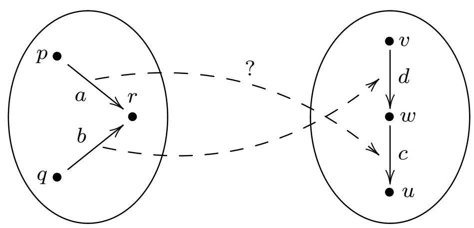
porque siendo p la salida de a debe enviarse a la salida de c. Como r es la llegada de a debe enviarse a la llegada de c y así sucesivamente. Observen que las condiciones requeridas para un morfismo de gráficas van siendo verificadas conforme vamos avanzando.

Otra posibilidad es enviar a en c y b en d, que fuerza el morfismo de gráficas:



y deben verificar que realmente es un morfismo de gráficas debido a que a veces no tenemos tanta suerte de poder mandar cualquier flecha adonde se nos dé la gana.

Por ejemplo, si la flecha c en el codominio tuviera un vértice distinto como llegada, no habría morfismo de gráficas que mandara a a c y b a d.



Como r es la llegada de ambos, a y b, la imagen de r debe ser la llegada de ambas, c y d, lo cual es imposible.

Encuentren el cuarto morfismo de gráficas entre las gráficas del examen 2 ustedes mismos. Hay un método que les permite descubrir los cuatro morfismos y que no hay otros, sin tener que tratar muchas posibilidades inútiles. La idea detrás de esto es que la primera gráfica es la gráfica genérica que tiene dos flechas con la misma llegada. De una manera un poco más precisa, se *presenta* mediante una lista de dos flechas-generadores a, b, junto con una relación $t(a)=t(b)$, de manera que tenemos la correspondencia invertible:

$$\frac{\textit{morfismos de nuestra gráfica a cualquier gráfica } G}{\textit{parejas } \overline{a},\ \overline{b} \textit{ de flechas en } G \textit{ con la misma llegada}}$$

Intuitivamente, pueden pensar a un morfismo de gráficas como una manera de acomodar las flechas y los vértices de la gráfica dominio físicamente sobre las flechas y los vértices de la gráfica codominio sin romper la gráfica dominio.

PARTE IV

Propiedades universales elementales de morfismo

Nos encontramos con que hay una sola definición de multiplicación de objetos y una sola definición de suma de objetos en todas las categorías. Las relaciones entre suma y multiplicación son sorprendentemente diferentes en distintas categorías.

ARTÍCULO IV

Propiedades universales de morfismo

Objetos terminales e iniciales
Producto y suma de un par de objetos

1. Objetos terminales

En la categoría $\mathcal{S}$ de conjuntos abstractos, cualquier objeto $\mathbf{1}$ con un solo elemento tiene exactamente un morfismo de cada objeto X a $\mathbf{1}$; en otras categorías $\mathcal{C}$ de interés existen asimismo objetos especiales que tienen la misma propiedad en relación con todos los objetos de $\mathcal{C}$, a pesar de que dichos objetos especiales pueden ser mucho más complicados intuitivamente que "solamente un elemento".

Definición: *Se dice que un objeto S en una categoría $\mathcal{C}$ es un* **objeto terminal** *de $\mathcal{C}$ si para cada objeto X de $\mathcal{C}$ hay exactamente un $\mathcal{C}$-morfismo $X \to S$.*

Esta definición a menudo es llamada una propiedad "universal" debido a que describe la naturaleza de un objeto particular S en términos de su relación con "todos" los objetos X de la categoría $\mathcal{C}$. Además, la naturaleza de la relación de S con otros objetos X se describe en términos de morfismos en la categoría, más precisamente, diciendo que "hay exactamente un" morfismo que satisface las condiciones dadas; *objeto terminal* es la propiedad universal de morfismo más sencilla ya que las condiciones dadas aquí son simplemente la condición dominio/codominio expresada en "$X \to S$", pero en otras propiedades universales de morfismo habrá más condiciones.

Proposición: (Unicidad de los objetos terminales.) *Si S_1 y S_2 son ambos objetos terminales en la categoría $\mathcal{C}$, entonces hay exactamente un $\mathcal{C}$-morfismo $S_1 \to S_2$ y dicho morfismo es un $\mathcal{C}$-isomorfismo.*

Demostración: Como S_2 es terminal hay exactamente un $\mathcal{C}$-morfismo $X \to S_2$ para cada objeto X de $\mathcal{C}$. En particular, para $X = S_1$, hay exactamente un morfismo $S_1 \to S_2$. Como S_1 es terminal, hay exactamente un $\mathcal{C}$-morfismo $Y \to S_1$ para cada objeto Y en $\mathcal{C}$. Por ejemplo, si tomamos $Y = S_2$, hay exactamente un morfismo $S_2 \to S_1$. Para completar la demostración veremos que este morfismo $S_2 \to S_1$ es un inverso bilateral para el morfismo anterior $S_1 \to S_2$, es decir, que las composiciones

$$S_1 \to S_2 \to S_1$$
$$S_2 \to S_1 \to S_2$$

son los morfismos identidad 1_{S_1} y 1_{S_2} en estos objetos respectivamente. Observe que cualquier objeto terminal S tiene la propiedad de que el único morfismo $S \to S$ es

1_S, esto se debe a que, aplicando la definición una tercera vez con $X = S$, obtenemos que hay exactamente un morfismo $S \to S$. Como ambos S_1 y S_2 son terminales en $\mathcal{C}$, podemos aplicar esta observación al caso $S = S_1$ y luego al caso $S = S_2$ para concluir que la composición $S_1 \to S_2 \to S_1$ es 1_{S_1} y que $S_2 \to S_1 \to S_2$ es 1_{S_2}. Entonces el morfismo $S_1 \to S_2$ tiene como inverso a $S_2 \to S_1$ y, por lo tanto, es un isomorfismo como se afirmó.

La proposición dice un poco más que cualesquiera dos objetos terminales en la misma categoría son isomorfos. Usualmente, cuando dos objetos son isomorfos hay muchos isomorfismos que establecen este hecho; sin embargo, para los objetos terminales, hay solamente uno. Cualesquiera dos objetos terminales tienen en común todas las propiedades que puedan ser expresadas mediante morfismos en su categoría, entonces imaginamos a menudo que se ha elegido un objeto terminal y se le ha llamado "**1**". La detallada demostración anterior será la guía o base para demostraciones similares para propiedades universales más complicadas.

Los objetos terminales no son, en sí mismos, completamente triviales. Mientras que contar morfismos $X \to \mathbf{1}$ cuyo *codominio* es terminal puede ser considerado trivial (debido a que la respuesta es siempre "exactamente uno"), contar morfismos $\mathbf{1} \to X$ cuyo *dominio* es terminal da información particular sobre el objeto codominio X.

Definición: *Si* $\mathbf{1}$ *es un objeto terminal de una categoría* $\mathcal{C}$ *y* X *es cualquier objeto de* $\mathcal{C}$*, entonces un* $\mathcal{C}$*-morfismo* $\mathbf{1} \to X$ *es llamado un* **punto** *de* X*.*

Ejercicio 1
$\mathbf{1}$ tiene un punto. Si $X \xrightarrow{f} Y$ y x es un punto de X, entonces fx es un punto de Y.

Ejercicio 2
En la categoría $\mathcal{S}$ de los conjuntos abstractos, cada punto de X "apunta a" exactamente un elemento de X y cada elemento de X es el valor de exactamente un punto de X. (Aquí X es cualquier conjunto abstracto dado.)

Ejercicio 3
En la categoría $\mathcal{S}^{\circlearrowright}$ de sistemas dinámicos discretos, un punto de un objeto "es" simplemente un punto fijo del endomorfismo (esto es, un "estado de equilibrio" del sistema dinámico). Entonces la mayoría de los estados no corresponden a ningún $\mathcal{S}^{\circlearrowright}$-morfismo desde el objeto terminal.

Ejercicio 4
En la categoría $\mathcal{S}^{\downdownarrows}$ de gráficas (irreflexivas), un "punto" de una gráfica X "es" simplemente un lazo en X.
Sugerencia: Determine cómo se ve el objeto terminal utilizando la definición de "morfismo en $\mathcal{S}^{\downdownarrows}$".

Ejercicio 5
El objeto terminal **1** en $\mathcal{S}$ tiene además la siguiente propiedad de "separar morfismos arbitrarios". Si $X \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} Y$ y si para todo punto x de X tenemos $fx = gx$, entonces $f = g$. Esta propiedad adicional no es una propiedad del objeto terminal en $\mathcal{S}^{\circlearrowright}$ ni en $\mathcal{S}^{\downdownarrows}$. Dé un contraejemplo en cada una de ellas.

2. Separar

A pesar de que la gráfica terminal no separa morfismos arbitrarios de gráficas, hay unas cuantas gráficas (no terminales) que lo hacen. Considere las dos gráficas cuyos dibujos internos son como se indica:

$$F = \boxed{\bullet \longrightarrow \bullet} \quad \text{la flecha genérica}$$

$$V = \boxed{\bullet} \quad \text{el vértice desnudo}$$

Entonces para cualquier gráfica X, cada flecha en X es indicada por exactamente un $\mathcal{S}^{\downdownarrows}$-morfismo $F \to X$ y cada vértice en X es indicado por exactamente un $\mathcal{S}^{\downdownarrows}$-morfismo $V \to X$. Concluimos que:

Sean X y Y cualesquiera dos gráficas y $X \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} Y$ cualesquiera dos morfismos de gráficas. Si $fx = gx$ para todo $F \xrightarrow{x} X$ con dominio F y también $fx = gx$ para todo $V \xrightarrow{x} X$ con dominio V, entonces $f = g$.

En la mayoría de nuestros ejemplos de categorías habrá unos pocos objetos suficientes para separar morfismos como F y V lo hacen para gráficas y **1** lo hace para conjuntos, esto es, si $X \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} Y$ con $f \neq g$, existirá alguna $B \xrightarrow{x} X$ con $fx \neq gx$ con B uno de los pocos elegidos —decimos que x *separa* f de g. En la mayoría de las categorías el objeto terminal solo no es suficiente para separar en este sentido.

Ejercicio 6
Demuestre que en la categoría $\mathcal{S}^{\circlearrowright}$ de sistemas dinámicos discretos hay un objeto N tal que los $\mathcal{S}^{\circlearrowright}$-morfismos desde N son suficientes para separar los morfismos $X \rightrightarrows Y$ de objetos arbitrarios.
Sugerencia: El objeto N debe tener un número infinito de estados y puede tomarse como el objeto básico de la "aritmética".

3. Objeto inicial

Muchas definiciones de clases de objetos o morfismos en una categoría pueden ser "dualizadas" invirtiendo el sentido de todas las flechas y composiciones en la definición, en particular, intercambiando dominios y codominios. Por ejemplo, el concepto "dual" al de objeto terminal es el siguiente:

Definición: *S es un objeto* **inicial** *de $\mathcal{C}$ si para cada objeto X de $\mathcal{C}$ hay exactamente un $\mathcal{C}$-morfismo $S \to X$.*

Ejercicio 7
Si S_1 y S_2 son ambos iniciales en $\mathcal{C}$, entonces el (único) morfismo $S_1 \to S_2$ es un isomorfismo.

Ejercicio 8
En cada una de $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}^{\downdownarrows}$ y $\mathcal{S}^{\circlearrowright}$, si $\mathbf{0}$ es un objeto inicial y $X \xrightarrow{f} \mathbf{0}$ es un morfismo entonces

(a) para cualquier $X \xrightarrow{g} \mathbf{0}$, $g = f$ y
(b) X es, él mismo, inicial.

Ejercicio 9
Defina la categoría $\mathbf{1}/\mathcal{S}$ de *conjuntos punteados*: un *objeto* es un morfismo $\mathbf{1} \xrightarrow{x_0} X$ en $\mathcal{S}$ y un *morfismo* de $\mathbf{1} \xrightarrow{x_0} X$ en $\mathbf{1} \xrightarrow{y_0} Y$ es un morfismo $X \xrightarrow{f} Y$ en $\mathcal{S}$ para el cual

$$f x_0 = y_0 \qquad \begin{tikzcd} & \mathbf{1} \arrow[dl, "x_0"'] \arrow[dr, "y_0"] & \\ X \arrow[rr, "f"'] & & Y \end{tikzcd}$$

Demuestre que en $\mathbf{1}/\mathcal{S}$ todo objeto terminal es también inicial y que la parte (b) del ejercicio anterior es falsa.

Ejercicio 10
Sea $\mathbf{2}$ un conjunto fijo con dos puntos. Defina la categoría $\mathbf{2}/\mathcal{S}$ de *conjuntos bipunteados* que tenga como objetos los $\mathcal{S}$-morfismos $\mathbf{2} \xrightarrow{\bar{x}} X$ y como morfismos los $\mathcal{S}$-morfismos que satisfacen $f\bar{x} = \bar{y}$

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{2} \arrow[dl, "\bar{x}"'] \arrow[dr, "\bar{y}"] & \\ X \arrow[rr, "f"'] & & Y \end{tikzcd}$$

Demuestre que en $\mathbf{2}/\mathcal{S}$ "el" objeto inicial es el morfismo identidad $\mathbf{2} \to \mathbf{2}$ y que la parte (a) del ejercicio 8 es falsa, esto es, un objeto puede tener más de un morfismo al objeto inicial.

Ejercicio 11
Muestre que en la categoría $\mathcal{S}$ si un objeto X no es un objeto inicial, entonces X tiene al menos un punto (morfismo desde el objeto terminal). Demuestre que la misma afirmación es falsa en ambas categorías $\mathcal{S}^{\circlearrowright}$ y $\mathcal{S}^{\downdownarrows}$.

4. Productos

Ahora discutiremos una importante propiedad universal de morfismo que puede considerarse como el contenido objetivo de la palabra "y", como en la observación de Galileo de que un movimiento en el espacio es equivalente a un movimiento en el plano horizontal *y* un movimiento en la línea vertical.

Suponga que B_1 y B_2 son objetos dados en una categoría $\mathcal{C}$ y que $P \xrightarrow{p_1} B_1$ y $P \xrightarrow{p_2} B_2$ son $\mathcal{C}$-morfismos dados. Entonces, claramente, cualquier $\mathcal{C}$-morfismo $X \xrightarrow{f} P$ da lugar, mediante la composición, a un nuevo par de $\mathcal{C}$-morfismos $X \xrightarrow{fp_1} B_1$, $X \xrightarrow{fp_2} B_2$. Mediante una cuidadosa elección de P, p_1, p_2 es posible que obtengamos el "recíproco":

Definición: *Un objeto P junto con un par de morfismos $P \xrightarrow{p_1} B_1$, $P \xrightarrow{p_2} B_2$ se llama un* **producto** *de B_1 y B_2 si para cada objeto X y cada par de morfismos $X \xrightarrow{f_1} B_1$, $X \xrightarrow{f_2} B_2$ hay exactamente un morfismo $X \xrightarrow{f} P$ para el cual se cumplen ambas $f_1 = p_1 f$ y $f_2 = p_2 f$.*

$$\begin{tikzcd}
& & B_1 \\
X \arrow[rru, bend left, "f_1"] \arrow[r, "\langle f_1, f_2 \rangle"] \arrow[rrd, bend right, "f_2"'] & P \arrow[ru, "p_1"'] \arrow[rd, "p_2"] & \\
& & B_2
\end{tikzcd}$$

Dicho morfismo f, al estar determinado de manera única por f_1 y f_2, puede denotarse $\langle f_1, f_2 \rangle$. Los morfismos p_1 y p_2 se llaman morfismos **proyección** para el producto.

Ejercicio 12
Si P, p_1, p_2 y también Q, q_1, q_2 son ambos productos del mismo par de objetos B_1, B_2 en una categoría dada, entonces el único morfismo

$$P \xrightarrow{f} Q$$

para el cual $p_1 = q_1 f$ y $p_2 = q_2 f$ es un *isomorfismo.*

Ya que este ejercicio muestra que elecciones diferentes de producto para B_1 y B_2 son isomorfas, a menudo imaginamos que hemos elegido un producto específico y lo denotamos por $B_1 \times B_2$, p_1, p_2.

Ejercicio 13
En una categoría $\mathcal{C}$ con productos y objeto terminal, cada punto de $B_1 \times B_2$ es, de manera única, de la forma $\langle b_1, b_2 \rangle$ donde b_i es un punto de B_i $(i = 1, 2)$ y cualquier par de puntos de B_1, B_2 corresponde a las proyecciones de exactamente un punto de $B_1 \times B_2$.

Si T es un objeto que corresponde a "tiempo", de manera que un morfismo $T \to X$ puede ser llamado un "movimiento en X", y si P está equipado de proyecciones a B_1, B_2 haciéndolo un producto, entonces un movimiento en P corresponde de manera única a un par de movimientos en los factores y viceversa. Mostramos esto brevemente mediante

$$\frac{T \to B_1 \times B_2}{T \to B_1, \quad T \to B_2}$$

donde se sobrentiende que la correspondencia entre el morfismo solo de arriba de la línea y el par de morfismos debajo de la línea se obtiene mediante composición con los morfismos proyección dados.

Recuerde que "puntos" (morfismos desde objetos terminales) dan información importante, negando así la aparente trivialidad de los objetos terminales. De manera similar, morfismos cuyo dominio es un producto

$$B_1 \times B_2 \xrightarrow{f} C$$

expresan información importante que no puede expresarse en términos de los factores de manera separada, debido a que la determinación de los valores de f involucra una *interacción* de los elementos de los factores. Dos casos son particularmente importantes:

Definición: *Una* **operación binaria** *en un objeto A es un morfismo*

$$A \times A \to A.$$

Una **acción** *de un objeto A en un objeto X es un morfismo*

$$A \times X \to X.$$

Por ejemplo, si $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ es el conjunto de números naturales considerado como un objeto de $\mathcal{S}$, entonces la suma es una operación binaria en $\mathbb{N}$

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{N}$$

donde $\alpha\langle x, y\rangle = x + y$ para cada $\langle x, y\rangle$ en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. La multiplicación

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \xrightarrow{\mu} \mathbb{N}$$

es otra operación binaria en $\mathbb{N}$. Una acción $A \times X \to X$ puede considerarse como "una familia de endomorfismos de X parametrizados por A" debido a que, para cada $\mathbf{1} \xrightarrow{a} A$, α da lugar a un endomorfismo de X

$$X \xrightarrow{\langle \bar{a}, 1_X\rangle} A \times X \xrightarrow{\alpha} X$$

donde $\bar{a}$ es el "morfismo constante"

$$X \longrightarrow \mathbf{1} \xrightarrow{a} A$$

Por ejemplo, una acción de $\mathbf{1}$ en X "es" simplemente un endomorfismo dado de X ya que "$\mathbf{1} \times X = X$".

En efecto, nuestro ejemplo $\mathcal{S}^{\circlearrowright}$ puede generalizarse a $\mathcal{S}^A$ para cualquier conjunto dado A como sigue: un *objeto* de $\mathcal{S}^A$ es un conjunto X junto con una acción cualquiera $A \times X \xrightarrow{\xi} X$ de A en X. Un *morfismo* de X, ξ en Y, η es cualquier $\mathcal{S}$-morfismo $X \xrightarrow{f} Y$ que respeta las acciones de A en el sentido de que

$$f(\xi(a,x)) = \eta(a, f(x)) \quad \text{para todo } a,\ x.$$

Esto puede expresarse de otra manera si definimos $1_A \times f$ como el morfismo cuya proyección en A es la proyección en A desde $A \times X$ y cuya proyección en Y es f tras la proyección en X desde $A \times X$, como abajo:

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[rr, "1_A"] & & A \\
A \times X \arrow[ur] \arrow[r, "1_A \times f"] \arrow[dr] & A \times Y \arrow[urr] \arrow[drr] & & \\
 & X \arrow[rr, "f"] & & Y
\end{tikzcd}$$

La condición de que f preserve las acciones de A dadas puede reescribirse como sigue:

$$\eta(1_A \times f) = f\xi \qquad \begin{tikzcd}
A \times X \arrow[r, "1_A \times f"] \arrow[d, "\xi"'] & A \times Y \arrow[d, "\eta"] \\
X \arrow[r, "f"] & Y
\end{tikzcd}$$

Ejercicio 14
Defina la composición de morfismos en $\mathcal{S}^A$ y muestre que es una categoría.

Si A viene ya equipado con una operación binaria $A \times A \xrightarrow{\alpha} A$ preferida y un punto $\mathbf{1} \xrightarrow{a_0} A$, entonces podemos restringir la noción de "acción de A en X" a aquellas acciones que son "compatibles con α y a_0" en el sentido de que, bajo la acción, α corresponde a composición de endomorfismos de X y a_0 actúa como 1_X, esto es,

$$\begin{aligned}
\xi(\alpha(a,b),x) &= \xi(a, \xi(b,x)) && \text{para todo } a,b,x \\
\xi(a_0, x) &= x && \text{para todo } x
\end{aligned}$$

Ejercicio 15
Exprese estas ecuaciones como ecuaciones entre morfismos

$$A \times A \times X \rightrightarrows X\ ,\ X \rightrightarrows X$$

construidos usando ξ y la propiedad universal de morfismo de productos.

Estas ecuaciones son consideradas frecuentemente cuando la operación binaria en A es asociativa y el punto dado es neutro para ella; en otras palabras, cuando A,

α, a_0 juntas constituyen un monoide (ver sesión 13). En ese caso las acciones que satisfacen estas ecuaciones de compatibilidad constituyen una subcategoría de $\mathcal{S}^A$ llamada la categoría de todas las acciones del monoide en conjuntos.

5. Leyes conmutativa, asociativa e identidad para la multiplicación de objetos

Para la multiplicación de *números* puede haber visto que es posible mostrar (con algo de esfuerzo) que las leyes básicas

$$\begin{array}{l} a \times b = b \times a \quad \text{(ley conmutativa)} \\ 1 \times a = a \;\text{ y }\; a \times 1 = a \quad \text{(leyes identidad)} \\ a \times (b \times c) = (a \times b) \times c \quad \text{(ley asociativa)} \end{array}$$

implican leyes más complicadas, tales como

$$(z \times ((1 \times x) \times x)) \times (p \times q) = p \times (((q \times x) \times z) \times x)$$

Esto es, en un producto de varios factores:

cómo se asocian no es importante,
el orden en el que se escriben no es importante y
los factores triviales (los factores que son 1) pueden omitirse.

El producto está completamente determinado por quiénes son los factores no triviales siempre que tomemos en cuenta las repeticiones.

Para la multiplicación de objetos, en cualquier categoría $\mathcal{C}$ con productos de pares de objetos y objeto terminal, las leyes mencionadas arriba también son válidas (después de reemplazar “igual a” por “es isomorfo a”). Para ver esto no es necesario demostrar las leyes más simples primero y deducir después leyes más complicadas. Podemos definir *directamente* el producto de cualquier familia de objetos mediante una propiedad universal de morfismo sin necesidad de enlistar los objetos en algún orden y sin tener que multiplicarlos de dos en dos. Resulta que, como se verá más abajo, la demostración del teorema de unicidad para productos de pares de objetos funciona igual de bien para cualquier familia de objetos.

Necesitamos primero algo de notación para “familias”. Sea I (por “índices”) un conjunto y, para cada i en I, sea C_i un objeto de $\mathcal{C}$. (Se permiten las repeticiones: para índices distintos i y j permitimos que C_i y C_j sean el mismo objeto. Además, se permite que el conjunto de índices I ¡sea vacío!) Esta información junta constituye una *familia* (indexada) de objetos de $\mathcal{C}$.

Definición: *Un* **producto** *de esta familia indexada es un objeto P junto con morfismos $P \xrightarrow{p_i} C_i$ (uno para cada i) que goza de la siguiente propiedad:*

Dado cualquier objeto X y cualesquiera morfismos $P \xrightarrow{f_i} C_i$ (uno para cada i) existe *exactamente un morfismo* $X \xrightarrow{f} P$ *tal que todos los triángulos a continuación conmutan, esto es, tal que* $p_i f = f_i$ *para todo* i *en* I.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dr, "p_i"] & \\ X \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "f_i"'] & & C_i \end{tikzcd}$$

La discusión de productos de pares de objetos puede copiarse casi textualmente para productos de familias.

Teorema: (Unicidad de los productos.) *Si los morfismos* $P \xrightarrow{p_i} C_i$ *y* $Q \xrightarrow{q_i} C_i$ *hacen a ambos,* P *y* Q*, productos de esta familia, entonces (debido a que* Q *es un producto) existe exactamente un morfismo* $P \xrightarrow{f} Q$ *para el cual* $q_i f = p_i$ *para cada* i *en* I*. Además, el morfismo* f *es un isomorfismo.*

Notación: Podemos suponer que hemos escogido un producto particular para la familia, lo denotamos mediante $\prod_i C_i$ y llamamos p_i a los morfismos proyección.

Las leyes conmutativa, asociativa e identidad (y consecuencias más complicadas de éstas) se siguen todas del teorema de unicidad junto con el uso de productos "parciales": para multiplicar una familia de objetos se le puede agrupar en subfamilias y calcular el producto de los productos de las subfamilias. El siguiente ejercicio le pide llevar a cabo explícitamente la demostración en el caso especial de una familia de tres objetos indexada por

$$a \; b \; c$$

agrupados en dos subfamilias como sigue

$$a \; b \qquad c$$

Ejercicio 16

Demuestre que si $\begin{tikzcd} & C_a \\ P \arrow[ur, "p_a"] \arrow[dr, "p_b"'] & \\ & C_b \end{tikzcd}$ es un producto y $\begin{tikzcd} & P \\ Q \arrow[ur, "q"] \arrow[dr, "q_c"'] & \\ & C_c \end{tikzcd}$ es un producto entonces

$$\begin{tikzcd} & C_a \\ Q \arrow[ur, "p_a q"] \arrow[r, "p_b q"] \arrow[dr, "q_c"'] & C_b \\ & C_c \end{tikzcd}$$

es un producto triple, esto es, tiene la propiedad universal de morfismo apropiada al compararlo con todo

$$\begin{tikzcd} & C_a \\ X \arrow[ur, "f_a"] \arrow[r, "f_b"] \arrow[dr, "f_c"'] & C_b \\ & C_c \end{tikzcd}$$

Este ejercicio muestra que el producto iterado $(C_a \times C_b) \times C_c$ es un producto triple de esta familia, en particular, si $\mathcal{C}$ tiene productos de parejas, también tiene productos triples. Un argumento similar demuestra que $C_a \times (C_b \times C_c)$ es también un producto triple. El teorema de unicidad implica entonces que estos dos son isomorfos, que es la ley asociativa. Desde luego que el teorema de unicidad hace más, produce un isomorfismo específico compatible con los morfismos proyección.

6. Sumas

Dualizando la noción de proyecciones de producto obtenemos:

Definición: *Una pareja* $B_1 \xrightarrow{j_1} S$, $B_2 \xrightarrow{j_2} S$ *de morfismos en una categoría hace a* S *una* **suma** *de* B_1 *y* B_2 *si para cada objeto* Y *y cada pareja* $B_1 \xrightarrow{g_1} Y$, $B_2 \xrightarrow{g_2} Y$ *existe exactamente un morfismo* $S \xrightarrow{g} Y$ *para el cual se satisfacen ambas* $g_1 = gj_1$ *y* $g_2 = gj_2$.

$$\begin{tikzcd} B_1 \arrow[dr, "j_1"'] \arrow[drr, bend left, "g_1"] & & \\ & S \arrow[r, "g"] & Y \\ B_2 \arrow[ur, "j_2"] \arrow[urr, bend right, "g_2"'] & & \end{tikzcd}$$

Nota: Los morfismos j_1, j_2 se llaman los morfismos **inyección** para la suma. Como con los productos, a menudo elegimos una suma especial de B_1 y B_2 y la denotamos por $B_1 + B_2$, j_1, j_2.

Ejercicio 17
En $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}^{\downarrow\downarrow}$ y $\mathcal{S}^{\circlearrowleft}$ las sumas tienen la propiedad de que cualquier punto de $B_1 + B_2$ es la imagen, bajo inyección, de un punto de exactamente uno de B_1, B_2.

Ejercicio 18
En $\mathcal{S}$ hay muchos morfismos $X \to \mathbf{1} + \mathbf{1}$ (si $X \neq \mathbf{0}, \mathbf{1}$) que no se factorizan por medio de alguna de las inyecciones. (Dé ejemplos.)

Ejercicio 19
Demuestre que en una categoría con sumas de pares de objetos las "sumas iteradas"

$$(A + B) + C \text{ y } A + (B + C)$$

son isomorfas.

7. Leyes distributivas

Hemos visto que las leyes algebraicas para multiplicación de objetos (leyes conmutativa, asociativa e identidad) son válidas en cualquier categoría que tenga productos y que, de la misma forma, la suma de objetos satisface las leyes correspondientes. De manera sorprendente, las leyes usuales que relacionan la suma con la multiplicación, llamadas las leyes distributivas

$$(a \times b) + (a \times c) = a \times (b + c)$$

y

$$0 = a \times 0$$

¡son falsas en muchas categorías!

Hay al menos un morfismo que compara los dos lados de las ecuaciones esperadas. En cualquier categoría que tenga ambos, sumas (y objetos iniciales) y productos, hay morfismos canónicos

$$\begin{gathered}(A \times B) + (A \times C) \to A \times (B + C)\\ \mathbf{0} \to A \times \mathbf{0}\end{gathered}$$

construidos utilizando únicamente las inyecciones y proyecciones implícitas y propiedades universales de morfismo.

Definición: *Se dice que una categoría satisface la* **ley distributiva** *si los morfismos canónicos de arriba son siempre isomorfismos en la categoría.*

Por ejemplo, $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}^{\circlearrowleft}$ y $\mathcal{S}^{\downdownarrows}$ satisfacen todas la ley distributiva, lo cual no es difícil de ver. Una demostración usando exponenciación será discutida en la parte V.

Ejercicio 20
La categoría $\mathbf{1}/\mathcal{S}$ de conjuntos punteados no satisface la ley distributiva.
Sugerencia: Determine primero la naturaleza de las sumas dentro de la categoría $\mathbf{1}/\mathcal{S}$.

Ejercicio 21
Si F, V denotan a la flecha genérica y al vértice desnudo en $\mathcal{S}^{\downdownarrows}$, demuestre que

$$F \times F = F + V + V$$

Sugerencia: Además de contar las flechas y los puntos de una gráfica arbitraria X (tal como $F \times F$) mediante morfismos $F \to X$, $V \to X$, la estructura interna de X puede calcularse mediante la composición de estos morfismos con los dos morfismos $V \overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}} F$.

8. Guía

Se ha visto que las propiedades universales han sido la base tanto de la multiplicación como la suma de objetos; la discusión más extensa de estas construcciones en las sesiones 19-28 ilustrará las maneras en las que se utilizan y mostrará cómo calcularlas. Relaciones, tales como la ley distributiva, *entre* suma y multiplicación son más profundas; la discusión de éstas inicia al final de la sesión 25. Inmediatamente después de la sesión 28 hay algunas muestras de exámenes. En la sesión 29 estudiamos propiedades adicionales de los productos que serán llevadas a un nivel más alto en la parte V.

Sesión 19

Objetos terminales

Ahora discutiremos UNO, la unidad o identidad para la multiplicación. Ya han conocido varias cosas llamadas "uno". En primer lugar el número 1, la unidad para la multiplicación de números, que satisface:

$$\text{para cada número } x,\ 1 \times x = x.$$

En segundo, el morfismo identidad de un conjunto A, el morfismo $1_A\colon A \longrightarrow A$ definido mediante

$$1_A(x) = x \quad \text{para cada miembro } x \text{ de } A$$

que satisface las leyes de identidad

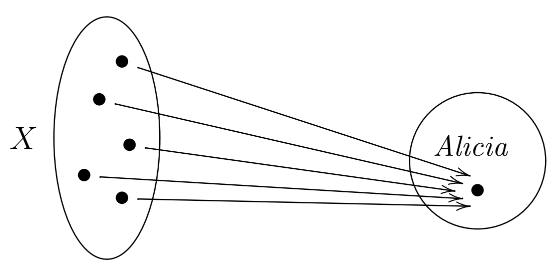
$$\text{para cada morfismo } f \text{ con codominio } A,\ 1_A \circ f = f, \text{ y}$$
$$\text{para cada morfismo } g \text{ con dominio } A,\ g \circ 1_A = g.$$

En tercero, y éste es el punto de inicio de nuestro tópico, ustedes han conocido "conjuntos singulete", conjuntos con exactamente un miembro.

Nuestra meta es entender todo en términos de morfismos y su composición, así es que debemos preguntarnos: ¿qué propiedad especial tienen los "conjuntos singulete"? Queremos que la respuesta involucre morfismos. ¿Alguna idea?

OMER: Hay solamente un morfismo a un "conjunto singulete".

Bien. Un "conjunto singulete" como $\{Alicia\}$ tiene la propiedad de que *para cada conjunto* X hay exactamente un morfismo de X a $\{Alicia\}$.



Recuerden que esto funciona aún si el dominio X es vacío, en cuyo caso el diagrama interno del morfismo es:

sin flechas, ya que X no tiene miembros.

Hemos logrado encontrar una propiedad especial de los “conjuntos singulete”, una propiedad que se expresa completamente en términos de morfismos, sin mencionar miembros. ¿Por qué queremos describir los “conjuntos singulete” completamente en términos de morfismos? La razón es que en otras categorías, por ejemplo los sistemas dinámicos o las gráficas, no es tan claro qué es lo que tendría que ser un “miembro” pero las propiedades expresadas en términos de morfismos y composición (tales como la propiedad de Omer) siguen teniendo sentido en cualquier categoría. Por lo tanto definimos:

Definición: *En cualquier categoría $\mathcal{C}$, un objeto T es un **objeto terminal** si y sólo si tiene la propiedad:*

para cada objeto X de $\mathcal{C}$ hay exactamente un morfismo de X en T.

La “X” en la definición es un pronombre. Podríamos haber dicho “T es un objeto terminal si y sólo si para cada objeto en $\mathcal{C}$ hay exactamente un morfismo de ese objeto en T”, pero para asegurar que la frase “ese objeto” no sea ambigua le damos un nombre “X” cuando se menciona por primera vez. No importa qué letra usemos. La oración “para cada objeto Y en $\mathcal{C}$ hay exactamente un morfismo de Y en T”, dice exactamente lo mismo sobre T.

Busquemos ejemplos de objetos terminales en otras categorías. ¿Hay algún objeto terminal en $\mathcal{S}^{\circlearrowleft}$?

OMER: Un conjunto con un miembro.

Ésa es una buena idea. Pero un conjunto solo no es un objeto de $\mathcal{S}^{\circlearrowleft}$, debemos especificar un endomorfismo del conjunto. ¿Qué endomorfismo deberíamos escoger?

ALICIA: ¿El miembro va a sí mismo?

Exactamente. De hecho, éste es el único endomorfismo que tiene nuestro conjunto singulete. Así que probamos con:

$$T = \boxed{\bullet\circlearrowleft}$$

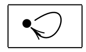
¿Es en realidad un objeto terminal en $\mathcal{S}^{\circlearrowleft}$? Esto es pedirle mucho a T. Debe satisfacer: para cada sistema dinámico $X^{\circlearrowleft\alpha}$ en $\mathcal{S}^{\circlearrowleft}$ (sin importar lo complicado que pueda ser) hay exactamente un morfismo $X^{\circlearrowleft\alpha} \longrightarrow T$. ¿Qué es un morfismo $X^{\circlearrowleft\alpha} \to Y^{\circlearrowleft\beta}$ en $\mathcal{S}^{\circlearrowleft}$?

OMER: Un morfismo de conjuntos tal que $f\circ\alpha = \beta\circ f$.

Correcto. ¿Cuántos morfismos hay del conjunto X al conjunto singulete $\mathbf{1}$, independientemente de si satisfacen la condición extra? Sí, precisamente uno. ¿Satisface la condición $f\circ\alpha = \beta\circ f$?

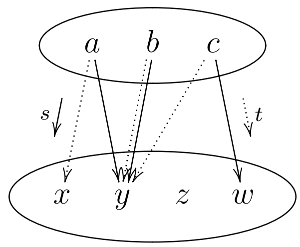
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & \odot \arrow[d, "\beta"] \\ Y \arrow[r, "f"'] & \odot \end{tikzcd}$$

Sí, debido a que ambas $f \circ \alpha$ y $\beta \circ f$ son morfismos (de conjuntos) de X a $\mathbf{1}$ y hay solamente un morfismo así. Así concluye. Hemos demostrado que este sistema dinámico

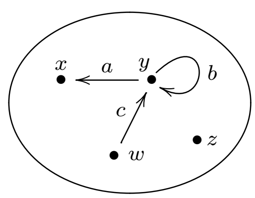


es un “conjunto-con-endomorfismo” terminal, esto es, un objeto terminal en la categoría $\mathcal{S}^{\circlearrowright}$.

Vayamos ahora a la categoría de gráficas irreflexivas. Un objeto es un par de conjuntos X, P y un par de morfismos de X a P. Entonces el dibujo de un objeto es



en donde dibujamos el morfismo s con flechas sólidas y el morfismo t con flechas punteadas. Pero la gente en ciencia de la computación, en ingeniería eléctrica o en control de tránsito que utiliza gráficas todo el tiempo no las dibuja de esa manera. Las dibuja así:



Por esta razón los elementos de X se llaman flechas: se dibujan como las flechas de la gráfica, mientras que los elementos de P se dibujan como puntos (llamados vértices) y los morfismos de estructura se llaman, de manera sugerente, “salida” y “llegada”.

En el segundo dibujo se puede ver inmediatamente que para ir de w a x tenemos que ir primero de w a y y luego de y a x. Por otro lado, para estudiar los morfismos entre gráficas, el primer dibujo puede ayudar. ¿Qué es un morfismo

$$\boxed{\begin{array}{c} X \\ s \downarrow\downarrow t \\ P \end{array}} \xrightarrow{\quad f \quad} \boxed{\begin{array}{c} X' \\ s' \downarrow\downarrow t' \\ P' \end{array}} \; ?$$

OMER: Manda X en X' y P en P'.

Correcto. Un morfismo en esta categoría consta de dos morfismos de conjuntos, $f_F : X \to X'$ y $f_V : P \to P'$, pero no cualesquiera dos morfismos. Deben satisfacer las ecuaciones

$$f_V \circ s = s' \circ f_F \quad \text{y} \quad f_V \circ t = t' \circ f_F$$

una ecuación por cada morfismo estructural involucrado en los objetos. Debemos decidir qué poner en la caja a la derecha

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f_F"] \arrow[d, shift right, "s"'] \arrow[d, shift left, "t"] & Y \arrow[d, shift right, "\underline{s}"'] \arrow[d, shift left, "\underline{t}"] \\ P \arrow[r, "f_V"] & Q \end{tikzcd}$$

de tal manera que haya precisamente un morfismo de gráficas de cualquier gráfica a la que está en la caja. ¿Alguien tiene alguna idea?

CHAD: Y y Q con los mismos elementos que X y P.

No. Y y Q se fijarán de una vez por todas, no pueden depender de lo que sean X y P.

CHAD: Pon Y y Q con un miembro cada uno.

Ésa es una buena idea. Sean $Y = \boxed{a}$ y $Q = \boxed{p}$. ¿Qué deben ser los morfismos $\underline{s}$ y $\underline{t}$?

DANILO: Hay solamente una posibilidad.

Sí, hay solamente un morfismo de $\boxed{a}$ en $\boxed{p}$. ¿La gráfica $\boxed{p \bullet\!\circlearrowleft a}$, con solamente una flecha y solamente un vértice, es un objeto terminal? Debemos verificar que desde cualquier gráfica haya precisamente un morfismo de gráficas a ésta. Pero sin importar quién sea X, hay solamente una elección posible de $f_F{:}X \to \boxed{a}$ y hay solamente una elección posible para el morfismo $f_V{:}P \to \boxed{p}$. La pregunta entonces es si estos morfismos satisfacen las ecuaciones que dicen que estos morfismos respetan salida y llegada. Ahora bien, la primera ecuación ($f_V \circ s = \underline{s} \circ f_F$) involucra dos morfismos que van de X en $\boxed{p}$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f_F"] \arrow[d, "s"'] & \boxed{a} \arrow[d, "\underline{s}"] \\ P \arrow[r, "f_V"'] & \boxed{p} \end{tikzcd}$$

¿Son iguales estos morfismos?

CHAD: Deben serlo porque hay solamente un morfismo de X en $\boxed{p}$.

¡Correcto! Y la otra ecuación (la que tiene a t en lugar de s) se satisface por la misma razón. Así es que esta gráfica $\boxed{p \bullet\!\circlearrowleft a}$ es el objeto terminal en la categoría de gráficas.

Podría uno haber pensado que el objeto terminal es simplemente un vértice sin flechas. Esto es, en las dos maneras de dibujar a las gráficas,

pero no funciona.

DANILO: En el caso de un vértice sin flechas no habrá morfismos a él.

Correcto. Siempre y cuando la gráfica en el dominio tenga una flecha no habrá morfismos a esta gráfica debido a que f_F tendría por codominio al conjunto vacío. Esto muestra que esta gráfica con un vértice y sin flechas no funciona como gráfica terminal. Hay otra demostración basada en el siguiente teorema general:

Teorema: *Supongamos que $\mathcal{C}$ es cualquier categoría y que ambos T_1 y T_2 son objetos terminales en $\mathcal{C}$. Entonces T_1 y T_2 son isomorfos, esto es, existen morfismos $f{:}T_1 \to T_2$, $g{:}T_2 \to T_1$ tales que $g \circ f$ es la identidad de T_1 y $f \circ g$ es la identidad de T_2.*

Tratemos de hacer la demostración.

> **Demostración:** Para demostrar que T_1 y T_2 son isomorfos necesitamos, antes que nada, un morfismo $T_1 \to T_2$.

¿Cómo podemos obtener un morfismo así?

DANILO: Hay solamente un morfismo de un objeto terminal a otro.

¿La observación de Danilo usa el hecho de que T_1 es terminal o el hecho de que T_2 es terminal?

OMER: T_2.

Bien. Entonces la demostración continúa así:

> Como T_2 es terminal existe un morfismo $f{:}T_1 \to T_2$. Necesitamos un morfismo $g{:}T_2 \to T_1$. Otra vez hay uno porque T_1 es terminal. Pero esto no demuestra aún que T_1 sea isomorfo a T_2. Debe demostrarse que estos dos morfismos son mutuamente inversos.

¿Es cierto que el morfismo compuesto $gf{:}T_1 \to T_1$ es igual a 1_{T_1}?

KATIE: Sí, porque hay solamente un morfismo de T_1 en T_1.

Correcto.

> Como T_1 es terminal hay solamente un morfismo de T_1 en T_1. Por lo tanto $g \circ f = 1_{T_1}$.

Dejo como ejercicio la demostración de que la otra composición es igual al morfismo identidad correspondiente 1_{T_2}, con lo cual la demostración del teorema estará completa.

Noten que en la demostración usamos separadamente los dos aspectos de la propiedad que define al objeto terminal, a saber, que para cualquier objeto X:

(1) hay al menos un morfismo $X \to T$, y
(2) no hay dos morfismos diferentes $X \to T$.

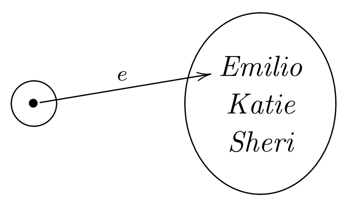
La afirmación (1) se utiliza para obtener morfismos $T_1 \rightleftarrows T_2$ y (2) se utiliza para demostrar que son mutuamente inversos.

Sesión 20

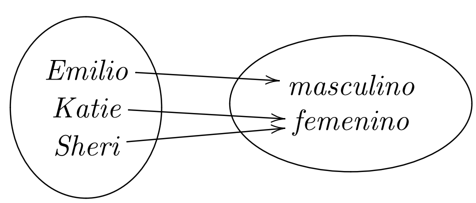
Puntos de un objeto

Todo lo que se puede decir acerca de conjuntos puede expresarse en términos de morfismos y sus composiciones. Como ya lo hemos destacado antes, esto incluye todo acerca de "elementos" de conjuntos. Vamos a extender este punto de vista a categorías distintas de la categoría de conjuntos abstractos utilizando lo que llamamos "figuras". Para especificar el elemento *Emilio* del conjunto:

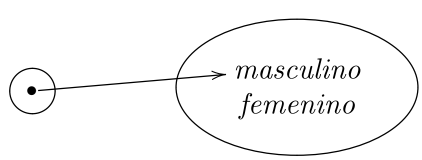
usamos el siguiente morfismo e desde el objeto terminal **1** al conjunto dado:



Todo lo que queramos decir sobre *Emilio* como elemento de este conjunto lo podemos expresar en términos de este morfismo. Por ejemplo, para evaluar el morfismo género



en el elemento *Emilio*, simplemente componemos los morfismos para obtener



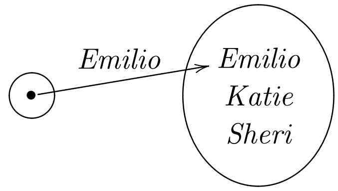
lo que muestra que

$$g \circ e = m$$

Podemos llamar al morfismo e por el mismo nombre que tiene el elemento correspondiente y decir que el elemento *Emilio* del conjunto

$$\{\textit{Emilio, Katie, Sheri}\}$$

es simplemente el morfismo



con lo que podemos escribir

$$g \circ \textit{Emilio} = \textit{masculino}$$

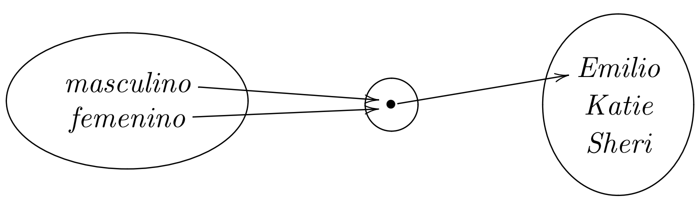
Entonces "evaluación es composición". No necesitamos recordar dos reglas diferentes, la ley asociativa y la regla para la composición de morfismos. ¡Son la misma cosa!

ALICIA: En el conjunto del primer ejemplo, ¿hay también un morfismo para el elemento "*Katie*" y para todo elemento del conjunto?

Sí. Cada elemento es un morfismo desde el objeto terminal de tal manera que en la ecuación $(g \circ f) \circ x = g \circ (f \circ x)$ el morfismo x puede ser cualquier elemento.

OMER: ¿Es siempre el último morfismo el que representa un elemento?

Ése es el caso que se presenta más a menudo, pero tú puedes componer morfismos en cualquier orden siempre y cuando el dominio y el codominio sean iguales. Por ejemplo, puedes componer los siguientes morfismos



y obtener un morfismo constante.

OMER: ¿Qué es exactamente el conjunto con un elemento?

Es cualquier objeto *terminal*. Tú puedes pensar en él como el conjunto $\boxed{\textit{Omer}}$, cuando te estás refiriendo a un elemento de un conjunto X el elemento del que estás hablando es un morfismo $\boxed{\textit{Omer}} \to X$, que es "estás apuntando al elemento".

OMER: Pero el conjunto con un solo elemento tiene también un elemento, si todo elemento es un morfismo ¿cuál es el morfismo detrás del elemento del conjunto con un solo elemento?

Es una muy buena pregunta. La respuesta es: el morfismo identidad del conjunto terminal. *Comenzamos* con la idea de conjunto terminal, que no requiere la idea de elemento sino solamente la idea de morfismo. El teorema básico que hace que todo esto funcione es:

En cualquier categoría $\mathcal{C}$, cualesquiera dos objetos terminales son isomorfos,

el cual demostramos en la sesión 19. En la categoría de conjuntos este resultado parece obvio ya que los conjuntos terminales son conjuntos con un solo elemento. Sin embargo, en otras categorías no son tan simples y el resultado no es tan obvio. Por ejemplo, en la categoría $\mathcal{S}^{\circlearrowleft}$ de endomorfismos de conjuntos o sistemas dinámicos, el endomorfismo terminal era el endomorfismo $T = \boxed{\bullet\!\circlearrowleft}$ (esto es, $\boxed{p\,\bullet} \xrightarrow{1} \boxed{\bullet\, p}$), mientras que en la categoría de gráficas irreflexivas nuestra gráfica terminal era la gráfica con un vértice y una flecha, $T = \boxed{p\,\bullet\!\circlearrowleft^{a}}$.

CHAD: ¿Qué es T?

T es cualquier objeto terminal, esto es, un objeto en la categoría tal que para cada objeto X en la misma categoría hay exactamente un morfismo en la categoría de X a T.

CHAD: ¿Entonces T es el otro objeto?

Bueno, yo no lo diría de esa manera. El objeto que estamos describiendo es T, pero lo describimos diciendo cómo se relaciona con todo otro objeto de nuestro "universo", nuestra categoría. La definición de objeto terminal usa una "propiedad universal". Aquí hay un ejemplo: decir que Chad es "admirado universalmente" quiere decir:

Para toda persona X en el mundo, X admira a Chad.

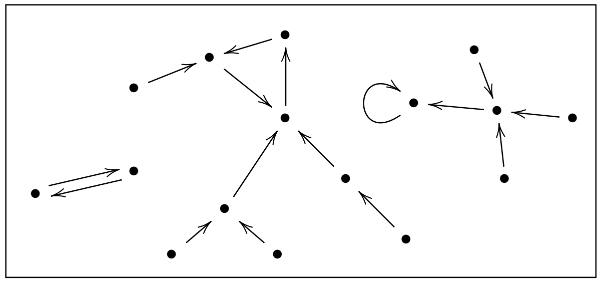
FÁTIMA: Si quieres traducir el objeto terminal a la aritmética tendría que ser el número 1.

Éste es un muy buen punto al que regresaremos más tarde porque es un notable teorema que el objeto terminal se comporta como el número 1 para la multiplicación. Entonces nos tienes que prometer que volverás a mencionar este punto cuando hablemos de multiplicación.

Si en una categoría particular hemos determinado cuál es el objeto terminal, entonces podremos determinar cuáles son los puntos de cualquier objeto. Supongamos que T es un objeto terminal en la categoría $\mathcal{C}$, entonces cualquier $\mathcal{C}$-morfismo de T en otro objeto X de esta categoría es llamado un **punto** de X.

Definición: *Un **punto** de X es un morfismo $T \to X$ donde T es el objeto terminal.*

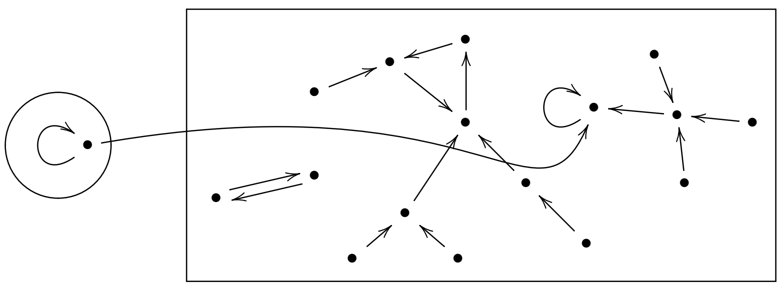
Esto quiere decir que, en la categoría de conjuntos, los puntos de un conjunto son precisamente los elementos de ese conjunto, ya que hemos encontrado que los elementos de un conjunto X son los morfismos desde un conjunto terminal (singulete) a X. Nuestra siguiente tarea es encontrar qué son los puntos de los objetos en otras categorías. El primer ejemplo es la categoría $\mathcal{S}^{\circlearrowleft}$ de endomorfismos de conjuntos. Uno puede pensar que los puntos de un endomorfismo son los elementos del conjunto subyacente pero no es correcto. Por ejemplo, consideremos el siguiente endomorfismo:

$X^{\circlearrowright\alpha} =$ 

¿Puede alguien encontrar un $\mathcal{S}^{\circlearrowright}$-morfismo del objeto terminal $T = \boxed{\bullet\circlearrowright}$ a esta $X^{\circlearrowright\alpha}$?

FÁTIMA: Envía este elemento al que tiene el lazo en X.

¡Correcto! Ése es el *único* morfismo $T \longrightarrow X^{\circlearrowright\alpha}$ en esta categoría. Este objeto $X^{\circlearrowright\alpha}$, así de complicado como se ve, tiene solamente un punto y el punto es el morfismo:



Debe ser obvio, ya hemos visto que en esta categoría todo morfismo manda un punto fijo a un punto fijo. La conclusión es que en esta categoría, "punto" quiere decir lo que hemos estado llamando "punto fijo".

DANILO: Pero si éste tiene un punto, ¿cómo describimos a los otros estados del sistema dinámico?

¡Buena pregunta! Sí, parece desafortunado que los morfismos desde el objeto terminal sólo describan los puntos fijos, no como en conjuntos donde producen todos los elementos. Sin embargo, en esta categoría tenemos otros objetos que nos dan los otros estados. Recordemos el conjunto de los números naturales con el endomorfismo sucesor $\mathbb{N}^{\circlearrowright(\ )+1}$, morfismos desde los cuales nos dan todos los estados, como vimos en la sesión 15.

DANILO: Esto solamente te dirá el número de estados.

Correcto. Otro objeto tendrá que ser usado para encontrar el número de 2-ciclos, otro más para los 3-ciclos y así sucesivamente.

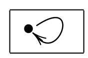
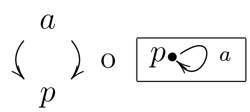
OMER: Puedes considerar morfismos de regreso a $\mathbb{N}^{\circlearrowright(\ )+1}$.

Sí, puedes preguntar sobre los morfismos de cualquier objeto en cualquier objeto.

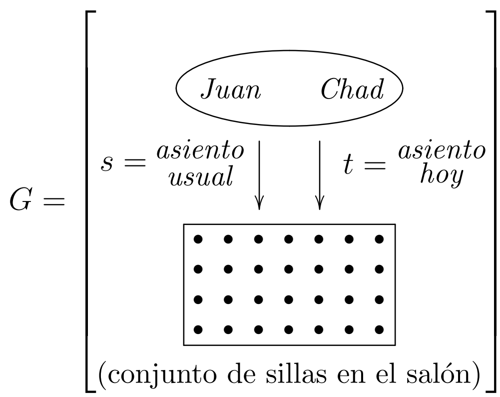
OMER: Pero el lazo no puede enviarse a ningún lugar en $\mathbb{N}^{\circlearrowright(\ )+1}$.

Correcto. Y eso demuestra que *no* hay puntos en $\mathbb{N}^{\circlearrowleft\,(\;)+1}$.

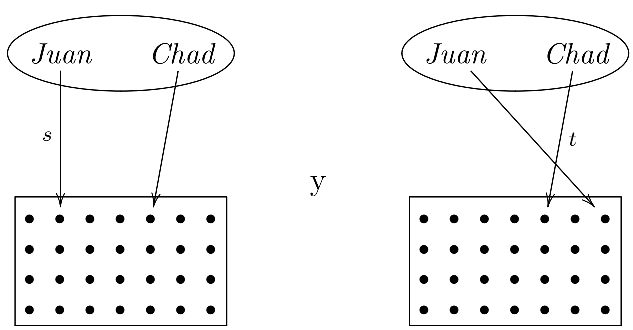
Hagamos una pequeña tabla para recolectar nuestra información sobre objetos terminales.

Categoría	Objeto terminal	"Puntos de X" quiere decir ...
$\mathcal{C}$	T	morfismo $T \to X$
$\mathcal{S}$	$\boxed{\bullet}$	elemento de X
$\mathcal{S}^{\circlearrowleft}$ endomorfismos de conjuntos		punto fijo o estado de equilibrio
$\mathcal{S}^{\downdownarrows}$ gráficas irreflexivas		?

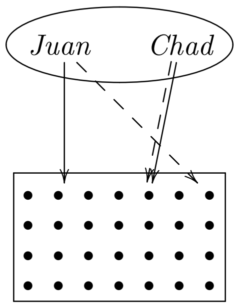
Ahora veamos un ejemplo en la categoría de gráficas irreflexivas. Consideremos la gráfica:

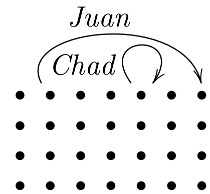


Los diagramas internos de estos dos morfismos son los siguientes:



que pueden colocarse en el mismo dibujo como:

$G =$ 

o bien como $G =$ 

En el último dibujo se puede ver claramente que Chad conservó su sitio mientras que Juan se movió hacia la derecha de su asiento usual pero ambos dibujos tienen la misma información.

¿Cuántos morfismos hay de la gráfica terminal a esta gráfica G o, en nuestra nueva terminología, cuántos puntos tiene esta gráfica G?

OMER: Hay solamente uno, ¿no es cierto?

Veamos. Debemos recordar cuál es el objeto terminal de esta categoría. Debe estar formado por dos conjuntos y dos morfismos así que debemos decidir qué poner en el dibujo

$$T = \begin{tikzcd} \boxed{?} \arrow[d, shift right] \arrow[d, shift left] \\ \boxed{?} \end{tikzcd}$$

para obtener la gráfica terminal.

CHAD: Pon un objeto en cada conjunto.

¿Y los morfismos? ¿Qué morfismos debemos poner allí, Miguel?

MIGUEL: Ambos son el que manda al elemento de arriba en el elemento del conjunto de abajo.

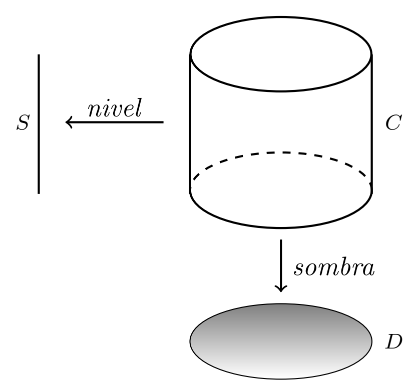
Así es; además, Chad tiene razón: la gráfica T es terminal y Omer también tiene razón: G tiene solamente un punto.

Sesión 21

Productos en categorías

Queremos hacer precisa la noción de producto de objetos en una categoría. Para esto será útil recordar la idea de Galileo que dice que para estudiar el movimiento de un objeto en el espacio basta con estudiar dos movimientos más simples, el movimiento de su sombra en un plano horizontal y el movimiento de su nivel en una línea vertical. La posibilidad de recombinar estos dos movimientos para reconstruir el movimiento original en el espacio es la base para la noción de producto. Estamos ya en posición de hacer precisas todas estas ideas.

Multiplicando el disco por el segmento obtenemos su producto, el cilindro. Los ingredientes básicos que revelan al cilindro como dicho producto son los dos morfismos "sombra" y "nivel":



Cuando multiplicamos dos objetos no solamente obtenemos un tercero sino que también obtenemos dos morfismos cuyo dominio es el producto, un morfismo a cada uno de los dos objetos dados. Esto sugiere que la definición de producto en una categoría debería comenzar de esta manera:

Un *producto* de A y B es

(1) un objeto P y

(2) un par de morfismos $P \xrightarrow{p_1} A$, $P \xrightarrow{p_2} B$.

Pero no es el fin del asunto. Necesitamos formular el principio de que un movimiento en P está determinado de manera única por movimientos en A y B, además hay que hacerlo de una manera aplicable en cualquier categoría. La idea es remplazar el intervalo de tiempo por *cada* objeto. Aquí está la definición oficial.

Definición: *Sean A y B objetos en una categoría $\mathcal{C}$. Un* ***producto*** *de A y B (en $\mathcal{C}$) es*

(1) *un objeto P en $\mathcal{C}$ y*

(2) *un par de morfismos $P \xrightarrow{p_1} A$, $P \xrightarrow{p_2} B$ en $\mathcal{C}$ que satisfacen:*

para cada objeto T y cada par de morfismos $T \xrightarrow{q_1} A$, $T \xrightarrow{q_2} B$ hay exactamente un morfismo $T \xrightarrow{q} P$ para el cual $q_1 = p_1 \circ q$ y $q_2 = p_2 \circ q$.

En dibujos:

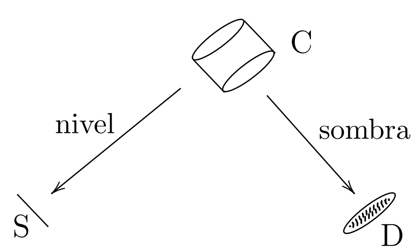
$$\begin{tikzcd} & A \\ P \arrow[ur, "p_1"] \arrow[dr, "p_2"'] & \\ & B \end{tikzcd} \quad \text{satisface: para cada} \quad \begin{tikzcd} & A \\ T \arrow[ur, "q_1"] \arrow[dr, "q_2"'] & \\ & B \end{tikzcd}$$

hay exactamente una $T \xrightarrow{q} P$ para la cual

$$\begin{tikzcd} & & A \\ T \arrow[r, "q"] \arrow[urr, bend left, "q_1"] \arrow[drr, bend right, "q_2"'] & P \arrow[ur, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ & & B \end{tikzcd}$$

conmuta.

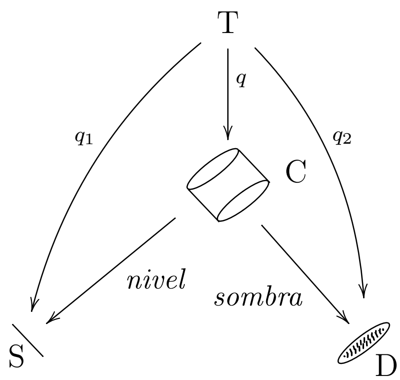
Ilustremos con nuestro ejemplo de un cilindro sólido C como el producto de un segmento S y un disco D.



La propiedad especial que este par de morfismos satisface es que para *todo* objeto T (en particular para T un intervalo de tiempo) y para cualquier par de morfismos:

$$\begin{tikzcd} & T \arrow[dl, "q_1"'] \arrow[dr, "q_2"] & \\ S & & D \end{tikzcd}$$

hay exactamente un morfismo $T \xrightarrow{q} C$ para el cual el siguiente diagrama conmuta:

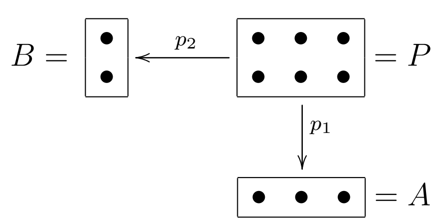


La única manera en que hemos extendido la idea de Galileo es que hemos decidido que el principio que él aplicó a un intervalo de tiempo debe aplicarse a *todo* objeto en nuestra categoría.

Nota sobre terminología: Como ustedes saben, cuando se combinan números mediante la suma (por ejemplo $2+3+7=12$) cada número (el 2, el 3 y el 7) se llama *sumando* y el resultado (el 12) se llama *suma*. Pero cuando se combinan números mediante la multiplicación (como en $2 \times 3 \times 7=42$) cada número se llama *factor* y el resultado se llama *producto*. Conservamos esta terminología de tal forma que los objetos que están siendo multiplicados se llaman factores y el objeto resultante se llama su producto.

La definición de multiplicación de objetos parece larga en primera instancia, sin embargo, ya que la entiendan, verán que es muy natural. Sólo recuerden que el producto no es solamente un objeto sino un objeto con dos morfismos.

En la categoría de conjuntos abstractos y morfismos arbitrarios ya tienen un idea clara del producto P de dos conjuntos A y B y los dos morfismos proyección:



Hemos organizado aquí los dos morfismos proyección como "clasificadores por tipo" de tal manera que los puntos se proyectan horizontalmente o verticalmente.

¿Realmente tiene la propiedad universal requerida por nuestra definición de producto? Dado un conjunto T y un par de morfismos $T \xrightarrow{q_1} A$, $T \xrightarrow{q_2} B$, ¿cuál es el único morfismo $T \xrightarrow{q} P$, para el cual $q_1 = p_1 \circ q$ y $q_2 = p_2 \circ q$? Piénsenlo ustedes solos hasta que estén convencidos de que dados q_1 y q_2 hay exactamente una q que satisface estas dos ecuaciones.

Cuando eran jóvenes es posible que les hayan dicho que la idea básica de la multiplicacion es la de suma iterada: 3×4 quiere decir $4+4+4$ o quizá les dijeron $3+3+3+3$. Esta interpretación de multiplicación no llega al corazón del asunto. Esa versión depende de la propiedad especial de la categoría de conjuntos finitos que dice que todo objeto es una suma de unos (¡y de la ley distributiva!). La definición de multiplicación que hemos dado se aplica a cualquier categoría mientras que sigue dando el resultado usual para conjuntos finitos, es decir, tenemos la relación entre multiplicación de objetos y multiplicación de números:

$$\#(A \underset{\substack{\uparrow \\ \text{multiplicación de objetos}}}{\times} B) \qquad = \qquad \#A \underset{\substack{\uparrow \\ \text{multiplicación de números}}}{\times} \#B$$

De manera sorprendente, no solamente tal conjunto P con 6 elementos y los dos morfismos indicados satisfacen la definición de producto de A y B arriba sino que (esencialmente) ¡ninguna otra cosa lo hace! El siguiente teorema de *unicidad* es cierto en cualquier categoría así que puede ser también aplicado a gráficas, sistemas dinámicos, etcétera.

Teorema: *Supongamos que* $A \xleftarrow{p_1} P \xrightarrow{p_2} B$ *y* $A \xleftarrow{q_1} Q \xrightarrow{q_2} B$ *son dos productos de* A *y* B*. Debido a que* $A \xleftarrow{p_1} P \xrightarrow{p_2} B$ *es un producto, si consideramos a* Q *como un "objeto de prueba", obtenemos un morfismo* $Q \to P$*; debido a que* $A \xleftarrow{q_1} Q \xrightarrow{q_2} B$ *es un producto obtenemos asimismo un morfismo* $P \to Q$*. Estos dos morfismos son necesariamente inversos el uno del otro y, por consiguiente, estos dos objetos* P *y* Q *son isomorfos.*

Dejo la demostración para después pero he enunciado el teorema de manera que sugiera la mayor parte de la demostración. Una consecuencia de este teorema es que si yo elijo un producto de dos objetos y ustedes escogen otro producto de los mismos objetos, entonces obtenemos de hecho un isomorfismo preferido de mi objeto al suyo. Por tal motivo, utilizaremos normalmente la frase "*el* producto de A y B", de la misma manera que usamos "*el* objeto terminal", cuando hay uno. (En algunas categorías algunos pares de objetos no tienen producto.)

Veamos otro ejemplo. Consideremos la categoría $\mathcal{S}^{\circlearrowright}$ de conjuntos con endomorfismo, en donde los morfismos de $X^{\circlearrowright\alpha}$ a $Y^{\circlearrowright\beta}$ son los morfismos de conjuntos $f{:}X \longrightarrow Y$ tales que $f \circ \alpha = \beta \circ f$ (y por eso hay normalmente menos $\mathcal{S}^{\circlearrowright}$-morfismos de $X^{\circlearrowright\alpha}$ a $Y^{\circlearrowright\beta}$ que morfismos de conjuntos de X a Y).

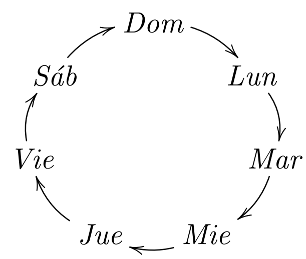
Tomen, por ejemplo, el conjunto *Días* de todos los días que han sido y que serán —imaginamos este conjunto como un conjunto infinito— y consideremos también el conjunto:

$$\textit{Días de la semana} = \{\textit{Dom, Lun, Mar, Mie, Jue, Vie, Sáb}\}.$$

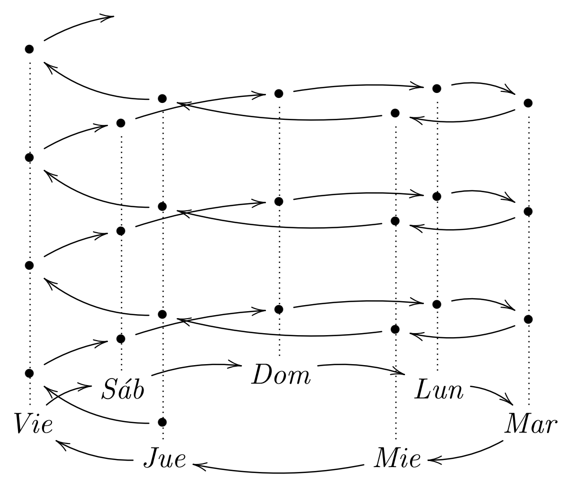
Estos dos conjuntos tienen endomorfismos obvios que pueden llamarse, en ambos casos, "mañana" y pueden ser dibujados así:

Días: $\boxed{\cdots \to \bullet \to \bullet \to \bullet \to \bullet \to \bullet \to \cdots}$

Días de la semana:



Además tenemos un morfismo obvio *Días* $\to$ *Días de la semana* que le asocia a cada día el correspondiente día de la semana. Este morfismo puede visualizarse de manera más clara en un dibujo en el que ponemos todos los días en una hélice infinita sobre un círculo así:

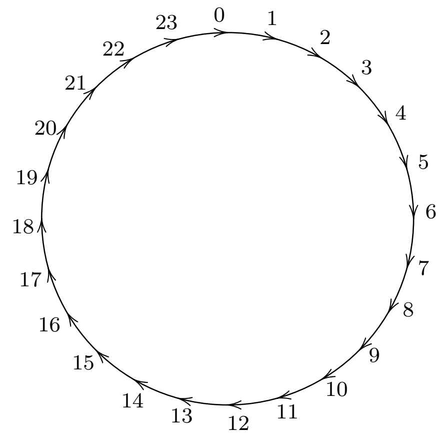


Comprueben que esto es en realidad un morfismo en $\mathcal{S}^{\circlearrowright}$.

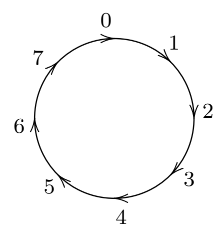
Ahora tomo otro ejemplo. Imaginen una fábrica en la que los obreros trabajan turnos como sigue:

Turno nocturno:	Medianoche a 8 a.m.,
Turno matutino:	8 a.m. a 4 p.m.,
Turno vespertino:	4 p.m. a medianoche.

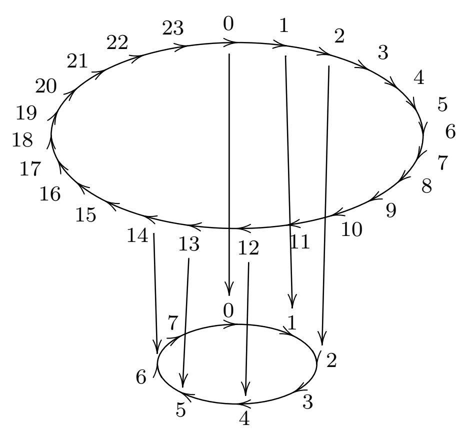
Entonces podemos pensar en otros dos conjuntos con endomorfismos. Uno es el conjunto de horas del día con el endomorfismo obvio "hora siguiente":



Puede llamarse el "reloj de día". El otro objeto involucra el conjunto de ocho horas que son las "horas laborables" en un turno, que podemos etiquetar $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Hay aquí también un endomorfismo obvio que podemos dibujar como:



y que puede llamarse "reloj de turno". Tenemos de nueva cuenta un morfismo de un conjunto al otro que asocia, a cada hora del día, la hora del turno en curso. Este morfismo es más difícil de visualizar pero debe ser obvio que es también un morfismo en $\mathcal{S}^{\circlearrowright}$. Parte de su diagrama interno es:



Ejercicio 1
¿Existe un morfismo en $\mathcal{S}^{\circlearrowright}$ del "reloj de día" a algún $X^{\circlearrowright\alpha}$ que junto con el morfismo de arriba haga al "reloj de día" el producto de $X^{\circlearrowright\alpha}$ y el "reloj de turno"?

Naturalmente, si ignoramos la estructura adicional, pueden ver que el conjunto de horas en el día es el producto del conjunto de horas en un turno y el conjunto de turnos. Esto se logra mediante los morfismos proyección obvios:

$$
\begin{tikzcd}
\text{Turnos} \arrow[d, equal] & & \text{Horas de día} \arrow[d, equal] \\
\boxed{\begin{array}{c} Nocturno \\ Matutino \\ Vespertino \end{array}} & & \boxed{\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 \end{array}} \arrow[ll] \arrow[d] \\
& & \boxed{\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array}} \arrow[d, equal] \\
& & \text{Horas de turno}
\end{tikzcd}
$$

Un objeto $X^{\circlearrowleft\alpha}$ en una solución al ejercicio 1 no podría tener a X como el conjunto de turnos con el morfismo proyección de arriba, lo cual se debe a que ningún endomorfismo en este conjunto admite este morfismo proyección del *Reloj de día* como preservador de la estructura. Como 0 va a *Nocturno*, 1 va a *Nocturno* y 0 va a 1 debemos tener que *Nocturno* va a *Nocturno*. Asimismo, 7 va a Nocturno pero 8 va a *Matutino* y 7 a 8, por lo que debemos tener que *Nocturno* va a *Matutino*, lo cual contradice que *Nocturno* va a *Nocturno*. Esto nos dice que debemos buscar en otro lado si tenemos la esperanza de encontrar un objeto $X^{\circlearrowleft\alpha}$ en $\mathcal{S}^{\circlearrowleft}$ y un morfismo *Reloj de día*$\longrightarrow X^{\circlearrowleft\alpha}$ tal que el diagrama siguiente sea un producto en la categoría $\mathcal{S}^{\circlearrowleft}$.

$$
\begin{tikzcd}
X^{\circlearrowleft\alpha} & \textit{Reloj de día} \arrow[l] \arrow[d] \\
& \textit{Reloj de turno}
\end{tikzcd}
$$

No les voy a decir si es que hay un tal diagrama de producto pero investigaremos los productos en $\mathcal{S}^{\circlearrowleft}$ para ayudarlos a encontrar la respuesta. ¿Cómo se ven los productos en esta categoría? Supongamos que $A^{\circlearrowleft\alpha}$ y $B^{\circlearrowleft\beta}$ son dos objetos en esta categoría. De acuerdo con la definición, un producto de estos dos objetos es otro objeto $P^{\circlearrowleft\gamma}$ y dos $\mathcal{S}^{\circlearrowleft}$-morfismos $A^{\circlearrowleft\alpha} \xleftarrow{p_1} P^{\circlearrowleft\gamma} \xrightarrow{p_2} B^{\circlearrowleft\beta}$ (esto implica $p_1\gamma = \alpha p_1$ y $p_2\gamma = \beta p_2$) tales que para cualquier otro objeto $T^{\circlearrowleft\tau}$ y morfismos

$$A^{\circlearrowleft\alpha} \xleftarrow{q_1} T^{\circlearrowleft\tau} \xrightarrow{q_2} B^{\circlearrowleft\beta}$$

en $\mathcal{S}^{\circlearrowleft}$, existe exactamente un morfismo $T^{\circlearrowleft\tau} \xrightarrow{q} P^{\circlearrowleft\gamma}$ que completa el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & T^{\circlearrowleft\tau} \arrow[dl, "q_1"'] \arrow[d, "q"] \arrow[dr, "q_2"] & \\
A^{\circlearrowleft\alpha} & P^{\circlearrowleft\gamma} \arrow[l, "p_1"'] \arrow[r, "p_2"] & B^{\circlearrowleft\beta}
\end{tikzcd}$$

esto es, tal que $p_1 q = q_1$ y $p_2 q = q_2$.

Parece un poco largo pero es precisamente lo que necesitamos para calcular lo que debe ser $P^{\circlearrowleft\gamma}$. Recordarán que los elementos de P corresponden precisamente a los $\mathcal{S}^{\circlearrowleft}$-morfismos $\mathbb{N}^{\circlearrowleft(\;)+1} \to P^{\circlearrowleft\gamma}$, lo que nos dice que son los pares de $\mathcal{S}^{\circlearrowleft}$-morfismos

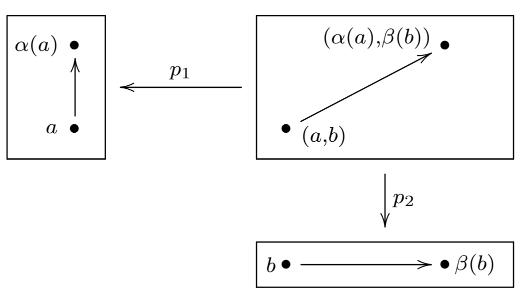
$$A^{\circlearrowleft\alpha} \longleftarrow \mathbb{N}^{\circlearrowleft(\;)+1} \longrightarrow B^{\circlearrowleft\beta}$$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{N}^{\circlearrowleft(\;)+1} \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
A^{\circlearrowleft\alpha} & P^{\circlearrowleft\gamma} \arrow[l, "p_1"'] \arrow[r, "p_2"] & B^{\circlearrowleft\beta}
\end{tikzcd}$$

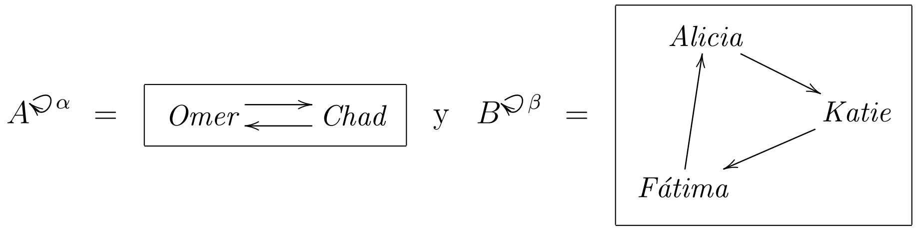
lo cual, a su vez, corresponde a pares de elementos (a, b) donde a es de A y b es de B. Por lo tanto, el conjunto P debe de ser el producto (en la categoría de conjuntos) de A y B. Necesitamos ahora determinar qué debe ser el endomorfismo γ en P, pero esto no es tan difícil. La solución se autosugiere: dada la pareja (a, b) podemos aplicarle α a a y β a b, con lo que podemos escribir:

$$\gamma(a, b) = (\alpha(a), \beta(b))$$

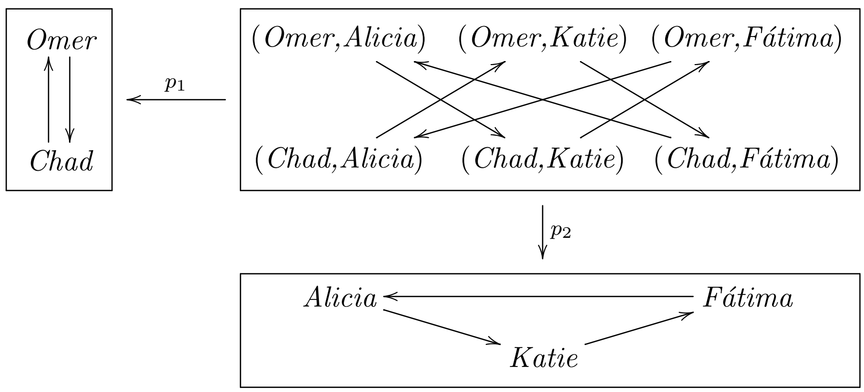
De hecho, este endomorfismo funciona muy bien porque hace que las "proyecciones de conjuntos" usuales $A \xleftarrow{p_1} P \xrightarrow{p_2} B$ preserven la estructura de endomorfismo, así que tenemos los ingredientes de un producto en $\mathcal{S}^{\circlearrowleft}$ (esto es $A^{\circlearrowleft\alpha} \xleftarrow{p_1} P^{\circlearrowleft\gamma} \xrightarrow{p_2} B^{\circlearrowleft\beta}$) y no es difícil demostrar que es, de hecho, el producto. La idea detrás de este producto es que para cada par de flechas en los endomorfismos α y β obtenemos una flecha en el endomorfismo "producto" γ. Podemos visualizarlo de la siguiente manera, donde sólo hemos dibujado parte del diagrama interno:



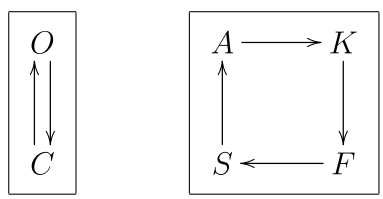
Para obtener algo de práctica en entender productos en $\mathcal{S}^{\circlearrowright}$ es bueno hacerlo con un ejemplo. Tomemos los endomorfismos:



Entonces su producto es:



Esto muestra que al multiplicar un 2-ciclo por un 3-ciclo obtenemos un 6-ciclo. Pero no se dejen engañar por esta aparente simplicidad. Traten de multiplicar estos ciclos:



No obtendrán, en absoluto, un 8-ciclo. En su lugar, lo que obtienen es ¡dos 4-ciclos!

Ejercicio 2
¿Cuál es el producto $C_m \times C_n$ de un m-ciclo y un n-ciclo? Por ejemplo, ¿cuál es el producto $C_{12} \times C_8$?
Sugerencia: Comiencen investigando productos de ciclos de tamaños más pequeños.

Ejercicio 3
Regrese al ejercicio 3 de la sesión 12. Demuestre que el objeto que fue llamado $\mathbf{G} \times \mathbf{C}$, cuando es provisto de los morfismos proyección adecuados, es realmente el producto en la categoría $\mathcal{S}^{\circlearrowright\circlearrowleft}$.

Sesión 22

Propiedades universales de morfismo; relaciones de incidencia

1. Una propiedad especial de la categoría de conjuntos

Queremos discutir dos ideas relacionadas:

(1) propiedades universales de morfismo y
(2) detectar la estructura de un objeto mediante figuras y relaciones de incidencia.

Un ejemplo de (1) es la propiedad que aparece en la definición de *objeto terminal*: decir que $\mathbf{1}$ es terminal quiere decir que para *cualquier* objeto X hay exactamente un morfismo $X \longrightarrow \mathbf{1}$. Los "para cada", "para cualquier" y "para todo" es lo que nos hace llamarla una propiedad *universal*: el objeto $\mathbf{1}$ está descrito mediante su relación con todo objeto en el "universo", esto es, la categoría bajo consideración.

La idea de *figura* surge cuando, durante la investigación de una categoría $\mathcal{C}$, encontramos una clase pequeña $\mathcal{A}$ de objetos de $\mathcal{C}$ a la cual usamos para examinar objetos más complicados X mediante morfismos $A \xrightarrow{x} X$ desde objetos de $\mathcal{A}$. Llamamos al morfismo x una *figura de forma A en X* (o, a veces, *figura singular de forma A en X*, si queremos destacar que el morfismo x puede colapsar en cierta medida a A, de manera que el dibujo de A en X puede amalgamar cosas que eran distintas en A). Esta manera de usar morfismos está reflejada muy bien en la palabra alemana para morfismo, *Abbildung*, que quiere decir algo como un dibujo de A en X.

Si la categoría $\mathcal{C}$ tiene objeto terminal, podemos considerar el objeto terminal como una forma básica para figuras. De hecho ya le hemos dado a las figuras de esa forma un nombre especial: una figura de forma $\mathbf{1}$ en X, $\mathbf{1} \longrightarrow X$, se llama un *punto* de X. En conjuntos, los puntos de X son, en cierto sentido, todo lo que hay acerca de X, de manera que utilizamos a menudo las palabras "punto" y "elemento" de manera intercambiable mientras que, en sistemas dinámicos, los puntos son los estados fijos y, en gráficas, son los lazos.

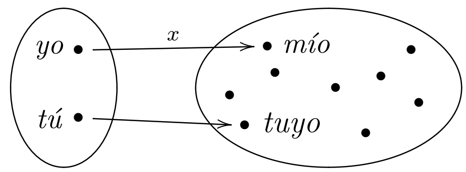
La categoría de conjuntos tiene una propiedad especial, debido a que, *grosso modo,* los objetos no tienen estructura:

Si dos morfismos coinciden en los puntos, son el mismo morfismo.

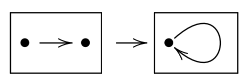
Esto es, supongamos que $X \xrightarrow{f} Y$ y $X \xrightarrow{g} Y$. Si $fx = gx$ para todo punto $\mathbf{1} \xrightarrow{x} X$ podemos concluir que $f = g$. También puede ser expresado de la manera contrapositiva: si $f \neq g$ entonces hay al menos un punto $\mathbf{1} \xrightarrow{x} X$ para el cual $fx \neq gx$.

Esta propiedad especial de la categoría de conjuntos no es cierta para $\mathcal{S}^{\circlearrowright}$ ni para $\mathcal{S}^{\downdownarrows}$. Por ejemplo, en $\mathcal{S}^{\circlearrowright}$ el 2-ciclo C_2 no tiene puntos en absoluto ya que "puntos" son puntos fijos; cualesquiera dos morfismos desde C_2 a cualquier sistema coinciden en todos los puntos (ya que no hay puntos en los que no estar de acuerdo) aun cuando pueden ser morfismos diferentes.

Hay, por supuesto, figuras de otras formas. En la categoría de conjuntos una figura de forma $\mathbf{2}$ en X, donde "$\mathbf{2}$" indica un conjunto con dos elementos como $\{$*yo, tú*$\}$, es simplemente un par de puntos de X, porque es un morfismo $\mathbf{2} \xrightarrow{x} X$. Por ejemplo:



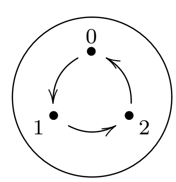
Los dos puntos coincidirán si x es un morfismo constante, así que un morfismo x para el cual *mío*$=$*tuyo* está también incluido como una figura de forma $\mathbf{2}$. Se llama *singular* porque el morfismo "colapsa" la forma $\mathbf{2}$. La (única) figura de forma F en $\mathbf{1}$ es un ejemplo de una figura singular en gráficas:



La propiedad especial de la categoría de conjuntos puede verse como la afirmación de que una clase pequeña de formas de figuras (de hecho, la figura $\mathbf{1}$ sola) es suficiente para probar la igualdad de morfismos. ¿Es posible encontrar una clase igualmente pequeña pero suficiente para clases de formas en otras categorías?

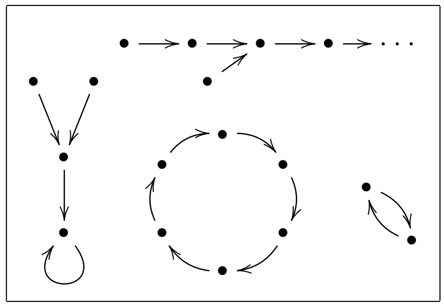
2. Una propiedad similar en la categoría de endomorfismos de conjuntos

¿Qué tal la categoría de endomorfismos $\mathcal{S}^{\circlearrowright}$? ¿Conocemos algunos ejemplos simples de objetos que puedan ser usados como tipos de figuras para investigar otros objetos? Bueno, tenemos ciclos como:

$C_3 =$ 

¿Qué es una figura de forma C_3? Imaginemos un endomorfismo:

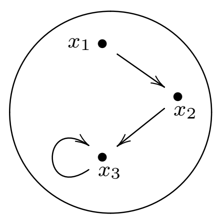
$X^{\circlearrowright\alpha} =$



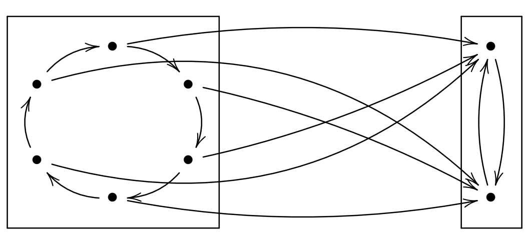
¿Qué es una figura de forma C_3 en $X^{\circlearrowright\alpha}$? Es un morfismo $C_3 \to X$. Debemos buscar primero 3-ciclos en $X^{\circlearrowright\alpha}$. En este ejemplo no hay, pero podemos enviar a C_3 a un punto fijo. Esto nos da una figura de forma C_3 en $X^{\circlearrowright\alpha}$, una figura "totalmente singular".

Si en lugar de una figura de tipo C_3 buscamos una figura de forma:

$A^{\circlearrowright\sigma} \;=$



(el endomorfismo que Katie puso en el examen 2 que satisface $\sigma^3 = \sigma^2$), entonces podemos encontrar dos figuras no singulares en $X^{\circlearrowright\alpha}$. (¿Pueden encontrar alguna singular?) Una característica de los endomorfismos C_3 y $A^{\circlearrowright\sigma}$ es que están generados por un solo elemento: x_1 en el caso de $A^{\circlearrowright\sigma}$ y cualquiera de los puntos en el caso de C_3. Por ejemplo, si quiero un morfismo de $A^{\circlearrowright\sigma}$ en $X^{\circlearrowright\alpha}$ basta con que diga a donde enviar a x_1. Las imágenes de los otros puntos están determinadas de manera única por la condición de preservar la estructura del endomorfismo. De manera similar, podemos también considerar que figuras de forma C_3 "son" elementos si primero especificamos un generador particular de C_3. La única restricción es que el punto elegido como imagen tenga las "mismas propiedades positivas" que el generador. Esto puede producir figuras singulares, por ejemplo podemos enviar C_6 a C_2 de esta manera:



Podemos utilizar este morfismo para expresar una manera particular en la cual figuras de forma C_6 en otros sistemas dinámicos pueden ser singulares: una figura

$C_6 \xrightarrow{x} X^{\circlearrowright \alpha}$ se puede factorizar a través del morfismo $C_6 \to C_2$ de arriba, de la siguiente manera:

$$\begin{tikzcd} C_6 \arrow[rr, "x"] \arrow[dr] & & X^{\circlearrowright \alpha} \\ & C_2 \arrow[ur, "\bar{x}"'] & \end{tikzcd}$$

Consideremos ahora el endomorfismo "sucesor" $\sigma = (\ ) + 1$ de los números naturales $\mathbb{N}^{\circlearrowright \sigma}$ como una forma de figura básica. ¿Qué es una figura de esta forma? Como ya vimos antes, cualquier figura de tal forma $\mathbb{N}^{\circlearrowright \sigma} \xrightarrow{x} X^{\circlearrowright \alpha}$ está completamente determinada por el elemento de X al que es enviado el número 0, sin condición alguna, así que cada elemento de X determina una tal figura. Puede decirse también que cada estado de $X^{\circlearrowright \alpha}$ genera una figura en $X^{\circlearrowright \alpha}$ bajo la acción de la dinámica o endomorfismo y que todas estas figuras son de forma $\mathbb{N}^{\circlearrowright \sigma}$, posiblemente singulares. Por ejemplo, si resulta que una figura x de forma $\mathbb{N}^{\circlearrowright \sigma}$ en $X^{\circlearrowright \alpha}$ se factoriza a través del ciclo C_n:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{N}^{\circlearrowright \sigma} \arrow[rr, "x"] \arrow[dr, two heads] & & X^{\circlearrowright \alpha} \\ & C_n \arrow[ur, "\bar{x}"'] & \end{tikzcd}$$

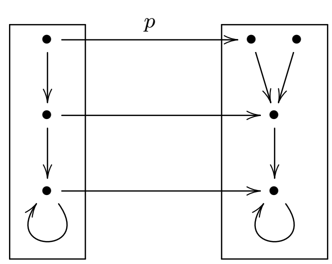
esto quiere decir que el futuro de $x(0)$ en $X^{\circlearrowright \alpha}$ "tiene la forma C_n".

FÁTIMA: ¿Qué quiere decir la flecha con punta doble?

Indica que el morfismo es un *epimorfismo*, cuya definición quiere decir que cualquier problema de factorizar un morfismo a través de un morfismo tal tiene a lo más una solución. (Para nuestro morfismo esto se sigue del hecho de que cada elemento de C_n es la imagen de un elemento de $\mathbb{N}^{\circlearrowright \sigma}$.) Cuando vemos un diagrama como éste:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, two heads, "p"] \arrow[dr, "x"'] & B \arrow[d, dashed, "\bar{x}"] \\ & C \end{tikzcd}$$

sabemos que hay a lo más un morfismo $\bar{x}$ tal que $\bar{x}p = x$. Por ejemplo, todas las retracciones tienen el derecho de ser dibujadas con punta doble. Un ejemplo de un morfismo que no tiene esta propiedad es el siguiente:

$A =$  $= B$

Algunos morfismos $A \to X$ (por ejemplo, ¡el mismo p!) pueden factorizarse a través de p de varias maneras. Por lo tanto, este p no será dibujado con una flecha de punta doble.

Regresando a los números naturales con el endomorfismo sucesor, resulta que satisface una propiedad similar a la del objeto terminal en la categoría de conjuntos:

> *Dado cualquier par de morfismos* $X^{\circlearrowright\alpha} \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y^{\circlearrowright\beta}$ *en* $\mathcal{S}^{\circlearrowright}$*, si para todas las figuras* $\mathbb{N}^{\circlearrowright\sigma} \xrightarrow{x} X^{\circlearrowright\alpha}$ *de forma* $\mathbb{N}^{\circlearrowright\sigma}$ *es cierto que* $fx = gx$*, entonces* $f = g$*.*

La única diferencia entre éste y el caso de conjuntos es que en conjuntos estábamos utilizando un objeto terminal mientras que aquí estamos utilizando en su lugar otro tipo de figura. Por supuesto que en esta categoría también tenemos un objeto terminal y las figuras de esa forma son los puntos fijos. Pero cada punto fijo $\mathbf{1} \to X^{\circlearrowright\alpha}$ está "entre" las figuras de forma $\mathbb{N}^{\circlearrowright\sigma}$ (componiendo el punto fijo con el único morfismo $\mathbb{N}^{\circlearrowright\sigma} \to \mathbf{1}$).

3. Relaciones de incidencia

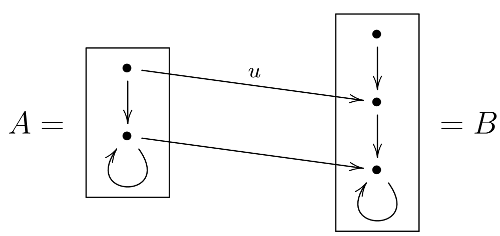
Necesitamos hablar ahora de relaciones de incidencia. Supongamos que tenemos en X una figura x de forma A y una figura y de forma B. Nos preguntamos hasta qué punto estas figuras son incidentes o hasta qué punto se superponen y cuál es la naturaleza de esta superposición. Bueno, podríamos tener un morfismo $u{:}A \to B$ que satisfaga $yu = x$.

CHAD: ¿Tendría B que ser más pequeño que A?

No. Podría ser más pequeño como en el ejemplo de arriba con $A = \mathbb{N}^{\circlearrowright\sigma}$ y $B = \mathbf{1}$, donde teníamos:

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{1} \arrow[dr, "y"] & \\ \mathbb{N}^{\circlearrowright\sigma} \arrow[ur, "u"] \arrow[rr, "x"'] & & X \end{tikzcd}$$

pero podría asimismo ser más grande como en el caso de:



Una forma en que x puede ser incidente a y es si hay un morfismo u tal que $yu = x$, esto es,

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, "y"] & \\ A \arrow[ur, dashed, "u"] \arrow[rr, "x"'] & & X \end{tikzcd}$$

pero otra posibilidad es que haya morfismos desde un objeto T a A y B

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, dashed, "u_2"] \arrow[d, dashed, "u_1"'] & B \arrow[d, "y"] \\ A \arrow[r, "x"'] & X \end{tikzcd}$$

con $xu_1 = yu_2$. La segunda posibilidad quiere decir en efecto que hay una tercera figura $T \to X$, con incidencias en el primer sentido a cada una de x y y.

4. Tipos de figuras básicos, figuras singulares e incidencia en la categoría de gráficas

Consideremos el caso de la categoría de gráficas $\mathcal{S}^{\downdownarrows}$. En esta categoría los dos objetos $V = \boxed{\bullet}$ y $F = \boxed{\bullet \longrightarrow \bullet}$ pueden servir como tipos de figura básicos. ¿Qué es una figura de tipo F en una gráfica?

DANILO: Una flecha de la gráfica.

Correcto, y una figura de tipo V es simplemente un vértice.

CHAD: ¿Puede la flecha ser un lazo?

Sí. Entonces tendremos una figura singular de tipo F. Esto sucede cuando el morfismo $F \to X$ se factoriza a través de "el lazo" u objeto terminal $\mathbf{1}$.

En esta categoría $\mathcal{S}^{\downdownarrows}$ vemos que:

> *Dado cualquier par de morfismos $X \xrightarrow{f} Y$, $X \xrightarrow{g} Y$ en $\mathcal{S}^{\downdownarrows}$, si $fx = gx$ para todas las figuras $V \xrightarrow{x} X$ de forma V y para todas las figuras $F \xrightarrow{x} X$ de tipo F, entonces $f = g$.*

(En la categoría de gráficas necesitamos dos tipos de figura para probar igualdad de morfismos.)

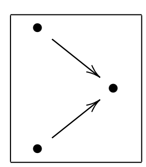
Ejercicio 1

Considere el diagrama de gráficas:

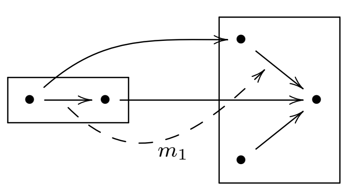
$$\begin{tikzcd} & B_1 \\ P \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & B_2 \end{tikzcd}$$

Suponga que satisface la definición de producto solamente para las figuras de tipo $X = V$ y $X = F$. Demuestre que dicho diagrama es de hecho un producto, esto es, que la propiedad de producto se satisface para todas las gráficas X.

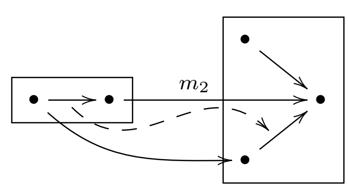
Otro tipo de figura útil es el de la gráfica:

$M =$ 

Esta gráfica tiene dos flechas, lo que quiere decir que hay dos morfismos diferentes de F en M, a saber, los morfismos:



y

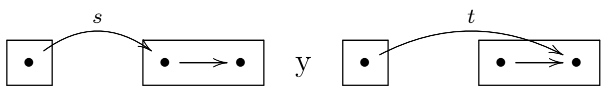


¿Son incidentes estas dos figuras m_1 y m_2 en M?

FÁTIMA: Sí, se juntan en un vértice.

Correcto.

Para expresar esta incidencia mediante morfismos recuerden que además de los dos objetos fundamentales V y F en la categoría de gráficas, hay dos morfismos importantes que denominamos "salida" y "llegada". Ellos son los únicos dos morfismos de V a F, es decir:



En términos de estos dos morfismos podemos expresar la incidencia de m_1 y m_2 mediante la conmutatividad del siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "t"] \arrow[d, "t"'] & F \arrow[d, "m_1"] \\ F \arrow[r, "m_2"'] & M \end{tikzcd}$$

lo cual quiere decir que $m_1 t = m_2 t$ o que "m_1 tiene la misma llegada que m_2". De hecho, no hay nada más en la intersección de m_1 y m_2. (Podemos expresar este hecho también en términos de morfismos pero no lo necesitamos en este momento.) Esta gráfica M tiene también la propiedad de que para cualquier gráfica X y cualesquiera dos flechas en X, $F \xrightarrow{x_1} X$, $F \xrightarrow{x_2} X$, que tienen la misma llegada, esto es, tales que:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "t"] \arrow[d, "t"'] & F \arrow[dd, bend left, "x_1"] \\ F \arrow[dr, bend right, "x_2"'] & \\ & X \end{tikzcd}$$

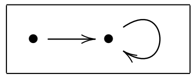
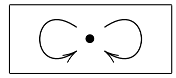
conmuta, esto es, $x_1 t = x_2 t$, hay exactamente una figura de forma M en X cuya flecha m_1 coincide con x_1 y cuya flecha m_2 coincide con x_2. En otras palabras, hay exactamente una solución x al problema:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "t"] \arrow[d, "t"'] & F \arrow[d, "m_1"] \arrow[ddr, bend left, "x_1"] & \\ F \arrow[r, "m_2"'] \arrow[drr, bend right, "x_2"'] & M \arrow[dr, "x"] & \\ & & X \end{tikzcd}$$

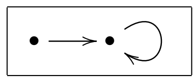
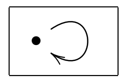
ALICIA: ¿No podría ser $x m_2 = x_1$?

Bueno, lo que acabamos de decir se aplica de la misma manera a las figuras x_2, x_1 (las mismas que antes pero tomadas en el orden opuesto). Por lo tanto, hay también exactamente una x' tal que $x'm_1 = x_2$ y $x'm_2 = x_1$, pero esta x' será, en general, distinta de x. Son iguales solamente cuando las dos flechas x_1 y x_2 son iguales.

Un dibujo de M en X podría ser singular, por supuesto. En las gráficas:

 y 

hay figuras de forma M en las que uno o más vértices coinciden y en las gráficas:

 y 

hay figuras de forma M en las que las dos flechas también coinciden.

Ejercicio 2
¿Qué es una figura de forma

$$F_2 \quad = \quad \boxed{\bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet}$$

en una gráfica X? ¿Cuáles son las maneras en las que podría ser singular?

Observen que otra vez tenemos dos morfismos:

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[d, "n_1"] \\ F \arrow[r, "n_2"'] & F_2 \end{tikzcd}$$

Sin embargo, su relación de incidencia es ahora diferente: la salida de n_2 es la llegada de n_1.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "t"] \arrow[d, "s"'] & F \arrow[d, "n_1"] \\ F \arrow[r, "n_2"'] & F_2 \end{tikzcd}$$

Este objeto F_2 también tiene una propiedad universal de morfismo: para cualquier gráfica X con dos flechas $F \xrightarrow{x_1} X$, $F \xrightarrow{x_2} X$, tales que la salida de x_2 es igual a la llegada de x_1, hay exactamente una figura de forma F_2 en X, $F_2 \xrightarrow{x} X$ tal que $xn_1 = x_1$ y $xn_2 = x_2$.

En la discusión de presentaciones de sistemas dinámicos, al final de la sesión 15, se sugirió que pensaran en presentaciones de gráficas. Quizá quieran intentarlo ahora otra vez ya que figuras y relaciones de incidencia son exactamente lo que se necesitaba. Supongamos que G es una gráfica. Etiquetemos algunas (o ninguna) de las flechas de G, digamos n de ellas, como:

$$F \xrightarrow{f_1} G, \quad F \xrightarrow{f_2} G, \quad \ldots, \quad F \xrightarrow{f_n} G$$

Etiquetemos también algunos (o ninguno) de los vértices de G, digamos m, como:

$$V \xrightarrow{v_1} G, \quad V \xrightarrow{v_2} G, \quad \ldots, \quad V \xrightarrow{v_m} G$$

Listemos ahora algunas de las relaciones de incidencia que son ciertas en G, del tipo $f_is{=}f_js$, $f_is{=}f_jt$, etc. y del tipo $f_is{=}v_j$, $f_it{=}v_j$. Llamamos a las dos listas de etiquetas junto con la lista de ecuaciones una *presentación* de G si tienen la propiedad de que para cualquier gráfica G', cualesquiera n flechas f_1', f_2', $\ldots$, f_n' y cualesquiera m vértices v_1', v_2', $\ldots$, v_n' de G' que satisfacen las "mismas" ecuaciones (con f_i y v_i remplazados por f_i' y v_i'), hay exactamente un morfismo de gráficas que manda cada f_i en f_i' y cada v_j en v_j'. Si listan todas las flechas de G, todos los vértices y todas las relaciones de incidencia verdaderas, obtendrán una presentación. Esto es, sin embargo, ineficiente. Para la gráfica M de arriba encontramos una presentación usando las etiquetas m_1 y m_2 en las flechas pero no usamos etiquetas en los vértices y sólo una ecuación, $m_1t{=}m_2t$. ¿Debe una presentación de gráficas etiquetar todas las flechas? ¿Se puede encontrar una presentación "mínima" para cualquier gráfica finita con tan pocas etiquetas y ecuaciones como sea posible? Podrían tratar con gráficas pequeñas primero. Los otros problemas al final de la sesión 15 pueden también considerarse para presentaciones de gráficas.

Sesión 23

Más sobre propiedades universales de morfismo

Veremos más ejemplos del uso de figuras para encontrar objetos con varias propiedades universales de morfismo. Hay muchas de estas propiedades y nos ayudará poner algunas de ellas en una lista

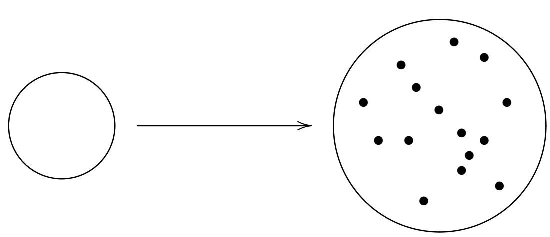
Propiedades universales de morfismo

Objeto inicial	Objeto terminal
Suma de dos objetos	Producto de dos objetos
...	Exponencial o potencia o espacio de morfismos

La lista está dividida en dos columnas debido a que las propiedades universales de morfismos vienen en parejas, para cada propiedad en la columna del lado derecho hay la posibilidad de una correspondiente en el lado izquierdo y viceversa. Hasta ahora sólo hemos estudiado las primeras dos propiedades en la derecha. La definición de una "propiedad en la columna izquierda" es similar a la correspondiente "propiedad en la columna derecha" con la única diferencia de que todos los morfismos que aparecen en la definición son volteados —dominio y codominio son intercambiados. Clarifiquemos esto con el ejemplo más simple.

La idea de objeto inicial es similar a la de objeto terminal pero "opuesta". T es un objeto terminal si para cada objeto X hay exactamente un morfismo de X a T, $X \to T$. De manera correspondiente, I es un objeto inicial si para cada objeto X hay exactamente un morfismo de I en X, $I \to X$.

En la categoría de conjuntos abstractos un objeto inicial es un **conjunto vacío**: como hemos visto, no importa qué conjunto X escojamos, hay exactamente un morfismo:



$= X$

(No es siempre el caso que un objeto inicial de una categoría merezca llamarse "vacío" aunque dicha descripción se ajuste a casi todas las categorías que hemos estudiado hasta ahora.)

La segunda propiedad universal de morfismo que estudiamos fue la de *producto de dos objetos.* La dual u opuesta a ésta es la de *suma de dos objetos* que estudiaremos pronto. Otra propiedad universal de morfismo de "columna derecha" se llama *exponenciación* o *potencia* o *espacio de morfismos,* que estudiaremos más adelante.

1. Una categoría de pares de morfismos

Se les podría ocurrir que para estudiar pares de morfismos a dos objetos B_1 y B_2 en $\mathcal{C}$ podríamos inventar una nueva categoría, a la cual llamaremos $\mathcal{C}_{B_1B_2}$. Un objeto de esta categoría es un objeto de $\mathcal{C}$ equipado de un par de morfismos a B_1 y B_2 respectivamente, esto es, un diagrama del tipo:

$$\begin{tikzcd} & B_1 \\ X \arrow[ur, "\varphi_1"] \arrow[dr, "\varphi_2"'] & \\ & B_2 \end{tikzcd}$$

en $\mathcal{C}$, mientras que un morfismo entre dos objetos en esta categoría, por ejemplo un morfismo

$$\text{de} \quad \begin{tikzcd} & B_1 \\ X \arrow[ur, "\varphi_1"] \arrow[dr, "\varphi_2"'] & \\ & B_2 \end{tikzcd} \quad \text{a} \quad \begin{tikzcd} & B_1 \\ Y \arrow[ur, "\psi_1"] \arrow[dr, "\psi_2"'] & \\ & B_2 \end{tikzcd}$$

es simplemente un morfismo $X \xrightarrow{f} Y$ en $\mathcal{C}$ que "preserva la estructura", lo cual quiere decir que satisface las dos ecuaciones obvias que dicen que este diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} & & B_1 \\ X \arrow[r, "f"] \arrow[urr, bend left, "\varphi_1"] \arrow[drr, bend right, "\varphi_2"'] & Y \arrow[ur, "\psi_1"'] \arrow[dr, "\psi_2"] & \\ & & B_2 \end{tikzcd}$$

$$\psi_1 f = \varphi_1 \quad \text{y} \quad \psi_2 f = \varphi_2$$

Nuestra pregunta principal acerca de esta categoría es: ¿cuál es su objeto terminal? La respuesta sólo debe depender de B_1 y B_2 debido a que éstos son los únicos ingredientes utilizados en la construcción de esta categoría. Por la definición de objeto terminal debemos encontrar un objeto:

$$\begin{tikzcd} & B_1 \\ P \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & B_2 \end{tikzcd}$$

tal que para *todo* objeto $X \rightrightarrows \begin{smallmatrix} B_1 \\ B_2 \end{smallmatrix}$ hay exactamente un $\mathcal{C}_{B_1 B_2}$-morfismo

$$\text{de} \quad \begin{tikzcd}[row sep=small] & B_1 \\ X \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & B_2 \end{tikzcd} \quad \text{a} \quad \begin{tikzcd}[row sep=small] & B_1 \\ P \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & B_2 \end{tikzcd}$$

CHAD: Así que, es el producto de B_1 y B_2.

Exactamente. La definición de un producto de B_1 y B_2 dice precisamente la misma cosa que la definición de objeto terminal en $\mathcal{C}_{B_1 B_2}$.

¿Por qué nos preocupamos por construir una categoría cuyo objeto terminal es lo mismo que el producto de B_1 y B_2 en $\mathcal{C}$? Esta construcción que reduce el concepto de producto en una categoría al de objeto terminal en otra, muestra que el teorema de unicidad para objeto terminal implica el teorema de unicidad para producto. Parecería, por supuesto, requerir mucho esfuerzo definir la categoría $\mathcal{C}_{B_1 B_2}$ si nuestro único propósito fuera el de deducir que cualesquiera dos productos de B_1 y B_2 son isomorfos de manera única del teorema de unicidad para objetos terminales. Para cuando demostráramos que $\mathcal{C}_{B_1 B_2}$ es una categoría, ya podríamos haber terminado la demostración directa de la unicidad del producto. Sin embargo, después de haber obtenido un poco de experiencia, se vuelve obvio que cualquier cosa construida como lo fue $\mathcal{C}_{B_1 B_2}$ es automáticamente una categoría y hay muchas instancias en las que ayuda mucho pensar al producto de dos objetos como el objeto terminal en la categoría apropiada. El hecho de que esto siempre es posible nos ayuda a entender mejor el concepto de producto.

Ejercicio 1
Formule y demuestre de dos maneras el teorema de unicidad del producto de dos objetos B_1 y B_2 de la categoría $\mathcal{C}$. (Una manera es la demostración directa y la otra es definir de $\mathcal{C}_{B_1 B_2}$, demostrar que es una categoría, demostrar que su objeto terminal es lo mismo que el producto de B_1 y B_2 en $\mathcal{C}$ y apelar al teorema de unicidad de los objetos terminales.)

2. Cómo calcular productos

De la misma forma en que no podemos (más bien, la categoría no puede) diferenciar entre cualesquiera dos objetos terminales y, por lo tanto, nos referimos a cualquiera de ellos como "el" objeto terminal, también nos referimos a cualquier producto:

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & B_1 \\ P \arrow[ur, "p_1"] \arrow[dr, "p_2"'] & \\ & B_2 \end{tikzcd}$$

como "el" producto de B_1 y B_2, denotamos al objeto P mediante $B_1 \times B_2$ y llamamos a los dos morfismos p_1, p_2 "las proyecciones del producto a sus factores". Para cualesquiera dos morfismos de un objeto A a B_1 y B_2 respectivamente, esto es, para cualesquiera

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & B_1 \\ A \arrow[ur, "f_1"] \arrow[dr, "f_2"'] & \\ & B_2 \end{tikzcd}$$

hay exactamente un morfismo $A \xrightarrow{f} B_1 \times B_2$ que satisface $p_1 f = f_1$ y $p_2 f = f_2$. Este morfismo también se denota mediante un símbolo especial $\langle f_1, f_2 \rangle$ que incluye la lista de los morfismos que dan lugar a f.

Definición: *Para cualquier par de morfismos*

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & B_1 \\ A \arrow[ur, "f_1"] \arrow[dr, "f_2"'] & \\ & B_2 \end{tikzcd}$$

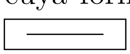
$\langle f_1, f_2 \rangle$ *es el único morfismo*

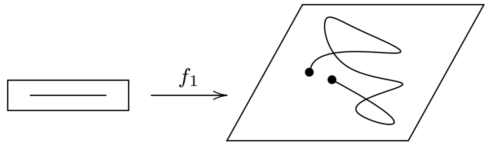
$$A \longrightarrow B_1 \times B_2$$

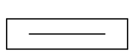
que satisface las ecuaciones $p_1 \langle f_1, f_2 \rangle = f_1$ *y* $p_2 \langle f_1, f_2 \rangle = f_2$.

Estas ecuaciones pueden leerse como: "la primer componente del morfismo $\langle f_1, f_2 \rangle$ es f_1" y "la segunda componente de $\langle f_1, f_2 \rangle$ es f_2".

Quiere decir, en términos de figuras, que las figuras de forma A en el producto $B_1 \times B_2$ son precisamente los pares ordenados que consisten de una figura de forma A en B_1 y una figura de forma A en B_2. Dada una figura de forma A en el producto $B_1 \times B_2$, $A \longrightarrow B_1 \times B_2$, obtenemos figuras en B_1 y B_2 al componerla con las proyecciones; por otro lado, la definición de producto dice que cualesquiera dos figuras f_1 de forma A en B_1 y f_2 de forma A en B_2 surgen de esta manera de exactamente una figura de forma A en $B_1 \times B_2$, a la cual llamamos $\langle f_1, f_2 \rangle$.

Es precisamente lo que se explicó en la primera sesión sobre el descubrimiento de Galileo. Allí B_1 era el plano horizontal y B_2 era la línea vertical mientras que $B_1 \times B_2$ era el espacio. Las figuras eran movimientos, que pueden considerarse como figuras cuya forma es *Tiempo*, si por esto entendemos un intervalo de tiempo, *Tiempo* = . Entonces un movimiento en el plano es un morfismo:



que es una figura de forma  en esta categoría.

Otra manera muy compacta de expresar esta relación entre figuras de cualquier forma en un producto de dos objetos y las figuras correspondientes en los factores es escribir:

$$\frac{A \longrightarrow B_1 \times B_2}{A \longrightarrow B_1, \quad A \longrightarrow B_2}$$

que debe leerse como: “los morfismos $A \longrightarrow B_1 \times B_2$ corresponden de manera natural con los pares de morfismos $A \longrightarrow B_1$, $A \longrightarrow B_2$”.

En particular, podemos considerar figuras cuya forma es el objeto terminal. Como dichas figuras se llaman “puntos”, vemos que los puntos de un producto de dos objetos son los pares de puntos, uno de cada factor o, con la notación recién introducida:

$$\frac{\mathbf{1} \longrightarrow B_1 \times B_2}{\mathbf{1} \longrightarrow B_1, \quad \mathbf{1} \longrightarrow B_2}$$

De hecho, en la categoría de conjuntos, si un par de morfismos $B_1 \longleftarrow P \longrightarrow B_2$ tiene la propiedad de producto cuando se le prueba con morfismos desde $\mathbf{1}$ nada más, entonces tiene la propiedad de producto cuando se le prueba con morfismos desde cualquier T, por lo que resulta ser un producto. Para muchas preguntas similares en conjuntos, el uso de figuras de forma $\mathbf{1}$ es un método importante.

Este método también nos dice cómo encontrar el producto de objetos en otras categorías. Déjenme ilustrarlo con un ejemplo en la categoría de gráficas. En esta categoría tenemos dos objetos, $F = \boxed{\bullet \longrightarrow \bullet}$ y $V = \boxed{\bullet}$ tales que las figuras de forma F junto con las figuras de forma V son suficientes para determinar los morfismos de gráficas. Por lo tanto, podemos utilizar estas dos gráficas para calcular el producto de cualesquiera dos gráficas de la misma manera que utilizamos el objeto terminal para determinar el producto de cualesquiera dos conjuntos.

Por ejemplo, calculemos el producto de la gráfica F consigo misma, esto es, $F \times F$. Para hacerlo debemos determinar su conjunto de *flechas*, su conjunto de *vértices*, la relación entre flechas y vértices (qué vértices son la *salida* y la *llegada* de cada flecha) y, finalmente, debemos determinar los *morfismos proyección* (sin los cuales no hay producto).

Las flechas de cualquier gráfica X (incluidos los lazos) son los morfismos de gráficas $F \longrightarrow X$. Los vértices de X son los morfismos $V \longrightarrow X$. La relación entre las flechas y los vértices de X es una instancia de las relaciones de incidencia que pueden expresarse en términos de los dos morfismos especiales “salida” $V \xrightarrow{s} F$ y “llegada” $V \xrightarrow{t} F$ que se introdujeron en la última sesión. Por ejemplo, decir que un vértice $V \xrightarrow{x} X$ es la salida de una flecha $F \xrightarrow{p} X$ es la relación de incidencia:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[d, "s"'] \arrow[dr, "x"] & \\ F \arrow[r, "p"'] & X \end{tikzcd}$$

(la salida de p es x o $ps = x$)

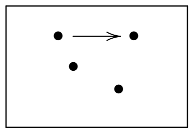
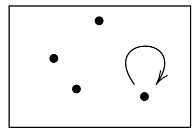
Para calcular $F \times F$ o F^2 encontramos primero el conjunto de vértices de F^2:

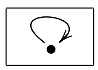
$$\frac{V \longrightarrow F^2}{V \longrightarrow F, \quad V \longrightarrow F}$$

Nos dice que los vértices de F^2 son los pares de vértices de F. Como F tiene dos vértices hay cuatro pares y, por lo tanto, $F \times F$ tiene cuatro vértices. Las flechas en F^2 son:

$$\frac{F \longrightarrow F^2}{F \longrightarrow F, \quad F \longrightarrow F}$$

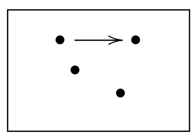
los pares de flechas de F. Pero F sólo tiene una flecha por lo cual sólo podemos formar un par y, por lo tanto, F^2 tiene solamente una flecha. Se ha determinado, hasta aquí, que F^2 es:

 o bien 

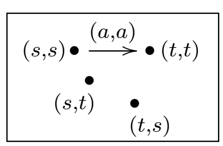
dependiendo de si la flecha de F^2 es un lazo o no. Esto se puede determinar muy fácilmente debido a que los lazos de una gráfica X son los morfismos de gráficas de la gráfica terminal $\mathbf{1}=$  a X, así que los lazos de F^2 son:

$$\frac{\mathbf{1} \longrightarrow F^2}{\mathbf{1} \longrightarrow F, \quad \mathbf{1} \longrightarrow F}$$

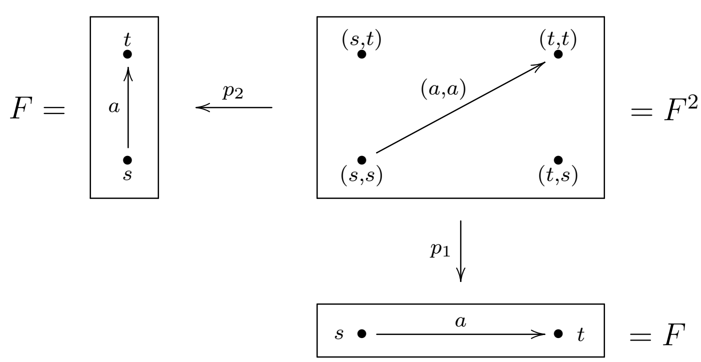
los pares de lazos de F. Pero F no tiene lazos. Entonces F^2 tampoco tiene lazos y, por lo tanto, debe verse así:



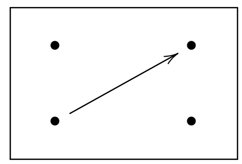
Sin embargo, solamente nos dice como se ve F^2 como gráfica y no su estructura como producto. Para determinarla necesitamos saber las proyecciones $p_1{:}F^2 \longrightarrow F$ y $p_2{:}F^2 \longrightarrow F$. Éstas no son difíciles de encontrar si etiquetamos los vértices y la flecha de F, por ejemplo, $F = \boxed{s \bullet \xrightarrow{a} \bullet\ t}$ y de la misma forma etiquetamos F^2:



de lo cual se deduce fácilmente que las proyecciones son los morfismos indicados en el siguiente diagrama más organizado:



Nótese que para cualquier objeto X en cualquier categoría con productos hay un morfismo canónico $X \longrightarrow X \times X$, a saber, aquel cuyas componentes (esto es, la composición con las dos proyecciones) son ambas el morfismo identidad 1_X. Este morfismo canónico (el cual, como ya hemos dicho antes, se denota por $\langle 1_X, 1_X \rangle$) a menudo se llama el morfismo *diagonal*. Como en nuestro ejemplo hay solamente un morfismo $F \to F^2$, este debe ser el morfismo diagonal. Esto está relacionado con el hecho de que cuando F^2 se dibuja internamente con su relación estandarizada con las proyecciones (como arriba), obtenemos el dibujo:

$F^2 \quad =$ 

en el que la flecha se ve diagonal.

Noten que la gráfica F^2 consiste en una flecha más dos vértices desnudos. Esto puede expresarse mediante la ecuación:

$$F^2 = F + 2V$$

donde $2V$ quiere decir $V + V$ y a la operación de suma que aparece aquí se le puede dar un significado preciso como el opuesto o dual de la operación producto que se menciona al principio de la sesión. Explicaremos más sobre esto más adelante. Mientras tanto, traten de hacer el ejercicio siguiente.

Ejercicio 2
Trate de crear la definición de “suma” de dos objetos en términos de una propiedad universal de morfismo “dual” a la del producto mediante el proceso de invertir todas las flechas en la definición de producto. Verifique entonces que en la categoría de conjuntos y en la categoría de gráficas esta propiedad se satisface, de hecho, por la idea intuitiva de suma: “póngalos juntos sin intersección ni interacción”.

Sesión 24

Unicidad del producto y definición de suma

En la última sesión dejamos dos ejercicios: uno concerniente a la unicidad de los productos y el otro a la definición de suma. Una manera de pensar acerca de producto y suma es la de que combinan dos objetos para obtener un tercero. En esta sesión veremos que cualquier producto o suma también les permite combinar morfismos para obtener un nuevo morfismo. (Por supuesto que ya tenemos una manera de combinar morfismos para obtener otro morfismo, ésta es la *composición* de morfismos.)

1. El objeto terminal como la identidad para la multiplicación

Comencemos con un ejemplo para ver cómo la unicidad de los productos puede ser de utilidad. Vimos que en la categoría de conjuntos el número de elementos del producto de dos conjuntos es precisamente el producto de los números respectivos de elementos de los dos conjuntos, esto es, teníamos la fórmula:

$$\#(A \times B) = \#A \times \#B$$

y, por lo tanto, como un caso particular, si $\mathbf{1}$ es el conjunto terminal:

$$\#(A \times \mathbf{1}) = \#A \times \#\mathbf{1} = \#A \times 1 = \#A$$

Esto sugiere que podemos tener "$B \times \mathbf{1} = B$". De hecho, esta "ecuación" es "verdadera" en cualquier categoría que tenga objeto terminal pero debemos decir lo que significa.

Para hacer a B el producto de B y $\mathbf{1}$ necesitamos exhibir dos morfismos:

$$\begin{tikzcd} & B \\ B \arrow[ur, "p_1"] \arrow[dr, "p_2"'] & \\ & \mathbf{1} \end{tikzcd}$$

y demostrar que satisfacen la propiedad de proyecciones de producto. De hecho, hay solamente una posible elección para p_2, así es que solamente necesitamos un morfismo p_1 de B en B. Hay una elección obvia: la identidad de B. De hecho, es la única cosa en la que podemos pensar y, en consecuencia, esperamos que funcione. Queremos ver que

$$\begin{tikzcd} & B \\ B \arrow[ur, "1_B"] \arrow[dr] & \\ & \mathbf{1} \end{tikzcd}$$

es un producto. Para demostrarlo, supongamos que tenemos dos morfismos:

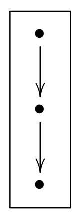
$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & B \\ X \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & \\ & \mathbf{1} \end{tikzcd}$$

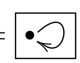
¿Hay exactamente un morfismo que haga que este diagrama conmute?

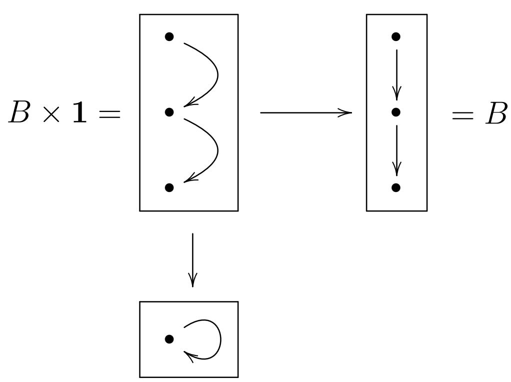
$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & & B \\ X \arrow[r, dashed] \arrow[urr, bend left, "f"] \arrow[drr, bend right, "g"'] & B \arrow[ur, "1_B"] \arrow[dr] & \\ & & \mathbf{1} \end{tikzcd}$$

Bueno, hay solamente una posibilidad: debe ser un morfismo que, al componerlo con 1_B dé f, así que sólo puede ser la misma f. Funciona debido a que la otra condición (la de que al componerla con $B \to \mathbf{1}$ dé g) es automáticamente cumplida por cualquier morfismo $X \to B$ (porque $\mathbf{1}$ es terminal). Por lo tanto, hemos demostrado que B es un producto de B y el objeto terminal.

El razonamiento es completamente general y, por lo tanto, el resultado es cierto en cualquier categoría. Desde luego que un dibujo de $B \times \mathbf{1}$ (hecho de tal manera que sean obvios los morfismos proyecciones) puede *verse* diferente de B. Por ejemplo, en la categoría de gráficas considérese:

$B =$ 

Como un objeto terminal en esta categoría es un lazo, $\mathbf{1} =$ , podríamos dibujar el producto $B \times \mathbf{1}$ como:



pero es obvio que $B \times \mathbf{1}$ es "la misma gráfica" que B porque la curvatura de las flechas que aparece en el dibujo no es parte de la gráfica sino un recurso externo para hacer claro que el morfismo proyección manda a las dos flechas en el lazo.

Recordaremos ahora cómo un producto en una categoría puede considerarse como una manera de combinar dos morfismo en uno. Dados dos objetos B_1 y B_2 en una categoría $\mathcal{C}$, un par de proyecciones de producto para B_1 y B_2 es un par de morfismos:

$$\begin{tikzcd} & B_1 \\ P \arrow[ur, "p_1"] \arrow[dr, "p_2"'] & \\ & B_2 \end{tikzcd}$$

que satisfacen la siguiente propiedad universal de morfismo. Para cualesquiera dos morfismos:

$$\begin{tikzcd} & B_1 \\ X \arrow[ur, "f_1"] \arrow[dr, "f_2"'] & \\ & B_2 \end{tikzcd}$$

de entre todos los morfismos $X \longrightarrow P$ hay exactamente uno $X \xrightarrow{f} P$ que satisface las dos ecuaciones

$$f_1 = p_1 f \quad \text{y} \quad f_2 = p_2 f$$

Como dijimos en la sesión anterior, dicho morfismo único se denota $\langle f_1, f_2 \rangle$. Quiere decir que el producto P de B_1 y B_2 nos permite combinar los dos morfismos:

$$\begin{tikzcd} & B_1 \\ X \arrow[ur, "f_1"] \arrow[dr, "f_2"'] & \\ & B_2 \end{tikzcd}$$

en un morfismo $X \xrightarrow{\langle f_1, f_2 \rangle} P$.

La definición de "producto" es que este proceso de combinar es inverso del proceso de componer un morfismo $X \longrightarrow P$ con las proyecciones. Si nos han dado un morfismo $X \xrightarrow{g} P$ y lo componemos con las proyecciones p_1 y p_2 obtenemos dos morfismos $g_1(=p_1 g)$ y $g_2(=p_2 g)$ que son las "componentes de g" (relativas al producto en cuestión). Efectivamente, si ahora combinamos g_1 y g_2 el resultado debe ser, necesariamente, el morfismo original g.

Resumiendo: decir que dos morfismos p_1, p_2 son proyecciones de producto quiere decir que este proceso simple de "descomponer" un morfismo (componiéndolo con cada una de p_1 y p_2) es invertible. De hecho, muchas propiedades universales de morfismo dicen que cierto proceso simple es invertible.

2. El teorema de unicidad para productos

Teorema: (Unicidad de productos.) *Supongamos que ambos:*

$$\begin{tikzcd} & B_1 \\ P \arrow[ur, "p_1"] \arrow[dr, "p_2"'] & \\ & B_2 \end{tikzcd} \quad y \quad \begin{tikzcd} & B_1 \\ Q \arrow[ur, "q_1"] \arrow[dr, "q_2"'] & \\ & B_2 \end{tikzcd}$$

son pares de proyecciones de producto (esto es, p_1, p_2 así como q_1, q_2 satisfacen la propiedad universal de morfismo). Entonces hay exactamente un morfismo $Q \xrightarrow{h} P$ para el cual

$$p_1 h = q_1 \quad y \quad p_2 h = q_2$$

Este morfismo h es de hecho un isomorfismo.

Este teorema a menudo se enuncia de manera cruda en las formas (1) o (2) siguientes:

(1) Cualesquiera dos productos de B_1 y B_2 son objetos isomorfos.

Un poco más preciso:

(2) Entre cualesquiera dos productos de B_1 y B_2 hay exactamente un isomorfismo compatible con las proyecciones.

Pero la afirmación más fuerte y más precisa es:

(3) Entre cualesquiera dos productos de B_1 y B_2 hay exactamente un morfismo compatible con las proyecciones, y tal morfismo es un isomorfismo.

Demostración del teorema de unicidad: Supongamos que

$$\text{(a)} \quad \begin{tikzcd} & B_1 \\ P \arrow[ur, "p_1"] \arrow[dr, "p_2"'] & \\ & B_2 \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \text{(b)} \quad \begin{tikzcd} & B_1 \\ Q \arrow[ur, "q_1"] \arrow[dr, "q_2"'] & \\ & B_2 \end{tikzcd}$$

son dos productos de B_1 y B_2. Como (a) es un producto, existe exactamente un morfismo $Q \xrightarrow{h} P$ para el cual $p_1 h = q_1$ y $p_2 h = q_2$. Nos gustaría demostrar que este morfismo es un isomorfismo. Para hacerlo deberíamos tratar de encontrar su inverso. Pero hay una cosa obvia que intentar: como (b) es un producto existe exactamente un morfismo $P \xrightarrow{k} Q$ para el cual $q_1 k = p_1$ y $q_2 k = p_2$. ¿Es realmente k un inverso para h? Bueno, para demostrar que $hk = 1_P$ calculamos:

$$p_1(hk) = (p_1 h)k = q_1 k = p_1$$

y

$$p_2(hk) = (p_2 h)k = q_2 k = p_2$$

Quiere decir que hk es el único morfismo que compuesto con p_1 da p_1 y compuesto con p_2 da p_2. Pero, ¿no hay otro morfismo con estas propiedades?

DANILO: Sí. La identidad de P.

Correcto. Así es que el *exactamente uno* en la definición de producto implica que hk es la identidad de P. Esto demuestra la mitad del teorema. La otra mitad es que kh sea la identidad de Q, que se sigue de la misma forma de:

$$q_1(kh) = (q_1 k)h = p_1 h = q_1$$

$$\text{y}$$
$$q_2(kh) = (q_2k)h = p_2h = q_2$$

DANILO: En el caso de los conjuntos me puedo imaginar el isomorfismo entre dos productos diferentes. ¿Cómo se lo imagina uno en casos más complicados?

Será similar al caso de conjuntos. Cualesquiera dos productos se verán como "rectángulos similares".

3. Suma de dos objetos en una categoría

El reto del ejercicio que dimos en la sesión 23 era el de inventar la definición de *suma de dos objetos.* Si tomamos la definición de producto e invertimos el sentido de los morfismos que en ella aparecen llegamos a la siguiente:

Definición: *Una **suma de dos objetos** B_1, B_2 es un objeto S y un par de morfismos*

$$\begin{tikzcd} & B_1 \arrow[dl, "j_1"'] \\ S & \\ & B_2 \arrow[ul, "j_2"] \end{tikzcd}$$

con la siguiente propiedad universal de morfismo: para cualesquiera dos morfismos

$$\begin{tikzcd} & B_1 \arrow[dl, "f_1"'] \\ X & \\ & B_2 \arrow[ul, "f_2"] \end{tikzcd}$$

de entre todos los morfismos $X \xleftarrow{f} S$ hay exactamente uno que satisface ambas

$$f_1 = fj_1 \quad y \quad f_2 = fj_2$$

esto es, el diagrama siguiente conmuta:

$$\begin{tikzcd} & & B_1 \arrow[dll, bend right, "f_1"'] \arrow[dl, "j_1"] \\ X & S \arrow[l, "f"'] & \\ & & B_2 \arrow[ull, bend left, "f_2"] \arrow[ul, "j_2"'] \end{tikzcd}$$

Los morfismos j_1 y j_2 se llaman las *inyecciones de la suma* de B_1 y B_2 en la suma S y la notación para el morfismo único f es:

$$f = \left\{ \begin{array}{l} f_1 \\ f_2 \end{array} \right.$$

Debe de ser un muy buen ejercicio para ustedes trabajar lo siguiente.

Ejercicio 1
Formule y demuestre el teorema de unicidad de las sumas.

Una respuesta es: "tómese todo lo que dijimos antes en esta sesión e inviértase el sentido de todos los morfismos", pero deberían hacerlo todo con detalle.

¿Qué tiene que ver la definición de arriba con la *suma* como usualmente se la entiende? Tomemos la categoría de conjuntos y veamos qué produce la definición. Supongamos que B_1 y B_2 son los conjuntos:

$$B_1 = \boxed{\bullet\ \ \bullet\ \ \bullet} \quad \text{y} \quad B_2 = \boxed{\bullet\ \ \bullet}$$

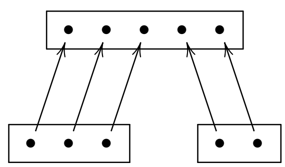
¿Qué esperarían que fuera la suma de estos dos objetos?

OMER: Un conjunto de cinco elementos.

Correcto. La suma de B_1 y B_2 debería ser el conjunto:

$$S = \boxed{\bullet\ \ \bullet\ \ \bullet\ \ \bullet\ \ \bullet}$$

Mostraré que este conjunto recibe morfismos de B_1 y B_2, respectivamente, que satisfacen la definición de propiedad universal de morfismo de la suma. Los dos morfismos son:



Para demostrar la propiedad universal de morfismo supongamos que tenemos dados dos morfismos cualesquiera de B_1 y B_2 a un conjunto X, digamos:

$$f_1{:}B_1 \longrightarrow X \quad \text{y} \quad f_2{:}B_2 \longrightarrow X$$

¿Cómo podemos "combinar" estos dos morfismos en un morfismo $f = \left\{ \begin{array}{l} f_1 \\ f_2 \end{array} \right.$? Bueno, podemos definir f "por casos". Si s está "en" B_1 (lo que esto quiere decir es que s es la j_1-imagen de algún s' en B_1) definimos $f(s)$ utilizando f_1 (esto es, $f(s){=}f_1(s')$), y si s está en B_2 (esto es, $s{=}j_2(s'')$ para alguna s'' en B_2) definimos $f(s)$ utilizando f_2. En resumen, podemos definir el morfismo f como:

$$f(s){=}\left\{ \begin{array}{l} f_1(s') \text{ si } s{=}j_1(s') \\ f_2(s'') \text{ si } s{=}j_2(s'') \end{array} \right.$$

(Esta expresión es el origen de la notación $\left\{ \begin{array}{l} f_1 \\ f_2 \end{array} \right.$ para el morfismo f.)

La definición funciona porque para cada s en S, $s{=}j_1(s')$ para *exactamente una* $s' \in B_1$ o bien $s{=}j_2(s'')$ para *exactamente una* $s'' \in B_2$ *pero no ambas.* En otras palabras, los morfismos j_1 y j_2 son *inyectivos*, cubren a todo S (son *exhaustivos*) y no se superponen (son *ajenos*).

Es posible que las sumas de objetos en otras categorías no se vean exactamente como en este caso de conjuntos pero este ejemplo justifica o motiva la definición de suma mediante la propiedad universal de morfismo. Como veremos, ahora que ya tenemos una definición precisa de suma, podemos *demostrar* ecuaciones tales como la que surgió en la sesión 23, es decir:

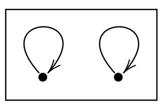
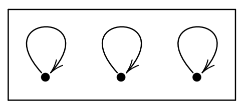
$$F^2 = F + 2V$$

donde F era la gráfica “flecha” y V la gráfica “vértice desnudo”.

Si $\mathbf{1}$ es la gráfica terminal (el “lazo”), podemos definir toda una sucesión de gráficas sumando $\mathbf{1}$s de la misma forma en que se hace con conjuntos o números:

$$2 = \mathbf{1} + \mathbf{1}, \quad 3 = \mathbf{1} + \mathbf{1} + \mathbf{1}$$

De esta manera obtenemos las gráficas:

$2 =$  $3 =$ 

Aun entre gráficas tenemos “números naturales”, mientras que una gráfica como el “vértice desnudo” V, ni $\mathbf{0}$ ni $\mathbf{1}$ sino “en medio”, debe considerarse como un número por derecho propio, quizá una clase diferente de número. Teniendo ya a nuestra disposición la multiplicación y la suma de objetos podemos hacer toda clase de combinaciones y, aún más, podemos escribir *ecuaciones algebraicas* entre objetos. (Comparar con el ejercicio 19 en el artículo IV).

Ejercicio 2
Demuestre las siguientes fórmulas:
(a) $V + V = 2 \times V$
(b) $V \times V = V$
(c) $F \times V = V + V$

Ejercicio 3
Vuelva a leer la sección 5 de la sesión 15 y encuentre un método, a partir de presentaciones de $X^{\circlearrowleft\alpha}$ y $Y^{\circlearrowleft\beta}$, para construir presentaciones de:
(a) $X^{\circlearrowleft\alpha} + Y^{\circlearrowleft\beta}$
(b) $X^{\circlearrowleft\alpha} \times Y^{\circlearrowleft\beta}$
La parte (b) es más difícil que la parte (a).

Sesión 25

Etiquetados y productos de gráficas

¿Alguien tiene alguna pregunta?

OMER: Creo que entiendo lo que es un producto pero no acabo de entender qué es la X que aparece en el diagrama:

$$\begin{tikzcd} & & B_1 \\ X \arrow[urr, bend left, "f_1"] \arrow[r, "f"] \arrow[drr, bend right, "f_2"'] & P \arrow[ur, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ & & B_2 \end{tikzcd}$$

Bueno, en la *definición* del producto de B_1 y B_2 en $\mathcal{C}$ hay una infinidad de condiciones que deben satisfacer las proyecciones: una para *cada* objeto X y *cada* par de morfismos f_1 y f_2. Decir que Marco es la persona más alta en la familia quiere decir que para cada persona X en la familia, X es a lo más tan alto como Marco. La propiedad universal del producto es semejante: el producto es la mejor cosa de su tipo y, para expresar eso, es necesario compararlo con todas las cosas de su tipo, esto es, todo objeto equipado con morfismos a B_1 y B_2.

Poniendolo de otra manera: supongamos que tú afirmas que los dos morfismos

$$\begin{tikzcd} & B_1 \\ P \arrow[ur, "p_1"] \arrow[dr, "p_2"'] & \\ & B_2 \end{tikzcd}$$

son proyecciones de producto y que yo afirmo que no lo son. La definición de producto quiere decir que, si yo quiero demostrarte que no lo son, todo lo que debo hacer es seleccionar un objeto particular X y dos morfismos particulares

$$\begin{tikzcd} & B_1 \\ X \arrow[ur, "f_1"] \arrow[dr, "f_2"'] & \\ & B_2 \end{tikzcd}$$

y mostrarte que no hay *exactamente un* morfismo f que haga que este diagrama conmute:

$$\begin{tikzcd} & & B_1 \\ X \arrow[r, "f"] \arrow[urr, bend left, "f_1"] \arrow[drr, bend right, "f_2"'] & P \arrow[ur, "p_1"] \arrow[dr, "p_2"'] & \\ & & B_2 \end{tikzcd}$$

(entonces, muestro que no hay tal morfismo f o muestro que hay al menos dos diferentes).

Afortunadamente, en algunas categorías, para demostrar que P (con su p_1 y su p_2) es un producto, solamente necesitamos compararlo con unos pocos objetos. Por ejemplo, en la categoría de conjuntos es suficiente con comparar a P con el objeto terminal y en la categoría de gráficas se les pidió en la sesión 22 que demostraran que necesitamos probar P contra "el vértice desnudo" $X = \boxed{\bullet}$ y "la flecha" $X = \boxed{\bullet \longrightarrow \bullet}$. Ya que hemos probado P contra estos pocos objetos, entonces sabemos que es un producto, podemos tomar ventaja del hecho de que la propiedad universal de morfismo se satisface para todos y cada uno de los objetos X y cada par de morfismos f_1, f_2. Abreviamos esto como:

$$\frac{X \longrightarrow B_1 \times B_2}{X \longrightarrow B_1, \quad X \longrightarrow B_2}$$

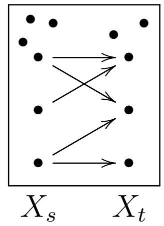
queriendo decir que especificar un morfismo al producto es lo mismo que especificar dos morfismos, uno de X a cada uno de los factores.

1. Detectar la estructura de una gráfica mediante etiquetados

Continuando con el ejemplo de la categoría de gráficas, veremos que el simple hecho de que el producto de "la flecha" F con cualquier otra gráfica Y tenga un morfismo a F (la proyección $p_1 : F \times Y \longrightarrow F$) nos da alguna información sobre la estructura de $F \times Y$. Para entenderlo más fácilmente pensemos primero en el caso de morfismos al vértice desnudo V. La pregunta es: si una gráfica X tiene un morfismo de gráficas a V, ¿qué nos revela acerca de la gráfica X? Un morfismo de gráficas $X \longrightarrow V$ lleva a cualquier flecha de X en una flecha de V. Pero V no tiene flechas, por lo tanto, si X tiene al menos una flecha, no puede haber morfismos de X a V. También tenemos que un morfismo $X \longrightarrow V$ debe mandar todos los vértices de X al único vértice de V. Por lo tanto vemos que si X tiene un morfismo a V entonces X no tiene flechas y hay exactamente un morfismo en V.

¿Cuál es el significado de un morfismo a "la flecha" $F = \boxed{s \bullet \xrightarrow{a} \bullet\, t}$? Bueno, un morfismo $X \xrightarrow{f} F$ lleva a cualquier vértice de X a s o a t. Entonces f divide los vértices de X en dos clases: X_s y X_t. Aquí X_s es el conjunto de aquellos vértices de X que se envían a s y X_t es el conjunto de aquellos vértices de X que se envían a t. Además, toda flecha de X debe enviarse a a porque ésta es la única flecha de F. Esto quiere decir que toda flecha de X tiene su salida en X_s y su llegada en X_t.

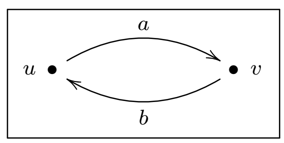
La existencia de un morfismo de gráficas de X a F quiere decir que X es algo como esto:

$X =$ 

y el número total de morfismos de X en F depende solamente del número de "vértices desnudos" que tenga X. Hay $2^5 = 32$ morfismos de esta gráfica X a "la flecha" F.

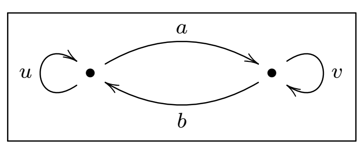
Recíprocamente, si dividimos los vértices de una gráfica X en dos conjuntos ajenos X_s y X_t de tal manera que ninguno de los vértices en X_t es una salida y ninguno de los vértices en X_s es una llegada (esto es, cada flecha de X tiene su salida en X_s y su llegada en X_t) entonces hemos definido un morfismo de gráficas de X en F (el que manda a todos los vértices en X_s a s, todos los vértices en X_t a t y todas las flechas a a).

Otra pregunta interesante del mismo tipo es: ¿cuál es el significado de acomodar la gráfica X mediante C_2, esto es, dar un morfismo de X a la gráfica siguiente?

$C_2 =$ 

Un morfismo $X \longrightarrow C_2$ muestra que X no tiene lazos y, en general, que no tiene ciclos impares (ciclos cuya longitud es un número impar). Un morfismo así divide los vértices de X en dos clases: $X_u =$ *los vértices enviados a* u y $X_v =$ *los vértices enviados a* v. Cada flecha de X tiene salida en X_u y llegada en X_v o al revés, esto es, ninguna flecha de X tiene ambos, salida y llegada, en X_u ni tampoco en X_v.

Otra pregunta similar es: ¿cuál es el contenido de un morfismo de cualquier gráfica en la gráfica:

$2_V =$ 

?

En este caso, un etiquetado de X mediante 2_V (esto es, un morfismo $X \longrightarrow 2_V$) no representa restricción alguna en X. El morfismo es en sí mismo una elección de una división arbitraria de los vértices de X en dos clases.

Ejercicio 1
Encuentre una gráfica 2_F tal que un morfismo $X \longrightarrow 2_F$ consista de una división de las flechas de X en dos clases.

Hemos visto que la naturaleza específica de un producto puede ser determinada exitosamente mediante el uso de figuras. ¿Qué tal tratar de determinar la estructura de la suma? ¿Podríamos hacerlo con figuras? Si la respuesta es no, ¿hay algo análogo a las figuras que pudiera usarse en el caso de las sumas? Recordemos que las sumas están definidas "como los productos" pero con el sentido de los morfismos invertido. La primera consecuencia es que la regla para definir morfismos de un objeto X a un producto ("utiliza un morfismo a cada factor") se convierte en una regla para definir morfismos *desde una suma* a un objeto Y ("utiliza un morfismo *desde* cada sumando a Y").

Cuando consideramos a un morfismo $X \to Y$ como una figura de forma X en Y pensamos a Y como un objeto fijo y a X como variable, de tal manera que demos todas las posibles formas de figuras en Y. Pero también podemos tomar el punto de vista opuesto y pensar a X como un objeto fijo y a Y como variable. Entonces los morfismos $X \to Y$ pueden considerarse como diferentes "etiquetados" o "acomodos" de X mediante Y. Otras palabras que se usan con el mismo significado que "Y-etiquetado" son "funciones Y-valuadas" y "cofiguras". (Ver sesión 6. El prefijo "co", que quiere decir "dual de", se utiliza a menudo.) El ejercicio 2(b) es dual del ejercicio 1 de la sesión 22.

Ejercicio 2
(a) Demuestre que si un diagrama de *conjuntos:*

$$\begin{tikzcd} & B_1 \arrow[dl, "j_1"'] \\ S & \\ & B_2 \arrow[ul, "j_2"] \end{tikzcd}$$

tiene la propiedad de coproducto restringido a probar únicamente con la cofigura de tipo $Y = \mathbf{2}$, entonces es de hecho un coproducto, esto es, tiene la propiedad para cada objeto Y.

(b) Demuestre que si un diagrama de gráficas:

$$\begin{tikzcd} & B_1 \arrow[dl, "j_1"'] \\ S & \\ & B_2 \arrow[ul, "j_2"] \end{tikzcd}$$

tiene la propiedad de coproducto restringido a probar solamente con las dos cofiguras de forma $Y = 2_F$ y $Y = 2_V$ entonces es de hecho un coproducto, esto es, tiene esa propiedad para cada objeto Y.

Ejercicio 3
Tricolorear una gráfica quiere decir asignarle a cada vértice uno de los tres colores blanco, rojo o verde, de tal forma que para cada flecha la salida y la llegada tengan colores diferentes. Si usted fija una tricoloración de una gráfica X y tiene un morfismo de gráficas $Y \xrightarrow{f} X$, entonces puede también colorear los vértices de

Y: simplemente coloree cada vértice $V \xrightarrow{y} Y$ del mismo color que fy. Ésta se llama la "tricoloración de Y *inducida* por f".

(a) Demuestre que esta coloración inducida es una tricoloración, esto es, ninguna flecha de Y tiene salida y llegada del mismo color.

(b) Encuentre la *mejor gráfica tricoloreada* G. Para cualquier gráfica Y, cada tricoloración de Y es inducida por exactamente un morfismo $Y \to G$.

Ejercicio 4
En este ejercicio $\mathbf{0}$ es la gráfica inicial sin vértices (y, por supuesto, sin flechas) y F_2 es la gráfica $\boxed{\bullet \to \bullet \to \bullet}$.

Demuestre que para cada gráfica X:

(a) hay un morfismo $X \to \mathbf{0}$ o un morfismo $V \to X$ pero no ambos,

(b) hay un morfismo $X \to V$ o $F \to X$ pero no ambos y

(c) hay un morfismo $X \to F$ o $F_2 \to X$ pero no ambos.

¿Puede ser continuada la sucesión $\mathbf{0}$, V, F, F_2? Es decir, ¿hay una gráfica C tal que para toda gráfica X

(d) hay un morfismo $X \to F_2$ o $C \to X$ pero no ambos?

2. Calcular las gráficas $F \times Y$

Como vimos antes en esta sesión, una gráfica de la forma $F \times Y$ tiene estructura similar a la de la gráfica X que dibujamos antes. En otras palabras, los vértices de $F \times Y$ están divididos en dos clases de tal forma que en uno de ellos no hay llegadas y en el otro no hay salidas. Además:

$$\frac{F \to F \times Y}{F \to F, \quad F \to Y}$$

esto es, las flechas de $F \times Y$ son los pares de flechas $\langle a, y \rangle$ donde a es la flecha de F y y es una flecha de Y. Como F tiene solamente una flecha, concluimos que $F \times Y$ tiene precisamente tantas flechas como tenga Y. Asimismo:

$$\frac{V \to F \times Y}{V \to F, \quad V \to Y}$$

implica que el número de vértices de $F \times Y$ es el doble que el número de vértices de Y porque F tiene dos vértices. Para determinar las relaciónes salida y llegada en $F \times Y$ componemos cada flecha de $F \to Y$, vista como un morfismo $F \to F \times Y$, con los morfismos "salida" y "llegada":

$$V \underset{t}{\overset{s}{\rightrightarrows}} F$$

Recordemos que para una flecha $F \xrightarrow{y} Y$, la salida y la llegada son:

$$y\circ s \quad \text{y} \quad y\circ t$$
$$V \overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}} F \xrightarrow{y} Y$$

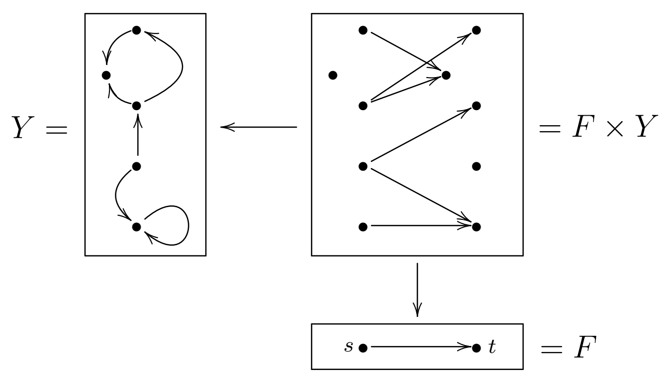
La salida de la flecha $\langle a, y\rangle$ de $F \times Y$ es $\langle a, y\rangle\circ s = \langle s, y\circ s\rangle$ porque la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & & F \\
V \arrow[r, "s"] \arrow[urrr, bend left, "s"] \arrow[drrr, bend right, "y\circ s"'] & F \arrow[r, "\langle a,y\rangle"] \arrow[urr, bend left, "a"] \arrow[drr, bend right, "y"'] & F \times Y \arrow[ur, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\
 & & & Y
\end{tikzcd}$$

muestra que $p_1\circ(\langle a, y\rangle\circ s) = s$ y $p_2\circ(\langle a, y\rangle\circ s) = y\circ s$. De manera similar, vemos que la llegada de $\langle a, y\rangle$ es $\langle a, y\rangle\circ t = \langle t, y\circ t\rangle$ porque

$$p_1\circ(\langle a, y\rangle\circ t) = t \quad \text{y} \quad p_2\circ(\langle a, y\rangle\circ t) = y\circ t$$

Estos cálculos algo largos se hicieron en detalle para darles un poco de práctica en estas cosas y para ilustrar el principio general de que $X \times Y$ se ve como un rectángulo de base X y altura Y. Por ejemplo,



Ejercicio 5
En este ejercicio $B = \boxed{\bullet \to \bullet \to \bullet}$ y $C = \boxed{\bullet \rightleftarrows \bullet \quad \bullet}$. Demuestre que B no es isomorfa a C pero que $F \times B$ es isomorfa a $F \times C$. (Ya conocemos ejemplos de la "falla de cancelación": $\mathbf{0} \times X$ y $\mathbf{0} \times Y$ son isomorfas para todo X y Y; vimos también que $V \times F$ es isomorfo a $V \times \mathbf{2}$. Este ejercicio muestra que la cancelación puede fallar aun cuando el factor que queremos cancelar es más "sustancioso".)

3. La ley distributiva

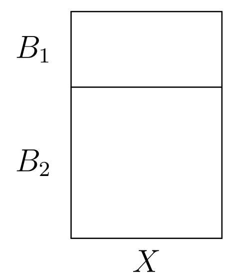
En todas las categorías que hemos estudiado las sumas y los productos están relacionados mediante la *ley distributiva*. Como una aplicación de la regla para definir morfismos hacia un producto (y de la regla "dual" para definir morfismos *desde* una suma) traten de hacer lo siguiente:

Ejercicio 6
Suponiendo que X, B_1 y B_2 son objetos de una categoría con sumas y productos, construya un morfismo de la suma de $X \times B_1$ y $X \times B_2$ en el producto de X con $B_1 + B_2$, esto es, construya un morfismo:

$$(X \times B_1) + (X \times B_2) \longrightarrow X \times (B_1 + B_2)$$

Sugerencia: Use las propiedades universales de morfismo de suma y producto y combine las inyecciones y proyecciones adecuadas.

Algunas categorías obedecen la "ley" de que el morfismo construido en el ejercicio tiene siempre un inverso. Tal "distributividad" es estructural y no meramente cuantitativa, pero una manera útil, aunque un poco burda, de pensar acerca de esta ley distributiva de los productos con respecto a las sumas, es la de considerar que el área de un rectángulo formado por dos rectángulos



es igual a la suma de las áreas de los dos rectángulos pequeños:

$$\textit{Área de } X \times (B_1 + B_2) = \textit{Área de } X \times B_1 + \textit{Área de } X \times B_2$$

Sesión 26

Categorías distributivas y categorías lineales

1. El morfismo canónico $\mathbf{A \times B_1 + A \times B_2 \longrightarrow A \times (B_1 + B_2)}$

Como un ejercicio, en la sesión anterior se les pidió que encontraran, para cualesquiera tres objetos A, B_1 y B_2 de una categoría $\mathcal{C}$ que tiene sumas y productos, un morfismo "canónico":

$$A \times B_1 + A \times B_2 \longrightarrow A \times (B_1 + B_2).$$

En muchas categorías este morfismo y el morfismo canónico $\mathbf{0} \to A \times \mathbf{0}$ (único) tienen inversos; cuando esto sucede decimos que la *ley distributiva* se satisface en $\mathcal{C}$ o que la categoría $\mathcal{C}$ es *distributiva*. Éste es el caso en todas las categorías que hemos discutido en las sesiones.

En las categorías en las que la ley distributiva no se satisface el uso de la palabra "suma" para esa construcción suele evitarse, en su lugar se utiliza "coproducto", que es (como ya lo dijimos en la sesión anterior) "dual del producto". Una de las maneras fundamentales en que una categoría es diferente de otra es la relación entre los conceptos y los coconceptos. En muchas categorías la ley distributiva es válida pero en otras categorías hay, en lugar de ésta, relaciones diferentes, pero igualmente interesantes, entre producto y coproducto.

La construcción del morfismo canónico mencionado arriba será una aplicación de un hecho general que se obtiene combinando la propiedad universal de morfismo de productos con aquella de coproductos: *un morfismo desde un coproducto de dos objetos a un producto de dos objetos es "equivalente" a cuatro morfismos, uno de cada sumando a cada factor.* Como su dominio es un coproducto sabemos que un morfismo f de $C_1 + C_2$ en $A \times B$ está determinado por sus composiciones con las inyecciones de C_1 y C_2 y puede denotarse:

$$f = \begin{cases} f_1 \\ f_2 \end{cases}$$

donde f_1 y f_2 son el resultado de componer f con las inyecciones de C_1 y C_2 a $C_1 + C_2$.

$$\begin{tikzcd}
C_1 \arrow[dr, "j_1"'] \arrow[drr, bend left, "f_1"] & & \\
& C_1 + C_2 \arrow[r, "f"] & A \times B \\
C_2 \arrow[ur, "j_2"] \arrow[urr, bend right, "f_2"'] & &
\end{tikzcd}$$

Además, cada uno de los morfismos f_1 y f_2 es un morfismo hacia un producto y tiene, entonces, dos componentes, de manera que:

$$f_1 = \langle f_{1A}, f_{1B} \rangle \text{ y } f_2 = \langle f_{2A}, f_{2B} \rangle$$

$$\begin{tikzcd} & & A \\ C_1 \arrow[urr, bend left, "f_{1A}"] \arrow[drr, bend right, "f_{1B}"'] \arrow[r, "f_1"] & A \times B \arrow[ur, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ & & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & & A \\ C_2 \arrow[urr, bend left, "f_{2A}"] \arrow[drr, bend right, "f_{2B}"'] \arrow[r, "f_2"] & A \times B \arrow[ur, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ & & B \end{tikzcd}$$

El resultado final es que f puede descomponerse en los cuatro morfismos:

$$C_1 \xrightarrow{f_{1A}} A \qquad C_1 \xrightarrow{f_{1B}} B$$
$$C_2 \xrightarrow{f_{2A}} A \qquad C_2 \xrightarrow{f_{2B}} B$$

y, recíprocamente, cualesquiera cuatro morfismos de esa forma determinan un morfismo de $C_1 + C_2$ a $A \times B$ dado por:

$$f = \begin{cases} \langle f_{1A}, f_{1B} \rangle \\ \langle f_{2A}, f_{2B} \rangle \end{cases}$$

que es más a menudo denotado mediante una *matriz* (usando un arreglo rectangular de morfismos encerrados en parentesis):

$$f = \begin{bmatrix} f_{1A} & f_{1B} \\ f_{2A} & f_{2B} \end{bmatrix}$$

Este análisis puede llevarse a cabo de manera más general, para coproductos y productos de cualquier número de objetos. Para cualesquiera objetos $C_1, \ldots, C_m$ y $A_1, \ldots, A_n$, denotemos las proyecciones de producto por $A_1 \times \ldots \times A_n \xrightarrow{p_\nu} A_\nu$ y a las inyecciones de coproducto por $C_\mu \xrightarrow{j_\mu} C_1 + \ldots + C_m$. Entonces, para cualquier matriz:

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \ldots & f_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ f_{m1} & & \ldots & f_{mn} \end{bmatrix}$$

con $f_{\mu\nu} : C_\mu \to A_\nu$ hay *exactamente un* morfismo:

$$C_1 + \ldots + C_m \xrightarrow{f} A_1 \times \ldots \times A_n$$

que satisface todas las $m \times n$ ecuaciones:

$$f_{\mu\nu} = p_\nu f j_\mu$$

Esta manera de enunciar el resultado, que da la matriz para f mediante *fórmulas*, también hace claro que si analizamos el morfismo f en el sentido inverso —primero usando que $A \times B$ es un producto y luego que $C_1 + C_2$ es un coproducto— obtenemos la misma matriz.

Para aplicar esto al problema de definir un morfismo

$$A \times B_1 + A \times B_2 \longrightarrow A \times (B_1 + B_2)$$

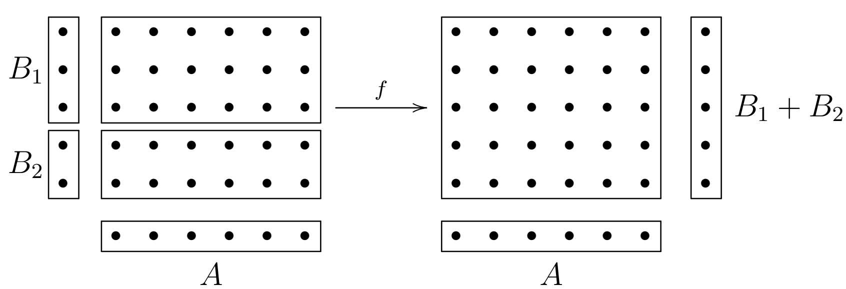
debemos definir cuatro morfismos como sigue:

$$\begin{array}{ll} A \times B_1 \longrightarrow A & A \times B_1 \longrightarrow B_1 + B_2 \\ A \times B_2 \longrightarrow A & A \times B_2 \longrightarrow B_1 + B_2 \end{array}$$

y deben definirse utilizando solamente las proyecciones de producto y las inyecciones de suma canónicos. ¿Qué morfismos podemos escoger? Los dos de la izquierda no requieren mucha reflexión: podemos escoger las proyecciones de producto en A. Incluso los morfismos de la derecha no son muy difíciles porque podemos usar para cada uno una proyección de producto (a B_1 y B_2 respectivamente) seguido de una inyección de suma. Por ejemplo, para el primer morfismo de la derecha podemos tomar el morfismo compuesto:

$$A \times B_1 \xrightarrow{proy} B_1 \xrightarrow{iny} B_1 + B_2$$

El morfismo canónico $A \times B_1 + A \times B_2 \xrightarrow{f} A \times (B_1 + B_2)$ es el producido por estas elecciones. Este morfismo puede visualizarse mediante el diagrama:



Hay una **ley general distributiva** que es válida en todas las categorías distributivas. Si B_1, $B_2, \ldots, B_n$ y A son objetos en cualquier categoría con sumas y productos hay un morfismo canónico:

$$A \times B_1 + A \times B_2 + \ldots + A \times B_n \longrightarrow A \times (B_1 + B_2 + \ldots + B_n)$$

La ley general distributiva dice que este morfismo canónico es un isomorfismo. En el caso en que $n = 0$ (suma de cero objetos) el dominio de este morfismo es un objeto inicial y el morfismo es el único morfismo:

$$\mathbf{0} \longrightarrow A \times \mathbf{0}$$

que es claramente una sección para la proyección de producto $A \times \mathbf{0} \to \mathbf{0}$. La ley general distributiva implica que éste es de hecho un isomorfismo, de manera que la "identidad" $A \times \mathbf{0} = \mathbf{0}$ puede verse como una consecuencia de la ley general distributiva. Recíprocamente, se puede demostrar que el caso especial $n=2$ de distributividad implica la ley general distributiva. En la parte V estudiaremos los "objetos exponenciales" y demostraremos que cualquier categoría con éstos es distributiva.

DANILO: ¿Qué clases de categorías no satisfacen la ley distributiva?

El ejercicio 20 del artículo IV dice que la categoría de conjuntos punteados no es distributiva. Hay además una clase importante de categorías, que llamamos *categorías lineales*, en las que $A \times B$ es siempre isomorfo a $A + B$ y solamente las categorías lineales triviales satisfacen la ley distributiva.

2. Multiplicación de matrices en categorías lineales

Permítanme salirme un poco del tema principal para decir algo sobre estas categorías lineales. Primero, las categorías lineales tienen morfismos cero. Con esto queremos decir que para cualesquiera dos objetos X, Y hay un morfismo especial de X en Y llamado el *morfismo cero de X en Y* y lo denotamos 0_{XY}. La propiedad fundamental del morfismo cero es la de que, compuesto con cualquier otro morfismo, produce otro morfismo cero. Entonces para cualquier morfismo $Y \xrightarrow{g} Z$, la composición $g0_{XY}$ es el morfismo 0_{XZ}. De manera similar, para cualquier morfismo $W \xrightarrow{f} X$, $0_{XY}f = 0_{WY}$. Como de costumbre, es una buena idea dibujar los diagramas externos para estas composiciones para ver cómo se acomodan dominios y codominios.

La existencia de los morfismos cero tiene como consecuencia que podemos definir un morfismo favorito del coproducto $X + Y$ en el producto $X \times Y$,

$$f = \begin{bmatrix} 1_X & 0_{XY} \\ 0_{YX} & 1_Y \end{bmatrix} : X + Y \to X \times Y$$

Este morfismo se llama la "matriz identidad".

Definición: *Una categoría con sumas, productos y morfismos cero en el que cada "matriz identidad" es un isomorfismo se llama* ***categoría lineal****.*

En una categoría lineal podemos "multiplicar" cualesquiera matrices

$$A + B \xrightarrow{f} X \times Y \quad \text{y} \quad X + Y \xrightarrow{g} U \times V$$

debido a que cada matriz identidad es un isomorfismo. Simplemente, definimos su producto como:

$$\begin{bmatrix} f_{AX} \, f_{AY} \\ f_{BX} \, f_{BY} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} g_{XU} \, g_{XV} \\ g_{YU} \, g_{YV} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{XU} \, g_{XV} \\ g_{YU} \, g_{YV} \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1_X \, 0_{XY} \\ 0_{YX} \, 1_Y \end{bmatrix}^{-1} \circ \begin{bmatrix} f_{AX} \, f_{AY} \\ f_{BX} \, f_{BY} \end{bmatrix}$$

Este "producto" es otra matriz (pero ahora de $A + B$ a $U \times V$) ya que no es más que el morfismo compuesto:

$$A + B \xrightarrow{f} X \times Y \xrightarrow{\alpha} X + Y \xrightarrow{g} U \times V$$

donde α es la inversa de la matriz identidad que supusimos que existía.

3. Sumas de morfismos en una categoría lineal

Esta multiplicación de matrices tiene una consecuencia muy interesante. Si A y B son cualesquiera dos objetos en una categoría lineal, podemos *sumar* cualesquiera dos morfismos de A en B y obtener otro morfismo de A en B. Utilizamos el siguiente caso particular de la multiplicación de matrices anterior (denotando los dos morfismos que vamos a sumar por $A \xrightarrow{f} B$ y $A \xrightarrow{g} B$): tómese $X = U = A$, $Y = V = B$ y las matrices:

$$\begin{bmatrix} g_{XU} & g_{XV} \\ g_{YU} & g_{YV} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1_{AA} & g \\ 0_{BA} & 1_{BB} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} f_{AX} & f_{AY} \\ f_{BX} & f_{BY} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1_{AA} & f \\ 0_{BA} & 1_{BB} \end{bmatrix}$$

Se puede demostrar que el "producto" de estas dos matrices debe ser de la forma:

$$\begin{bmatrix} 1_{AA} & g \\ 0_{BA} & 1_{BB} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1_{AA} & f \\ 0_{BA} & 1_{BB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1_{AA} & h \\ 0_{BA} & 1_{BB} \end{bmatrix}$$

para exactamente un morfismo $h: A \longrightarrow B$. La suma de f y g es ahora *definida* como este morfismo h,

$$\begin{bmatrix} 1_{AA} & g \\ 0_{BA} & 1_{BB} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1_{AA} & f \\ 0_{BA} & 1_{BB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1_{AA} & f+g \\ 0_{BA} & 1_{BB} \end{bmatrix}$$

Lo más interesante es que ahora obtenemos una fórmula para la multiplicación de matrices en términos de esta suma de morfismos:

Ejercicio 1
Utilizando las definiciones anteriores de multiplicacion de matrices y suma de morfismos, demuestre la siguiente *fórmula para la multiplicación de matrices*:

$$\begin{bmatrix} f_{AX} & f_{AY} \\ f_{BX} & f_{BY} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} g_{XU} & g_{XV} \\ g_{YU} & g_{YV} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{XU} \circ f_{AX} + g_{YU} \circ f_{AY} & g_{XV} \circ f_{AX} + g_{YV} \circ f_{AY} \\ g_{XU} \circ f_{BX} + g_{YU} \circ f_{BY} & g_{XV} \circ f_{BX} + g_{YV} \circ f_{BY} \end{bmatrix}$$

Vale la pena mencionar de dónde vienen los morfismo cero. En una categoría lineal el producto de una familia finita de objetos es isomorfa al coproducto. Para una familia vacía esto dice que el objeto terminal es isomorfo al objeto inicial. Este isomorfismo nos permite definir "el morfismo cero" de X a Y como el morfismo compuesto de los morfismos únicos:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[rrr, bend right, "0_{XY}"'] & \mathbf{1} \arrow[r] & \mathbf{0} \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

Ejercicio 2
Demuestre que una categoría con objetos inicial y terminal tiene morfismos cero si y sólo si un objeto inicial es isomorfo a un objeto terminal.

Decir que un objeto inicial es isomorfo a un objeto terminal es equivalente a decir que existe un morfismo del objeto terminal al objeto inicial; un morfismo así es necesariamente un isomorfismo. (¿Por qué? ¿Cuál es su inverso?). *¡Precaución!* Para comparar categorías distributivas con categorías lineales hemos escrito las matrices de una manera diferente ("transpuesta") de la manera usual en que se escriben en categorías lineales.

4. La ley asociativa para sumas y productos

La ley asociativa para la multiplicación de objetos es verdadera en *cualquier* categoría con productos. (Éste es el tema del ejercicio 16 en el artículo IV.) Sólo para practicar dualización discutiremos, en lugar de ésta, el problema correspondiente para sumas.

La suma de tres objetos puede definirse casi de la misma manera como la suma de dos objetos. La única diferencia es que la propiedad universal de morfismo involucrará ahora tres morfismos inyección:

$$\begin{tikzcd} B_1 \arrow[dr, "j_1"'] & B_2 \arrow[d, "j_2"] & B_3 \arrow[dl, "j_3"] \\ & B_1 + B_2 + B_2 & \end{tikzcd}$$

y la propiedad universal de morfismo que la define es que para cualesquiera tres morfismos de B_1, B_2 y B_3 en cualquier objeto X,

$$\begin{tikzcd} B_1 \arrow[dr, "f_1"'] & B_2 \arrow[d, "f_2"] & B_2 \arrow[dl, "f_3"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

hay un único morfismo $B_1 + B_2 + B_3 \xrightarrow{f} X$ que se puede denotar por

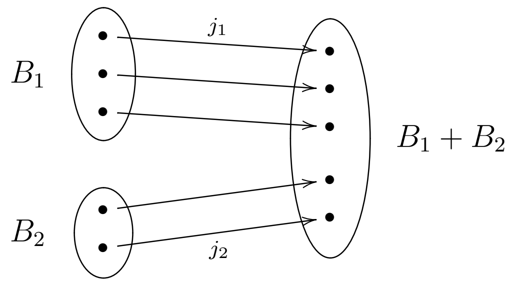
$$f = \begin{cases} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{cases}$$

tal que $fj_1 = f_1$, $fj_2 = f_2$ y $fj_3 = f_3$. Si una categoría tiene sumas de dos objetos, también tiene sumas de tres objetos: dados B_1, B_2 y B_3 formamos la suma de B_1 y B_2 y luego la suma de $B_1 + B_2$ con B_3. Obtenemos inyecciones de $B_1 + B_2$ y B_3 y la composición con las inyecciones de B_1 y B_2 en $B_1 + B_2$ nos dan las tres inyecciones requeridas para una suma de tres objetos:

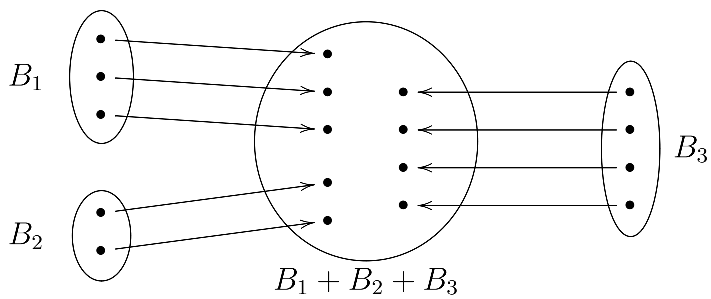
$$\begin{tikzcd} B_1 \arrow[dr] & & B_2 \arrow[dl] & \\ & B_1 + B_2 \arrow[dr] & & B_3 \arrow[dl] \\ & & (B_1 + B_2) + B_3 & \end{tikzcd}$$

Verifiquen que la propiedad universal de morfismo de una suma de tres objetos se satisface.

Veamos un ejemplo de esto con conjuntos. Sean B_1, B_2 y B_3 conjuntos con 3, 2 y 4 elementos respectivamente. Entonces $B_1 + B_2$ es:



y si sumamos $B_1 + B_2$ con B_3 obtenemos un conjunto con las siguientes inyecciones:



Nuestra construcción produjo sumas triples en términos de sumas dobles. ¿Se les ocurre alguna otra construcción?

JUAN: Bueno, simplemente B_1 más $B_2 + B_3$.

Correcto. Esta construcción es un poco diferente pero pueden verificar, de la misma forma, que también nos da tres inyecciones que satisfacen la propiedad universal de morfismo correcta. Entonces el teorema de unicidad para sumas triples implica que tenemos un isomorfismo:

$$(B_1 + B_2) + B_3 \simeq B_1 + (B_2 + B_3)$$

Un razonamiento similar se aplica a sumas de cuatro objetos o más y, claramente, todo lo que hemos dicho sobre sumas se aplica también a productos de manera que uno puede encontrar el producto triple $A \times B \times C$ como $(A \times B) \times C$ o como $A \times (B \times C)$. Resumiendo, si es posible formar sumas y productos de dos objetos entonces es también posible formar sumas y productos de familias de más de dos objetos. ¿Qué será una suma o un producto de una familia con un objeto? Debería ser simplemente dicho objeto ¿correcto? Y de hecho, lo es. Para demostrarlo, uno debe primero usar la definición de suma o producto de cualquier familia de objetos y después utilizar el hecho de que todo objeto tiene morfismo identidad. ¿Qué tal la suma o producto de una familia que no tiene objetos? Si sumamos ningún objeto, ¿cuál es el resultado? Correcto, el resultado es cero, el objeto inicial. Por otro lado, si multiplicamos ningún objeto el resultado es uno, el objeto terminal. Estos hechos pueden demostrarse muy fácilmente pero para eso tienen que entender muy bien las propiedades universales de morfismo que definen la suma y el producto de una familia de objetos. (Véase la sección 5 del artículo IV.)

Sesión 27

Ejemplos de construcciones universales

1. Construcciones universales

Hemos visto que hay dos clases de construcciones universales: aquéllas similares a la multiplicación y al objeto terminal —el término técnico es "límites"— y aquellas similares a la suma y al objeto inicial: "colímites". Resumamos en una tabla todas las construcciones universales que hemos estudiado.

Construcciones universales

colímites	**límites**
Objeto inicial (denotado usualmente **0**)	Objeto terminal (denotado usualmente **1**)
Suma de dos objetos	Producto de dos objetos
Suma de tres objetos, etc.	Producto de tres objetos, etc.

Revisemos lo que es un objeto terminal. Decir que T es un objeto terminal en la categoría $\mathcal{C}$ quiere decir ... ¿qué?

CHAD: Hay solamente un morfismo.

¿Un morfismo? ¿De dónde a dónde?

CHAD: Del otro objeto a T.

¿Qué otro objeto?

CHAD: Cualquier otro objeto.

Correcto. Desde cualquier otro objeto. Comienza la oración con eso, no lo dejes para el final porque entonces estás hablando de algo que nadie introdujo en la conversación. Ahora, ¿qué es un objeto inicial?

FÁTIMA: Un objeto inicial es uno que tiene exactamente un morfismo a cualquier otro objeto.

Correcto. Pero deben acostumbrarse a comenzar con ese otro objeto: "para cada objeto X en $\mathcal{C}$ ...". Es una definición curiosa porque se refiere a *todos* los objetos de la categoría. Ésa es la característica de las definiciones dadas mediante propiedades universales de morfismo. ¿Qué es un objeto terminal en la categoría de conjuntos?

DANILO: Un solo elemento.

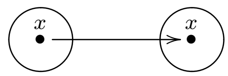
Correcto. Cualquier conjunto con un solo elemento. ¿Qué tal en la categoría de sistemas dinámicos?

FÁTIMA: Un conjunto con un punto fijo.

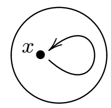
¿Y algo más?

FÁTIMA: No.

Correcto. El objeto terminal en esta categoría es simplemente el morfismo identidad de cualquier conjunto con exactamente un elemento, el cual podemos dibujar como:



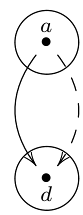
o, mejor aún, como:



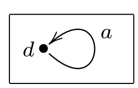
¿Qué tal la categoría de gráficas? ¿Qué es un objeto terminal allí?

CHAD: Un elemento arriba, un elemento abajo y como salida y llegada el morfismo único.

Correcto. Eso es exactamente la gráfica terminal. Acostumbrábamos dibujarla:



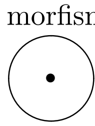
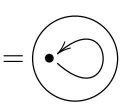
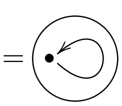
donde la flecha sólida representa el morfismo "salida" y la flecha punteada representa el morfismo "llegada". Pero teníamos una manera más agradable de dibujar una gráfica, que consistía en dibujar todos los elementos del conjunto de arriba como flechas y dibujarlas junto con los vértices en un conjunto, posicionando las flechas con respecto a los vértices de tal manera que los morfismos "salida" y "llegada" sean obvios. Entonces la gráfica que acaba de describir Chad puede dibujarse como:



Noten la similitud con el objeto terminal de la categoría de sistemas dinámicos.

Acomodemos los objetos terminales en estas categorías en una tabla.

Objeto terminal si $\mathcal{C}$ es la categoría ...

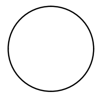
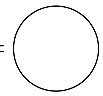
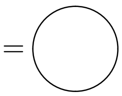
$\mathcal{S}=$ Conjuntos y todos los morfismos	$\mathcal{S}^{\circlearrowright}=$ Sistemas dinámicos	$\mathcal{S}^{\downdownarrows}=$ Gráficas
$T=$ 	$T=$ 	$T=$ 

¿Qué pasa con los objetos iniciales? ¿Qué es un objeto inicial en la categoría de conjuntos?

DANILO: Un conjunto vacío.

Correcto. Y dijimos que en las otras categorías el objeto inicial también era "vacío", entonces tenemos:

Objeto inicial si $\mathcal{C}$ es la categoría ...

$\mathcal{S}=$ Conjuntos y todos los morfismos	$\mathcal{S}^{\circlearrowleft}=$ Sistemas dinámicos	$\mathcal{S}^{\downdownarrows}=$ Gráficas
$I=$ 	$I=$ 	$I=$ 

Además de eso, también descubrimos algunas propiedades como:

$$\mathbf{0}+A=A \qquad \Big| \qquad \mathbf{1}\times A=A$$

Estas ecuaciones parecen simples porque son familiares para números pero aquí tienen más significado. El producto de dos números es simplemente un número pero el producto de dos objetos R y Q es otro objeto P *y* dos morfismos "proyección" $P \to R$ y $P \to Q$. Entonces, cuando dijimos que A es el producto de A y $\mathbf{1}$ tuvimos que *especificar* los morfismos proyección:

$$\begin{tikzcd} & A \\ A \arrow[ur, "p_1"] \arrow[dr, "p_2"'] & \\ & \mathbf{1} \end{tikzcd}$$

Para p_2 había exactamente una posibilidad y para p_1 tomamos la identidad en A, $1_A{:}A \to A$. La aseveración de que estas elecciones hacen a A un producto de A y $\mathbf{1}$ *quiere decir* que para cada objeto X y cada par de morfismos $f_1{:}X \longrightarrow A$, $f_2{:}X \longrightarrow \mathbf{1}$ hay exactamente un morfismo $f{:}X \longrightarrow A$ que podemos usar para rellenar el dibujo y hacer el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} & & A \\ X \arrow[urr, bend left, "f_1"] \arrow[drr, bend right, "f_2"'] \arrow[r, dashed] & A \arrow[ur, "1_A"'] \arrow[dr] & \\ & & \mathbf{1} \end{tikzcd}$$

(La demostración era fácil porque una de las dos ecuaciones, $1_A f = f_1$ nos forzaba a elegir a la flecha punteada f como la misma f_1 y la segunda ecuación se satisfacía automáticamente porque f_2 y $p_2 \circ f$ son morfismos $X \to \mathbf{1}$.)

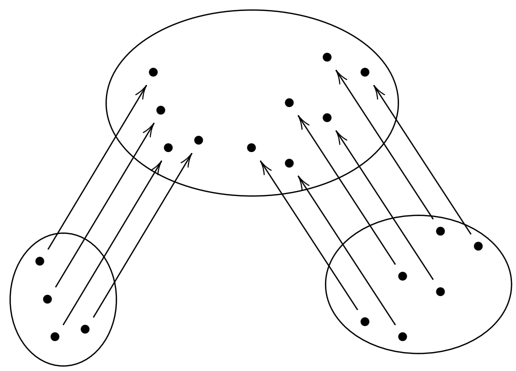
2. ¿Pueden los objetos tener negativos?

Para los números, el *negativo* de 3 está definido como una solución de la ecuación $3+x=0$. De manera similar, si A es un objeto de una categoría, un *negativo* de A será un objeto B tal que $A+B=\mathbf{0}$.

Cada uno de los símbolos "+", "=" y "**0**" en esa ecuación tiene un significado especial, "+" quiere decir coproducto de objetos, la intención de "=" es "es isomorfo a” y “$\mathbf{0}$” quiere decir “objeto inicial”. De manera análoga, A y B representan objetos de la categoría, no números.

¿Puede el objeto inicial $\mathbf{0}$ servir como el coproducto de dos objetos A y B? Recuerden que un coproducto de A y B es un objeto C y un par de morfismos “óptimo” $A \to C \leftarrow B$. Debemos encontrar morfismos $A \xrightarrow{j_1} \mathbf{0} \xleftarrow{j_2} B$ tales que para cada objeto X con morfismos $A \xrightarrow{f_1} X \xleftarrow{f_2} B$ hay exactamente un morfismo $\mathbf{0} \xrightarrow{f} X$ tal que $f_1 = fj_1$ y $f_2 = fj_2$. ¿Qué morfismos se nos pueden ocurrir de A en $\mathbf{0}$?

Planteemos la pregunta en el caso concreto de la categoría de conjuntos donde tenemos una muy buena idea de qué es un coproducto porque el coproducto de dos conjuntos es simplemente “todos los elementos de los dos conjuntos juntos”, como en este ejemplo:



¿Qué dirían sobre los conjuntos A y B si su coproducto es cero?

CHAD Y OMER (a coro): Ambos tienen que ser cero.

Correcto. Vemos que exactamente una clase de conjunto tiene negativo, que es su propio negativo. Esto nos lleva a sospechar que la misma cosa podría ser verdad en cualquier categoría: ¿podemos demostrar que A y B deben ser $\mathbf{0}$ si $A + B = \mathbf{0}$?

Estamos suponiendo aquí que tenemos inyecciones $A \xrightarrow{j_1} \mathbf{0} \xleftarrow{j_2} B$ tales que para cualquier objeto X con morfismos $A \xrightarrow{f_1} X \xleftarrow{f_2} B$ existe exactamente un morfismo $\mathbf{0} \xrightarrow{f} X$ tal que $f_1 = fj_1$ y $f_2 = fj_2$. ¿Cómo verificamos si A es un objeto inicial?

OMER: Hay un ...

Equivocado. Debes comenzar ...

DANILO: Para cada objeto ...

¿Sí?

DANILO: Para cada objeto X en $\mathcal{C}$ hay exactamente un morfismo de A en X.

Y ¿cómo podemos verificarlo?

DANILO: Para empezar, hay exactamente un morfismo $f{:}\mathbf{0} \to X$.

Correcto, entonces fj_1 es un morfismo de A a X pero necesitamos demostrar que es el único morfismo de A en X para demostrar que A es inicial. Tomemos $g{:}A \to X$ y tratemos de demostrar que $g = fj_1$. Como tenemos $A \xrightarrow{g} X \xleftarrow{fj_2} B$, la propiedad universal del coproducto nos da un morfismo de $\mathbf{0}$ a X (que debe ser f) tal que $fj_1 = g$ y $fj_2 = fj_2$. La segunda de estas ecuaciones no es interesante pero la primera es lo que necesitábamos.

Hay otra manera de ver lo mismo pero considerando simultáneamente los objetos A y B. Decir que $\mathbf{0}$ es un coproducto de A y B quiere decir que para cualquier objeto X, los pares de morfismos $A \xrightarrow{f_1} X \xleftarrow{f_2} B$ son lo mismo que los morfismos $\mathbf{0} \to X$. Hay solamente un morfismo de $\mathbf{0}$ en X (porque $\mathbf{0}$ es inicial) y por lo tanto hay solamente un par de morfismos $A \xrightarrow{f_1} X \xleftarrow{f_2} B$. Entonces hay solamente un morfismo $A \to X$ y solamente un morfismo $B \to X$. Esto quiere decir que ambos, A y B, son objetos iniciales. Ahora tenemos una respuesta completa a nuestra pregunta: un objeto inicial tiene un negativo pero sólo los objetos iniciales tienen negativos.

Es importante mencionar que a pesar de que en las categorías que hemos estudiado es trivial que $A + B = \mathbf{0}$ implica "$A = \mathbf{0}$" y "$B = \mathbf{0}$", hemos demostrado esto también en otras categorías en las que no es tan evidente. Más sorprendente, podemos cambiarnos de la columna de los colímites a la columna de los límites "dualizando" así el teorema. La afirmación dualizada y su demostración se obtienen invirtiendo la dirección de todos los morfismos en la discusión anterior, que incluye remplazar cada concepto por su concepto dual. Así obtenemos una afirmación acerca de un producto de dos objetos y un objeto terminal y obtenemos también una demostración de esa afirmación. Deben resolver esto ustedes mismos así que lo pondremos como un ejercicio.

Ejercicio 1
Demuestre que si A y B son objetos y $A \times B = \mathbf{1}$ entonces $A = B = \mathbf{1}$. Más precisamente, si $\mathbf{1}$ es terminal y

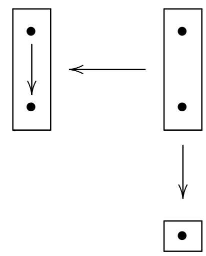
$$\begin{tikzcd} & A \\ \mathbf{1} \arrow[ur, "p_1"] \arrow[dr, "p_2"'] & \\ & B \end{tikzcd}$$

es un producto, entonces A y B son objetos terminales.

El punto es que la solución al ejercicio está contenida en la discusión de $A + B = \mathbf{0}$. Necesitan simplemente tomar todo lo que se dijo allí y

donde dice ...	escriba en su lugar ...
coproducto	producto
$+$	$\times$
$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$
$\rightarrow$	$\leftarrow$
$\leftarrow$	$\rightarrow$

Después de que esta "traducción" se haya completado tendrán la solución al ejercicio, de manera que la *lógica* de los dos resultados es la misma. Aun así, en algunos de los ejemplos el segundo resultado es menos obvio que el primero. Por ejemplo, en la categoría de las gráficas, encontramos instancias de productos que eran “más pequeños” que uno de los factores, como en el caso de $F \times V = 2V$:



3. Objetos idempotentes

Busquemos objetos C para los cuales “$C \times C = C$”. Esto pregunta: ¿cuáles objetos C tienen morfismos

$$\begin{tikzcd} & C \\ C \arrow[ur, "p_1"] \arrow[dr, "p_2"'] & \\ & C \end{tikzcd}$$

que son proyecciones de producto? La pregunta se vuelve más precisa si se dan los morfismos p_1 y p_2. Preguntemos por aquellos objetos C tales que, tomando ambos, p_1 y p_2, como la identidad de C, obtenemos un producto. Esto quiere decir que para cualquier objeto X y cualesquiera morfismos

$$\begin{tikzcd} & C \\ X \arrow[ur, "x"] \arrow[dr, "y"'] & \\ & C \end{tikzcd}$$

hay exactamente un morfismo $X \xrightarrow{f} C$ tal que este diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} & & C \\ X \arrow[rru, bend left, "x"] \arrow[r, "f"] \arrow[rrd, bend right, "y"'] & C \arrow[ur, "1_C"'] \arrow[dr, "1_C"] & \\ & & C \end{tikzcd}$$

esto es, tal que $1_C f = x$ y $1_C f = y$. Esto claramente implica $x = y$; cualesquiera dos morfismos de cualquier objeto a C ¡deben ser iguales! Esto es: si

$$\begin{tikzcd} & C \\ C \arrow[ur, "1_C"] \arrow[dr, "1_C"'] & \\ & C \end{tikzcd}$$

es un producto entonces para cada X hay *a lo más un* morfismo $X \longrightarrow C$. De hecho, el recíproco es también cierto:

Ejercicio 2
(a) Demuestre que si C tiene la propiedad de que para cada X hay a lo más un morfismo $X \longrightarrow C$, entonces

$$\begin{tikzcd} & C \\ C \arrow[ur, "1_C"] \arrow[dr, "1_C"'] & \\ & C \end{tikzcd}$$

es un producto.
(b) Demuestre que la propiedad de arriba es también equivalente a la siguiente propiedad: el único morfismo $C \longrightarrow \mathbf{1}$ es un monomorfismo.

¿Pueden pensar en algunos ejemplos?

DANILO: El conjunto vacío.

Sí. Parece que podría funcionar. Supongamos que tenemos dos morfismos de un conjunto X al conjunto vacío $\mathbf{0}$ ...

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{0} \\ X \arrow[ur, "f_1"] \arrow[dr, "f_2"'] & \\ & \mathbf{0} \end{tikzcd}$$

OMER: Entonces X es vacío también.

Bien. Si hay algún morfismo de X en un conjunto vacío entonces X debe ser vacío.

CHAD: De manera que hay a lo más un morfismo $X \longrightarrow \mathbf{0}$ porque si X no es vacío no hay y si X es vacío hay exactamente uno.

Bien. Aquí hay un ejercicio sobre estos objetos.

Ejercicio 3
Encuentre todos los objetos C en $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}^{\circlearrowright}$ y $\mathcal{S}^{\downdownarrows}$ tales que esto es un producto:

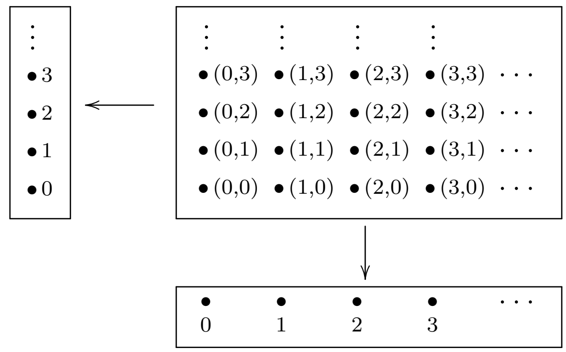
$$\begin{tikzcd} & C \\ C \arrow[ur, "1_C"] \arrow[dr, "1_C"'] & \\ & C \end{tikzcd}$$

DANILO: ¿Hay ejemplos con $C \times C$ isomorfo a C pero para los cuales las proyecciones no son morfismos identidad?

Sí. Uno de los ejemplos más interesantes fue discutido por Cantor (acerca del cual tendremos más que decir adelante). El conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales tiene un par de morfismos

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{N} \\ \mathbb{N} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & \mathbb{N} \end{tikzcd}$$

que forman un producto pero que no son el morfismo identidad. Para encontrar morfismos "proyección" adecuados dibujemos $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ como un conjunto de pares de la forma en que hemos dibujado usualmente los productos:



Ahora definimos un isomorfismo $\mathbb{N} \xrightarrow{f} \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ haciendo repetidamente "viajes hacia el noroeste" a través de los elementos de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ como se indica en esta figura:

$$\begin{array}{llll} 9 & & & \\ 5 & 8 & & \\ 2 & 4 & 7 & \\ 0 & 1 & 3 & 6 \end{array}$$

Esto es, $f(0)=(0,0)$, $f(1)=(1,0)$, $f(2)=(0,1)$, $f(3)=(2,0)$, $f(4)=(1,1)$, *etc.* Si componemos este isomorfismo con los dos morfismos proyección usuales nos da los dos morfismos $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que queríamos. (Estas diagonales al noroeste van recorriendo las fibras del morfismo suma; véase la sesión 29.)

Ejercicio 4
La inversa, llámela g, del isomorfismo de conjuntos $\mathbb{N} \xrightarrow{f} \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ de arriba está, de hecho, dada por un polinomio cuadrático de la forma

$$g(x,y) = \frac{1}{2}(ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey)$$

donde a, b, c, d y e son números naturales fijos. ¿Puede encontrarlos? ¿Puede demostrar que el morfismo g definido mediante su fórmula es un isomorfismo de conjuntos? Podría esperar que f tuviera una fórmula más simple que su inversa g porque un morfismo $\mathbb{N} \xrightarrow{f} \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ corresponde a un par de morfismos $f_1 = p_1 f$ y $f_2 = p_2 f$ de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$. Pero f_1 y f_2 no son tan simples. De hecho, no importa *qué* isomorfismo $\mathbb{N} \xrightarrow{f} \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ escoja, f_1 no puede ser dado mediante un polinomio. ¿Puede ver por qué?

4. Resolver ecuaciones y dibujar morfismos

Las nociones generales de límite y colímite se discuten en libros de geometría, álgebra, lógica, etcétera, donde se usa la teoría de categorías de manera explícita. Mientras que el caso particular de productos extrae un solo objeto de una familia de objetos, la construcción más general extrae un solo objeto de un diagrama que involucra ambos, objetos y morfismos. Un ejemplo importante es un diagrama de la forma $\boxed{\bullet \rightrightarrows \bullet}$: dos objetos dados y dos morfismos dados entre ellos. (Llamamos a esto un "par paralelo" de morfismos.) Para entender cómo se aplica la construcción universal de límite a diagramas de esa forma consideremos primero la noción de "solución de una ecuación". Si $fx = gx$ en el diagrama $T \xrightarrow{x} X \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y$, decimos que x es una solución de la ecuación $f \overset{?}{=} g$. No es usualmente el caso de que $f = g$ (si lo fuera, entonces todas las x serían solución). Ahora pedimos una solución *universal* para un par dado f, g, una que "incluya" todas las demás de manera única.

Definición: *$E \xrightarrow{p} X$ es un **igualador** de f, g si $fp = gp$ y para cada $T \xrightarrow{x} X$ para la cual $fx = gx$, hay exactamente un morfismo $T \xrightarrow{e} E$ para el cual $x = pe$.*

Ejercicio 5
Si ambos, E, p y F, q son igualadores para el mismo par de morfismos f, g, entonces el morfismo único $F \xrightarrow{e} E$ para el cual $pe = q$ es un isomorfismo.

Ejercicio 6
Cualquier morfismo p que es el igualador de algún par de morfismos es un monomorfismo (esto es, inyectivo).

Ejercicio 7
Si $B \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{\beta} B$ resulta la identidad al componerse, $1_B = \beta\alpha$, y si f es el idempotente $\alpha\beta$ entonces α es el igualador del par f, 1_A.

Ejercicio 8
Cualquier par paralelo $X \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y$ de morfismos en conjuntos, sin importar cómo o por qué se nos ocurrió, puede siempre imaginarse como la estructura salida y llegada de una gráfica. En una gráfica, ¿cuáles son las flechas que son nombradas por el igualador de los morfismos salida y llegada?

Otro uso de la palabra "gráfica", que es muy importante en matemáticas y en otras disciplinas, es el de describir cierta clase de dibujo del comportamiento detallado de una función particular, un dibujo que puede ser derivado de lo siguiente, en aquellos casos en los que podemos dibujar el producto cartesiano $X \times Y$ (por ejemplo, como un rectángulo cuando Y y X están dibujados separadamente como líneas).

Consideremos la proyección p_X al primer factor X desde un producto $X \times Y$. Cualquier sección de p_X producirá, componiendo con la otra proyección, un morfismo

$X \to Y$.

$$\begin{tikzcd} X \times Y \arrow[r] \arrow[d, shift left] & Y \\ X \arrow[u, shift left, "\text{sección}"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

La propiedad universal de los productos muestra que este proceso de secciones de p_X a morfismos $X \to Y$ puede invertirse:

Ejercicio 9
Para cualquier morfismo $X \xrightarrow{f} Y$ hay una única sección Γ de p_X para la cual $f = p_Y \Gamma$, a saber, $\Gamma = \langle ?, f \rangle$.

Esta sección Γ es llamada la *gráfica de* f. Como todas las secciones, la gráfica de un morfismo es un monomorfismo y, por lo tanto, puede dibujarse como una parte específica de $X \times Y$ una vez que tenemos una manera de dibujar este último. Las "partes" se discuten con más detalle en la parte V ya que es otra construcción límite importante, conocida como "intersección".

Ejercicio 10
Dados dos morfismos paralelos $X \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} Y$ en una categoría con productos (como $\mathcal{S}$), considere sus gráficas Γ_f y Γ_g. Explique de manera pictórica por qué el igualador de f y g es isomorfo a la intersección en $X \times Y$ de sus gráficas.

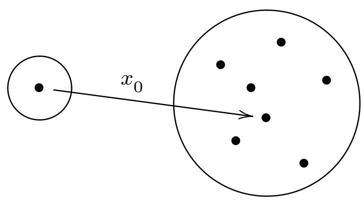
Los diagramas internos de morfismos particulares f que usamos frecuentemente en este libro son dibujos de la "cográfica" de f; por ejemplo, ellos contienen a $X + Y$ en lugar de estar contenidos en $X \times Y$. Traten de dualizar la definición de gráfica de f para obtener la definición precisa de "cográfica" de f. Traten asimismo de dualizar la definición de igualador para obtener la definción de "coigualador" y expliquen por qué, cuando morfismos paralelos en $\mathcal{S}$ se ven como estructura *salida/llegada*, el coigualador se convierte en el conjunto de "componentes" de la gráfica.

Sesión 28

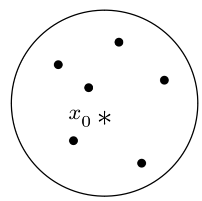
La categoría de conjuntos punteados

1. Un ejemplo de una categoría no distributiva

Las diferentes categorías de sistemas dinámicos y de gráficas que hemos discutido satisfacen todas la ley distributiva. Un ejemplo simple, que ocurre con frecuencia, de una categoría que no es distributiva es $\mathbf{1}/\mathcal{S}$, la *categoría de conjuntos punteados*. Un *objeto* de esta categoría es un conjunto X junto con un *punto base* o *punto distinguido* elegido, $\mathbf{1} \xrightarrow{x_0} X$. Podemos dibujar dicho objeto de esta categoría como



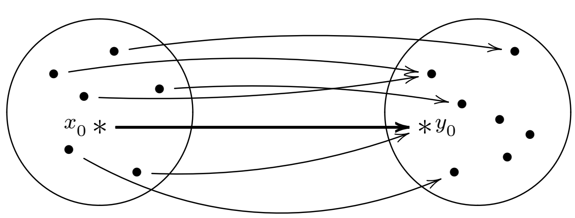
o simplemente como



Un punto distinguido es una clase de estructura muy simple en un conjunto. ¿Qué debe ser un morfismo en esta categoría? Un "morfismo que preserva la estructura" parece sugerir simplemente un morfismo de conjuntos que manda el punto base del dominio al punto base del codominio, así que tomamos eso como definición. Un *morfismo* en $\mathbf{1}/\mathcal{S}$ de un conjunto X con punto base $\mathbf{1} \xrightarrow{x_0} X$ a un conjunto Y con punto base $\mathbf{1} \xrightarrow{y_0} Y$ es un morfismo de conjuntos $X \xrightarrow{f} Y$ tal que $fx_0 = y_0$. Esto es lo mismo que decir que el triángulo siguiente conmuta:

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{1} \arrow[dl, "x_0"'] \arrow[dr, "y_0"] & \\ X \arrow[rr, "f"'] & & Y \end{tikzcd}$$

El diagrama interno de un tal morfismo se ve así:



El punto base del dominio se manda al punto base del codominio mientras que los otros puntos pueden mandarse a cualquiera de los puntos del codominio incluyendo el punto base.

Ya que les he dicho qué son los objetos y los morfismos, espero que puedan completar el trabajo de definir esta categoría. Decidan cómo componer morfismos (¡teniendo cuidado de que la composición de morfismos sea un morfismo!), decidan qué deben ser los morfismos identidad y verifiquen que las leyes identidad y asociativa sean ciertas.

El punto base a veces se llama el "origen" o el "punto preferido" pero en algunas aplicaciones a teoría de la computación es llamado el "punto basura". Entonces, el hecho de que los morfismos en esta categoría preserven el punto base se expresa mediante la colorida frase: "entra basura, sale basura". A veces, aun si lo que entra no es basura, el resultado es basura. El punto base en el codominio sirve como el recipiente de todos los resultados basura de un morfismo. Esto es útil porque algunos procesos para calcular tienen la propiedad de que para algunos datos de entrada el proceso no produce un resultado. En esta categoría no tendrán problema ya que cada codominio tiene un elemento distinguido a donde pueden mandar los datos de entrada cuya imagen esté indeterminada.

Ahora, ¿puede alguien adivinar cuál es el objeto terminal de esta categoría?

ALICIA: ¿Un elemento?

Correcto. Un conjunto con un solo elemento en el que ese elemento es el punto base. Es fácil demostrar que éste es en realidad un objeto terminal porque para cualquier conjunto con punto base hay exactamente un morfismo al conjunto con un solo elemento y, obviamente, este morfismo debe preservar el punto base, entonces sí es un morfismo en esta categoría.

¿Qué tal un objeto inicial?

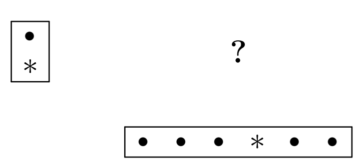
DANILO: ¿También solamente un punto base?

Sí. Cada objeto en esta categoría debe tener al menos un punto, de otra manera no es posible que tenga uno distinguido. Ahora bien, un conjunto con solamente un punto (con ese punto tomado como punto base) es claramente inicial porque cualquier morfismo de éste en cualquier objeto debe mandar su único punto al punto base de ese objeto. Así es que en esta categoría podemos escribir ¡"$\mathbf{0}=\mathbf{1}$"! (Esto no debe ser muy sorprendente ya que vimos en la sesión 26 que todas las categorías lineales también tienen $\mathbf{0}=\mathbf{1}$.)

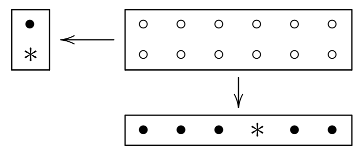
DANILO: Entonces, ¿el conjunto vacío no es un objeto de esta categoría?

Correcto. No tiene un punto que pueda elegirse como punto base, de manera que no puede hacerse un conjunto punteado.

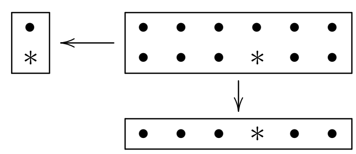
En esta categoría, el único morfismo $\mathbf{0}\to\mathbf{1}$ es un isomorfismo y, de acuerdo con lo que dijimos en la sesión 26, esta categoría tiene morfismos cero. ¿Qué pasa con los productos? ¿Existe un producto de dos conjuntos punteados?



Si calculamos simplemente el producto en conjuntos, obtenemos:

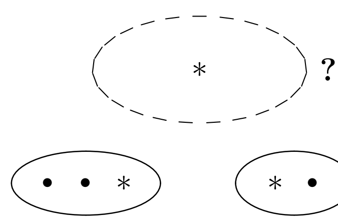


¿Es posible elegir un punto como punto base en este producto de conjuntos de tal manera que sea preservado por las proyecciones? Para esto tendría que ser un punto en el mismo renglón que el punto base del conjunto en la izquierda y en la misma columna que el punto base del conjunto de abajo, así que la elección es:

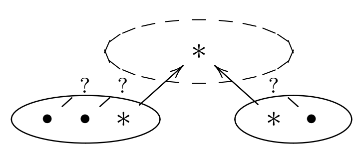


De hecho, funciona como el producto. La demostración no es difícil debido a que estamos utilizando como producto un conjunto que es el producto en la categoría de conjuntos.

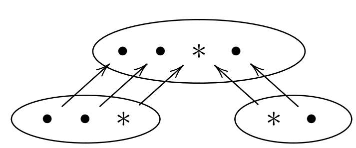
¿Qué pasa con las sumas? ¿Qué conjunto punteado puede usarse como la suma de los siguientes dos conjuntos punteados?



Tenemos que elegir morfismos que preserven el punto base, por lo que tienen que ser algo así:



y les dejo demostrar que el coproducto es éste:



En esta categoría la operación de coproducto consiste en "pegar por el punto base".

El ejercicio 1, abajo, está muy relacionado con los ejercicios 8, 9 y 20 del artículo IV.

Ejercicio 1
Ambas partes de la ley distributiva son falsas en la categoría de conjuntos punteados:

(a) Encuentre un objeto A para el cual

$$\mathbf{0} \longrightarrow \mathbf{0} \times A$$

no es un isomorfismo.

(b) Encuentre objetos A, B_1 y B_2 para los cuales el morfismo canónico

$$A \times B_1 + A \times B_2 \longrightarrow A \times (B_1 + B_2)$$

no es un isomorfismo.

Ejercicio 2
Como vimos, en la categoría de conjuntos punteados, el (único) morfismo $\mathbf{0} \longrightarrow \mathbf{1}$ es un isomorfismo. Demuestre que la otra cláusula en la definición de *categoría lineal* falla, esto es, encuentre objetos A y B en $\mathbf{1}/\mathcal{S}$ para los cuales la "matriz identidad"

$$A + B \longrightarrow A \times B$$

no es un isomorfismo.

EXAMEN 3

1. Demuestre: Si $\mathbf{1}$ es un objeto terminal y X es cualquier objeto, entonces *cualquier* morfismo $\mathbf{1} \xrightarrow{f} X$ es una *sección* de (¿el?) morfismo $X \xrightarrow{g} \mathbf{1}$.

2. Demuestre: Si $\mathbf{1}$ es un objeto terminal y C es cualquier objeto, entonces "$C \times \mathbf{1} = C$". (Primero debe explicar qué quiere decir "$C \times \mathbf{1} = C$". Para empezar, debe *decidir* qué morfismos p_1 y p_2 deben ser los "morfismos proyección" en:

$$\begin{tikzcd} & C \\ C \arrow[ur, "p_1"] \arrow[dr, "p_2"'] & \\ & \mathbf{1} \end{tikzcd}$$

Después de haber *elegido* los morfismos particulares p_1 y p_2 debe demostrar que satisfacen la "propiedad universal" correcta.)

3. En $\mathcal{S}^{\downdownarrows}$, la categoría de gráficas irreflexivas, "encuentre" $F \times F \times F$.
Exprese su respuesta de dos maneras:
(a) haga un *dibujo* de $F \times F \times F$;
(b) encuentre números m y n tales que
$F \times F \times F \cong mV + nF$.
(El símbolo $\cong$ quiere decir "es isomorfo a".)

Notas:
1. Recuerde que F es $\boxed{\bullet \longrightarrow \bullet}$.
2. Puede usar la "ley distributiva": $B \times C_1 + B \times C_2$ es isomorfo a $B \times (C_1 + C_2)$.

EXAMEN 4

1. Demuestre que si $B \times C = \mathbf{1}$ entonces $B = \mathbf{1}$.
Su demostración debe funcionar en cualquier categoría.

Sugerencia: ¡Explique primero qué quiere decir "$B \times C = \mathbf{1}$"!

2. Todas las partes de este problema son en $\mathcal{S}^{\downdownarrows}$, la categoría de gráficas irreflexivas.

$$V = \boxed{\bullet} \quad F = \boxed{\bullet \longrightarrow \bullet} \quad B = \boxed{\circlearrowright\bullet \longrightarrow \bullet} \quad C = \boxed{\bullet \longleftarrow \bullet \longrightarrow \bullet}$$

(a) Encuentre el número de morfismos $\mathbf{1} \to B + V$ y el número de morfismos $\mathbf{1} \to C$.

(b) "Calcule" $F \times B$, $F \times V$ y $F \times C$.
(Haga dibujos —diagramas internos— de ellos.)

(c) Use la ley distributiva y los resultados de (b) para calcular

$$F \times (B + V)$$

(d) Demuestre que $F \times (B + V)$ es isomorfa a $F \times C$.

Nota: La comparación de (a) y (d) ilustra la falla de la "cancelación":
de "$F \times (B+V) = F \times C$" *no* podemos cancelar F y concluir "$B+V = C$".

EXAMEN 5

1. Encuentre tantas gráficas con exactamente 4 vértices y 2 flechas como pueda sin que dos de sus gráficas sean isomorfas. (Dibuje un diagrama interno de cada una de sus gráficas).

Ejemplo: $\boxed{\bullet \longleftarrow \bullet \longrightarrow \bullet \qquad \bullet}$

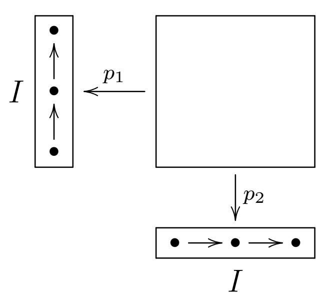
Sugerencia: El número de tales gráficas está entre 10 y 15.

2. $V = \boxed{\bullet}$ $\quad F = \boxed{\bullet \rightarrow \bullet}$ $\quad I = \boxed{\bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \bullet}$

Encuentre números a, b, c tales que

$$I \times I = aV + bF + cI$$

Sugerencia: Primero trate de dibujar $I \times I$



Para *verificar* que está bien hecho el dibujo asegúrese de que los dos morfismos proyección son *¡morfismos de gráficas!*

Sesión 29

Operaciones binarias y argumentos diagonales

Objetos que satisfacen propiedades universales de morfismo son, en cierto sentido, triviales si los consideran de un lado pero no triviales si los consideran del otro. Por ejemplo, morfismos de un objeto al objeto terminal $\mathbf{1}$ son triviales; pero si, después de establecer que $\mathbf{1}$ es un objeto terminal, uno cuenta los morfismos cuyo dominio es $\mathbf{1}$, $\mathbf{1} \to X$, la respuesta nos proporciona información valiosa sobre X. Una observación similar es válida para productos. Morfismos hacia un producto $B_1 \times B_2$ son triviales en el sentido de que los morfismos $X \to B_1 \times B_2$ están precisamente determinados por pares de morfismos $X \to B_1$, $X \to B_2$ que puede uno estudiar sin necesidad de tener el producto. Sin embargo, especificar un morfismo $B_1 \times B_2 \to X$ no puede, por lo regular, ser reducido a algo que suceda en B_1 y B_2 aisladamente porque cada uno de sus valores resulta de una "interacción" específica de los dos factores.

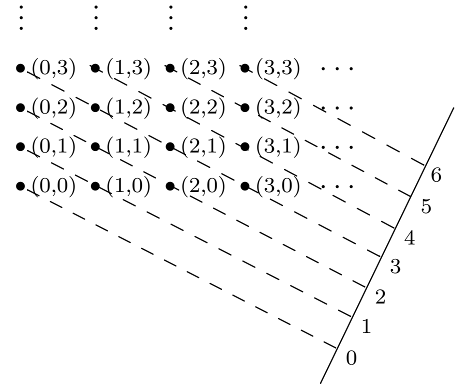
1. Operaciones binarias y acciones

En esta sesión estudiaremos dos casos importantes de morfismo de un producto en un objeto. El primer caso es aquel en el que los tres objetos son el mismo, esto es, morfismos $B \times B \to B$. Un morfismo así se llama una *operación binaria* en el objeto B. La palabra "binaria" en esta definición se refiere al hecho de que una entrada para este morfismo consta de dos elementos de B. (Un morfismo $B \times B \times B \to B$, para el cual una entrada consiste de tres elementos de B es una *operación ternaria* en B y *operaciones unarias* son lo mismo que endomorfismos.)

Hay ejemplos de operaciones binarias entre las operaciones de la aritmética. Por ejemplo, si N es un sistema numérico (como el conjunto de los números naturales o el de los números reales) la suma de números en N es una operación binaria en N, esto es, un morfismo $N \times N \xrightarrow{+} N$. Dado un par de números, $\mathbf{1} \xrightarrow{\langle n,m\rangle} N \times N$, su suma es el morfismo compuesto:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{1} \arrow[r, "\langle n,m\rangle"] \arrow[rr, bend right, "n+m"'] & N \times N \arrow[r, "+"] & N \end{tikzcd}$$

y se puede decir lo mismo sobre la multiplicación $N \times N \xrightarrow{\cdot} N$. No habría manera de pensar en la suma como un morfismo si no pudiéramos formar el producto cartesiano $N \times N$. Un dibujo interno del morfismo "suma" en el caso de los números naturales es éste:



Por supuesto que hay mucho que decir sobre operaciones binarias. Ellas mismas forman una categoría como hemos visto en la sección 4 de la sesión 4 y son objeto de mucho estudio.

Otro caso importante de morfismo con dominio un producto es un morfismo $X \times B \to X$. Un morfismo así se llama una *acción* de B en X. Uno puede pensar a B como un conjunto de botones disponibles que controla los estados en X y a la acción dada $X \times B \xrightarrow{\alpha} X$ como un autómata; un botón particular $\mathbf{1} \xrightarrow{b} B$ puede entenderse como la composición de dos morfismos:

$$X \longrightarrow X \times B \xrightarrow{\alpha} X$$

de los cuales el primero es la gráfica del "morfismo constante igual a b". "Presionar" el botón b una vez, cambia un estado particular x al estado $\alpha(x, b)$; presionarlo dos veces, cambia x a $\alpha(\alpha(x, b), b)$, etcétera.

Por otro lado, podemos presionar un botón diferente. Entonces una acción involucra no solamente un endomorfismo sino muchos endomorfismos $\alpha(\_, b_1), \alpha(\_, b_2), \dots,$ uno para cada elemento de B. Esto no es todo, podemos presionar un botón y luego presionar otro; si el sistema está en el estado x y presionamos el botón b_1 y luego el botón b_2 el estado resultante será $\alpha(\alpha(x, b_1), b_2)$ de manera que $\alpha(\alpha(\_, b_1), b_2)$ es un nuevo endomorfismo de X. De manera análoga, cualquier sucesión finita de elementos de B produce un endomorfismo.

2. El argumento diagonal de Cantor

El caso más general de un morfismo cuyo dominio es un producto tiene los tres objetos todos diferentes:

$$T \times X \xrightarrow{f} Y$$

Otra vez, cada punto $\mathbf{1} \xrightarrow{x} X$ produce un morfismo

$$T \xrightarrow{f(\_,x)} Y$$

de manera que f da lugar a una familia de morfismos $T \to Y$, uno para cada punto de X o, como decimos a menudo, una familia *parametrizada* por (los puntos de) X, en este caso una familia de morfismos $T \to Y$. Como veremos en la parte V, en la categoría de conjuntos, para cada par dado de conjuntos T, Y, hay un conjunto X suficientemente grande, de tal forma que para un *solo* morfismo apropiado f, los morfismos $f(\_, x)$ dan *todos* los morfismos $T \to Y$ conforme x recorre los puntos de X. Tal conjunto X tiende a ser mucho más grande en relación con T y Y; por ejemplo, si T tiene tres elementos y Y tiene cinco elementos, entonces será necesario tomar a X con $5^3 = 125$ elementos porque ése es el número de morfismos $T \to Y$; más adelante llamaremos a un morfismo apropiado f un morfismo "evaluación". Uno podría pensar que si T fuera infinito no sería necesario tomar X "más grande", sin embargo esto no es correcto como lo muestra un famoso teorema demostrado hace más de cien años por Georg Cantor.[3] ¡El mismo T (infinito o no) esencialmente *nunca* es lo suficientemente grande para servir como el dominio de una parametrización de *todos* los morfismos $T \to Y$!

Deduciremos el resultado "negativo" de Cantor de un teorema de punto fijo positivo. Dicho teorema se hace más claro al considerar una generalización de la propiedad de punto fijo de un objeto, a saber, la siguiente propiedad de un morfismo. Llamemos a un morfismo $T \xrightarrow{u} Y$ *predominante* si para cada $T \xrightarrow{v} Y$ hay al menos un punto $\mathbf{1} \xrightarrow{t} T$ para el cual $vt = ut$. Observen que un morfismo identidad 1_Y es predominante si y sólo si Y tiene la propiedad de punto fijo —todo $Y \xrightarrow{v} Y$ tiene al menos un punto fijo. También necesitaremos el siguiente:

Lemma: *Si hay un morfismo predominante $T \xrightarrow{u} Y$, entonces Y tiene la propiedad de punto fijo.*

Demostración: Para cualquier $Y \xrightarrow{\alpha} Y$, el morfismo compuesto $v = \alpha u$ debe coincidir con u en algún punto $\mathbf{1} \xrightarrow{t} T$, de manera que

$$\alpha(ut) = (\alpha u)t = ut,$$

lo que muestra que ut es un punto fijo de α.
(Para más sobre morfismos predominantes, ver el ejercicio 1 (opcional).)

Teorema diagonal (En cualquier categoría con productos):

Si $T \times T \xrightarrow{f} Y$ parametriza todos los morfismos $T \xrightarrow{v} Y$, esto es, para cada v hay un punto $\mathbf{1} \xrightarrow{t_0} T$ tal que $v = f(\_, t_0)$, entonces Y tiene la propiedad del punto fijo.

Demostración: Sea $T \xrightarrow{u} Y$ el morfismo compuesto de f y el morfismo diagonal,

$$T \xrightarrow{\langle 1_T, 1_T \rangle} T \times T \xrightarrow{\quad f \quad} Y$$

Este morfismo es predominante: dado $T \xrightarrow{v} Y$, el t_0 como arriba satisface $v(t_0) = f(t_0, t_0) = u(t_0)$.

[3]Georg Cantor (1845-1918), matemático alemán que fundó la teoría de conjuntos e influyó en la topología del siglo XX. Su argumento diagonal es importante en lógica y la ciencia de la computación.

Noten que la demostración usa mucho menos de lo que nos fue dado; no necesitamos $v = f(\_, t_0)$, sólo que estos morfismos coincidan en el punto t_0. Entonces, en categorías como las gráficas o los sistemas dinámicos, sería más que suficiente si cada v coincidiera con algún $f(\_, t_0)$ en todos los puntos, lo cual es mucho menos que ser el mismo morfismo.

No necesitaremos los morfismos predominantes otra vez, por lo que el siguiente ejercicio es opcional; pero la parte (a) ayuda a clarificar la demostración anterior.

Ejercicio 1
(Los morfismos predominantes son como los epis.)

(a) Si $u'u$ es predominante, entonces también lo es u'. Esto generaliza nuestra observación de que si $u = 1_Y u$ es predominante, entonces también lo es 1_Y.

(b) Si Y tiene la propiedad del punto fijo y $T \xrightarrow{u} Y$ tiene una sección, entonces u es predominante. Más en general, si $T' \xrightarrow{u} T$ tiene una sección y $T \xrightarrow{w} W$ es predominante, entonces wu es predominante.

(c) Recuerde que los morfismos en $\mathcal{C}$ pueden considerarse como objetos en $\mathcal{C}^{\rightarrow}$ y que, como tales, pueden tener otros morfismos como retractos. Demuestre que un retracto de un morfismo predominante es predominante.

(d) Hay muchos ejemplos de morfismos predominantes, por ejemplo (en la mayoría de las categorías "continuas") la función elevar al cuadrado del intervalo $-3 \leq t \leq 3$ al intervalo $0 \leq y \leq 9$ en la recta real. Podría resultar interesante buscar morfismos predominantes de gráficas irreflexivas, pero los morfismos predominantes de sistemas dinámicos son más bien triviales.

La demostración de Cantor se llama el "argumento diagonal" por el papel que desempeña el morfismo diagonal, pero el papel del endomorfismo α es de la misma importancia en la construcción. Esto es especialmente evidente si escribimos el teorema en la forma del:

Corolario contrapositivo de Cantor: *Si Y es un objeto del cual se sabe que tiene al menos un endomorfismo α sin puntos fijos, entonces para cada objeto T y para cada intento $f{:}T \times T \to Y$ de parametrizar los morfismos $T \to Y$ mediante los puntos de T, debe haber al menos un morfismo $T \to Y$ que queda fuera de la familia, esto es, que no es $f(\_, x)$ para punto alguno x en T.*

Demostración: Usemos α y la diagonal para hacer que la misma f produzca un ejemplo g que deja f fuera: $g = \alpha f \Delta$.

En la categoría de conjuntos los ejemplos de Y sin la "propiedad de punto fijo" son abundantes. El más sencillo es un conjunto con dos elementos; si los puntos se llaman *verdadero* y *falso*, entonces el endomorfismo sin puntos fijos es la negación lógica. Aplicando el teorema de Cantor podemos concluir que ningún morfismo $T \times T \to \mathbf{2}$ puede parametrizar todos los morfismos $T \to \mathbf{2}$. Esto se expresa a menudo como: para todos los conjuntos T,

$$T < \mathbf{2}^T$$

donde $\mathbf{2}^T$ es un conjunto que *sí* parametriza a todos los morfismos $T \to \mathbf{2}$. Otros ejemplos importantes de Y son los números reales o los números naturales $Y = \mathbb{N}$; por ejemplo, si α está definida por $\alpha(y) = y + 1$ para todo y, entonces α no tiene puntos fijos, por lo que

$$T < \mathbb{N}^T$$

para todos los conjuntos T, donde $\mathbb{N}^T$ es un conjunto para el cual hay un morfismo $T \times \mathbb{N}^T \to \mathbb{N}$ que parametriza todos los morfismos $T \to \mathbb{N}$. (Un morfismo así se llama un morfismo *evaluación* y será estudiado más en la parte V.) Cantor llegó a la conclusión de que para cualquier conjunto infinito T, hay toda una sucesión

$$T < \mathbf{2}^T < \mathbf{2}^{(\mathbf{2}^T)} < \mathbf{2}^{\mathbf{2}^{(\mathbf{2}^T)}} < \dots$$

de conjuntos genuinamente "más y más infinitos".

Entonces la operación exponenciación (que será estudiada en el artículo V) contrasta fuertemente con la operación producto cartesiano, que como vimos en la sección 3 de la sesión 27, no produce conjuntos infinitos más grandes cuando es aplicada a un conjunto infinito como $\mathbb{N}$. La conclusión de Cantor también contrastó con ideas anteriores menos precisas sobre un solo infinito que lo abarcara todo. Un significado preciso apropiado aquí para la comparación de tamaños $S \leq T$ es que "exista un monomorfismo $S \rightarrowtail T$"; la relación cercana del teorema de Cantor con la comparación *estricta* $S < T$ (definida como: $S \leq T$ pero no $T \leq S$) se explica en el ejercicio 3, en términos de la propiedad adicional de inyectividad de $\mathbf{2}$ en conjuntos, que como veremos en el artículo V es compartida por el "objeto de valores de verdad" en muchas de nuestras categorías.

Ejercicio 2

La demostración de Cantor, si se lee cuidadosamente, nos dice un poco más. Reescriba la demostración para demostrar que si $T \times T \xrightarrow{f} Y$ parametriza *débilmente* a todos los morfismos $T \to Y$, entonces Y tiene la propiedad de punto fijo. Decir que $T \times T \xrightarrow{f} Y$ parametriza débilmente a todos los morfismos $T \to Y$ quiere decir que para cada $T \xrightarrow{g} Y$ hay un punto $\mathbf{1} \xrightarrow{x} X$ tal que (si definimos ξ como el morfismo cuyas componentes son la identidad y el morfismo constante con valor x) el morfismo compuesto $h = f \circ \xi$

$$T \xrightarrow{\xi} T \times X \xrightarrow{f} Y$$

coincide con $T \xrightarrow{g} Y$ en los puntos, esto es, para cada punto $\mathbf{1} \xrightarrow{t} T$, $g \circ t = h \circ t$. (En la categoría de conjuntos eso dice $g = h$ pero, como hemos visto, en otras categorías dice mucho menos.)

Ejercicio 3
Un objeto Y en una categoría se llama *inyectivo* si para todo monomorfismo $j{:}S \hookrightarrow T$ en la categoría, todo morfismo $f{:}S \to Y$ tiene al menos una extensión de φ a T a lo largo de j; esto es, $f = \varphi j$. Demuestre que si Y es inyectivo y $S \hookrightarrow T$ es un monomorfismo y S puede parametrizar todos los morfismos $T \to Y$, entonces S puede también parametrizar todos los morfismos $S \to Y$. Concluya que si Y es inyectivo, tiene al menos un endomorfismo sin puntos fijos y si S parametriza todos los morfismos $T \to Y$ y $T \leq S$, entonces

$$T < S$$

en el sentido del orden de tamaños dado por monomorfismos. En el artículo V veremos que en muchas categorías hay tales objetos Y, y que hay también una operación de exponenciación que produce para cada T una tal S.

El teorema diagonal de Cantor está relacionado muy cercanamente con el famoso teorema de incompletitud de Gödel, del cual es posible que hayan oído hablar. El ambiente para el teorema de Gödel es:

Categorías subjetivas

Nuestra demostración del teorema diagonal de Cantor es claramente válido en cualquier categoría con productos. Este hecho fue explotado por Russell alrededor de 1900 y por Gödel y Tarski en los años 30 para deducir ciertos resultados (que son descritos en ciertos libros "populares" como "paradojas"). El trabajo de Gödel, en particular, fue varios pasos más allá que el de Cantor. Hay una línea de pensamiento frecuente que no comienza por enfocarse en visualizar los posibles sistemas dinámicos o las posibles gráficas, etcétera, y después en tratar de entender estos objetos y sus transformaciones. En lugar de esto, esta línea de pensamiento

(1) comienza con fórmulas y reglas de demostración y trata de
(2) limitar sus consideraciones solamente a aquellos morfismos (o gráficas o . . .) que pueden describirse completamente mediante una fórmula y
(3) considera que dos morfismos son iguales sólo cuando se puede demostrar que las fórmulas correspondientes son equivalentes bajo ciertas reglas dadas.

Esta parte del punto de vista "constructivo" ha llevado a algunos avances en matemáticas porque, objetivamente, lleva a nuevos ejemplos de categorías que son muy similares, en cierto sentido, a la categoría de conjuntos, de gráficas, etcétera, pero muy diferentes en otros sentidos.

Como veremos con más detalle en la parte V, en la mayoría de las categorías los valores de verdad relevantes son más que los dos $\{$*verdadero, falso*$\}$ y en muchas categorías (ambas, objetivas y subjetivas) los valores de verdad, de hecho, constituyen un objeto Ω en la misma categoría. En las categorías subjetivas que son derivadas de fórmulas y reglas de demostración como se mencionó arriba, esto se debe al hecho de que los valores de verdad $\mathbf{1} \to \Omega$ son, ellos mismos, fórmulas. (Podrían surgir, por ejemplo, mediante la composición:

$$
\begin{tikzcd}
& X \arrow[dr, "\varphi"] & \\
\mathbf{1} \arrow[ur, shift left, "x"] \arrow[ur, shift right, "y"'] \arrow[rr, shift left, "v"] \arrow[rr, shift right, "w"'] & & \Omega
\end{tikzcd}
$$

donde x, y son fórmulas que nombran elementos de tipo X y donde φ es una fórmula que nombra una propiedad de los elementos de tipo X; en lingüística y y x podrían ser frases nominales, por ejemplo, "la pelota azul" o "el hombre que vino a cenar", φ un predicado y v y w las oraciones resultantes.) Si las reglas de demostración no son suficientes para demostrar v y w equivalentes, entonces (por (3) arriba) $v \neq w$ en esta clase de categoría; en particular, es posible que v no sea demostrable como equivalente ni a *verdadero* : $\mathbf{1} \to \Omega$ ni a *falso* : $\mathbf{1} \to \Omega$. Los resultados de Gödel y Tarski muestran que es muy común que éste sea el caso, esto es, que las reglas de demostración permitan cuatro o más valores de verdad $\mathbf{1} \to \Omega$ no equivalentes en tales categorías.

¿Cómo se relaciona el teorema diagonal de Cantor con estas consideraciones de Russell, Gödel y Tarski? Si T es un objeto cuyos elementos son números o palabras o listas o fórmulas o demostraciones o elementos "sintácticos" similares, a menudo es posible describir los morfismos

$$T \times T \xrightarrow{f} \Omega$$

que sí describen, en cierto sentido, todas las propiedades *describibles* $T \to \Omega$. Esto se logra mediante un proceso conocido como "enumeración de Gödel" en donde los elementos de T juegan un papel dual: por un lado son nombres de las "cosas" de las que se habla (como números naturales o palabras consideradas sintácticamente como sucesiones de letras) y por el otro son nombres para las propiedades $T \to \Omega$. Entonces en

$$
\begin{tikzcd}
& T \times T \arrow[dr, "f"] & \\
\mathbf{1} \arrow[ur, "\langle 5{,}3 \rangle"] \arrow[rr, "f(5{,}3)"'] & & \Omega
\end{tikzcd}
$$

$f(5,3)$ es la oración que dice que el número 5 tiene la propiedad #3. La idealización clave en el último ejemplo es que imaginamos que todas las propiedades (suceptibles de describirse en un esquema sintáctico dado) pueden enlistarse de una manera fija, de forma tal que podamos hablar de la "propiedad #3", etcétera. La lista podría verse como:

(0) $t^2 = t$
(1) $t^2 = 5t$
(2) $t = 0$
(3) $t + 2 = 7$
(4) $t^2 = t + 1$
(5) $t^3 = t^2 + t$ etcétera

en cuyo caso podemos decir $f(5,3)=f(5,1)$ puesto que ambas son *verdaderas*; $f(5,2)=f(5,4)$ también porque ambas son *falsas*. Pero más abajo en la lista puede haber una propiedad #13 más complicada, para la cual las reglas de demostración son insuficientes para demostrar que 5 tiene o no tiene la propiedad. En este caso

$$\mathbf{1} \xrightarrow{f(5,13)} \Omega$$

será un punto de Ω diferente de *verdadero* y de *falso*.

Ahora bien, como estamos suponiendo que todos los morfismos $T \xrightarrow{\varphi} \Omega$ (en una categoría de la clase que estamos describiendo) se pueden describir mediante fórmulas, a menudo es posible escoger la enumeración de Gödel y una sola f tal que *toda* φ "es" en un sentido representable por alguna $f(\_, x)$. El nuevo sentido es crucial:

$$\text{(S)} \quad \begin{array}{l} f(t,x) = \textit{ verdadero} \text{ si y solo si } \varphi(t) = \textit{ verdadero} \\ f(t,x) = \textit{ falso} \text{ si y solo si } \varphi(t) = \textit{ falso} \end{array}$$

para cada $t{:}\mathbf{1} \to T$; éste es el sentido muy débil en el que φ "es" la propiedad número (x) en la lista de Gödel. Sin embargo, no podemos decir que $f(\_, x) = \varphi$ porque puede ocurrir que $f(t,x) \neq \varphi(t)$ para t para la cual $f(t,x)$ o $\varphi(t)$ no es ni *verdadero* ni *falso*. De hecho, el resultado de Gödel/Tarski es que *debe* haber oraciones $\mathbf{1} \to \Omega$ que no son (demostrablemente equivalentes a) *verdadero* ni *falso* en *cualquier* categoría de la clase que acabamos de describir. Porque si hubiera solamente los dos puntos en Ω, entonces, como para cada $T \xrightarrow{\varphi} \Omega$ hay un nombre $\mathbf{1} \xrightarrow{x} T$ para él en el sentido (S), podríamos de hecho tener $f(t,x) = \varphi(t)$ para todo $\mathbf{1} \xrightarrow{t} T$. Pero esto nos da la conclusión del teorema diagonal de Cantor, lo que contradice otra característica de tales categorías: hay un endomorfismo

$$\Omega \circlearrowleft \textit{no}$$

(que intercambia *verdadero* y *falso*) sin puntos fijos.

La idealización del "constructivista" (también conocido como "formalista", "intuicionista", etcétera, con sus variantes) "imagina un listado de todas las fórmulas y todas las demostraciones", es muy razonable, siempre y cuando uno haya aceptado ya la idealización "imagina un objeto $\mathbb{N}$ cuyos elementos $\mathbf{1} \to \mathbb{N}$ son precisamente todos los números naturales $0, 1, 2, \ldots$" Como toda idealización seria esto lleva a teorías muy interesantes que podrían también ser relevantes algún día. Sin embargo, no hay evidencia de que exista algo en el mundo real que se parezca mucho a esta idealización particular; todos los intentos por continuar los "..." se *detienen* eventualmente, a veces con el comentario "podemos *imaginar* seguir ...". Hay un malentendido muy generalizado de que la falta de una contraparte real a la idea $\mathbb{N}$ se debe a que $\mathbb{N}$ es *infinito*. Por el contrario, Cantor demostró que el infinito $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ mucho más grande es isomorfo, como un conjunto abstracto, con la idealización "imagina el conjunto de todos los puntos en este cuarto". Esto último es la idealización de algo que consideramos que realmente se encuentra allí a pesar de que, por supuesto, no podemos dar una "lista" de todos los puntos en este cuarto mediante un proceso sintáctico.

Mientras consideramos el proceso científico de idealización, debemos tener en mente otro gran logro de nuestro viejo amigo Galileo. Hay dos aspectos igualmente importantes. La idealización en sí misma consiste en suponer que, de las muchas fuerzas actuando en una situación, una fuerza "principal" es la única fuerza. En la investigación de Galileo sobre caída libre, la gravedad es esta fuerza. Tal idealización puede llevar a un desarrollo profundo de la teoría; en el ejemplo de la gravedad llevó a Galileo, Newton, Jacobi, Hamilton, Einstein y otros a una teoría que se utiliza constantemente en navegación terrestre y celeste. En los casos discutidos arriba, la fuerza idealizada es (Brouwer) la urgencia de seguir contando. Pero el segundo aspecto, igualmente importante, del proceso científico de idealización es éste: al aplicar la teoría desarrollada a nuevas situaciones, uno debe permanecer constantemente consciente de la posibilidad de que fuerzas distintas de la "principal" idealizada estén también actuando y que se conviertan ellas mismas, a veces, en fuerzas "principales".

Galileo sabía muy bien que si en lugar de una bala de cañón o una bola de madera, dejara caer de la torre de Pisa una hoja seca, la fricción y el viento serían fuerzas significativas en la determinación de su caída; uno podría tal vez observar la "paradoja" de que a veces la hoja cayera hacia arriba, lo que no quiere decir que la teoría de la gravedad pura esté equivocada sino que sería mejor aplicar una teoría pura más general a este caso. Como en el desarrollo y uso de las computadoras y el *software* fuerzas que no son la "urgencia de seguir contando" son muy significativas, la hermosa teoría de Russell, Brouwer, Tarski, Gödel, Turing (y de lógicos y científicos de la computación más recientes) ha tenido pocas aplicaciones en su forma pura. Contar es un proceso subjetivo mientras que la gravedad es una fuerza objetiva. Aun cuando la meta de las aplicaciones involucra un componente subjetivo (tal como la respuesta a un problema de ingeniería), las fuerzas objetivas deben también tomarse en cuenta.

PARTE V

Propiedades universales de morfismo de grado más alto

Nos encontramos con que el álgebra de los exponentes viene de la noción de “objeto de morfismos” y exploramos otras propiedades universales de morfismo incluyendo aquel de objeto de “valores de verdad”.

ARTÍCULO V

Objetos de morfismos

Exponenciación

1. Definición de objeto de morfismos

En una categoría con productos (incluyendo a $\mathbf{1}$), cualquier morfismo

$$T \times X \xrightarrow{f} Y$$

cuyo dominio es un producto puede considerarse como una familia de morfismos $T \to Y$ parametrizada por X. Esto es, cada punto $x{:}\mathbf{1} \to X$ da lugar, mediante f, al morfismo $T \xrightarrow{\langle 1_T, \bar{x}\rangle} T \times X \xrightarrow{f} Y$ (donde $\bar{x}$ es el morfismo constante $T \to \mathbf{1} \xrightarrow{x} X$), que para abreviar a menudo es denotado f_x. Entonces $f_x(t) = f(t,x)$ para toda t. Por ejemplo, una calculadora tiene un conjunto $X = \{\sqrt{\ }, log, \ldots\}$ de nombres de operaciones y un conjunto T de posibles entradas numéricas y se debe meter una *pareja* $\langle t, x\rangle$ antes de que el cálculo f pueda producir un resultado. Para un par de objetos dado T, Y, una elección X y f al azar fallará en dar una parametrización "perfecta" de los morfismos $T \to Y$ en que

(a) puede haber un morfismo $T \to Y$ que no se puede expresar mediante la f dada sin importar qué punto x es elegido, y

(b) dos puntos diferentes $\mathbf{1} \overset{x}{\underset{x'}{\rightrightarrows}} X$ pueden producir mediante f el mismo morfismo $T \to Y$.

Sin embargo, a veces una elección universal es posible.

Definición: *Dados dos objetos T, Y en una categoría con productos, un objeto M junto con un morfismo $T \times M \xrightarrow{e} Y$ es un **objeto de morfismos de** T **a** Y **con morfismo evaluación** si M y e satisfacen: para cada objeto X y cada morfismo $T \times X \xrightarrow{f} Y$, hay exactamente un morfismo, denotado $X \xrightarrow{\ulcorner f \urcorner} M$, para el cual $f = e(1_T \times \ulcorner f \urcorner)$*

$$\begin{tikzcd} T \times X \arrow[r, "1_T \times \ulcorner f \urcorner"] \arrow[dr, "f"'] & T \times M \arrow[d, "e"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

esto es, para el cual $f(t,x) = e(t, \ulcorner f \urcorner(x))$ para todo $S \xrightarrow{t} T$, $S \xrightarrow{x} X$.

Notación: El morfismo $\ulcorner f \urcorner$, determinado de manera única por f, a veces se llama el "nombre de f". El morfismo e se llama el morfismo *evaluación*. Debido a la unicidad de los objetos de morfismos (ejercicio 1, abajo) también podemos darle a M un símbolo especial: llamémoslo Y^T con $T \times Y^T \xrightarrow{e} Y$. Ahora nuestra condición sobre e de "exactamente un" queda abreviada así:

$$\boxed{T \times Y^T \xrightarrow{e} Y \qquad \textit{induce} \qquad \frac{X \longrightarrow Y^T}{T \times X \longrightarrow Y}}$$

Los objetos de morfismos también se llaman "espacios de funciones".

Para dominar la idea de objeto de morfismos, ayuda comparar la definición con aquella de productos. En ambos casos la propiedad universal de morfismo dice que cierto proceso simple es invertible:

Para productos: dado cualquier P con un par de morfismos $P \xrightarrow{p_1} A, P \xrightarrow{p_2} B$ podemos asignarle a cada morfismo $X \xrightarrow{f} P$ el par $X \xrightarrow{p_1 f} A$, $X \xrightarrow{p_2 f} B$. Un P así con $P \xrightarrow{p_1} A$, $P \xrightarrow{p_2} B$ es un producto con morfismos proyección si para cada X este proceso de asociación es invertible.

Para objetos de morfismos: dada cualquier M con $T \times M \xrightarrow{e} Y$, podemos asociarle a cada morfismo $X \xrightarrow{g} M$ el morfismo $\hat{g}$ dado por:

$$T \times X \xrightarrow{1_T \times g} T \times M \xrightarrow{\quad e \quad} Y$$

Una M así con $T \times M \xrightarrow{e} Y$ es un objeto de morfismos con morfismo evaluación si para cada X este proceso de asociación es invertible.

Ejercicio 1
Formule y demuestre una proposición que diga que si M_1, e_1 y M_2, e_2 sirven ambos como objetos de morfismos con morfismo evaluación para morfismos $T \to Y$, entonces hay un isomorfismo único entre ellos que es compatible con las estructuras evaluación.

Ejercicio 2
(Tomando a $X = \mathbf{1}$) Los puntos de Y^T corresponden a los morfismos $T \to Y$.

Ejercicio 3
Demuestre que

$$Y^{T \times S} \cong (Y^T)^S$$
$$Y^{\mathbf{1}} \cong Y$$

Ejercicio 4

Demuestre que

$$Y^{T_1 + T_2} \cong Y^{T_1} \times Y^{T_2}$$
$$Y^{\mathbf{0}} \cong \mathbf{1}$$

si la categoría tiene sumas y objeto inicial y si los objetos de morfismos indicados existen. Por lo tanto

$$Y^{\mathbf{1}+\mathbf{1}} \cong Y \times Y \text{ etcétera.}$$

Ejercicio 5
Demuestre que
$$(Y_1 \times Y_2)^T \cong Y_1^T \times Y_2^T$$
$$\mathbf{1}^T \cong \mathbf{1}$$

Ejercicio 6
En una categoría con productos en la que los objetos de morfismos existan para cualesquiera dos objetos, para cada tres objetos hay un morfismo canónico

$$B^A \times C^B \xrightarrow{\gamma} C^A$$

que representa a la composición en el sentido de que

$$\gamma\langle\ulcorner f \urcorner, \ulcorner g \urcorner\rangle = \ulcorner gf \urcorner$$

para cualesquiera $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$.

2. Distributividad

A pesar de que muchas categorías tienen productos y "sumas", solamente unas pocas afortunadas tienen objetos de morfismos. Tales categorías frecuentemente se llaman categorías "cartesianamente cerradas" y tienen automáticamente más propiedades fuertes, algunas de las cuales ni siquiera se refieren directamente a los objetos de morfismos:

Proposición: *Si las sumas existen en $\mathcal{C}$ y T es un objeto tal que el objeto de morfismos Y^T existe para todos los objetos Y, entonces $\mathcal{C}$ satisface la ley distributiva para la multiplicación por T.*

Esbozo de demostración: Necesitamos un morfismo inverso
$$T \times (B_1 + B_2) \xrightarrow{\quad ? \quad} T \times B_1 + T \times B_2$$
para el morfismo canónico. El inverso deseado puede encontrarse mediante la cadena de correspondencias invertibles que vienen de las propiedades universales de morfismo (PUM):

$$\begin{array}{cl}
\dfrac{T \times (B_1 + B_2) \to T \times B_1 + T \times B_2}{B_1 + B_2 \to (T \times B_1 + T \times B_2)^T} & \text{PUM de objeto de morfismos} \\
\hline
B_1 \to (T \times B_1 + T \times B_2)^T, \quad B_2 \to (T \times B_1 + T \times B_2)^T & \text{PUM de la suma } B_1 + B_2 \\
\hline
T \times B_1 \to T \times B_1 + T \times B_2, \quad T \times B_2 \to T \times B_1 + T \times B_2 & \text{PUM de objeto de morfismos (dos veces)}
\end{array}$$

en donde, en la última línea, podemos elegir las inyecciones para la suma grande. Si empezamos con estas inyecciones y aplicamos las tres correspondencias que están indicadas por las líneas horizontales, obtenemos arriba un morfismo con el dominio y el codominio deseados. Para demostrar que este morfismo es realmente inverso del morfismo de distributividad canónico, lo único que uno tiene que hacer es notar que en cada correspondencia el morfismo obtenido es el único que satisface las ecuaciones apropiadas que involucran inyecciones, proyecciones y evaluaciones y que ambas, el morfismo identidad y la composición del morfismo canónico con su "inversa", satisfacen las mismas ecuaciones. La otra cláusula de la ley distributiva se demuestra de manera similar: para encontrar una inversa del morfismo $\mathbf{0} \to T \times \mathbf{0}$, recorra al revés la correspondencia

$$\frac{T \times \mathbf{0} \xrightarrow{?} \mathbf{0}}{\mathbf{0} \longrightarrow \mathbf{0}^T}$$

y verifique que el resultado es en realidad la inversa deseada.

Hacer en detalle las demostraciones esbozadas arriba requiere cierto trabajo y quizá, utilizando principios generales, quieran evitar repetir el trabajo en demostraciones similares. De hecho, éstos existen: si estudia más sobre categorías aprenderá el lemma de Yoneda de funtores representables y la noción de adjunción de Kan. Mientras tanto puede tratar de encontrar demostraciones que involucren menos pasos, como en la siguiente versión alternativa de la proposición de arriba.

Proposición: *En una categoría con productos finitos, si*

$$B_1 \xrightarrow{s_1} S \xleftarrow{s_2} B_2$$

es una suma y T *es un exponente —esto es, para cada* Y *existe un objeto de morfismos:* Y^T*,* $T \times Y^T \xrightarrow{e} Y$*— entonces*

$$T \times B_1 \xrightarrow{1_T \times s_1} T \times S \xleftarrow{1_T \times s_2} T \times B_2$$

es también una suma.

Demostración: En el diagrama de procesos siguiente,

$$\begin{tikzcd}
\textit{Morfismos } S \to Y^T \arrow[r, "\textit{preceder por } s_1"', "\textit{y por } s_2" '] \arrow[d, "\textit{multiplicar por}\ 1_T,\ \textit{seguir por } e"'] & \textit{Parejas } B_1 \to Y^T,\ B_2 \to Y^T \arrow[d, "\textit{multiplicar por}\ 1_T,\ \textit{seguir por } e"] \\
\textit{Morfismos } T \times S \to Y \arrow[r, "\textit{preceder por } 1_T \times s_1", "\textit{y por } 1_T \times s_2"'] & \textit{Parejas } T \times B_1 \to Y,\ T \times B_2 \to Y
\end{tikzcd}$$

se sabe que tres de los morfismos son invertibles. Si logramos ver que el diagrama conmuta, se seguirá que el proceso de abajo en el diagrama es también invertible, que es el resultado deseado. Si comenzamos con un morfismo $S \xrightarrow{y} Y^T$, bajamos y vamos a la derecha, obtenemos (para la primera componente)

$$T \times B_1 \xrightarrow{1_T \times s_1} T \times S \xrightarrow{1_T \times y} T \times Y^T$$

seguida de e, mientras que el otro lado produce

$$T \times B_1 \xrightarrow{1_T \times (y \circ s_1)} T \times Y^T$$

seguida de e. Éstas son la misma porque para cualesquiera morfismos componibles

$$B \xrightarrow{s} S \xrightarrow{y} M$$

$1_T \times (y \circ s) = (1_T \times y) \circ (1_T \times s)$, un hecho que dejamos como ejercicio.

3. Objetos de morfismos y el argumento diagonal

El argumento diagonal de Cantor (ver sesión 29) se usa a menudo para comparar los “tamaños” de objetos de morfismos; primero observe que es posible modificar levemente el resultado en el caso especial de una categoría cartesianamente cerrada.

Teorema: (El argumento diagonal de Cantor.) *Supongamos que Y es un objeto en una categoría cartesianamente cerrada, tal que existen un objeto T y un morfismo $T \xrightarrow{f} Y^T$ que es “sobre” en el sentido de que para todo morfismo $T \xrightarrow{g} Y$ hay un punto t de T tal que $\ulcorner g \urcorner = ft$, entonces todo endomorfismo de Y tiene un punto fijo. Por lo tanto, (contrapositiva) si se sabe que Y tiene al menos un endomorfismo que no tiene puntos fijos, entonces para cada objeto T, cada morfismo $T \to Y^T$ fracasa en ser sobre.*

Demostración: Supongamos T, f dados como se describen y sea $Y^{\circlearrowright \alpha}$ cualquier endomorfismo. Considere el morfismo compuesto:

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "\langle 1_T, 1_T \rangle"] \arrow[rrr, bend right, "g"'] & T \times T \arrow[r, "\widehat{f}"] & Y \arrow[r, "\alpha"] & Y \end{tikzcd}$$

Como supusimos que f era sobre, hay un punto t tal que $\ulcorner g \urcorner = ft$, esto es, tal que $g(s) = \widehat{f}(s,t)$ para todo s en T. Pero por la definición de g, esto quiere decir que $\alpha \widehat{f}(s,s) = \widehat{f}(s,t)$ para todo s en T. En particular, si $s = t$, entonces $\alpha \widehat{f}(t,t) = \widehat{f}(t,t)$. Esto quiere decir que $\widehat{f}(t,t)$ es un punto fijo de α, que era lo que se quería demostrar.

4. Propiedades universales y “observables”

La construcción de objeto de morfismos (o “exponenciación”) se usa para construir objetos con propiedades universales relacionadas en categorías de objetos estructurados, por ejemplo, en la categoría $\mathcal{S}^{\circlearrowright}$ de sistemas dinámicos discretos. Si $X^{\circlearrowright \alpha}$ es un sistema dinámico discreto y si Y es solamente un conjunto, entonces un morfismo $X \xrightarrow{f} Y$ (del conjunto de estados de $X^{\circlearrowright \alpha}$) puede considerarse como un proceso explícito de observación o de medición (con valores en Y) de algún atributo de los estados. Por lo cual, si en cierto tiempo el sistema X está en el estado x, observaremos fx, una unidad de tiempo más tarde observaremos $f\alpha x$, dos unidades de tiempo más adelante observaremos $f\alpha\alpha x$, etcétera, de manera que x produce una *sucesión* de puntos en Y. Esto puede ser convertido en un morfismo de sistemas dinámicos como sigue: dado cualquier conjunto Y, considere $Y^{\mathbb{N}}$, el conjunto de morfismos cuyos objetos corresponden a sucesiones $\mathbb{N} \xrightarrow{y} Y$ en Y (aquí, otra vez, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ es el conjunto de los números naturales). En el conjunto $Y^{\mathbb{N}}$ hay un endomorfismo "deslizamiento" β para el cual:

$$(\beta y)(n) = y(n+1) \text{ para todo } n \text{ y todo } \mathbb{N} \xrightarrow{y} Y$$

Entonces el conjunto $Y^{\mathbb{N}}$ de sucesiones en Y es un sistema dinámico cuando se le equipa del endomorfismo deslizamiento. Ahora bien, regresando a un morfismo dado $X \xrightarrow{f} Y$ cuando $X^{\circlearrowright\alpha}$ es un sistema dinámico dado, podemos definir

$$X \xrightarrow{\overline{f}} Y^{\mathbb{N}}$$

mediante la fórmula

$$\overline{f}(x)(n) = f(\alpha^n x)$$

esto es, $\overline{f}$ le asocia a cualquier estado x la *sucesión* de todas las f-observaciones a lo largo de su "futuro". El morfismo $\overline{f}$, de hecho, es un morfismo de sistemas dinámicos.

Ejercicio 7
$\overline{f}$ es un morfismo en la categoría $\mathcal{S}^{\circlearrowright}$ y es el único tal morfismo que además satisface $\overline{f}(x)(0) = f(x)$ para todo x.

En las aplicaciones, normalmente uno tiene sólo un surtido limitado de instrumentos de medición $X \xrightarrow{f} Y$ en los estados de $X^{\circlearrowright\alpha}$; una f así puede llamarse un *observable*. Una razón para introducir el morfismo $\overline{f}$ de sistemas dinámicos, inducido por un observable $X \xrightarrow{f} Y$ en un sistema dinámico $X^{\circlearrowright\alpha}$ dado, es que permite una expresión simple de algunas propiedades importantes que pueda tener f, como en las siguientes dos definiciones:

Definición: *Un observable $X \xrightarrow{f} Y$ en un sistema dinámico $X^{\circlearrowright\alpha}$ se dice que es* ***caótico*** *si el $\mathcal{S}^{\circlearrowright}$-morfismo inducido*

$$X^{\circlearrowright\alpha} \xrightarrow{\overline{f}} (Y^{\mathbb{N}})^{\circlearrowright\beta}$$

es "sobre en los estados", esto es, si para toda posible sucesión $\mathbb{N} \xrightarrow{y} Y$ de observaciones futuras hay al menos un estado x de X para el cual $\overline{f}(x) = y$.

Una interpretación de la naturaleza caótica de f es que (a pesar de que el $X^{\circlearrowright\alpha}$ mismo es perfectamente determinista) f observa tan poco de los estados que nada se puede predecir sobre las posibles sucesiones de observación. A menudo el "remedio" para esto es observar más, esto es, construir $X \xrightarrow{f'} Y'$ (de la cual f podría recuperarse mediante un $Y' \to Y$ apropiado) para el cual $\overline{f'}$ pudiera no ser sobre.

Definición: *Un observable $X \xrightarrow{f} Y$ en un sistema dinámico es una **noción admisible de configuración subyacente** si $\overline{f}$ es "fiel", esto es, para cualesquiera dos estados x_1, x_2, si las sucesiones resultantes de configuraciones futuras son iguales, $\overline{f}(x_1) = \overline{f}(x_2)$, entonces $x_1 = x_2$.*

El morfismo inducido $\overline{f}$ a menudo es fiel aun cuando la misma f no lo sea. En la mayoría de las aplicaciones, el término "estado" se refiere más precisamente a "estado de movimiento"; el estado *de movimiento* involucra usualmente más que simplemente la posición o "configuración" actual, pero para sistemas puramente mecánicos está determinado mediante la especificación de cantidades adicionales, tales como el momentum, que *están* determinadas por el *movimiento de la configuración*. (En los ejemplos comunes, Y es un objeto de morfismos E^B, donde E es un espacio físico tridimensional ordinario, B es el conjunto de partículas de un cuerpo, como una nube, y los puntos de $Y = E^B$ corresponden a *posicionamientos* $B \to E$ del cuerpo en el espacio.)

Ejercicio 8
Sea $A \times A \xrightarrow{+} A$ una operación binaria, como la suma de números naturales o de números reales y sea $X = A \times A$. La *dinámica de Fibonacci*[4] α en X está definida por:

$$\alpha(a, b) = \langle b, a + b \rangle$$

Si $A = \mathbb{N}$ y $x = \langle 1, 1 \rangle$ calcule αx, $\alpha^2 x$, $\alpha^3 x$, $\alpha^4 x$, $\alpha^5 x$. Sea $Y = A$ y sea f la proyección $f(a, b) = a$. Demuestre que $X \xrightarrow{f} Y$ es una noción admisible de configuración para la dinámica de Fibonacci.

Ejercicio 9 (más retador.)
Fije un punto p en un círculo C. Sea $C \xrightarrow{\omega} C$ el morfismo "duplicar el ángulo": el ángulo de p a $\omega(x)$ es el doble del ángulo de p a x. Entonces $C^{\circlearrowleft \omega}$ es un sistema dinámico. Sea $C \xrightarrow{f} \{verdadero, falso\}$ la respuesta a la pregunta: "¿Estamos en la mitad superior del círculo?" (Decidamos que la "mitad superior del círculo" incluye a p pero no a su antípoda.)

[4]Fibonacci, también conocido como Leonardo de Pisa, vivió de 1170 a 1250. Fue enviado por los mercaderes de Pisa a África para aprender matemática Árabe. La sucesión de números generada por la dinámica de Fibonacci, comenzando en el estado $\langle 1, 1 \rangle$, surgió de un problema en su libro *Liber Abaci*: "Un cierto hombre puso un par de conejos en un lugar rodeado por todos lados por una muralla. ¿Cuántos pares de conejos pueden ser producidos por este par en un año, si se supone que cada mes cada par produce un nuevo par que se vuelve productivo del segundo mes en adelante?" En 1753 se descubrió que esta dinámica está íntimamente relacionada con la sección de oro $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Sigue siendo un ejemplo importante en ciencia de la computación moderna.

(a) Demuestre que f es una noción admisible de configuración subyacente.

(b) Demuestre que f no es un observable caótico pero que es "casi caótico": dado cualquier futuro *finito* (una lista y_0, y_1,..., y_n de puntos de {*veradero, falso*}), existe un estado x para el cual $fx = y_0$, $f\omega x = y_1$,... y $f\omega^n x = y_n$.

Ejercicio 10
Para la flecha genérica $F = \boxed{\underset{s}{\bullet} \longrightarrow \underset{t}{\bullet}}$ en $\mathcal{S}^{\downdownarrows}$, la gráfica F^F existe; encuentrela.

Un esquema sintáctico para calcular con objetos de morfismos a menudo se llama un "cálculo-λ" debido a un uso tradicional de la letra griega lambda para denotar la transformación involucrada en la propiedad universal. En el ejercicio de abajo ocurre un uso relacionado pero no idéntico del mismo símbolo.

Ejercicio 11

(a) Para cualquier morfismo $W \xrightarrow{f} Y$ (en una categoría donde $(\ )^T$ existe) hay un morfismo inducido $W^T \xrightarrow{f^T} Y^T$ para el cual $f^T(\ulcorner a \urcorner) = \ulcorner fa \urcorner$ para todo $T \xrightarrow{a} W$.

(b) Hay un morfismo canónico $X \xrightarrow{\lambda_T} (X \times T)^T$ (análogo al morfismo diagonal del producto).

(c) Para cualquier $X \times T \xrightarrow{f} Y$, $\ulcorner f \urcorner = f^T \circ \lambda_T$ es el morfismo correspondiente $X \to Y^T$.

5. Guía

Objeto de morfismos es un ejemplo básico de una propiedad universal de morfismo de grado más alto. La sesión 29 trató algunas cuestiones que involucran morfismos, cuyo dominio es un producto, sin usar objetos de morfismos, pero los objetos de morfismos se vuelven cruciales desde el principio de la sesión 30. Las últimas dos sesiones introducen otra propiedad universal de morfismo que representa la lógica de los subobjetos mediante el objeto valores de verdad.

Sesión 30

Exponenciación

1. Objetos de morfismos o espacios de funciones

Objetos de morfismos, o espacios de funciones, a veces se llaman objetos exponenciales porque satisfacen leyes de las cuales las leyes para exponentes en la aritmética son casos especiales. Se usan para estudiar la manera en que la salida depende de todo un proceso y no solamente de una entrada. Por ejemplo, la energía gastada en caminar desde Oaxaca hasta Puebla depende no solamente de la distancia viajada sino de todo el "movimiento" realizado. Este movimiento en sí mismo es un morfismo del intervalo de tiempo al "espacio".

Vimos que el producto de dos objetos X_1 y X_2 de una categoría $\mathcal{C}$ puede describirse como el objeto terminal en una cierta categoría construida a partir de $\mathcal{C}$, X_1 y X_2. De la misma forma, dados dos objetos T y Y en $\mathcal{C}$, podemos construir una categoría en la que el objeto de morfismos Y^T correspondiente puede describirse como el objeto terminal. Será útil introducir la categoría desde el principio porque nos ayudará en cálculos futuros.

Dados dos objetos T y Y de una categoría $\mathcal{C}$ que tiene objeto terminal y productos, definimos una categoría $\mathcal{C}/(T \to Y)$ declarando que:

(1) un objeto en $\mathcal{C}/(T \to Y)$ es un objeto X de $\mathcal{C}$ junto con un morfismo en $\mathcal{C}$ de $T \times X$ a Y y

(2) un morfismo en $\mathcal{C}/(T \to Y)$ de $T \times X' \xrightarrow{f'} Y$ en $T \times X \xrightarrow{f} Y$ es un $\mathcal{C}$-morfismo $X' \xrightarrow{\xi} X$ tal que $f' = f \circ (1_T \times \xi)$, esto es,

$$\begin{tikzcd} T \times X' \arrow[rr, "1_T \times \xi"] \arrow[dr, "f'"'] & & T \times X \arrow[dl, "f"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

¿Qué quiere decir $1_T \times \xi$? ¿Qué es el producto de dos morfismos? Si tenemos cualesquiera dos morfismos $A \xrightarrow{g} B, C \xrightarrow{h} D$ en una categoría con productos, podemos definir un morfismo $g \times h$ de $A \times C$ a $B \times D$ calculando primero las dos composiciones

$$A \times C \xrightarrow{proy_1} A \xrightarrow{g} B\ , \quad A \times C \xrightarrow{proy_2} C \xrightarrow{h} D$$

y formando la pareja

$$\langle g \circ proy_1, h \circ proy_2 \rangle : A \times C \to B \times D$$

que tomamos como la definición de $g \times h$. Entonces nuestro morfismo particular $1_T \times \xi$ está definido como el único tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & T \arrow[rr, "1_T"] & & T \\
T \times X' \arrow[ur] \arrow[rr, "1_T \times \xi"] \arrow[dr] & & T \times X \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & X' \arrow[rr, "\xi"] & & X
\end{tikzcd}$$

conmuta, donde los morfismos sin etiqueta son proyecciones de producto.

Hemos definido los objetos y los morfismos de la categoría $\mathcal{C}/(\,T \to Y\,)$. Es necesario, desde luego, definir los morfismos identidad y la composición, de tal forma que se satisfagan las leyes identidad y asociativa. Como usualmente es el caso con categorías definidas a partir de una categoría dada previamente, hay sólo una manera obvia de definir las identidades y la composición para que las leyes identidad y asociativa se satisfagan y la única pregunta es si estas definiciones producen realmente morfismos de la nueva categoría. Se reduce a verificar que para cualquier objeto $T \times X \xrightarrow{f} Y$ de $\mathcal{C}/(\,T \to Y\,)$, el morfismo identidad de X en $\mathcal{C}$ es un morfimso de $T \times X \xrightarrow{f} Y$ en sí mismo; esto es, verificar que

$$f \circ (1_T \times 1_X) = f$$

y que para cualesquiera objetos $T \times X \xrightarrow{f} Y$, $T \times X' \xrightarrow{f'} Y$ y $T \times X'' \xrightarrow{f''} Y$ y cualesquiera dos morfismos en $\mathcal{C}/(\,T \to Y\,)$, digamos ξ de $T \times X' \xrightarrow{f'} Y$ a $T \times X \xrightarrow{f} Y$ y η de $T \times X'' \xrightarrow{f''} Y$ a $T \times X' \xrightarrow{f'} Y$, el morfismo compuesto $\xi \circ \eta$ (de $\mathcal{C}$) de hecho es un morfismo en $\mathcal{C}/(\,T \to Y\,)$ de $T \times X'' \xrightarrow{f''} Y$ a $T \times X \xrightarrow{f} Y$, esto es,

$$f \circ (1_T \times (\xi \circ \eta)) = f''$$

Ambas verificaciones vienen de propiedades simples del producto de morfismos explicados arriba. La primera viene del hecho de que el producto de identidades es otra identidad —en particular, $1_T \times 1_X = 1_{T \times X}$— y la segunda se sigue de una cierta clase de "distributividad de producto con respecto a la composición", que en nuestro caso toma la forma $1_T \times (\xi \circ \eta) = (1_T \times \xi) \circ (1_T \times \eta)$.

¿Cómo podemos interpretar los objetos de esta nueva categoría? La idea es que un objeto $T \times X \to Y$ es un esquema para nombrar los morfismos de T en Y en $\mathcal{C}$. Un ejemplo de un objeto así es una calculadora o procesador, donde X es el conjunto de nombres de todas las funciones que puede llevar a cabo la calculadora y T y Y son los conjuntos de todas las posibles entradas y salidas. El morfismo $T \times X \xrightarrow{f} Y$ describe la calculadora: $f(t, x)$ es el resultado de aplicarle la operación cuyo nombre es x a la entrada t. Por lo tanto, para cada elemento x de X, $f(\_, x)$

representa un morfismo $T \to Y$. En particular, tomando a X como el objeto $\mathbf{1}$ de $\mathcal{C}$, un objeto $T \times X \to Y$ equivale a un solo morfismo $T \to Y$ "nombrado" por $\mathbf{1}$ porque $T \times \mathbf{1} \cong T$. De manera similar, si $X = \mathbf{2}$, nombra dos morfismos $T \to Y$ y así sucesivamente. Con X más grande, los objetos X, f pueden nombrar más morfismos de T en Y.

Igual de interesante resulta la interpretación de los morfismos en la categoría $\mathcal{C}/(T \to Y)$. Un morfismo ξ de X', f' a X, f en $\mathcal{C}/(T \to Y)$ es una manera de asociar a los nombres de los morfismos $T \to Y$ como son nombrados por X', f' nombres correspondientes de los morfismos $T \to Y$ como son nombrados por X, f. Es una especie de diccionario. Es posible, por supuesto, que X', f' no nombre todos los morfismos de T en Y pero para uno que es nombrado, el morfismo $X' \xrightarrow{\xi} X$ encuentra un nombre correspondiente en el "lenguaje" X, f. La condición para que un morfismo $X' \xrightarrow{\xi} X$ pertenezca a la categoría $\mathcal{C}/(T \to Y)$ es la de que para cualquier nombre x' en X', su imagen $\xi(x')$ nombre precisamente el mismo morfismo $T \to Y$ que x' nombra. El lector deberá verificar que la ecuación $f \circ (1_T \times \xi) = f'$ expresa exactamente este requerimiento.

Para una categoría dada $\mathcal{C}$, la categoría $\mathcal{C}/(T \to Y)$ asociada con alguna T y alguna Y podría tener un objeto terminal. En ese caso el objeto correspondiente de $\mathcal{C}$, denotado por la notación exponencial Y^T (Y elevado a la potencia T), se llama el objeto de morfismos de T en Y. El morfismo correspondiente de $\mathcal{C}$, $T \times Y^T \to Y$, se denota por e o ev y se llama el morfismo evaluación. Veamos qué significa dicho objeto terminal. Decir que $T \times Y^T \xrightarrow{e} Y$ es un objeto terminal en $\mathcal{C}/(T \to Y)$ quiere decir que para cualquier objeto $T \times X \xrightarrow{f} Y$ de esta categoría hay exactamente un morfismo de $\mathcal{C}/(T \to Y)$ de ese objeto a $T \times Y^T \xrightarrow{e} Y$. Por la definición de $\mathcal{C}/(T \to Y)$ esto es un morfismo $X \to Y^T$ en $\mathcal{C}$ (que se denota $\ulcorner f \urcorner$) tal que

$$\begin{tikzcd}
T \times X \arrow[rr, "1_T \times \ulcorner f \urcorner"] \arrow[dr, "f"'] & & T \times Y^T \arrow[dl, "e"] \\
& Y &
\end{tikzcd}$$

esto es, $e \circ (1_T \times \ulcorner f \urcorner) = f$. Entonces, decir que $T \times Y^T \xrightarrow{e} Y$ es un objeto terminal en $\mathcal{C}/(T \to Y)$ quiere decir, expresado en $\mathcal{C}$: para cada morfismo $T \times X \xrightarrow{f} Y$ en $\mathcal{C}$ hay exactamente un morfismo $\ulcorner f \urcorner : X \to Y^T$ tal que $e \circ (1_T \times \ulcorner f \urcorner) = f$. Esta correspondencia entre $\ulcorner f \urcorner$ y f se expresa, como es usual, por:

$$\frac{X \to Y^T}{T \times X \to Y}$$

Tener objetos de morfismos en una categoría es una condición fuerte de la que deduciremos muchas consecuencias. En muchas categorías $\mathcal{C}$, Y^T existe solamente para ciertos objetos "pequeños" T. Las mejores son las *categorías cartesianamente* *cerradas*: aquellas categorías con productos en las que cada par de objetos tiene objeto de morfismos. (La palabra *cerradas* se refiere al hecho de que los morfismos de un objeto a otro no forman solamente algo fuera de la categoría —un conjunto— sino que forman un objeto del mismo $\mathcal{C}$, y *cartesianamente* se refiere a la conexión con productos cartesianos.)

Vimos en la parte IV que para cualquier objeto T, $T\times\mathbf{1}=T$. Por lo tanto, si aplicamos la definición de objeto de morfismos Y^T al caso particular $X=\mathbf{1}$, deducimos que:

$$\frac{\mathbf{1}\to Y^T}{T\to Y}$$

En otras palabras, los puntos del objeto de morfismos Y^T corresponden biyectivamente con los morfismos de T a Y. Ésta es la razón por la cual Y^T se llama el "objeto de morfismos".

2. Un ejemplo fundamental de la transformación de objetos de morfismos

Para una aplicación importante de estas ideas al estudio del movimiento de cuerpos en el espacio nos colocamos en una categoría de objetos suaves que incluye entre sus objetos un cuerpo B, un intervalo de tiempo I y el espacio ordinario E. No necesitamos entrar en los detalles para definir una categoría así. Imaginen un cuerpo B moviéndose en el espacio, por ejemplo, una nube moviéndose en el cielo. La manera usual de describir dicho movimiento durante el intervalo de tiempo I es como un morfismo $I\times B\to E$ que asocia a cada partícula del cuerpo en cada tiempo una posición en el espacio. Entonces tenemos:

(1) $I\times B\xrightarrow{\textit{movimiento}}E$

Pero si el objeto de morfismos E^I existe, entonces este morfismo es equivalente a un morfismo:

(2) $B\xrightarrow{\ulcorner\textit{movimiento}\urcorner}E^I$

Este morfismo asocia a cada partícula del cuerpo todo su movimiento. De acuerdo con lo que se dijo antes, los puntos del objeto E^I son las "trayectorias" en el espacio, esto es, morfismos $I\to E$, y este objeto de trayectorias es completamente independiente del cuerpo B; ya que lo hayamos entendido, podemos usarlo para estudiar el movimiento de absolutamente cualquier cuerpo.

Hay una tercera manera de considerar el movimiento del cuerpo B. Componiendo con el isomorfismo $I\times B\cong B\times I$ y utilizando otra vez la propiedad fundamental del objeto de morfismos, tenemos que el movimiento de B puede verse como un morfismo:

(3) $I\longrightarrow E^B$

Como los puntos de E^B son los morfismos $B\to E$ que representan las diferentes posibles posiciones o localizaciones del cuerpo en el espacio, el morfismo de arriba asocia a cada instante de tiempo una posición del cuerpo como un todo. Otra vez, el objeto E^B de posicionamientos de nuestro cuerpo involucra solamente al cuerpo B y al espacio, y no tiene nada que ver con el tiempo.

Cada uno de los tres puntos de vista sobre el movimiento de un objeto que acabamos de presentar tiene su propia importancia y aplicación. Necesitamos las tres maneras de describir un movimiento para ser capaces de calcular (mediante la composición de morfismos) diferentes cantidadades asociadas con el movimiento. Por ejemplo, podríamos tener una función $E \to \mathbb{R}$ del espacio E a los números reales que nos diga alguna propiedad del espacio, digamos la "distancia a la tierra". Si componemos este morfismo con el movimiento en la forma $I \times B \to E$, obtenemos un morfismo $I \times B \to \mathbb{R}$ que nos dice cómo cambia con el tiempo la distancia a la tierra de las diferentes partes del cuerpo.

Sin embargo, la *velocidad* de una partícula no está determinada solamente por una posición. La velocidad es en realidad una propiedad de las trayectorias a través del tiempo. De hecho, correspondiente al objeto E, hay otro objeto V de "velocidades", y el cálculo diferencial construye un morfismo

$$E^I \xrightarrow{\textit{velocidad}} V^I$$

que le asocia una "trayectoria de velocidad" a cada trayectoria en el espacio. Si componemos este morfismo con el movimiento del cuerpo en la forma $B \to E^I$ obtenemos la trayectoria de velocidad para las partículas del cuerpo en ese movimiento en particular:

$$B \to E^I \to V^I$$

Una vez obtenido este morfismo $B \to V^I$ podemos regresar y estudiarlo en la forma $I \times B \to V$ o en la forma $I \to V^B$. (Los morfismos $B \to V$ se llaman "campos de velocidad".)

El tercer punto de vista es útil para calcular las cantidades que dependen de la localización del cuerpo en el espacio. Por ejemplo, el *centro de masa* o "punto de balance" del objeto depende solamente de la localización y, por lo tanto, se da mediante un morfismo (construido usando el cálculo integral):

$$E^B \xrightarrow{\textit{centro de masa}} E$$

Al componer este morfismo con el movimiento del cuerpo como $I \to E^B$ obtenemos una trajectoria en el espacio $I \to E$, que representa el movimiento del centro de masa del cuerpo.

En resumen, un movimiento particular de un cuerpo puede ser descrito por cualquiera de los tres morfismos:

$$I \times B \to E \quad B \to E^I \quad I \to E^B$$

Éstos contienen la misma información pero, como morfismos, sirven para distintos propósitos.

Morfismos tales como la *velocidad* y el *centro de masa* de arriba, cuyo *dominio* es un objeto de morfismos, a menudo se llaman *operadores* o *funcionales*. Las funcionales requieren mucho análisis porque no hay una manera *válida en general* de reducirlas a algo que no involucre objetos de morfismos. (Este “lado no trivial” contrasta con el “lado trivial” que considera morfismos cuyo *codominio* es un objeto de morfismos.)

3. Leyes de los exponentes

Los objetos de morfismos existen en la categoría de conjuntos y en la categoría de gráficas, las cuales, por lo tanto, son categorías cartesianamente cerradas. Antes de estudiar estos ejemplos es útil saber las leyes de exponenciación. No hay suposiciones adicionales; ellas se siguen de la definición.

Si la base es un producto, la ley relevante es:

$$\boxed{(Y_1 \times Y_2)^T \cong Y_1^T \times Y_2^T}$$

y su caso vacío (el producto sin factores):

$$\mathbf{1}^T \cong \mathbf{1}$$

Si el exponente es un producto, necesitamos:

$$\boxed{(Y^T)^S \cong Y^{T \times S}}$$

y su caso vacío:

$$Y \cong Y^{\mathbf{1}}$$

Finalmente, si el exponente es una suma:

$$\boxed{Y^{(T_1+T_2)} \cong Y^{T_1} \times Y^{T_2}}$$

y su caso vacío:

$$Y^{\mathbf{0}} \cong \mathbf{1}$$

La idea para las demostraciones es utilizar las propiedades universales de morfismo. Esbozaremos cómo va. Para la primera ley tenemos, por la definición de objeto de morfismos,

$$\frac{X \to (Y_1 \times Y_2)^T}{T \times X \to Y_1 \times Y_2}$$

Ahora, por la propiedad universal de morfismo de los productos, aplicada a $Y_1 \times Y_2$,

$$\frac{T \times X \to Y_1 \times Y_2}{T \times X \to Y_1, \quad T \times X \to Y_2}$$

Si aplicamos otra vez la definición de objeto de morfismos a cada morfismo

$$\frac{T \times X \to Y_1, \quad T \times X \to Y_2}{X \to Y_1^T, \quad X \to Y_2^T}$$

y si aplicamos la propiedad universal de morfismo que define el producto $Y_1^T \times Y_2^T$,

$$\frac{X \to Y_1^T, \quad X \to Y_2^T}{X \to Y_1^T \times Y_2^T}$$

Si comparamos la primera línea de este cálculo con la última, tenemos

$$\frac{X \to (Y_1 \times Y_2)^T}{X \to Y_1^T \times Y_2^T}$$

Ahora bien, aunque es solamente un esbozo de la demostración, es muy completo porque muestra que para todo objeto X, los morfismos $X \to (Y_1 \times Y_2)^T$ son, al menos en número, lo mismo que los morfismos $X \to Y_1^T \times Y_2^T$. Si tomamos a X como $(Y_1 \times Y_2)^T$ y a su identidad como el morfismo con el que comenzamos, esta identidad corresponde a un morfismo especial

$$(Y_1 \times Y_2)^T \to Y_1^T \times Y_2^T$$

De manera similar, si tomamos $X = Y_1^T \times Y_2^T$ vemos que hay un morfismo $Y_1^T \times Y_2^T \to (Y_1 \times Y_2)^T$ que corresponde a la identidad de $Y_1^T \times Y_2^T$. Todo lo que falta para tener una demostración completa es demostrar que los dos morfismos

$$(Y_1 \times Y_2)^T \to Y_1^T \times Y_2^T \quad \text{y} \quad Y_1^T \times Y_2^T \to (Y_1 \times Y_2)^T$$

así obtenidos son inversos el uno del otro. Esto se sigue también de las propiedades universales de morfismo apropiadas, que implican que los dos morfismos compuestos satisfacen propiedades que sólo el correspondiente morfismo identidad satisface. Traten de llevar a cabo la demostración completa indicada arriba. Ya que lo hayan hecho, el esbozo de cálculo se convierte en una herramienta mucho más confiable cuyo valor es amplificado por su simplicidad.

En el caso de la ley $\mathbf{1}^T \cong \mathbf{1}$, nuestro método da una demostración completa porque obtenemos

$$\frac{X \to \mathbf{1}^T}{T \times X \to \mathbf{1}}$$

que dice que para cualquier objeto X hay exactamente un morfismo $X \to \mathbf{1}^T$ debido a que hay exactamente un morfismo $T \times X \to \mathbf{1}$. Por lo tanto, $\mathbf{1}^T$ es un objeto terminal.

De manera similar podemos esbozar la demostración de la tercera ley como sigue:

$$\begin{array}{c} X \to (Y^T)^S \\ \hline S \times X \to Y^T \\ \hline T \times (S \times X) \to Y \\ \hline (T \times S) \times X \to Y \\ \hline X \to Y^{(T \times S)} \end{array}$$

que en el tercer paso utiliza el isomorfismo $T \times (S \times X) \to (T \times S) \times X$.

Dejamos para ustedes el esbozo de las demostraciones de $Y \simeq Y^{\mathbf{1}}$ y $Y^{\mathbf{0}} \cong \mathbf{1}$ pero esbozaremos la de la última ley, $Y^{(T_1+T_2)} \cong Y^{T_1} \times Y^{T_2}$, que es más difícil.

$$\frac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{X \to Y^{(T_1+T_2)}}{(T_1+T_2) \times X \to Y}}{X \times (T_1+T_2) \to Y}}{T_1 + T_2 \to Y^X}}{T_1 \to Y^X, \quad T_2 \to Y^X}}{X \times T_1 \to Y, \quad X \times T_2 \to Y}}{T_1 \times X \to Y, \quad T_2 \times X \to Y}}{X \to Y^{T_1}, \quad X \to Y^{T_2}}}{X \to Y^{T_1} \times Y^{T_2}}$$

Al comparar directamente la de arriba con la de abajo, obtenemos:

$$\frac{X \to Y^{(T_1+T_2)}}{X \to Y^{T_1} \times Y^{T_2}}$$

Esta ley de los exponentes ilustra que la multiplicación es más básica que la suma, pues morfismos desde una suma —puntos de $Y^{(T_1+T_2)}$— son puntos de un producto, a saber, de $Y^{T_1} \times Y^{T_2}$.

4. La ley distributiva en categorías cartesianamente cerradas

Hemos mencionado que cualquier categoría cartesianamente cerrada satisface la ley distributiva. Podemos ahora justificar esa afirmación dando la construcción de un morfismo:

$$T \times (X_1 + X_2) \to T \times X_1 + T \times X_2$$

que puede demostrarse que es el inverso del morfismo canónico:

$$T \times X_1 + T \times X_2 \to T \times (X_1 + X_2)$$

La construcción está basada en el siguiente cálculo:

$$\frac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{T \times (X_1 + X_2) \to T \times X_1 + T \times X_2}{X_1 + X_2 \to (T \times X_1 + T \times X_2)^T}}{X_1 \to (T \times X_1 + T \times X_2)^T, \quad X_2 \to (T \times X_1 + T \times X_2)^T}}{T \times X_1 \to T \times X_1 + T \times X_2, \quad T \times X_2 \to T \times X_1 + T \times X_2}}{T \times X_1 + T \times X_2 \to T \times X_1 + T \times X_2}$$

Esto muestra que los morfismos $T \times (X_1 + X_2) \to T \times X_1 + T \times X_2$ “son lo mismo” que los endomorfismos de $T \times X_1 + T \times X_2$ y por lo tanto implica que hay un morfismo especial

$$T \times (X_1 + X_2) \to T \times X_1 + T \times X_2$$

que es el que corresponde a la identidad de $T \times X_1 + T \times X_2$. Éste es el morfismo inverso al morfismo canónico $T \times X_1 + T \times X_2 \to T \times (X_1 + X_2)$. Noten la manera crucial en que la exponenciación se usa para obtener el inverso.

En cualquier categoría con productos, sumas y objetos de morfismos, hemos encontrado ahora una aritmética muy rica de sus objetos, que tiene como un caso particular a la aritmética de los números naturales que uno aprende en la escuela, esto es así porque la aritmética de los números naturales no es otra cosa que la aritmética de los conjuntos finitos.

Sesión 31

Objeto de morfismos contra producto

El problema de encontrar objetos de morfismos en una categoría dada es complicado por el hecho de que a menudo el objeto de morfismos que estamos buscando no existe. Esta dificultad ocurre muchas veces en matemáticas: tenemos un problema y ni siquiera sabemos si tiene una solución. En tales casos, ayuda suponer que el problema sí tiene una solución y ¡de cualquier manera proceder a calcularla! Necesitamos un recuento de

cómo usar el **ya quisieras**

que luego aplicaremos al problema de determinar objetos de morfismos en la categoría de conjuntos y en la categoría de gráficas.

Imaginamos que ya hemos encontrado la solución de un problema dado y tratamos de deducir consecuencias de su existencia. Nos preguntamos: ¿qué implica esta solución? De esta manera, a veces somos capaces de deducir suficientes propiedades de dicha solución para descubrir el camino real a la solución o demostrar que no hay solución.

Para aplicar este método hay dos partes, ambas importantes. La primera es averiguar tanto como se pueda sobre la solución buscada *bajo la suposición de que una solución existe*. Comúnmente uno demuestra primero una conclusión del siguiente tipo: si hay una solución, debe ser cierta cosa. Pero puede suceder que la cosa encontrada no sea una solución al problema. La segunda parte consiste en verificar que, de hecho, esta cosa es realmente una solución al problema. Déjenme ilustrar con un ejemplo donde la "solución" no funciona.

Supongamos que queremos encontrar un número entero x tal que $x^2 = -9$. Entonces decimos: supongamos que ya tenemos dicho número. Si lo elevamos a la cuarta potencia encontramos que:

$$x^4 = x^2 \cdot x^2 = (-9) \cdot (-9) = 81$$

Nos damos cuenta de que hay sólo dos números enteros (3 y -3) cuya cuarta potencia es 81. De aquí concluimos que *si el problema tiene solución, ésta debe ser* 3 *o* -3. Noten que se ha logrado un gran progreso. Ahora viene la segunda parte. Debemos verificar si 3 o -3 tienen cuadrado igual a -9. Para esto, lo único que tenemos que hacer es calcular:

$$3^2 = 3 \cdot 3 = 9 \neq -9, \quad \text{y} \quad (-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9 \neq -9$$

Esto demuestra que ninguna de las dos posibilidades es una solución y, por lo tanto, el problema no tiene una. Pero observen que hemos resuelto el problema en cierto sentido porque hemos demostrado que no existe un número entero cuyo cuadrado sea -9.

Ahora aplicaremos ese método al problema de encontrar objetos de morfismos en la categoría de conjuntos y en la categoría de gráficas. Solamente llevamos a cabo la primera parte del método (la descripción de la solución) que, de cualquier manera, es la parte más difícil. Les dejaremos a ustedes demostrar que los objetos que describiremos son de hecho objetos de morfismos. Comencemos recordando la propiedad universal de morfismo que define a los objetos de morfismos.

1. Definición de objeto de morfismos contra definición de producto

Si Y y T son objetos en una categoría con productos, el objeto de morfismos de T en Y es dos cosas: un nuevo objeto, denotado por Y^T y un morfismo $T \times Y^T \to Y$, denotado por e (por *evaluación*) que satisfacen la siguiente propiedad universal. Para cada objeto X y cada morfismo $T \times X \xrightarrow{f} Y$, hay exactamente un morfismo de X a Y^T, denotado por $X \xrightarrow{\ulcorner f \urcorner} Y^T$ que junto con e determina a f como la composición:

$$
\begin{tikzcd}
T \times X \arrow[rr, "1_T \times \ulcorner f \urcorner"] \arrow[dr, "f"'] & & T \times Y^T \arrow[dl, "e"] \\
& Y &
\end{tikzcd}
$$

Esta definición es larga. La mejor manera de aprenderla es aplicarla para resolver los ejercicios. Tan pronto como adquieran cierta práctica no parecerá tan larga. Además, deben notar que esta definición sigue el mismo patrón que todas las demás definiciones que usan propiedades universales de morfismo.

ALICIA: No entiendo lo que quieren decir las "esquinas" $\ulcorner\ \urcorner$.

Las "esquinas" son simplemente una marca para formar un nuevo símbolo para el nuevo morfismo. Como el nuevo morfismo está determinado por f, queremos que su símbolo nos recuerde a f, así que usamos una "f con esquinas". Podríamos haber utilizado cualquier otra marca, pero las esquinas se utilizan por razones históricas; fueron utilizadas antes en lógica. El morfismo $\ulcorner f \urcorner$ se llama el "nombre de f". El uso de esquinas en esta definición es muy similar al uso de los parentesis $\langle\, , \,\rangle$ en la definición del producto. De hecho, toda la definición es paralela a la de los productos. Ayudaría escribir las definiciones una junto a la otra para ver claramente el paralelismo:

Definición de objeto de morfismos

Dados objetos T, Y, un objeto de morfismos de T en Y *es dos cosas:*
1. un objeto denotado Y^T y
2. un morfismo llamado evaluación

$$T \times Y^T \xrightarrow{e} Y$$

Definición de producto

Dados objetos B_1, B_2, un producto de B_1 y B_2 *es dos cosas:*
1. un objeto denotado $B_1 \times B_2$ y
2. dos morfismos llamados proyecciones

$$\begin{tikzcd} & B_1 \\ B_1 \times B_2 \arrow[ur, "p_1"] \arrow[dr, "p_2"'] & \\ & B_2 \end{tikzcd}$$

que satisfacen la siguiente

Propiedad universal de morfismo que define a un objeto de morfismos

Para cada objeto X con morfismo

$$T \times X \xrightarrow{f} Y$$

hay exactamente un morfismo de X a Y^T, que se denotará

$$X \xrightarrow{\ulcorner f \urcorner} Y$$

tal que

$$\begin{tikzcd} T \times X \arrow[rr, "1_T \times \ulcorner f \urcorner"] \arrow[dr, "f"'] & & T \times Y^T \arrow[dl, "e"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

esto es, el morfismo f puede expresarse como

$$f = e \circ (1_T \times \ulcorner f \urcorner)$$

Propiedad universal de morfismo que define a un producto

Para cada objeto X con morfismos

$$\begin{tikzcd} & B_1 \\ X \arrow[ur, "f_1"] \arrow[dr, "f_2"'] & \\ & B_2 \end{tikzcd}$$

hay exactamente un morfismo de X a $B_1 \times B_2$, que se denotará

$$X \xrightarrow{\langle f_1, f_2 \rangle} B_1 \times B_2$$

tal que

$$\begin{tikzcd} & & B_1 \\ X \arrow[r, "\langle f_1, f_2 \rangle"] \arrow[urr, bend left, "f_1"] \arrow[drr, bend right, "f_2"'] & B_1 \times B_2 \arrow[ur, "p_1"] \arrow[dr, "p_2"'] & \\ & & B_2 \end{tikzcd}$$

esto es, los morfismos f_1, f_2 pueden expresarse como

$$f_1 = p_1 \circ \langle f_1, f_2 \rangle \text{ y}$$
$$f_2 = p_2 \circ \langle f_1, f_2 \rangle$$

Estas propiedades universales de morfismo pueden resumirse como

$$\frac{X \to Y^T}{T \times X \to Y}$$

que se puede expresar concisamente como: los morfismos desde cualquier objeto X al objeto de morfismos Y^T son lo mismo que los morfismos de $T \times X$ a Y.

$$\frac{X \to B_1 \times B_2}{X \to B_1, \quad X \to B_2}$$

que se puede expresar concisamente como: los morfismos desde cualquier objeto X al producto $B_1 \times B_2$ son lo mismo que los pares de morfismos de X a B_1 y B_2.

CHAD: ¿Puedes intercambiar la X y la T?

Sí, siempre y cuando la categoría tenga los objetos de morfismos apropiados. En algunas categorías puede ocurrir que Y^T exista mientras que Y^X no exista. Pero mientras los dos objetos de morfismos existan podemos usar el isomorfismo canónico $T \times X \cong X \times T$ para intercambiar la X y la T como sigue:

$$\begin{array}{c} X \to Y^T \\ \hline T \times X \to Y \\ \hline X \times T \to Y \\ \hline T \to Y^X \end{array}$$

2. Calcular los objetos de morfismos

Tratemos ahora de calcular algunos objetos de morfismos, primero en la categoría de conjuntos. Supongamos que Y y T son dos conjuntos. ¿Qué conjunto es Y^T? Por todo lo que hemos dicho en este libro todos deberían adivinar que Y^T "es" el conjunto de todos los morfismos de T en Y. Podemos *deducirlo* solamente usando la propiedad universal de morfismo. Para conocer al *conjunto* Y^T, todo lo que necesitamos saber es qué son sus puntos. Podemos usar el hecho de que $T \times \mathbf{1} = T$ para deducir inmediatamente qué deben ser los puntos de Y^T:

$$\begin{array}{c} \mathbf{1} \to Y^T \\ \hline T \times \mathbf{1} \to Y \\ \hline T \to Y \end{array}$$

Esto es, *si* hay un conjunto Y^T y un morfismo e que satisfacen nuestra propiedad universal, entonces los puntos de Y^T "son" los morfismos de T a Y.

Por ejemplo, si Y tiene 5 puntos y T tiene 3 puntos, entonces Y^T puede ser cualquier conjunto con 125 puntos. Es la especificación de la evaluación la que transforma este simple conjunto de elementos en un sistema de nombres para los morfismos individuales $T \to Y$, semejante, de alguna manera, a los circuitos y programación de una computadora que transforman un banco de memoria vacío en un sistema de significados útiles. Por lo tanto, calcular objetos de morfismos involucra una buena elección del morfismo que jugará el papel del morfismo evaluación y verificar, de alguna manera, que tiene la propiedad universal de morfismo.

Supongamos que Y y T son objetos dados en la categoría de gráficas. Si la gráfica Y^T existe, sus puntos (esto es, sus lazos) son los morfismos (de gráficas) de T en Y. En particular, si $T = F$ (la flecha) y $Y = F$, esto nos dice que los lazos en F^F son los morfismos $F \to F$. Como hay solamente un morfismo de gráficas

$$\begin{array}{rc} F = & \boxed{\bullet \longrightarrow \bullet} \\ & \downarrow \\ F = & \boxed{\bullet \longrightarrow \bullet} \end{array}$$

concluimos que F^F debe tener exactamente un lazo. Desafortunadamente, saber cuáles son los lazos de una gráfica no es saber mucho de ella. Necesitamos conocer las flechas y los vértices y cómo están interconectados. Ahora necesitamos recordar que las flechas de una gráfica X son lo mismo que los morfismos de gráficas de F en X y que los vértices de X son los morfismos de gráficas del "vértice desnudo" V a X, este hecho puede representarse como:

$$\frac{\textit{flechas de } X}{F \to X} \qquad \text{y} \qquad \frac{\textit{vértices de } X}{V \to X}$$

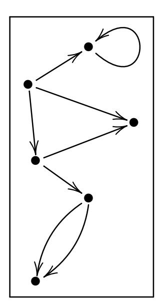
Si lo aplicamos a la gráfica Y^T, deducimos sus flechas utilizando la propiedad universal de morfismo, de la misma manera en la que usamos dicha propiedad para encontrar los lazos:

$$\begin{array}{c} \textit{flechas de } Y^T \\ \hline F \to Y^T \\ \hline T \times F \to Y \end{array}$$

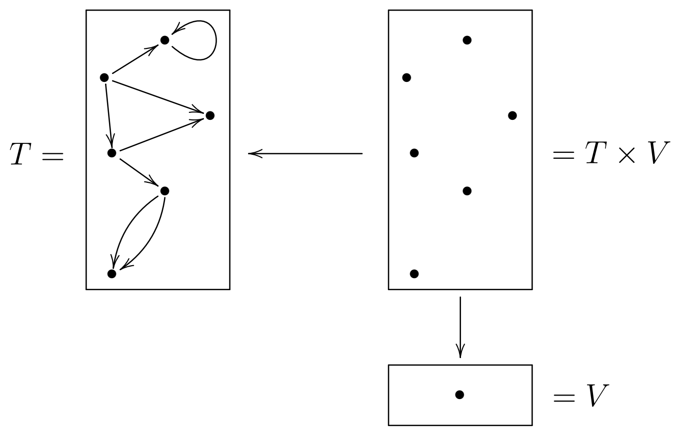
Por lo tanto, las flechas de Y^T deben ser los morfismos de gráficas de $T \times F$ en Y y análogamente los vértices:

$$\begin{array}{c} \textit{vértices de } Y^T \\ \hline V \to Y^T \\ \hline T \times V \to Y \end{array}$$

Los vértices de Y^T son los morfismos de gráficas de $T \times V$ en Y. Sabemos qué deben ser el conjunto de flechas y el conjunto de vértices de Y^T pero, para realmente aplicar esto y hacer los cálculos, debemos entender claramente qué son las gráficas $T \times F$ y $T \times V$. La segunda es más fácil: $T \times V$ no tiene flechas y sus vértices son los mismos que los de T. Por ejemplo, si T es la gráfica:

$T =$ 

Entonces:

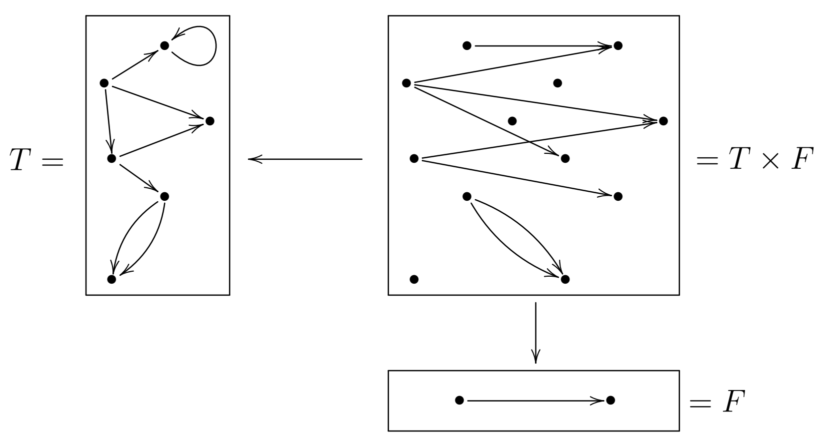


Como $T \times V$ no tiene flechas, sus morfismos de gráficas a Y son lo mismo que los morfismos de conjuntos de los vértices de $T \times V$ (que son los vértices de T) a los vértices de Y, es decir: *los vértices de Y^T son los morfismos de conjuntos $T_V \to Y_V$.*

En el caso $Y = F$ y $T = F$ sabemos que los vértices de F^F son los morfismos de $\{s, t\}$ a $\{s, t\}$ que son cuatro en número. Así que, F^F*debe tener cuatro vértices* (uno de los cuales carga un lazo porque ya encontramos que F^F tiene un lazo).

Para encontrar qué son las flechas de Y^T necesitamos entender la gráfica $T \times A$ porque ya hemos deducido que estas flechas son precisamente los morfismos de gráficas de $T \times F$ en Y.

Recordemos, de la sesión 25, la naturaleza del producto de una gráfica y la flecha. En el caso de la gráfica T dibujada arriba, el producto $T \times F$ es:



Ahora intenten los siguientes ejercicios.

Ejercicio 1
Haga dibujos de F^F y del morfismo evaluación $F \times F^F \xrightarrow{e} F$.

Para hacerlo necesitarán primero dibujar $F \times F$ y luego encontrar todos los morfismos de gráficas de $F \times F$ en F. Eso es el conjunto de flechas de F^F. Después necesitarán determinar cómo se relacionan las flechas con los vértices. F^F exhibe elegantemente la diferencia entre ser terminal y tener exactamente un punto. El siguiente ejercicio muestra qué objetos X tienen X^X terminal.

Ejercicio 2
Sea X un objeto en una categoría cartesianamente cerrada. Demuestre que las siguientes dos propiedades son equivalentes:
(a) $X \to \mathbf{1}$ es un monomorfismo;
(b) $X^X = \mathbf{1}$.

Vimos en la sesión 27 que la propiedad (a) es equivalente a la "idempotencia" de X (esto es, $X \xleftarrow{1_X} X \xrightarrow{1_X} X$ es un producto).

ARTÍCULO VI

El funtor partes contravariante

1. Condiciones estables y partes

La existencia de objetos de morfismos es ya una propiedad muy poderosa (y muy útil) que podría tener una categoría $\mathcal{C}$. Sin embargo, propiedades aún más fuertes son realizables; por ejemplo, las categorías $\mathcal{C}/X$ podrían ellas mismas también tener objetos de morfismos. El concepto de *parte* (o *subobjeto*) en $\mathcal{C}$ podría ser representable mediante un objeto de valores de verdad Ω, como lo explicamos aquí y en las Sesiones 32 y 33.

Vamos a estudiar la relación entre partes de X (monomorfismos con codominio X) y condiciones estables de figuras en X. Decimos que una condición es *estable* siempre que: para cualquier figura x en X de forma A que satisface la condición y cualquier $A' \xrightarrow{a} A$, la figura trasformada $x' = xa$ también satisface la condición. Una clase fundamental de condición es aquella dada por un morfismo g como sigue:

Definición 1: *x **está en** g (o x **pertenece a** g) si y solo si existe w para la cual $x = gw$.*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, dashed, "w"] \arrow[dr, "x"'] & & W \arrow[dl, "g"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

> **Ejercicio 1**
> La condición "…está en g" es estable.
>
> **Ejercicio 2**
> Si g es un epimorfismo escindido (i.e. tiene una sección s), entonces todo x (con el mismo codominio X que g) está en g.

Como la mayoría de los morfismos g no son epimorfismos escindidos, el problema de cuales figuras están en g (al igual que para los problemas de levantamiento o elección considerados antes) es difícil a menos que haya restricciones. (Una restricción, que no discutimos aquí, consiste en limitar las formas A de las figuras x a objetos "proyectivos".) La restricción más importante es considerar solamente a aquellas g que son partes de X (i.e. morfismos monomórficos); luego utilizamos a éstas como herramientas para investigar las g generales vía la noción de imagen (ver la Definición 2 más abajo).

Ejercicio 3
Si g_1 y g_2 son partes de X tales que para todo x,

x pertenece a g_1 si y solo si x pertence a g_2,

entonces existe exactamente un isomorfismo h tal que $g_1 = g_2h$.

Cuando g_1 y g_2 están relacionadas como en el Ejercicio 3, a veces se dice, de manera informal, que g_1 y g_2 son la "misma parte". (A veces una condición en las figuras en X en $\mathcal{C}$ puede ser demasiado complicada para determinar una parte en $\mathcal{C}$; sin embargo puede determinar una parte de IX en donde $I : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ es una inclusión de $\mathcal{C}$ como una subcategoría plena en una categoría más grande.)

Definición 2: *Una* ***imagen*** *de un morfismo g es una parte i del codominio de g para la cual*

(1) *g está en i,*

(2) *para todas las partes j, si g está en j, entonces i está en j.*

Por supuesto que cualesquiera dos imagenes del mismo g son isomorfas de manera única como partes.

Ejercicio 4
Supongamos que g tiene imagen i (entonces, de manera inmediata, cualquier figura en g está también en i). Supongamos además que, recíprocamente, toda figura que está en i está también en g. Entonces una p que demuestra que g está en i (i.e. $g = ip$) es un epimorfismo escindido (i.e. existe s tal que $ps = 1$).

En el Ejercicio 7 veremos que si $\mathcal{C}$ tiene igualadores, entonces un morfismo p que demuestra que i es una imagen de g es, él mismo, especial, en un sentido dual a aquel en el que las partes son especiales, a saber, p es epimórfica ($up = vp$ implica $u = v$); pero p no es usualmente un epimorfismo escindido. Al acercarnos de manera gradual al problema del levantamiento, es apropiado generalizar la relación de levantamiento y decir que x está **localmente en** g si y solo si existe una a epimórfica de manera que xa está en g. Entonces en categorías con ciertas propiedades de exactitud, x está en la imagen de g si y solo si x está localmente en g mismo.

2. Imágenes inversas y verdad

Una manera más general de especificar una parte de X es en términos de un morfismo $X \xrightarrow{f} Y$ junto con una parte i de Y. Entonces la condición en x de que exista t con $it = fx$ es estable. En muchas categorías hay siempre una parte de X que corresponde a esta clase de condición.

Definición 3: *Una parte j tal que para cualquier x,*

$$x \text{ está en } j \text{ si y solo si } fx \text{ está en } i$$

es llamada una ***imagen inversa de*** i ***a lo largo de*** f.

(En términos de condiciones en x, la imagen inversa es llamada el resultado de *sustituir* f en la condición definida por i.)

Ejercicio 5
Por supuesto que la clase más básica de condición en figuras en X es aquella dada por una ecuación como sigue. Dados dos morfismo $f_1, f_2 : X \rightrightarrows Y$ podemos considerar la condición en x

$$f_1 x = f_2 x.$$

Si esta condición determina una parte de X, dicha parte es llamada el *igualador* de f_1, f_2. Si la categoría tiene productos, un igualador es un caso especial de una imagen inversa, como se puede ver si se define $f = \langle f_1, f_2 \rangle$, el morfismo inducido en $Y \times Y$, y se considera la parte diagonal i de $Y \times Y$.

Ejercicio 6
Condiciones muy diferentes pueden corresponder a la misma parte. Por ejemplo, dados $f_1, f_2 : X \rightrightarrows Y$ y dado también $W \xrightarrow{g} X$, la condición (en figuras x de X) de satisfacer la ecuación $f_1 x = f_2 x$ puede ser equivalente a que x esté en la imagen de g en el sentido de la Definición 2. En tal caso podemos decir que g parametriza (ver la sección 2 de la Sesión 6) a las soluciones de la ecuación $f_1 = f_2$, y se dice que el diagrama obvio $W \longrightarrow X \rightrightarrows Y$ es **exacto**. Si, además, no hay redundancias en la parametrización g, i.e. g es una parte, entonces es isomorfa a cualquier igualador del par f_1, f_2.

Ejercicio 7
Si la categoría tiene un igualador para cada par paralelo y una imagen para cada morfismo, entonces todo morfismo puede ser factorizado como un epimorfismo seguido de un monomorfismo.
Sugerencia: Todo lo que se necesita demostrar es que el morfismo p que conecta un morfismo dado con su imagen es un epimorfismo (no necesariamente escindido). La propiedad de ser epimorfo tiene que ver con la igualdad de morfismos, que puede ser tanteada utilizando igualadores.

Una propiedad importante que muchas de las categorías de interés tienen, es la "representabilidad" de la noción general de parte, como sigue.

Definición 4: *Un objeto* Ω *junto con una parte dada* $T \xrightarrow{v} \Omega$, *es llamado un* ***clasificador de subobjetos*** *u* ***objeto de valores de verdad*** *para* $\mathcal{C}$ *si y solo si para cada parte* g *de cualquier* X *existe exactamente una* $X \xrightarrow{f} \Omega$ *para la cual* g *es la imagen inversa de* v *a lo largo de* f. *El morfismo* v *con esta sobresaliente propiedad es a menudo llamado* ***verdadero****. En general,* fx *es a menudo llamado el* ***valor de verdad de*** *(o grado al cual) "*x *pertenece a* g*".*

Ejercicio 8
El dominio del morfismo v debe ser un objeto terminal.

Ejercicio 9
(Unicidad del espacio de valores de verdad.) Entre cualesquiera dos objetos de valores de verdad en la misma categoría existe exactamente un isomorfismo para el cual los puntos verdadero se corresponden.

Los valores de verdad a menudo incluyen muchos elementos además de verdadero y falso. Juntos tienen una rica estructura que refleja la naturaleza particular de la cohesión y el movimiento en el que participan todos los objetos de $\mathcal{C}$. La sola existencia de Ω en $\mathcal{C}$ tiene efectos profundos sobre todo $\mathcal{C}$ (como la sola existencia de espacios de morfismos implica la distributividad de los productos sobre los coproductos). Hemos visto en la Sesión 33 que Ω misma tiene una rica estructura algebraica (que es a veces conocida como lógica en un sentido estrecho), pero esto fuerza a su vez que el sistema de partes de cualquier objeto X tenga propiedades muy distintas de aquellas que tienen los sistemas análogos de subobjetos en el álgebra lineal o en la teoría de grupos.

Para conjuntos abstractos sin estructura y varias otras categorías, $\Omega = 1+1$, pero para muchas categorías de cohesión y variación (tales como las gráficas y los sistemas dinámicos) la determinación detallada de la estructura del objeto de valores de verdad es un paso importante para entender a toda la categoría y su funcionamiento. (Ver los dibujos en la sección 2 de la Sesión 33.)

Ejercicio 10
Por las propiedades generales de la exponenciación aplicadas a la base particular Ω, cualquier morfismo $X \xrightarrow{f} Y$ induce un morfismo $\Omega^Y \longrightarrow \Omega^X$. Demuestre que, aplicados a los puntos del espacio Ω^X e interpretados como en la Definición 4, este morfismo inducido representa la operación imagen inversa en partes y la operación sustitución en condiciones.

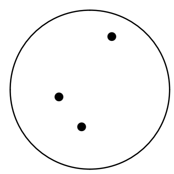
La discusión anterior da una breve introducción al álgebra de partes. Este álgebra admite un amplio desarrollo, especialmente en el estudio del comportamiento de los operadores lógicos cuando el objeto en que viven las partes varía a lo largo de un morfismo y en los estudios (en análisis funcional y topología general) de las partes de los objetos de morfismos. El álgebra lógica desarrollada sirve como una herramienta auxiliar útil en el estudio del contenido medular de las matemáticas, que es la variación de cantidades en espacios. Fue, de hecho, una forma particular de dicha variación, conocida como "*gavilla*", la que llevó al primer descubrimiento, por Grothendieck en 1960, de la clase de categorías conocidas como topos. La palabra griega *topos,* que significa localización o situación, fue adoptada para querer decir modo de cohesión o categoría (tipo) de variación.

Sesión 32

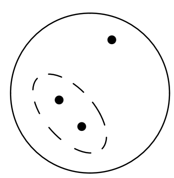
Subobjetos, lógica y verdad

1. Subobjetos

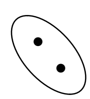
Vamos a encontrar un objeto sobresaliente que conecta **subobjetos**, **lógica** y **verdad**. ¿Qué es lo que debe entenderse por "subobjeto", o "parte", de un objeto? Supongamos que tenemos un conjunto abstracto X como:

$X =$ 

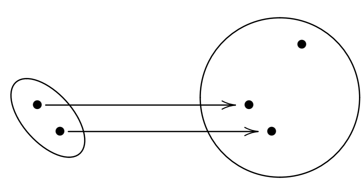
y consideremos algunos de sus elementos, por ejemplo aquellos indicados en el dibujo:



Éstos constituyen lo que podría llamarse una *parte* de X. Este concepto de "parte" tiene dos ingredientes. Primero, una parte tiene una *forma*, que en este ejemplo es un conjunto S con precisamente dos elementos:

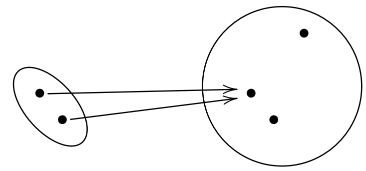
$S =$ 

pero no tiene significado decir que S mismo es una parte de X, porque hay diferentes partes de X que tienen la misma forma. Por lo tanto, es necesario un segundo ingrediente para determinar una parte de X: un morfismo "inclusión" que indique la manera particular en la que el conjunto S se inserta en X:

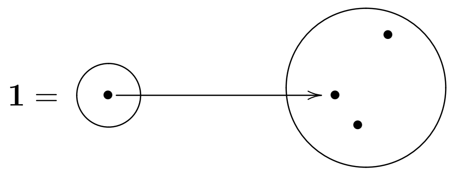


Una parte de X (de forma S), por lo tanto, debe ser un morfismo de S en X. Pero hay muchos morfismos de S en X (en el ejemplo de arriba hay exactamente

$3^2=9$), la mayoría de los cuales no deseamos llamar partes, por ejemplo:



Hay una parte de X que surge de este morfismo pero no es una parte de forma S; es un morfismo de $\mathbf{1}$ a X, que es:



¿Qué debería satisfacer un morfismo $S \to X$ para ser llamado un "morfismo inclusión"?

Definición: *En cualquier categoría, un morfismo* $S \xrightarrow{i} X$ *es una* **inclusión** *o* **monomorfismo** *o* **morfismo mónico**, *si satisface:*

Para cada objeto T y cada par de morfismos s_1, s_2 de T a S
$is_1=is_2$ *implica* $s_1=s_2$.

En muchas categorías uno no necesita usar todos los "objetos de prueba" T. Por ejemplo:

Ejercicio 1
Demuestre que en la categoría de conjuntos, si $S \xrightarrow{i} X$ es tal que para todos los *puntos* $\mathbf{1} \xrightarrow{s_1} S$ y $\mathbf{1} \xrightarrow{s_2} S$, $is_1=is_2$ implica que $s_1=s_2$, entonces i es una inclusión. Abreviado: si i preserva la distinción de puntos, i es una inclusión. (Recuerde a nuestra vieja amiga la "contrapositiva": "$is_1=is_2$ implica $s_1=s_2$" dice lo mismo que "$s_1 \neq s_2$ implica $is_1 \neq is_2$".)

Ejercicio 2
(a) Demuestre que en la categoría de gráficas, si $S \xrightarrow{i} X$ satisface ambas:

(i) para cada par $V \xrightarrow{d_1} S$ y $V \xrightarrow{d_2} S$ de *vértices* de S,
$id_1=id_2$ implica $d_1=d_2$, y

(ii) para cada par $F \xrightarrow{a_1} S$ y $F \xrightarrow{a_2} S$ de *flechas* de S,
$ia_1=ia_2$ implica $a_1=a_2$,

entonces i es una inclusión.

(b) Encuentre un ejemplo sencillo de un morfismo $S \xrightarrow{i} X$ en la categoría de gráficas que preserve la distinción de *puntos* pero que no sea una inclusión.

Otros nombres para "inclusión" y "morfismo inclusión" son:

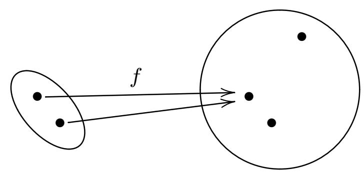
morfismo mónico
morfismo no singular

y especialmente en conjuntos:

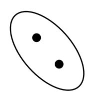
morfismo inyectivo
morfismo uno a uno

Hay una notación especial para indicar que un morfismo $S \xrightarrow{i} X$ es una inclusión: en lugar de escribir una flecha simple como $\to$, uno pone un pequeño gancho, $\subset$, en la cola, de manera que $S \overset{i}{\hookrightarrow} X$ indica que i es un morfismo inclusión.

De acuerdo con nuestra definición, el morfismo



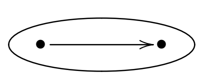
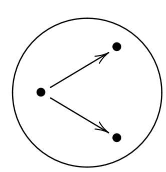
no es inyectivo porque hay dos morfismos *diferentes* de algún conjunto a

$S =$ 

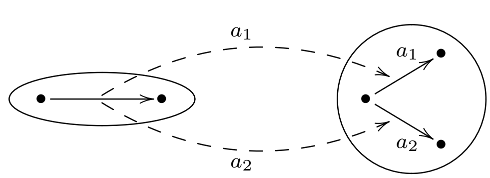
que compuestos con f nos dan el mismo resultado (de hecho, en este caso particular, es cierto que *todos* los morfismos desde *cualquier* conjunto dado a S dan el mismo resultado cuando son compuestos con f).

Un buen ejemplo de un morfismo inclusión en conjuntos es el morfismo que le asocia a cada estudiante en la clase, la silla ocupada por ese estudiante. (Para que sea un morfismo, todos los estudiantes deben estar sentados y es un morfismo inclusión si ¡no hay unos sentados en las piernas de otros!) En este ejemplo, S puede tomarse como el conjunto de todos los estudiantes en la clase y X como el conjunto de todas las sillas en el salón. El ejemplo ilustra que el conjunto S puede subyacer a diferentes partes del conjunto X porque otro día los estudiantes se pueden sentar en diferentes lugares y de esta manera determinar una parte diferente del conjunto de sillas. Entonces, una parte de X no está especificada por sólo otro conjunto sino por otro conjunto, junto con un morfismo inclusión de dicho conjunto a X.

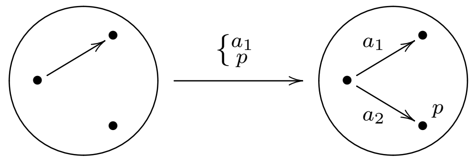
Para un ejemplo en la categoría $\mathcal{S}^{\downdownarrows}$ de gráficas irreflexivas, consideren las gráficas:

$F =$  y $C =$ 

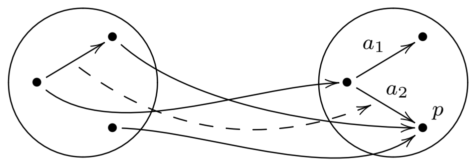
Podemos ver dos partes diferentes o *subgráficas* de C de forma F:



claro que a_1 y a_2 son solamente dos de las varias subgráficas que tiene C. Otra subgráfica está especificada por:

$F + V =$ 

Noten que el morfismo $\begin{cases} a_2 \\ p \end{cases}$ de $F + V$ en C, esto es,



no da una subgráfica porque no es inyectiva.

2. Verdad

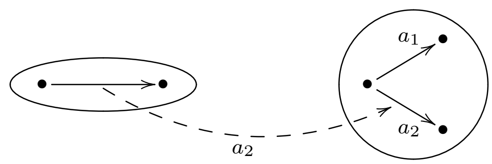
Permítanme ilustrar que si tienen una parte de X y si escogen un elemento o figura particular en X, este elemento o figura puede estar ya incluida en la parte. ¿Cómo se puede expresar esta idea en términos solamente de morfismos y composiciones? Supongamos que tenemos una figura $T \xrightarrow{x} X$ y que tenemos una parte $S \overset{i}{\hookrightarrow} X$. Si se refiere al ejemplo de estudiantes y sillas mencionado arriba, T puede ser $\mathbf{1}$, y x puede ser simplemente una silla particular. Entonces, preguntar si esta silla está incluida en aquella parte de las sillas determinada por el acomodo de los estudiantes sentados, es simplemente preguntar si la silla x está ocupada y esto, a su vez, es simplemente preguntar si hay un morfismo f que complete el diagrama:

$$\begin{tikzcd} & T \arrow[dl, dashed, "f"'] \arrow[dr, "x"] & \\ S \arrow[rr, hook, "i"] & & X \end{tikzcd}$$

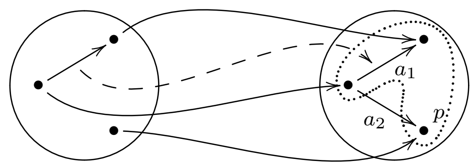
es decir, un morfismo f tal que $i \circ f = x$. La inyectividad de i implica que puede haber a lo más un morfismo f que "demuestra" que la silla x está ocupada, lo que quiere decir, incluida en la parte S, i.

En el ejemplo anterior donde la figura $T \xrightarrow{x} X$ es simplemente un punto del conjunto de sillas, el objeto T es terminal pero debemos destacar que T puede ser cualquier objeto porque el mismo concepto se aplica a figuras arbitrarias de forma arbitraria.

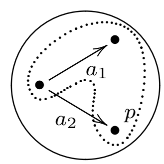
Por ejemplo, en la categoría de gráficas, podemos tomar los morfismos que teníamos antes; como la figura x tomamos



y como la parte S, i tomamos

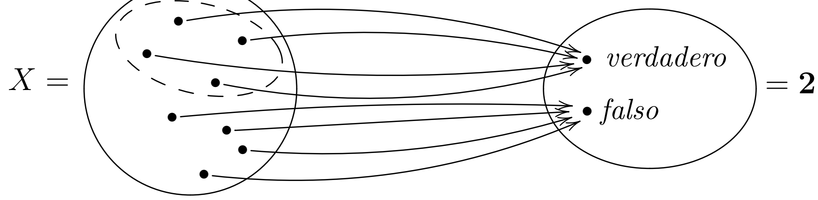


y ahora preguntamos: ¿está la flecha a_2 de X incluida en la parte S, i? La respuesta es claramente "no". Esto es obvio en el dibujo:



y puede también verificarse que ninguno de los morfismos de F en $F+V$ compuesto con i da x. Sin embargo, uno no puede evitar la sensación de que esta respuesta no le hace completa justicia a la pregunta porque, a pesar de que la figura a_2 no está en la subgráfica indicada de X, su salida y su llegada sí lo están. Entonces, hay un cierto grado de verdad en la afirmación de que a_2 está incluido en la subgráfica S, i; no es completamente falsa. Esto sugiere que es posible definir diferentes grados de verdad apropiados para la categoría de gráficas, de tal manera que podamos hacerle completa justicia a tales preguntas.

Regresemos a la categoría de conjuntos y veamos cuál es la situación allí. Si tenemos una parte de un conjunto y un punto en ese conjunto y alguien dice que el punto está incluido en la parte, hay solamente dos posibles niveles de verdad de esa afirmación: es o verdadera o falsa. Entonces, en la categoría de conjuntos el conjunto de dos elementos $\mathbf{2} = \{\mathit{verdadero}, \mathit{falso}\}$ tiene la siguiente propiedad (por lo menos para puntos x pero de hecho para figuras de cualquier forma): si X es un conjunto y $S \xhookrightarrow{i} X$ es cualquier subconjunto de X, hay exactamente una función $\varphi_S \colon X \longrightarrow \mathbf{2}$ tal que para todo x, x está incluido en S, i si y sólo si $\varphi_S(x) = \mathit{verdadero}$.



Entonces, ya que hayamos escogido un punto $\mathbf{1} \xrightarrow{verdadero} \mathbf{2}$ tenemos una correspondencia uno a uno:

$$\frac{\textit{partes de } X}{\textit{morfismos } X \to \mathbf{2}}$$

En particular, esto les permite contar el número de partes de X, que es igual al número de morfismos de X en $\mathbf{2}$ que, a su vez, es igual al número de puntos de $\mathbf{2}^X$. Aquí hemos identificado dos partes de X si son isomorfas como objetos sobre X, lo que discutiremos más a fondo en la siguiente sesión.

Dada una parte de un conjunto X, digamos $S \xrightarrow{i} X$, su morfismo correspondiente $X \xrightarrow{\varphi_S} \mathbf{2}$ se llama el morfismo *característico* de la parte S, i porque φ_S caracteriza, al menos, los puntos de X que están incluidos en la parte S, i como aquellos puntos x tales que $\varphi_S(x) = \textit{verdadero}$. De hecho, el morfismo φ_S hace un trabajo mucho mejor porque, como se indicó arriba, esta caracterización es válida para toda clase de figuras $T \xrightarrow{x} X$ y no solamente para puntos. La única diferencia es que, cuando T no es el objeto terminal, necesitamos un morfismo $\textit{verdadero}_T$ de T a $\mathbf{2}$ en lugar del morfismo $\textit{verdadero}{:}\mathbf{1} \longrightarrow \mathbf{2}$. El morfismo $\textit{verdadero}_T$ no es otra cosa que la composición del único morfismo $T \to \mathbf{1}$ con $\textit{verdadero}{:}\mathbf{1} \longrightarrow \mathbf{2}$:

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{verdadero}_T"'] & \mathbf{1} \arrow[r, "\mathrm{verdadero}"] & \mathbf{2} \end{tikzcd}$$

Resumiendo: la propiedad fundamental del morfismo característico φ_S es que para *cualquier* figura $T \xrightarrow{x} X$, x está incluida en la parte S, i de X si y sólo si $\varphi_S(x) = \textit{verdadero}_T$.

3. El objeto valores de verdad

Veamos ahora cómo hacer algo similar en la categoría de gráficas. Dar una parte de un objeto X en esta categoría (esto es, dar una subgráfica de una gráfica X) equivale a dar un parte S_F del conjunto de flechas de X y una parte S_V del conjunto de vértices de X tales que la salida y la llegada de cada flecha en S_F es un vértice en S_V:

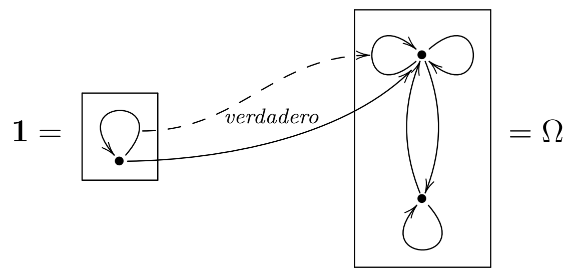
$$\begin{tikzcd} S_F \arrow[r, hook] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & \textit{flechas}\,(X) \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \\ S_V \arrow[r, hook] & \textit{vértices}\,(X) \end{tikzcd}$$

Ahora necesitamos una gráfica que juegue el mismo papel para gráficas que jugó el conjunto $\mathbf{2}$ para conjuntos. Queremos una gráfica Ω junto con un punto especificado $\mathbf{1} \xrightarrow{verdadero} \Omega$ con la siguiente propiedad: los morfismos desde cualquier gráfica X a Ω deben corresponder a las partes de X

$$\frac{S \overset{i}{\hookrightarrow} X}{X \xrightarrow{\varphi_S} \Omega}$$

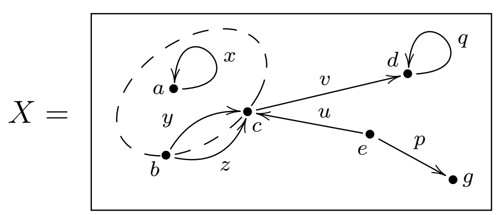
de tal forma que para cualquier figura $T \xrightarrow{x} X$, de X, $\varphi_S x = verdadero_T$ si y sólo si x está incluida en la parte S, i. Si tal pareja Ω y $\mathbf{1} \xrightarrow{verdadero} \Omega$ existe, está caracterizada de manera única por la propiedad de anterior. Será un sorprendente beneficio adicional que para cada figura $T \xrightarrow{x} X$ el morfismo $T \xrightarrow{\varphi_S x} \Omega$ nos diga el "nivel de verdad" de la afirmación de que x está incluida en la parte dada S.

Afortunadamente, un objeto punteado tal existe en la categoría de gráficas y es el siguiente $\mathbf{1} \xrightarrow{verdadero} \Omega$:



Esta gráfica Ω juega, entre las gráficas, el papel que juega el conjunto $\mathbf{2}$ entre los conjuntos. Hay cinco flechas y dos vértices en Ω que representan los diferentes grados de verdad que pueda tener una afirmación. (Aquí consideramos afirmaciones de la forma "una cierta figura está incluida en una cierta subgráfica".) Estos siete elementos representan las siete posibles relaciones que puede tener un elemento de X (flecha o vértice) con respecto a la subgráfica de X dada (hay cinco posibilidades para una flecha y dos para un vértice). Son las siguientes:

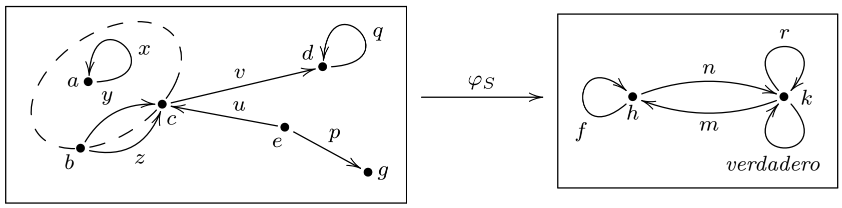
(a) Para flechas:
   (1) La flecha se encuentra incluida en la subgráfica. Ejemplos de esto son las flechas y y x, con respecto a la subgráfica indicada de la siguiente gráfica.



   (2) La flecha no está incluida en la subgráfica pero su salida y su llegada sí lo están (como la flecha z en la gráfica de arriba).
   (3) La flecha no está en la subgráfica ni tampoco su salida, pero su llegada sí está (como la flecha u de arriba).
   (4) La flecha no está en la subgráfica ni tampoco su llegada, pero su salida sí está (como la flecha v arriba).
   (5) La flecha no está ni tampoco están su salida ni su llegada (como las flechas p y q de arriba).

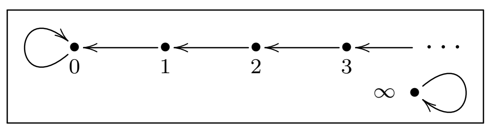
(b) Para los vértices:
  (1) El vértice está en la subgráfica (como los vértices a, b y c de arriba).
  (2) El vértice no está en la subgráfica (como los vértices d, e y g en la gráfica dibujada arriba).

Entonces, en el ejemplo de arriba, el morfismo característico de la parte indicada es el siguiente:

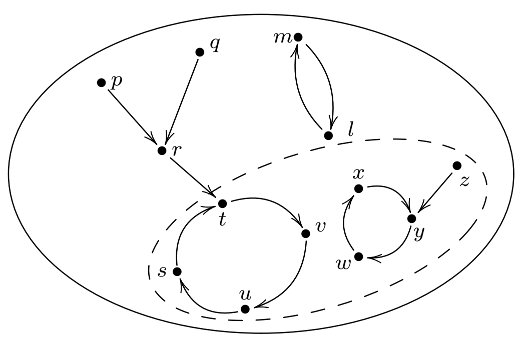


definida en las flechas como $\varphi_S(x)\!=\!\varphi_S(y)\!=\!verdadero$, $\varphi_S(u)\!=\!n$, $\varphi_S(v)\!=\!m$, $\varphi_S(p)$ $=\!f$, y $\varphi_S(q)\!=\!f$ (y de manera compatible en los vértices).

La categoría de sistemas dinámicos tiene también un objeto valores de verdad Ω; es sorprendente que tenga un número infinito de elementos o "valores de verdad" y que no sea igual a los números naturales con el endomorfismo sucesor, es más bien opuesta a éste en el sentido de que la dinámica va en la dirección opuesta. Este objeto valores de verdad en la categoría de sistemas dinámicos tiene el siguiente dibujo:



La explicación es que un subsistema es una parte de un sistema dinámico que es cerrado bajo la dinámica, y si ustedes toman un estado x y se preguntan si x está incluido en el subsistema, la respuesta puede ser "no, pero estará incluido en un paso", o en dos pasos, etcétera. Por ejemplo, consideren el subsistema dinámico indicado a continuación.



Si preguntamos si el estado p está en el subsistema, la respuesta en Ω es "no, pero sí después de dos pasos", mientras que la misma pregunta acerca de m tiene el valor de verdad ∞, "por siempre falso". Entonces, para cada estado en el sistema grande, la afirmación de que si está en el subsistema tiene un valor definido en Ω; este valor es $verdadero\!=\!0$ sólo para ocho de los estados.

DANILO: ¿Qué pasa en el caso de un elemento que se sale del sistema?

Estamos hablando de subsistemas dinámicos, esto es, morfismos inclusión cuyos dominios son también objetos en la categoría de sistemas dinámicos. Así es que los elementos nunca "se salen"; el aspecto interesante es que podrían "entrar" del sistema más grande. Podemos, por supuesto, considerar *subconjuntos* del conjunto subyacente de estados de un sistema dinámico.

Hay, de hecho, un sistema dinámico más grande $\widehat{\Omega}$ que podríamos llamar el espacio de los "valores de verdad caóticos", con la propiedad de que morfismos $X \xrightarrow{\varphi} \widehat{\Omega}$ de sistemas dinámicos corresponden a estos subconjuntos arbitrarios de X; solamente aquellos φ que pertenecen a $\Omega \hookrightarrow \widehat{\Omega}$ corresponden a subsistemas reales. Hay "operadores modales" $\widehat{\Omega} \rightrightarrows \Omega$ que relacionan cualquier subconjunto A de cualquier X con el subsistema más pequeño de X que contiene a A y con el subsistema más grande que está contenido en A. Como un ejercicio, ¿pueden hacer explícito qué son los estados de $\widehat{\Omega}$ y cómo deben evolucionar?

Sesión 33

Partes de un objeto: toposes

1. Partes e inclusiones

En la sesión anterior usamos la idea de inclusión que es la base de verdad y lógica; ahora la consideraremos en más detalle. Lógica (en el sentido restringido) trata primordialmente de subobjetos; lo importante de los subobjetos es cómo están relacionados, y sus relaciones más básicas están dadas por morfismos en una cierta categoría.

Si X es un objeto dado de una categoría $\mathcal{C}$, entonces, como ya lo hemos explicado, podemos formar otra categoría $\mathcal{C}/X$: un objeto de $\mathcal{C}/X$ es un morfismo de $\mathcal{C}$ con codominio X, y un morfismo de un objeto $A=(A_0 \xrightarrow{\alpha} X)$ a un objeto $B=(B_0 \xrightarrow{\beta} X)$ es un morfismo de $\mathcal{C}$ de A_0 a B_0 que β lleva a α, esto es, un morfismo $A_0 \xrightarrow{f} B_0$ tal que $\beta f=\alpha$:

$$\begin{tikzcd} A_0 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & B_0 \arrow[dl, "\beta"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Claro que obtenemos una categoría, porque si tenemos otro morfismo:

$$\begin{tikzcd} B_0 \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "\beta"'] & & C_0 \arrow[dl, "\gamma"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

esto es, $\gamma g=\beta$, entonces gf es también un morfismo en $\mathcal{C}/X$ ya que $\gamma(gf)=\alpha$:

$$\gamma(gf)=(\gamma g)f=\beta f=\alpha$$

Queremos definir una parte de esta categoría, denotada por $\mathcal{P}(X)$,

$$\mathcal{P}(X) \subseteq \mathcal{C}/X$$

que se llama *la categoría de partes de* X. Los *objetos* de $\mathcal{P}(X)$ son todos los objetos α de $\mathcal{C}/X$ que son *morfismos inclusión en* $\mathcal{C}$, esto es, los objetos de $\mathcal{P}(X)$ son las partes o subobjetos de X en $\mathcal{C}$. Los *morfismos* de $\mathcal{P}(X)$ son todos los morfismos entre sus objetos en $\mathcal{C}/X$; pero, como se apuntó en la sesión anterior, dados cualesquiera dos objetos $A_0 \xrightarrow{\alpha} X$ y $B_0 \xrightarrow{\beta} X$ en $\mathcal{P}(X)$, hay *a lo más un* morfismo $A_0 \xrightarrow{f} B_0$ en $\mathcal{C}$ tal que $\beta f=\alpha$.

Si la categoría $\mathcal{C}$ tiene objeto terminal $\mathbf{1}$, entonces podemos formar la categoría $\mathcal{C}/\mathbf{1}$, pero ésta resulta ser la misma $\mathcal{C}$ porque tiene un objeto por cada objeto de $\mathcal{C}$ (un morfismo $A_0 \to \mathbf{1}$ no contiene más información que solamente el objeto A_0 de $\mathcal{C}$) y sus morfismos son precisamente los morfismos de $\mathcal{C}$. Por lo tanto, la categoría $\mathcal{P}(\mathbf{1})$ de partes de $\mathbf{1}$ es una subcategoría de $\mathcal{C}$, precisamente la subcategoría determinada por aquellos objetos A_0 cuyo morfismo único $A_0 \to \mathbf{1}$ es inyectivo. Entonces, mientras que un subobjeto de un objeto general X involucra a las dos cosas, un objeto A_0 y un morfismo $A_0 \xrightarrow{\alpha} X$, cuando $X = \mathbf{1}$ solamente es necesario especificar A_0, así que "ser una parte de $\mathbf{1}$" puede considerarse como una *propiedad* del objeto A_0 en lugar de como una *estructura* adicional α.

Como un ejemplo de la categoría de partes del objeto terminal podemos considerar las partes del conjunto terminal en la categoría de conjuntos. Los objetos de esta categoría son todos los conjuntos cuyo morfismo al conjunto terminal es inyectivo. ¿Pueden dar un ejemplo de un tal conjunto?

DANILO: El mismo conjunto terminal.

Sí. De hecho, en cualquier categoría, todos los morfismos cuyo dominio es el objeto terminal son inyectivos. Un morfismo del objeto terminal al objeto terminal es un isomorfismo. ¿Algún otro ejemplo?

FÁTIMA: El conjunto vacío.

Sí. El morfismo único $\mathbf{0} \to \mathbf{1}$ es también inyectivo porque en la categoría de conjuntos cualquier morfismo con dominio $\mathbf{0}$ es inyectivo: para cualquier conjunto X hay a lo más un morfismo $X \to \mathbf{0}$ y, por lo tanto, no es posible encontrar dos morfismos diferentes $X \to \mathbf{0}$ que compuestos con el morfismo $\mathbf{0} \to \mathbf{1}$ den el mismo resultado. ¿Hay algún otro conjunto cuyo morfismo al objeto terminal sea inyectivo? No. Por lo tanto la categoría de partes o subconjuntos del conjunto terminal es muy simple: sólo tiene dos objetos no isomorfos $\mathbf{0}$ y $\mathbf{1}$ y sólo un morfismo, además de las identidades. Puede dibujarse como:

$$\mathcal{P}(\mathbf{1}) = \boxed{\mathbf{0} \longrightarrow \mathbf{1}}$$

En esta categoría es común llamar a los dos objetos $\mathbf{0}$ y $\mathbf{1}$, "*falso*" y "*verdadero*" respectivamente, así que $\mathcal{P}(\mathbf{1})$ puede también dibujarse como:

$$\mathcal{P}(\mathbf{1}) = \boxed{\textit{falso} \longrightarrow \textit{verdadero}}$$

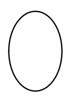
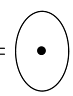
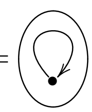
¿Qué pasa en la categoría de gráficas $\mathcal{C} = \mathcal{S}^{\downdownarrows}$? ¿Cuál es la categoría de partes del objeto terminal en esta categoría? Para contestar, debemos comenzar por determinar aquellas gráficas X tales que el morfismo único $X \to \mathbf{1}$ al objeto terminal es inyectivo. Es útil recordar que una gráfica es dos conjuntos (un conjunto de flechas y un conjunto de vértices) y dos morfismos,

$$\boxed{\begin{tikzcd} \textit{flechas} \arrow[d, shift right, "s"'] \arrow[d, shift left, "t"] \\ \textit{vértices} \end{tikzcd}}$$

y que para la gráfica terminal ambos conjuntos son singuletes, así que tenemos que encontrar las diferentes posibilidades para los conjuntos *flechas* y *vértices* para los cuales el morfismo único de gráficas

$$\begin{tikzcd} \mathit{flechas} \arrow[r, "f_F"] \arrow[d, shift right, "s"'] \arrow[d, shift left, "t"] & \mathbf{1} \arrow[d, shift right] \arrow[d, shift left] \\ \mathit{vértices} \arrow[r, "f_V"'] & \mathbf{1} \end{tikzcd}$$

es inyectivo. Esto quiere decir (ejercicio) que los dos morfismos de conjuntos f_F y f_V deben ser inyectivos; cada uno de los conjuntos *flechas* y *vértices* debe ser vacío o tener un solo elemento. Entonces, cada subgráfica de la gráfica terminal es isomorfa a una de estas tres gráficas:

$\boxed{\begin{matrix}\mathbf{0}\\ \downarrow\downarrow\\ \mathbf{0}\end{matrix}} = \mathbf{0} =$  $\boxed{\begin{matrix}\mathbf{0}\\ \downarrow\downarrow\\ \mathbf{1}\end{matrix}} = V =$  $\boxed{\begin{matrix}\mathbf{1}\\ \downarrow\downarrow\\ \mathbf{1}\end{matrix}} = \mathbf{1} =$ 

Estas tres gráficas y los morfismos entre ellas forman una categoría que puede ser dibujada como:

$$\mathcal{P}(\mathbf{1}) = \boxed{\mathbf{0} \longrightarrow V \longrightarrow \mathbf{1}}$$

Las gráficas $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$ pueden llamarse también "*falso*" y "*verdadero*" respectivamente, de manera que podemos poner:

$$\mathcal{P}(\mathbf{1}) = \boxed{\mathit{falso} \longrightarrow V \longrightarrow \mathit{verdadero}}$$

Aquí la gráfica V representa un "valor de verdad" intermedio que puede interpretarse como "verdadero para vértices pero falso para flechas".

Las respuestas que obtuvimos para las "partes de $\mathbf{1}$" parecen familiares porque ya las hemos visto antes: el morfismo $X \to \mathbf{1}$ es inyectivo si y sólo si X es idempotente.

Como señalamos al principio de esta sesión, dados dos objetos $A \overset{\alpha}{\hookrightarrow} X$ y $B \overset{\beta}{\hookrightarrow} X$ en $\mathcal{P}(X)$ hay a lo más un morfismo $A \xrightarrow{f} B$ en $\mathcal{C}$ tal que $\beta f = \alpha$. Por lo tanto, la categoría de partes de un objeto es muy especial. Para cualesquiera dos de sus objetos hay a lo más un morfismo del primero al segundo. Una categoría que tiene esta propiedad es llamada un *preorden*. Entonces la categoría de subobjetos de un objeto dado X es un preorden.

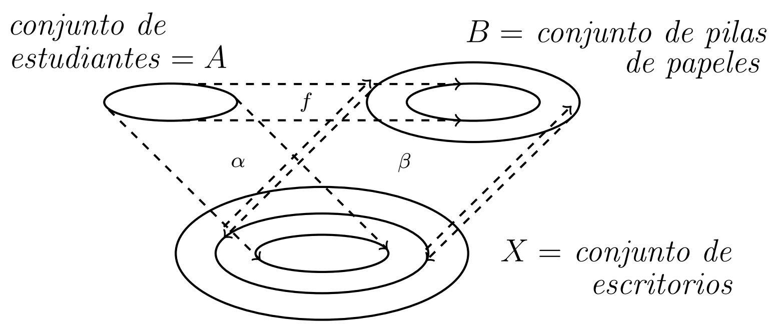
Por lo tanto, para conocer a la categoría de subobjetos de un objeto dado X, sólo necesitamos conocer, para cada par de objetos de X, si hay o no hay un morfismo del primero al segundo. Para indicar que hay un morfismo (necesariamente único) de un subobjeto $A \overset{\alpha}{\hookrightarrow} X$ a un subobjeto $B \overset{\beta}{\hookrightarrow} X$ usamos a menudo la notación

$$A \subseteq_X B$$

(que se lee: A *está incluido* en B sobre X); la "A" es una abreviatura de "la pareja A, α" y de manera similar la B. La "X" como subíndice nos sirve para recordarnos eso.

FÁTIMA: ¿Puedes explicar la inclusión de una parte en otra con un diagrama?

Sí. Supongamos que en algunos escritorios en el salón de clase hay pilas de papeles. Si B es el conjunto de las pilas de papeles, tenemos el morfismo inyectivo "está en" de B al conjunto de escritorios, llamemoslo $B \xrightarrow{\beta} X$. Tenemos asimismo un morfismo inyectivo α del conjunto A de estudiantes al conjunto X de escritorios —cada estudiante ocupa un escritorio. Ahora bien, supongamos que cada estudiante tiene una pila de papeles y que puede haber pilas en escritorios desocupados. Entonces, el diagrama de las dos inclusiones se ve así:



y muestra que los escritorios ocupados por los estudiantes están incluidos en los escritorios que tienen pilas de papeles. La razón o "demostración" para esta inclusión es un morfismo $A \xrightarrow{f} B$ (que le asocia a cada estudiante la pila de papeles en su escritorio) tal que $\beta f = \alpha$. Este morfismo es la (única) demostración de la relación $A \subseteq_X B$.

DANILO: Pero si cada pila de papeles pertenece a algún estudiante, el morfismo obvio es de B a A, asignándole a cada pila de papeles su dueño.

Sí, tendríamos entonces un morfismo $B \xrightarrow{g} A$, pero podría no ser compatible con las inclusiones α y β de A y B en X; en general $\alpha g \neq \beta$.

DANILO: Así es que uno debería decir "*si f existe*".

¡Correcto! Ése es el punto. Puede suceder que no haya una tal f pero no puede haber más de una.

Por otra parte, en algunos casos el morfismo g puede también estar en la categoría $\mathcal{P}(X)$; esto es, puede ser compatible con α y β ($\alpha g = \beta$). En tal caso, es también cierto que:

$$B \subseteq_X A$$

Entonces, de hecho, los morfismos f y g son inversos el uno del otro, de manera que A y B son objetos isomorfos; y más que eso: $A \overset{\alpha}{\hookrightarrow} X$ y $B \overset{\beta}{\hookrightarrow} X$ son objetos isomorfos en $\mathcal{P}(X)$. Entonces tenemos:

$$\text{Si} \quad A \subseteq_X B \quad \text{y} \quad B \subseteq_X A, \quad \text{entonces} \quad A \cong_X B.$$

¿Qué significa un isomorfismo de subobjetos? Supongamos que el viernes y el lunes los conjuntos V y L de estudiantes ocuparon exactamente las mismas sillas en el salón de clase. Entonces tenemos dos diferentes morfismos al conjunto de sillas, pero son isomorfos:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & L \arrow[dl, "\beta"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Debido a que entre cualesquiera dos subobjetos isomorfos hay solamente un isomorfismo, los tratamos como el "mismo subobjeto".

La idea de una silla ocupada puede expresarse de la siguiente manera. Si tenemos un subobjeto $A \overset{\alpha}{\hookrightarrow} X$ y una figura $T \xrightarrow{x} X$ (que no suponemos que sea inyectiva), decir que x está en el subobjeto $A \overset{\alpha}{\hookrightarrow} X$ (que se escribe $x \in_X A$) quiere decir que hay alguna $T \xrightarrow{a} A$ para la cual $\alpha a = x$. Ahora bien, como α es inyectiva, hay a lo más una a que demuestra que $x \in_X A$. Por ejemplo, si Danilo se sienta en esta silla, entonces Danilo es la demostración de que esta silla está ocupada. De acuerdo con la definición de arriba, si $x \in A$ y $A \subseteq B$ (estando la X sobrentendida), entonces podemos concluir que $x \in B$, la demostración de lo cual no es nada más que la composición de los morfismos $T \xrightarrow{a} A \xrightarrow{i} B$ que demuestran respectivamente que $x \in A$ y que $A \subseteq B$.

La propiedad de arriba (si $x \in A$ y $A \subseteq B$, entonces $x \in B$) a veces se toma como la *definición* de inclusión debido al resultado del siguiente ejercicio.

Ejercicio 1
Demuestre que si para todos los objetos T y todos los morfismos $T \xrightarrow{x} X$ tales que $x \in A$ es cierto que $x \in B$, entonces necesariamente $A \subseteq B$. En la categoría de conjuntos basta con considerar $T = \mathbf{1}$. En la categoría de gráficas irreflexivas basta con considerar $T =$ el punto genérico y la flecha genérica. A menudo la notación $x \in A$ se utiliza solamente cuando la figura x tiene una de las pocas formas preferidas T.

2. Topos y lógica

De lo anterior resulta claro que uno puede discutir la categoría $\mathcal{P}(X)$ y las relaciones $\subseteq, \in$ en cualquier categoría $\mathcal{C}$, pero la estructura "lógica" es mucho más rica para aquellas categorías conocidas como *topos*.

Definición: *Una categoría $\mathcal{C}$ es un* **topos** *si y sólo si:*

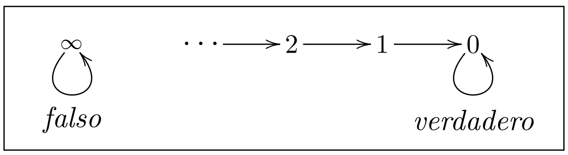
(1) *$\mathcal{C}$ tiene $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$, $\times$, $+$ y para cada objeto X, $\mathcal{C}/X$ tiene productos,*

(2) *$\mathcal{C}$ tiene objetos de morfismos Y^X, y*

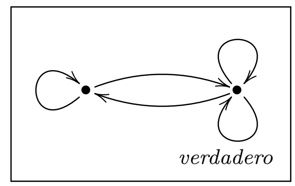
(3) *$\mathcal{C}$ tiene un "objeto de valores de verdad" $\mathbf{1} \to \Omega$ (también llamado "clasificador de subobjetos").*

La mayoría de las categorías que hemos estudiado son topos: conjuntos, gráficas irreflexivas, sistemas dinámicos, gráficas reflexivas. (Los conjuntos punteados y bipunteados no son topos ya que una categoría con objetos de morfismos es distributiva.)

Vimos en la última sesión que el objeto de valores de verdad en la categoría de conjuntos es $\mathbf{2}=\{\mathit{verdadero}, \mathit{falso}\}$, mientras que los de sistemas dinámicos y gráficas irreflexivas son, respectivamente:



y



La propiedad que define un objeto valores de verdad o clasificador de subobjetos $\mathbf{1} \xrightarrow{\mathit{verdadero}} \Omega$ es la de que para cualquier objeto X los morfismos $X \to \Omega$ son "lo mismo" que los subobjetos de X. Esta idea se abrevia simbólicamente como:

$$\frac{X \to \Omega}{? \hookrightarrow X}$$

Quiere decir que para cualquier subobjeto $A \xhookrightarrow{\alpha} X$ de X hay exactamente un morfismo

$$X \xrightarrow{\varphi_A} \Omega$$

que tiene la propiedad de que para cada figura $T \xrightarrow{x} X$, $\varphi_A x = \mathit{verdadero}_T$ si y sólo si la figura x está incluida en la parte $A \xhookrightarrow{\alpha} X$ de X.

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[dr, dashed] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, "x"'] & & \\
& A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & \mathbf{1} \arrow[d, "\mathit{verdadero}"] \\
& X \arrow[r, "\varphi_A"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

La consecuencia de la existencia de un tal objeto Ω es que cualquier afirmación acerca de subobjetos de X es equivalente a una afirmación acerca de morfismos de X a Ω.

¿Cuál es la relación entre esto y la lógica? Podemos formar el producto $\Omega \times \Omega$ y definir el morfismo $\mathbf{1} \xrightarrow{\langle \mathit{verdadero},\ \mathit{verdadero} \rangle} \Omega \times \Omega$. Éste es inyectivo porque cualquier morfismo cuyo dominio sea terminal es inyectivo; por lo tanto, éste es, de hecho, un subobjeto y tiene un morfismo clasificador o característico $\Omega \times \Omega \to \Omega$. El morfismo clasificador es la operación lógica "y", denotada de varias maneras tales como "&" y "$\wedge$". La propiedad de esta operación es que para cualquier $T \xrightarrow{a} \Omega \times \Omega$, digamos $a = \langle b, c \rangle$ donde b y c son morfismos de T en Ω, la composición

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "a"] \arrow[rr, bend right, "b \wedge c"'] & \Omega \times \Omega \arrow[r, "\wedge"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

(que es usualmente denotada por $b \wedge c$ en lugar de $\wedge \circ \langle b, c \rangle$, de la misma manera que escribimos $5 + 3$ en lugar de $+\circ\langle 5, 3 \rangle$) tiene la propiedad de que $b \wedge c = \mathit{verdadero}_T$ si y solo si $\langle b, c \rangle \in \langle \mathit{verdadero}, \mathit{verdadero} \rangle$, lo que significa de manera precisa que $b = \mathit{verdadero}_T$ y $c = \mathit{verdadero}_T$.

Ahora bien, como b es un morfismo cuyo codominio es Ω, por la propiedad que define a Ω, debe ser el morfismo clasificador de algún subobjeto de T, $B \hookrightarrow T$. De la misma manera, c es el morfismo clasificador de algún otro subobjeto $C \hookrightarrow T$ y el subobjeto clasificado por $b \wedge c$ se llama la *intersección* de B y C.

Ejercicio 2
Demuestre que la intersección de dos subobjetos de T es, de hecho, el producto de estos objetos considerados como objetos de $\mathcal{P}(T)$.

Otra operación lógica es "implicación", que es denotada por "$\Rightarrow$". Ésta es también un morfismo $\Omega \times \Omega \to \Omega$, definido como el morfismo clasificador de un subobjeto particular $S \hookrightarrow \Omega \times \Omega$. Esta S es el igualador de un par de morfismos de $\Omega \times \Omega$ en Ω, a saber el par: $\wedge$, primera proyección. Aquí se usa la idea de que una parte A está contenida en una parte B si y sólo si la intersección de A y B es A.

Hay una tercera operación lógica llamada "o" (disyunción) y denotada por "$\vee$" y hay relaciones entre las operaciones $\wedge, \Rightarrow, \vee$ que son completamente análogas a las relaciones entre las operaciones categóricas $\times$, objeto de morfismos, $+$. Recuerden que estas relaciones eran:

$$\frac{X \to B_1 \times B_2}{X \to B_1, \quad X \to B_2} \qquad \frac{X \to Y^T}{T \times X \to Y} \qquad \frac{B_1 + B_2 \to X}{B_1 \to X, \quad B_2 \to X}$$

Los casos particulares de éstas en la categoría $\mathcal{P}(X)$ de subobjetos de X son las siguientes "reglas de la lógica":

$$\frac{\xi \subseteq \beta_1 \wedge \beta_2}{\xi \subseteq \beta_1 \quad \text{y} \quad \xi \subseteq \beta_2} \qquad \frac{\xi \subseteq (\tau \Rightarrow \eta)}{\tau \wedge \xi \subseteq \eta} \qquad \frac{\beta_1 \vee \beta_2 \subseteq \xi}{\beta_1 \subseteq \xi \quad \text{y} \quad \beta_2 \subseteq \xi}$$

La regla de enmedio se llama la *regla de inferencia modus ponens.*

FÁTIMA: ¿No debería decir la última "o" en lugar de "y"?

No. Para que la disyunción $\beta_1 \vee \beta_2$ esté incluida en ξ es necesario que ambas, β_1 y β_2, estén incluidas en ξ. Ésta es otra manifestación del hecho de que los productos son más básicos que las sumas. La conjunción "y" es realmente un producto, aun así, es necesaria para explicar la disyunción "o", que es una suma.

Un aspecto sobresaliente del morfismo clasificador de un subobjeto es que a pesar de que el subobjeto está determinado nada más que por los elementos en que el morfismo clasificador toma el valor "verdadero", el morfismo clasificador también asigna muchos otros valores al resto de los elementos. Entonces, estos otros valores, de alguna manera, están determinados nada más que por aquellos elementos en los que el morfismo toma el valor "verdadero".

También es posible definir una operación negación ("*no*") mediante

$$\textit{no}\ \varphi \stackrel{\text{def}}{=\!=} [\varphi \Rightarrow \textit{falso}]$$

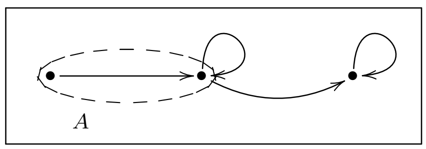
Entonces uno puede demostrar la igualdad

$$\varphi \wedge \textit{no}\ \varphi = \textit{falso}$$

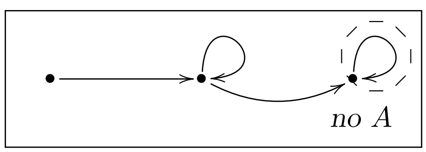
y la inclusión

$$\varphi \subseteq \textit{no no}\ \varphi$$

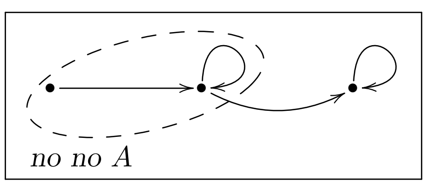
En la mayoría de las categorías esta inclusión no es una igualdad. La propiedad universal (regla de inferencia) para $\Rightarrow$ implica que para cualquier subobjeto A de un objeto X, $\textit{no}(A)$ es el subobjeto de X que es el más grande entre todos los subobjetos cuya intersección con A es vacía. Aquí tenemos un ejemplo en gráficas.

$X =$ 

Ejercicio 3
Con la A dibujada arriba, *no* A es la subgráfica:



y *no no* A es:



que es más grande que A.

Se dice que la lógica en un topos como éste es *no booleana*; el algebrista y lógico G. Boole trató el caso especial en el que *no no* $A = A$. Observen sin embargo, que en este ejemplo:

$$\textit{no no no}\ A = \textit{no}\ A$$

Ejercicio 4
La "regla 3=1" (arriba) para "*no*" es correcta en cualquier topos.

Prometimos mostrarles una versión más general de la demostración de Cantor de que $X < 2^X$ en conjuntos (en el orden dado por los monomorfismos); la conclusión será que $X < \Omega^X$ en cualquier categoría cartesianamente cerrada no trivial con objeto valores de verdad Ω.

Ejercicio 5
El hecho de que $X \leq \Omega^X$ quiere decir que existe un monomorfismo. Un ejemplo estándar es el morfismo singulete s, que es la exponencial traspuesta del morfismo característico de la diagonal $X \to X \times X$. Muestre que s es un mono.

Ejercicio 6
La desigualdad es estricta porque si hubiera un mono $\Omega^X \to X$, entonces por un razonamiento similar a aquel del Ejercicio 3, Sesión 29, se seguiría que Ω tiene la propiedad del punto fijo. Pero el endomorfismo *no* nunca tiene un punto fijo a menos que la categoría entera sea trivial.
Sugerencia: Demuestre primero que el único posible punto fijo x tendría que ser $x =$ falso.

El hecho encontrado antes en esta sección de que la disjunción ("o") debe ser explicada en términos de la conjunción ("y"), y no en términos de "o", hizo reflexionar a muchas personas que lo encontraban por primera vez (no solo a Fátima). En efecto, hay a menudo situaciones en la vida diaria en las cuales la transformación de "o" en "y" puede ser confusa si tratamos de explicarla. Quizá los siguientes ejercicios ayuden a dilucidar lo que está detrás de tal transformación. El álgebra de partes (de la que el Artículo VI junto con las Sesiones 32 y 33 es una breve introducción) es útil para iluminar las relaciones de espacios concretos y sus transformaciones como ellas ocurren en matemáticas. Recíprocamente, la interacción de espacios concretos y sus transformaciones puede ayudar a clarificar el álgebra de partes más abstracta de la cual es su reflexión.

Ejercicio 7
Por lo común, cada uno del conjunto C de clientes que entran en un restaurante para el almuerzo en un cierto día dado ha ya decidido si comer en el restaurante O pedir para llevar. Pero al pasar un día por un restaurante me encontré con un letrero que decía "Coma aquí Y ordene para llevar". Seguramente los propietarios del restaurante no quieren forzarme a hacer ambos, ¿o sí? Si M denota la selección de comidas ofrecidas y, en consecuencia, M^C denota las posibilidades para las transacciones del almuerzo ese día, utilice la ley exponencial

$$M^{C_1+C_2} = M^{C_1} \times M^{C_2}$$

para explicar por qué "y" y "o" están ambas correctamente aplicadas pero a aspectos diferentes. (Recuerde que "y" es típicamente usado para denominar elementos de conjuntos producto, ver Sesión 1.)

Ejercicio 8
Por supuesto, algunos clientes sí quieren comer en el restaurante y ordenar para llevar; muestre que al partir C en tres partes en lugar de en dos, dicha posibilidad es explicada de la misma forma: el lado derecho de la ecuación sigue involucrando un producto categórico.

Para visualizar esta situación, imaginamos cada elemento de M^C como un posible registro de las transacciones de almuerzos del día; cada registro es una lista de ventas "comer aquí" Y una lista de ventas "para llevar". Pero cada cliente aparece en una O la otra de estas listas. (No hay mucha diferencia si incluimos tres clases de preferencias del cliente como en el Ejercicio 8; entonces un registro es en realidad una lista Y otra lista Y otra lista.)

ARTÍCULO VII

El funtor componentes conexas

1. Conexo contra discreto

Además de espacios de morfismos y el espacio de verdad, hay otra construcción caracterizada por "propiedad universal de morfismo de grado más alto", la cual objetifica el conteo de las *componentes conexas*. Las gráficas reflexivas y los sistemas dinámicos discretos, a pesar de ser categorías muy distintas, soportan esta "misma" construcción. Por ejemplo, decimos que nodos d y d' en una gráfica reflexiva están **conectados** si para alguna $n \geq 0$ existen

nodos $d = d_0, d_1, \ldots, d_n = d'$,

y flechas $a_1, \ldots, a_n$, tales que

para cada i, o bien la salida de a_i es d_{i-1} y la llegada de a_i es d_i,

o la salida de a_i es d_i y la llegada de a_i es d_{i-1}.

La gráfica como un todo es **conexa** si tiene al menos un nodo y si cualesquiera dos nodos en ella están conectados; vale la pena observar que para verificar que una gráfica dada es conexa usamos cadenas arbitrariamente largas de conexiones elementales a_i, aunque hay un número finito de operadores estrucuturales, s, t, i (ver las Sesiones 13 a 15).

En contraste, este aspecto 'pasos sin límite' no surge de la misma manera para sistemas dinámicos, aunque los sistemas dinámicos mismos tienen un número infinito de operadores estructurales α^n, que efectúan la evolución de un sistema durante n unidades de tiempo. Decimos que los estados x y y están **conectados** si existen n, m tales que $\alpha^n x = \alpha^m y$, y que el sistema es **conexo** si tiene al menos un estado y cualesquiera dos estados están conectados.

Ejercicio 1
Suponga que existen n, m tales que $\alpha^n x = \alpha^m y$. Si además y está conectado con un tercer estado z, por ejemplo, si $\alpha^k y = \alpha^p z$, demuestre que x está conectado a z. Sugerencia: la adición de números naturales es conmutativa.

En estos ejemplos podemos ver intuitivamente que toda gráfica reflexiva o todo sistema dinámico es un coproducto (suma ajena) de piezas conexas, usualmente llamadas *componentes*. El número de piezas puede ser definido con precisión sin calcular dicho número en una categoría particular. La idea de esta definición surge del contraste entre objetos arbitrarios y objetos discretos. En muchas categorías podemos definir una subcategoría de objetos "discretos". Aquí damos dos ejemplos, gráficas reflexivas y sistemas dinámicos, y daremos más en la sección 3 de este artículo.

Definición 1: *Una gráfica reflexiva es* ***discreta*** *si cada flecha es el lazo degenerado en un nodo (informalmente, podemos decir que 'consiste solamente de nodos'). Un sistema dinámico es* ***discreto*** *si todos sus estados son estados en reposo.*

Es claro que si $X \to S$ es un morfismo a un objeto discreto S, entonces cualesquiera dos nodos (o estados) que están conectados en X deben enviarse al mismo nodo (o estado) en S. Esto sugiere la siguiente propiedad universal, que tiene sentido para gráficas, sistemas dinámicos y muchas otras categorías en las que hemos especificado una subcategoría de objetos que llamamos discretos.

Definición 2: *Un morfismo $X \to \pi_0 X$ con codominio discreto es* ***universal*** *si para cualquier morfismo $X \to S$ con codominio discreto, existe exactamente un morfismo $\pi_0 X \to S$ que forma un triángulo conmutativo. A una tal $\pi_0 X$ (claramente única salvo isomorfismo) la llamamos el* ***espacio de componentes*** *de X. Si $1 \xrightarrow{i} \pi_0 X$ es cualquier punto de él, entonces la imagen inversa $X_i \hookrightarrow X$ bajo el morfismo universal es llamada la* ***i-ésima componente conexa*** *de X.*

Ejercicio 2
Si se han especificado morfismos universales de componentes como en la Definición 2 para X y Y, y si $X \xrightarrow{f} Y$ es cualquier morfismo, entonces hay exactamente un morfismo $\pi_0 X \to \pi_0 Y$ que da lugar a un cuadrado conmutativo. Estos "morfismos inducidos" se pueden componer.

Ejercicio 3
En gráficas reflexivas y en sistemas dinámicos, X es conexo si y solo si $\pi_0 X = \mathbf{1}$.

En las gráficas reflexivas, en los sistemas dinámicos y en muchos otros ejemplos interesantes, la subcategoría de espacios discretos es equivalente, por sí misma, a la categoría $\mathcal{S}$ de conjuntos abstractos. Se puede dar una descripción más detallada de la construcción π_0 como sigue: La categoría de objetos discretos puede ser considerada, por derecho propio, junto con su inclusión $I : \mathcal{S} \to \mathcal{X}$ en la categoría de interés $\mathcal{X}$. Dado X, consideramos un conjunto abstracto FX de señas (o nombres) para las componentes de X y observamos que cualquier conjunto abstracto W puede ser considerado como un espacio discreto IW. Entonces $\pi_0 X = IFX$. Los procesos I y F son ambos funtores y la propiedad universal que los relaciona es un caso especial de adjunción como se define en el Apéndice II. De hecho, F es adjunto izquierdo de la inclusión I. (Observación: El Ejercicio 4 de la Sesión 32 sugiere una manera de construir F.)

¿Cuándo están conectadas dos figuras $A \rightrightarrows X$, i.e. se vuelven la misma al componer con la $X \to \pi_0 X$ natural? Esta pregunta es difícil en general, pero en un caso particular ya hemos dado la respuesta: nodos $\mathbf{1} \rightrightarrows X$ en una gráfica reflexiva (o estados en un sistema dinámico) están conectados si y solo si satisfacen el criterio que utilizamos como definición al principio de esta sección.

2. El funtor puntos, paralelo al funtor componentes

La descripción de arriba de π_0 como un proceso compuesto contrasta con un proceso paralelo que usa al adjunto derecho de la misma inclusión I de los espacios discretos en todos los espacios de una categoría dada $\mathcal{X}$.

Definición 3: *Un morfismo $|X| \to X$ con dominio discreto es universal si para todo morfismo $S \to X$ con dominio discreto hay exactamente un $S \to |X|$ que hace un triángulo conmutativo. Esta $|X|$ es el* ***espacio de puntos*** *de X.*

Ejercicio 4
Utilizando que $\mathbf{1}$ es discreto demuestre que cada punto $\mathbf{1} \to X$ pertenece a $|X|$.

Pero en muchos casos $|X|$ es algo más que la recolección de los puntos desnudos de X porque tiene la estructura (relativamente trivial) de un $\mathcal{X}$-espacio.

Ejercicio 5
Demuestre que hay un proceso G que da un $\mathcal{S}$-objeto para cada $\mathcal{X}$-objeto que mediante el proceso I se vuelve $|\ |$, i.e.

$$|X| = IG(X).$$

Ejercicio 6
Hay un morfismo estándar

$$|X| \to \pi_0 X$$

para cualquier X, el cual da más información a cerca de X. Dé ejemplos de gráficas reflexivas X para las cuales este morfismo estándar es un isomorfismo, así como otros ejemplos en donde $\pi_0 X = \mathbf{1}$ mientras que $|X|$ es arbitrariamente grande. Demuestre que en la categoría de sistemas dinámicos (de hecho, de acciones de cualquier monoide conmutativo dado, ver Definicion 4) el morfismo estándar es siempre un monomorfismo.

3. El topos de acciones derechas de un monoide

Una clase de topos definidos sobre $\mathcal{S}$, para los cuales se pueden estudiar los funtores componentes y puntos, son los topos de acciones o “pregavillas”. Nos abocaremos solo en acciones de un monoide (ver la Sesión 13). Los monoides que resultan ser pequeños pueden ser descritos de una manera equivalente.

Definición 4: *Un* ***monoide pequeño*** *es un conjunto M junto con una multiplicación dada $M \times M \to M$ con unidad $\mathbf{1} \to M$. Una* ***representación*** *de M, o* ***acción derecha*** *de M, en un conjunto X es un morfismo dado $X \times M \to X$,* *denotado por yuxtaposición, que satisface*

$$\begin{aligned} x(ab) &= (xa)b \\ x1 &= x \end{aligned}$$

en donde hemos usado la yuxtaposición ab para indicar la composición en M y 1 para indicar la unidad del monoide.

Por ejemplo, una acción derecha del monoide aditivo de los números naturales es simplemente un sistema dinámico; una acción derecha del monoide de tres elementos, en el que los dos elementos no identidad satisfacen las cuatro ecuaciones $s_i s_j = s_i$, no es otra cosa que una gráfica reflexiva (con los nodos definidos como los elementos comunes fijos bajo los dos actores idempotentes "salida y llegada" s_0, s_1).

Ejercicio 7
Para cualquier monoide M defina la noción de "morfismos de M-acciones derechas en conjuntos", generalizando las nociones de morfismo para gráficas reflexivas y para sistemas dinámicos. La categoría resultante se denota por $\mathcal{S}^{M^{\mathrm{op}}}$

Ejercicio 8
Demuestre que entre las M-acciones derechas en conjuntos hay una $\underline{M}$ especial cuyos estados son exactamente tantos como M tiene elementos y para la cual los morfismos $\underline{M} \to X$ corresponden a los estados de X, para cualquier acción X (aquí por morfismo entendemos aquellos que preservan la acción como en el Ejercicio 7). En particular, los morfismos $\underline{M} \xrightarrow{a} \underline{M}$ corresponden a multiplicaciones izquierdas por los elementos de M de tal forma que la condición de ser un morfismo $X \xrightarrow{f} Y$ se vuelve un caso especial de la asociatividad de la composición en $\mathcal{S}^{M^{\mathrm{op}}}$:

$$f(xa) = (fx)a.$$

El contenido del Ejercicio 8 se debe a Cayley (cuando todos los elementos de M son invertibles) y fue generalizado por Yoneda en los años 50 a pregavillas, i.e. acciones derechas de una categoría pequeña con más de un objeto. El caso más simple posible de esta generalización tiene a las gráficas irreflexivas como acciones de una categoría con dos objetos, pero los casos más generales justifican la interpretación figuras-e-incidencia de las estructuras geométricas generales como en el Apéndice I.

Ejercicio 9
Para cualquier monoide M, el objeto de valores de verdad Ω en la categoría de acciones derechas tiene tantos elementos como M tiene ideales derechos, esto es, subconjuntos V de M para los cuales ma está en V siempre que m esté en V y a esté en M.

Ejercicio 10
El espacio de morfismos Y^X de dos acciones derechas X, Y de M tiene tantos estados como hay morfismos (en la categoría de acciones) $\underline{M} \times X \to Y$. Éstas se reducen a meros morfismos $X \to Y$ de los conjuntos subyacentes solamente en el caso en el que todo elemento de M es invertible. [Ver el Ejercicio 6, Sesión 34].

Sesión 34

Teoría de grupos y el número de tipos de objetos conexos

El funtor componentes conexas F en una categoría $\mathcal{C}$ puede revelar muchas cosas de la categoría $\mathcal{C}$. Por ejemplo, ¿cuántos objetos conexos tiene $\mathcal{C}$?

Definición 1: *Decimos que C es **conexo** si tiene exactamente una componente, i.e. $FC = 1$ (donde F es el adjunto izquierdo de la inclusión I de la categoría de los objetos discretos). Esto es equivalente a $\pi_0 C = \mathbf{1}$, donde $\pi_0 = IF$.*

> **Ejercicio 1**
> El objeto terminal es conexo.
> (Sugerencia: utilice la plenitud de I.)
> C es conexo si y solo si tiene exactamente dos morfismos hacia $1 + 1$.

La mayoría de las categorías que hemos estudiado tienen un número infinito de objetos conexos no isomorfos. Por ejemplo, para cualquier conjunto no vacío S dado, hay una gráfica reflexiva estándar X con $FX = \mathbf{1}$ pero con S nodos, dada por las proyecciones y el morfismo diagonal

$$\begin{tikzcd} S^2 \arrow[d, shift right=2] \arrow[d, shift left=2] \\ S \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Tiene S^2 flechas: una flecha conectora de p en q para cada par p, q de nodos. Pero aún gráficas con menos flechas pueden tener S nodos y $FX = \mathbf{1}$, porque p podría estar conectado con q solamente por una sucesión de flechas.

> **Ejercicio 2**
> En la categoría $\mathcal{S}^{\downarrow}$, cuyos objetos son morfismos de conjuntos (aun para conjuntos finitos), hay un número infinito de objetos no isomorfos con una componente (y también hay un número infinito de objetos con exactamente un punto).

Si todos los actores estructurales son invertibles, encontramos una simplificación mayor que es importante en la teoría de grupos.

Definición 2: *Un **grupo** es un monoide en el que todo elemento tiene un inverso.*

Mientras que la teoría de monoides y sus acciones ya tiene mucho contenido, el caso de grupo tiene aspectos especiales que surgen principalmente de estos tres:

(1) Cada relación de congruencia en un grupo surge de un “subgrupo normal” (Ejercicio 3 más abajo);

(2) para cada dos representaciones, el conjunto subyacente del espacio de morfismos es el conjunto de morfismos de los conjuntos subyacentes (Ejercicio 6 más abajo);

(3) dados elementos x y y en una representación conexa, hay un elemento g del grupo con $xg = y$ (Ejercicio 11 más abajo).

El aspecto (3) de la teoría de grupos implica que hay solamente pocas representaciones conexas, como demostraremos en esta sesión.

Ejercicio 3
Sea $G \xrightarrow{F} G$ un homomorfismo de grupos, i.e. $F(xy) = F(x)F(y)$. Estudie los pares a_1, a_2 para los cuales $F(a_1) = F(a_2)$ como sigue: defina $\mathrm{Nuc}(F)$ como el subgrupo de todos los morfismos a en G para los cuales $F(a)$ es el elemento identidad de H. Entonces

(a) $\mathrm{Nuc}(F)$ es un subgrupo y, además, para cualquier t en G

$$a \text{ está en } \mathrm{Nuc}(F) \text{ si y solo si } t^{-1}at \text{ está en } \mathrm{Nuc}(F).$$

(b) $F(a_1) = F(a_2)$ si y solo si $a_1 a_2^{-1}$ está en $\mathrm{Nuc}(F)$.

(c) Cualquier subgrupo "normal" K de G (esto es un subgrupo que satisface la condición de (a)) surge como $K = \mathrm{Nuc}(F)$ para algún homomorfismo en algún otro grupo H.

Nuestra meta principal es el teorema que está después del Ejercicio 11. Una idea de su contenido está ya en el Ejercicio 4, el cual no menciona acciones.

Ejercicio 4
Si

$$\begin{tikzcd} H \arrow[d, bend right, "P_1"'] \arrow[d, bend left, "P_2"] \\ G \arrow[u, "D"'] \end{tikzcd}$$

son tres homomorfismos de monoides para los cuales $P_1 D = P_2 D = 1_G$, el homomorfismo identidad, considere la relación (obviamente reflexiva) R en G dada por

$$a_1 R a_2 \text{ si y solo si } P_1(h) = a_1 \text{ y } P_2(h) = a_2 \text{ para alguna } h.$$

Si H y G son grupos, entonces R es también simétrica y transitiva. En efecto, existe un grupo G/R y un homomorfismo $G \xrightarrow{Q} G/R$ tal que $QP_1 = QP_2$ y tal que cualquier homomorfismo de G que coiguale P_1, P_2 se factoriza de manera única como $(-)\circ Q$.]

El hecho de que R sea automáticamente transitiva se manifiesta en la categoría de representaciones de un grupo G.

Ejercicio 5
Una acción de un grupo G es a menudo llamada una representación de G por permutaciones, esto es porque si X tiene una acción dada de G, entonces para cada elemento g de G la función φ de X en X definida por $\varphi(x) = xg$ es un isomorfismo de conjuntos. ¿Cuál es su inversa?

La categoría de acciones de un grupo es de hecho un topos, pero esto sucede de una manera muy especial cuando se le compara con el topos de acciones de una categoría (incluso un monoide) que no es un grupo; los Ejercicios 6 y 7 describen esto.

Ejercicio 6
Dadas dos acciones X, Y de un grupo G, considere el conjunto Y^X de todos los morfismos abstractos (i.e. no necesariamente preservan la acción) de X en Y, equipado con la acción

$$(f \cdot a)(x) = (f(xa^{-1}))a$$

Demuestre que esto es la determinación del objeto exponencial o espacio de morfismos en la categoría de acciones.

Ejercicio 7
Para cualquier grupo G y cualquier subacción X_1 de una G-acción X, hay otra subacción X_2 ajena a X_1 tal que $X_1 + X_2$ es todo X. En otras palabras, existe un único morfismo de acciones $X \to 2$ tal que X_1 es la imagen inversa de uno de los puntos; tome X_2 como la imagen inversa del otro punto.

El Ejercicio 7 implica que la lógica del topos de acciones de un grupo es booleana en el sentido de la Sesión 33. Las acciones de un grupoide también tienen la propiedad de que cada subobjeto tiene un complemento.

Ejercicio 8
Todo elemento de G determina un morfismo de G-representaciones $\underline{G} \to \underline{G}$. Recíprocamente, todo morfismo $\underline{G} \to \underline{G}$ que preserve la acción es llevado a cabo por la multiplicación izquierda por un único elemento de G. (La acción especial $\underline{G}$ del Ejercicio 8, Artículo VII es a menudo llamada la **representación regular** de G.)

Ejercicio 9
Para cada estado x en una representación X de G existe un único morfismo de representaciones $\underline{G} \to X$ cuyo valor en 1 es x. Por simplicidad identificamos a los estados x con las figuras de forma $\underline{G}$.

Ejercicio 10
Los "puntos" (figuras de forma **1**) $\mathbf{1} \to X$ en la categoría de G-representaciones son simplemente los puntos de equilibrio (puntos fijos de la acción).

De hecho, los resultados "Cayley-Yoneda", i.e. Ejercicios 8, 9 y 10, son ciertos para monoides y categorías; no dependen de la invertibilidad de los actores de G. En contraste, el siguiente resultado requiere la invertibilidad.

Ejercicio 11
Si G es un grupo con representación regular $\underline{G}$ y si X es un objeto *conexo* en el topos de representaciones, entonces para cualquier estado x en X, el morfismo $\underline{G} \xrightarrow{x} X$ es *suprayectivo.*
Sugerencia: considere la imagen, en el sentido del Artículo VII, de x (que es de manera obvia una sub-representación $X_1 \hookrightarrow X$). El subconjunto complementario X_2 es asimismo una sub-representación, (este es el hecho crucial: usar la invertibilidad, para y en X_2 ninguno de los yb están en X_1). Entonces, si X_2 no es cero, existe un morfismo suprayectivo de G-representaciones $X \to 2 = 1 + 1$, lo que demuestra que X no es conexo.

Teorema: *El número de representaciones conexas no isomorfas de un grupo G es a lo más el número de subgrupos de G (con lo que es finito cuando G lo es.)*

Demostración: Cualquier representación conexa X de G está determinada, salvo isomorfismo, por el estabilizador $G(x)$ de cualquiera de los estados x en X que elijamos. Aquí $G(x)$ es el subgrupo de todos aquellos a para los cuales $xa = x$.

Ejercicio 12
Si dos representaciones conexas X, Y son isomorfas (mediante f) y x, y son estados dados de X, Y, entonces los subgrupos estabilizadores $G(x)$, $G(y)$ son "conjugados", esto es, existe g en G tal que $gG(x) = G(y)g$.
Sugerencia: y es suprayectiva; elija g para la cual $yg = fx$. Entonces para cualquier a tal que $xa = x$ se sigue que $b = gag^{-1}$ es tal que $yb = b$. Recíprocamente, si b es cualquier elemento de G que estabiliza a y, entonces $g^{-1}bg$ estabiliza a x.

$$\begin{tikzcd} \underline{G} \arrow[r, dashed, "g"] \arrow[d, "x"'] & \underline{G} \arrow[d, "y"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y. \end{tikzcd}$$

Sesión 35

Constantes, objetos codiscretos y muchos objetos conexos

1. Las constantes y los objetos codiscretos

Vimos en la Sesión 34 que entre las acciones derechas de un grupo finito hay solamente un número finito de objetos conexos no isomorfos. Recíprocamente, para un monoide M que no es un grupo, uno puede siempre encontrar un número infinito de M-acciones derechas conexas no isomorfas. Demostraremos eso aquí solamente para una clase especial de monoides.

Definición 1: *Una* ***constante*** *de M es un elemento c tal que $cm = c$ para todo m de M.*

Ejercicio 1
Morfismos, en el topos de M-acciones derechas, de $\mathbf{1}$ en $\underline{M}$ corresponden a las constantes de M.

Ejercicio 2
Si un grupo M tiene una constante, entonces M tiene solamente un elemento.

Ejercicio 3
Si c es una constante en un monoide M y si m es cualquier elemento de M, entonces mc es también una constante.

Sea C el conjunto de todas las constantes de un monoide M y sea S cualquier conjunto. Entonces el conjunto de morfismos

$$J(S) = S^C$$

tiene la estructura natural de un M-conjunto derecho, a saber

$$(y \cdot m)(c) = y(mc)$$

define un nuevo $C \xrightarrow{y \cdot m} S$ para cada $C \xrightarrow{y} S$ dado (ver el Ejercicio 3). Esta construcción J manda conjuntos en M-acciones derechas en una manera opuesta a la inclusión discreta I. Si C no es vacío, los valores $J(S)$ son llamados **codiscretos**.

Ejercicio 4
Sea M un monoide con al menos una constante. Para cada M-acción derecha X, cada M-morfismo $X \to J(S)$ está inducido por un único morfismo de conjuntos $G(X) \to S$, donde $G(X)$ es el conjunto de puntos fijos de la acción. En particular, el morfismo identidad en $J(S)$ corresponde a un morfismo $GJ(S) \to S$, el cual es invertible; $GJ(S) \approx S$. Cada morfismo desde una acción codiscreta a una acción discreta es constante.

Debido a la propiedad universal de morfismo establecida en el Ejercicio 4, decimos que la inclusión codiscreta J es adjunto derecha del funtor de puntos fijos G. De hecho, tenemos una sucesión de cuatro adjuntos

$$F \dashv I \dashv G \dashv J$$

que relacionan a las M-acciones con los conjuntos abstractos. Mientras que $FI \approx GI \approx GJ$ son todos equivalentes al funtor identidad en $\mathcal{S}$, el compuesto FJ le asocia, a cada conjunto S, el conjunto (de señas para las) componentes conexas de la acción codiscreta en S^C. En la siguiente sección demostramos que $FJS = 1$ para $S \neq 0$; pero para eso necesitaremos al menos dos constantes en M.

Ejercicio 5
Si M tiene exactamente una constante, entonces $J = I$, i.e. las subcategorías de acciones codiscretas y discretas coinciden.

2. Monoides con al menos dos constantes

Ésta es una generalización grande del ejemplo de gráficas reflexivas que, sin embargo, por nuestras gruesas mediciones se comporta más bien como ese ejemplo.

Proposición: Si un monoide M tiene al menos dos constantes, entonces para cada conjunto no vacío S, la acción codiscreta $J(S)$ es conexa.

Demostración: Entre los morfismos $C \to S$ están los morfismos constantes $C \xrightarrow{\bar{s}} S$, uno para cada s en S. Para cualquier $C \xrightarrow{x} S$ y c en C, $x \cdot c = \overline{x(c)}$. Sean c_0 y c_1 distintas en C. Entonces para cualquier s_0 y s_1 en S, podemos elegir $C \xrightarrow{z} S$ con $z(c_0) = s_0$ y $z(c_1) = s_1$. Para conectar el par $C \overset{x}{\underset{y}{\rightrightarrows}} S$ sean $s_0 = x(c_0)$ y $s_1 = y(c_1)$. Entonces la z elegida satisface $x \cdot c_0 = z \cdot c_0$ y $z \cdot c_1 = y \cdot c_1$, lo que completa la demostración.

De hecho, hay aún más M-acciones conexas. Se puede demostrar que si M tiene al menos dos constantes, entonces el espacio de valores de verdad Ω en la categoría de M-acciones derechas es conexo. De hecho, para cualquer M-acción derecha X, el espacio de morfismos Ω^X es conexo. Por eso cualquier X es el dominio de un subobjeto de un objeto conexo, por ejemplo $X \to \Omega^X$ mediante la inclusión 'singulete'.

Apéndices

Hacia estudios posteriores

La meta de este libro ha sido la de mostrar cómo la noción de composición de morfismos lleva a una formulación más natural de las nociones fundamentales de las matemáticas, desde la multiplicación, la adición y la exponenciación, a través de las nociones básicas de lógica y de conectividad.

En su trabajo posterior usted podrá aplicar las matemáticas a la física, a la ciencia de la computación y a otros campos. En cada uno de estos campos hacen falta guías esclarecedoras hacia la formulación y solución de problemas. Una manera de encontrar dichas guías es reconocer explícitamente las estructuras que ocurren (por ejemplo) en el álgebra conmutativa, en el análisis funcional y en la topología algebraica, utilizando metodos categóricos que ha usted comenzado a aprender. Hay aquí cuatro apéndices que, aunque demasiado breves para un buen aprendizaje, esbozan algunas conecciones importantes, con formulaciones que reconocerá en sus encuentros posteriores con temas matemáticos.

Apéndice I	Una descripción general de la geometría de las figuras en un espacio X y del álgebra de funciones con dominio un espacio Y, y del comportamiento funtorial de estas dos construcciones básicas.
Apéndice II	La descripción de Funtores Adjuntos y de cómo están ejemplificados en las categorías de gráficas dirigidas y de sistemas dinámicos.
Apéndice III	Una muy breve historia del surgimiento de la teoría de las categorías desde el interior de varios temas matemáticos.
Apéndice IV	Una bibliografía anotada para guiarlo a través de los textos elementales, las monografías y las fuentes históricas.

Esperamos que goce de los frutos de su perseverancia.

Bill y Steve.

Apéndice I

La geometría de figuras y el álgebra de funciones

1. Funtores

La noción de categoría abarca al menos tres tipos relacionados de ambientes matemáticos:

(a) una teoría abstracta $\mathcal{A}$ de alguna noción (como lo son "preorden" o "grupo" o "evolución dinámica");

(b) un ambiente $\mathcal{B}$ (e.g. de los espacios suaves) en el cual tal noción pueda ser realizada;

(c) la totalidad concreta $\mathcal{C}$ de las realizaciones de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$.

El ejemplo (a) refleja la observación de que las sustituciones en una teoría $\mathcal{A}$ se pueden componer, i.e. son los morfismos en una categoría. Una realización R de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ es entonces un *funtor* de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$: un funtor es una transformación que convierte los objetos y los morfismos en $\mathcal{A}$ en objetos y morfismos en $\mathcal{B}$ de modo que se satisfacen las ecuaciones

$$\begin{aligned} R(\varphi\psi) &= R(\varphi)R(\psi) \\ R(1_A) &= 1_{RA} \end{aligned}$$

que expresan la compatibilidad de R con las composiciones de morfismos en $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$. La multitud de ejemplos demandaron el reconocimiento de la "categoría de categorías": un objeto es una categoría y un morfismo es un funtor. La categoría de categorías tiene objetos de morfismos llamados "categorías de funtores". Esto es, tenemos para cada $\mathcal{B}$ y $\mathcal{A}$ una categoría $\mathcal{B}^{\mathcal{A}}$ y una correspondencia biyectiva

$$\frac{\text{funtores } \mathcal{X} \to \mathcal{B}^{\mathcal{A}}}{\text{funtores } \mathcal{A} \times \mathcal{X} \to \mathcal{B}}$$

El caso $\mathcal{X} = \mathbf{1}$ muestra que un objeto en $\mathcal{B}^{\mathcal{A}}$ es un funtor $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$; el caso $\mathcal{X} = \mathbf{2}$ (el conjunto preordenado con dos objetos y tres morfismos) muestra que un morfismo en $\mathcal{B}^{\mathcal{A}}$ es un funtor $\mathcal{A} \times \mathbf{2} \to \mathcal{B}$; en particular, un morfismo γ en $\mathcal{B}^{\mathcal{A}}$ con dominio $R_0 : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ y codominio $R_1 : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es llamado una "transformación natural": le asocia a cada objeto A en $\mathcal{A}$ un morfismo $R_0A \xrightarrow{\gamma_A} R_1A$ en $\mathcal{B}$ de una manera compatible con cada morfismo α en $\mathcal{A}$, en el sentido de que si $\alpha : A' \to A$, entonces el diagrama siguiente dibuja una representación de $\mathbf{2} \times \mathbf{2}$ en $\mathcal{B}$, i.e. es un diagrama conmutativo en $\mathcal{B}$:

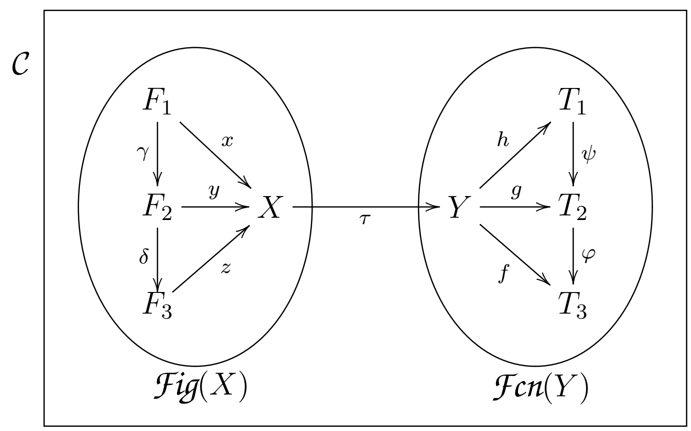
$$\begin{tikzcd} R_0A' \arrow[r, "\gamma_{A'}"] \arrow[d, "R_0\alpha"'] & R_1A' \arrow[d, "R_1\alpha"] \\ R_0A \arrow[r, "\gamma_A"'] & R_1A \end{tikzcd}$$

Estas categorías de funtores dan lugar a la interpretación (c) de las realizaciones de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ como una categoría $\mathcal{C} = \mathcal{B}^{\mathcal{A}}$.

Este uso de $\mathbf{1}$, $\mathbf{2}$, $\mathbf{2} \times \mathbf{2}$ está basado en la intuición de que estas categorías muy simples son las "formas básicas de figuras" para el analisis de las categorías en general; es un ejemplo de un método general para analizar el "interior" de los objetos en cualquier categoría, como se explica más adelante.

2. La geometría de figuras y el álgebra de funciones como categorías en sí mismas

Dado un objeto X en una categoría $\mathcal{C}$ construiremos dos categorías, $\mathcal{Fig}(X)$ y $\mathcal{Fcn}(X)$; el dibujo ilustra $\mathcal{Fig}(X)$ y $\mathcal{Fcn}(Y)$ para dos objetos X y Y.



En una categoría de espacios, los morfismos con codominio X pueden ser considerados como *figuras* en X y el dominio de una figura puede asimismo ser llamado su "forma". Podemos decir que una figura x *está en* otra figura y en X, de una manera específica γ, si $x = y\gamma$; estas γ son los morfismos de la *categoría de figuras en* X; los morfismos de figuras y sus composiciones le permiten a los geómetras expresar completamente las "relaciones de incidencia" entre figuras que dan a X su estructura geométrica. En particular, y es una *parte* de X si para todo x hay a lo más una manera de estar en y, i.e. a lo más una γ que demuestra la incidencia. La relación "x está en y", como la notación usada por Dedekind y Banach, contiene tanto a la "pertenencia" (el caso donde y es una parte y x es de una forma especificada) como a la "inclusión" (el caso donde ambos son partes).

De la misma importancia que la geometría de figuras es el álgebra de *funciones*: morfismos con dominio Y pueden ser considerados como cantidades intensivamente variables desde Y; el codominio de una tal función es a menudo llamado su "tipo". Puede decirse que una función f está *determinada por* g si podemos encontrar un morfismo ϕ que opera de manera algebraica para implementar la determinación, i.e. $f = \phi g$; en tal caso se dice simplemente que f "es una función de g". Los morfismos ϕ son los morfismos de una categoría cuyos objetos son las funciones con dominio Y. Esta categoría tiene a menudo productos categóricos, y cada instancia de la acción de un morfismo $T \times T \to T$ (por ejemplo, la adición) como operación binaria en funciones es un morfismo en esta categoría.

La transformación de X en Y mediante un morfismo τ induce transformaciones entre las álgebras de funciones y entre las geometrías de figuras. La transformación inducida τ^* entre las álgebras de funciones es llamada contravariante porque va de regreso de las funciones con dominio Y a las funciones con dominio X como se muestra en la figura anterior; es llamada un homomorfismo porque preserva todas las operaciones algebraicas entre las funciones. Por otro lado, la transformación $\tau_!$ entre las geometrías de figuras es covariante y es denominada suave porque preserva las relaciones de incidencia sin romperlas. Aun si x es una parte, un transformado τx no tiene que serlo (por ejemplo, un triángulo puede degenerar en un segmento de recta o hasta en un punto, o bien, puede ser que una sucesión convergente sea constante). Las figuras que no son partes son a menudo llamadas figuras "singulares". Ambas transformaciones inducidas son simplemente composiciones con τ, y las propiedades elementales que acabamos de mencionar se siguen debido a la asociatividad de la composición en la categoría ambiente $\mathcal{C}$.

Los morfismos suaves y los homomorfismos inducidos por una transformación τ de espacios son funtores, como sigue. El morfismo suave $\tau_!$ de geometrías

$$\mathcal{Fig}(X) \xrightarrow{\tau_!} \mathcal{Fig}(Y)$$

preserva las formas de las figuras y el homomorfismo τ^* de álgebras

$$\mathcal{Fcn}(Y) \xrightarrow{\tau^*} \mathcal{Fcn}(X)$$

preserva los tipos de las funciones. Las transformaciones compuestas producen funtores compuestos: $(\sigma\tau)^* = \tau^*\sigma^*$. Estas generalidades sobre las asociatividades toman una importancia muy particular si elegimos una subcategoría $\mathcal{F} \to \mathcal{C}$, a menudo con solamente tres o cuatro objetos, para servir como formas $F_1, F_2, F_3, \ldots$ de figuras. También podemos elegir una subcategoría $\mathcal{T} \to \mathcal{C}$ para servir como tipos $T_1, T_2, T_3, \ldots$ de funciones. El hecho de que los homomorfismos inducidos (respectivamente morfismos suaves) preservan tipos (respectivamente formas) está explícitamente expresado por la conmutatividad de los diagramas de funtores

$$\begin{tikzcd} \mathcal{Fcn}_{\mathcal{T}}(X) \arrow[rr, "\tau^*"] \arrow[dr, "\text{tipo}"'] & & \mathcal{Fcn}_{\mathcal{T}}(Y) \arrow[dl, "\text{tipo}"] \\ & \mathcal{T} & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{Fig}_{\mathcal{F}}(Y) \arrow[rr, "\tau_!"] \arrow[dr, "\text{forma}"'] & & \mathcal{Fig}_{\mathcal{F}}(X) \arrow[dl, "\text{forma}"] \\ & \mathcal{F}. & \end{tikzcd}$$

Mediante una juiciosa elección de la subcategoría de formas, podemos a menudo lograr la "adecuación" descrita por Isbell: se justifica que identifiquemos el espacio X con su geometría de $\mathcal{F}$-figuras siempre y cuando todo funtor definido solamente para sus $\mathcal{F}$-figuras y que preserve formas esté inducido por exactamente un $\mathcal{C}$-morfismo τ del espacio X en Y. De manera dual, mediante la elección de una subcategoría $\mathcal{T}$ (de objetos como el espacio de los números reales o los valores de verdad) podemos representar a $\mathcal{C}$ de manera contravariante en una categoría de álgebras.

Apéndice II

La descripción de funtores adjuntos con ejemplos en las categorías de gráficas dirigidas y de sistemas dinámicos.

Mucho de la lucha matemática (e.g. "resolución de ecuaciones") tiene como objetivo el de invertir parcialmente una transformación dada. En particular, en el caso de un funtor Φ de una categoría en otra, Kan (1958) observó que hay a veces otro funtor determinado en la dirección contraria que aunque en realidad no invierte Φ, es la "mejor aproximación a un inverso" en el sentido derecho o en el sentido izquierdo. El funtor dado es tipicamente tan obvio que uno podría no haberlo siquiera mencionado mientras que su funtor adjunto resultante es una construcción cargada de contenido que hace avanzar las matemáticas.

El teorema de unicidad para adjuntos permite tomar casos elegidos de su existencia como axiomas. Esta unificación guía ahora el avance de la teoría de homotopía, del álgebra homológica y de la teoría axiomática de conjuntos así como de la lógica, de la informática y de la dinámica.

Grosso modo, estos funtores en sentido contrario pueden adjuntar más acción, como en la iteración libre $\Phi_!(X)$ de datos iniciales en X o la observación caótica $\Phi_*(X)$ de cantidades en X, donde Φ desnuda algo de la "actividad" de los objetos Y en su dominio. Cuando en lugar de esto, Φ es la inclusión plena de atributos constantes entre atributos variables, entonces los funtores en sentido contrario llevan a cabo un "promedio" como en la cuantificación existencial $\Phi_!(X)$ y la cuantificación universal $\Phi_*(X)$ de un predicado X. La exponenciación de espacios satisface la ley exponencial de que $\Phi_* = (\,)^L$ es adjunto derecho de $\Phi = (\,) \times L$. De manera similar, la implicación $L \Rightarrow (\,)$ de predicados es adjunto derecho de $(\,)\&L$.

Considere, por ejemplo, el proceso *puntos*( ) que extrae, para cada gráfica reflexiva, su conjunto de nodos y olvida sus flechas. Al observar que esto es un funtor de la categoría de gráficas reflexivas en la categoría de conjuntos abstractos tenemos la posibilidad de investigar si tiene adjuntos:

$$
\begin{tikzcd}
\text{Gráficas reflexivas}
\arrow[d, bend right=60, "\textit{componentes}"']
\arrow[d, "\textit{puntos}"] \\
\text{Conjuntos}
\arrow[u, bend left=30, "\textit{discreto}"]
\arrow[u, bend right=60, "\textit{codiscreto}"']
\end{tikzcd}
$$

Resulta que el adjunto izquierdo de *puntos* construye, para cada conjunto dado S, la gráfica que tiene a S como nodos pero sin flechas excepto por un lazo trivial en cada nodo; llamamos a esto una gráfica “discreta”. En cambio, el adjunto derecho construye la gráfica que tiene S como nodos y una única flecha conectora entre cualquier par ordenado de nodos, llamada a veces una gráfica “codiscreta”. Estos opuestos unidos, discretos y codiscretos, pueden jugar un papel significativo en la investigación organizada de las gráficas más generales de interés. Pero desde la perspectiva de las adjunciones, el funtor discreto mismo no es realmente tan trivial como aparenta porque tiene él mismo un adjunto izquierdo adicional que está determinado como la construcción del conjunto de componentes conexas de cualquier gráfica, un ingrediente no trivial en la investigación de la forma de una gráfica. La propiedad universal de morfismo de la adjunción en este caso simplemente quiere decir que un morfismo de gráficas de una gráfica cualquiera X en una gráfica discreta está determinada por un morfismo desde el conjunto $F(X)$ de nombres para las componentes conexas de X.

Es un teorema general de Kan que los funtores adjuntos izquierdos preservan sumas (coproductos) y que los funtores adjuntos derechos preservan productos. Las leyes de los exponentes y la distributividad resultante son ejemplos de dicha preservación (ver el Artículo V). Pero en casos particulares podemos investigar si, por ejemplo, un funtor adjunto izquierdo F de interés podría también preservar productos en el sentido de que el morfismo natural

$$F(X \times Y) \longrightarrow F(X) \times F(Y)$$

(inducido por funtorialidad) es un isomorfismo en la categoría codominio.

En el caso del funtor componentes F, la propiedad especial de preservación de productos se verifica para él en la catetgoría de gráficas reflexivas, así como para cualesquiera otras categorías de carácter geométrico. Hurewicz utilizó la propiedad de preservación de productos del funtor componentes conexas para definir una nueva categoría con los mismos objetos, pero con sus conjuntos de morfismos $[X, Y]$ definidos como conjuntos de componentes de los espacios de morfismos

$$[X, Y] = F(Y^X).$$

El estudio de la conectividad más alta de un espacio Y trata no solo la cuestión de si Y mismo es conexo sino también si los varios espacios de morfismos Y^A son conexos, y trata las relaciones $F(Y^B) \to F(Y^A)$ entre sus conjuntos de componentes conexas que están inducidas por morfismos $A \to B$. Por ejemplo, el círculo A que es la frontera de un disco D comparte con el disco la propiedad de ser conexo, i.e. $F(A) = F(D) = 1$; pero mientras que D^A es también conexo, en contraste, $F(A^A)$ tiene un número infinito de elementos, como lo estudiaron H. Poincaré y L.E.J. Brower antes de 1920. Ese primer paso en conectividad más alta fue extendido, utilizando propiedades similares del contraste entre una bola B y su esfera frontera A, para analizar la conectividad más alta de espacios generales Y mediante las figuras reducidas $[A, Y]$ de forma esférica.

En contraste, para la categoría de gráficas irreflexivas hay también un funtor componentes F, pero que no preserva productos; el ejemplo de la flecha no trivial

X muestra eso (vimos en la Sesión 23 que $F(X^2) = 3$ mientras que $F(X)^2 = 1$). Este funtor componentes irreflexivas F es también un adjunto izquierdo. Su noción adjunta derecha de "discreto" asocia a cada conjunto S la gráfica con S nodos y un lazo en cada uno de ellos. El adjunto derecho del adjunto derecho en este caso no es el funtor "nodos" sino el que extrae de cada gráfica irreflexiva el conjunto de *lazos*.

Como *lazos* no tiene un adjunto derecho, esta sucesión de adjunciones se detiene en tres. En lugar de extraer *lazos*, podemos extraer el conjunto de *nodos* o el conjunto de *flechas* y encontrarnos con que cada uno de los dos funtores mencionados tiene un adjunto derecho y un adjunto izquierdo, pero que éstos no tienen adjuntos adicionales.

Para verificar las afirmaciones anteriores uno necesita conocer las condiciones precisas que caracterizan a los funtores adjuntos, así que comenzamos con las definiciones.

Supongamos que F, G son funtores con

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B} \arrow[d, bend left, "G"] \\ \mathcal{A} \arrow[u, bend left, "F"] \end{tikzcd}$$

Definiciones: Una *adjunción* para la pareja F, G es una correspondencia natural

$$\frac{FA \longrightarrow B}{A \longrightarrow GB}$$

Decimos que la adjunción hace a F *adjunto izquierdo* de G o, de manera equivalente, que hace a G *adjunto derecho* de F.

El "natural" utilizado arriba quiere decir "compatible con los morfismos". Esto es, si $FA \xrightarrow{f} B$ se corresponde con $A \xrightarrow{g} GB$ entonces

(1) para cada $A' \xrightarrow{a} A$ el compuesto $FA' \xrightarrow{Fa} FA \xrightarrow{f} B$ se corresponde con $A' \xrightarrow{a} A \xrightarrow{g} GB$ y

(2) para cada $B \xrightarrow{b} B'$ el compuesto $FA \xrightarrow{f} B \xrightarrow{b} B'$ se corresponde con $A \xrightarrow{g} GB \xrightarrow{Gb} GB'$.

Se sigue que una tal correspondencia natural surge de una propiedad universal de morfismo: Dado A, existe una unidad de adjunción $\eta_A : A \to GFA$ tal que para cualquier función $f : A \to GB$ (cuyo tipo entonces está dado como un valor de G) depende de η_A y de manera única. Esto es, en

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "\eta_A"'] \arrow[dr, "f"] & \\ GFA \arrow[rr, dashed] & & GB \end{tikzcd}$$

existe una única t para la cual $G(t)$ implementa la dependencia en el sentido que $f = G(t)\eta_A$. Esta t es entonces la correspondiente arriba de la barra en la definición. Entonces la familia $\eta_A : A \to GFA$ de unidades de adjunción constituye en realidad una transformación natural η del funtor identidad en $\mathcal{A}$ en GF.

Dualmente, hay una co-unidad de adjunción $\varepsilon_B : FGB \to B$ tal que toda figura b cuya forma está dada como un valor de F, pertenece a ε_B y esto de manera única. Esto es, en

$$\begin{tikzcd} FA \arrow[rr, dashed] \arrow[dr, "b"'] & & FGB \arrow[dl, "\varepsilon_B"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

existe una sola $s : A \to GB$ tal que $F(s)$ demuestra la pertenencia en el sentido de que $b = \varepsilon_B F(s)$. Otra vez, las co-unidades de adjunción son una transformación natural, ahora del compuesto FG en el funtor identidad en $\mathcal{B}$. Esencialmente la misma demostración que da la unicidad de los objetos terminales también demuestra que "el" adjunto derecho o izuierdo de un funtor dado es único salvo por una única transformación natural invertible. De hecho, hay una categoría $\mathcal{M}or(F, B)$ en la que ε_B es terminal.

Si existen los adjuntos de una Φ dada, a menudo utilizamos los símbolos $\Phi_!$ para el adjunto izquierdo y Φ_* para el adjunto derecho; entonces tenemos las correspondencias naturales

$$\frac{\Phi_! X \longrightarrow Y}{X \longrightarrow \Phi Y} \qquad \frac{Y \longrightarrow \Phi_* X}{\Phi Y \longrightarrow X}$$

A veces se utiliza el símbolo Φ^* para el funtor mismo, enfatizando que los tres funtores juntos describen una sola relación compleja entre las dos categorías.

Por ejemplo, una segunda relación entre gráficas reflexivas y conjuntos se basa en el funtor "flechas". El lector puede verificar que este funtor tiene tanto adjunto izquierdo como derecho; el adjunto derecho le asocia a cada conjunto S una gráfica reflexiva específica con S como nodos y S^3 flechas, a veces llamada una gráfica reflexiva co-libre.

En lugar de gráficas contra conjuntos, considere la relación entre sistemas dinámicos y conjuntos dada por el funtor Φ que recuerda el espacio de estados pero que olvida la acción. El adjunto izquierdo $\Phi_!$ de este funtor da lugar a toda la historia de los números naturales y recursión porque la correspondencia natural uno a uno, en este caso, es aquella entre funciones definidas por recursión y los datos de recursión que las define. Por otro lado, su adjunto derecho Φ_* produce los sistemas dinámicos caóticos que se discuten en el texto (ver sección 4 del Artículo V).

La otra relación entre sistemas dinámicos y sus conjuntos de estados está basada en la dinámica "trivial" $\Psi_!$ en la que ningún estado se mueve; este $\Psi_!$ es el adjunto izquierdo del importante funtor Ψ que extrae el conjunto $\Psi(X)$ de los puntos fijos (o estados de equilibrio) de cada sistema dinámico X. Es fácil de verificar que este funtor Ψ no tiene adjunto derecho, esencialmente porque la forma fundamental de las figuras dinámicas, los números naturales, no tiene puntos fijos. Pero consideremos la categoría $\mathcal{A}$ de los "sistemas dinámicos aumentados", en los que hay no solamente una acción dinámica para cada tiempo n sino que además hay una acción para tiempo $= \infty$, la cual corresponde al equilibro o "destino" último que puede tener un estado; este tiempo ideal adicional satisface la ecuación $n + \infty = \infty$. La dinámica de cada objeto en esta categoría satisface dicha ecuación como una ley adicional. Puede uno entonces demostrar que la acción adjunto derecho sí existe.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[d, "\textit{sub-}\atop\textit{yacente}"] \\
\mathcal{S} \arrow[u, bend left=60, "\textit{libre}"] \arrow[u, bend right=60, "\textit{caótico}"']
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[d, "\textit{puntos}\atop\textit{fijos}"] \\
\mathcal{S} \arrow[u, bend left=60, "\textit{estático}"] \arrow[u, bend right=60, "\textit{estático}"']
\end{tikzcd}$$

El funtor "subyacente" tiene un adjunto izquierdo que le asocia el sistema dinámico libre $\mathbb{N}_\infty \times (\,)$ y un adjunto derecho que asocia el sistema dinámico caótico $(\,)^{\mathbb{N}_\infty}$. El funtor "puntos fijos" tiene como su adjunto izquierdo la inclusión de los sistemas discretos (o estáticos); su adjunto derecho resulta ser excepcionalmente el mismo funtor *estático*.

Algunos sistemas dinámicos aumentados son muy utilizados bajo el nombre de *método de Newton*. La lucha matemática por resolver ecuaciones en el cálculo uno-dimensional, finito-dimensional o aun el infinito-dimensional trata un morfismo suave dado f de X en Y y un posible valor de salida y. Uno desea encontrar una x para la cual $f(x) = y$; esto es, "invertir" parcialmente f (aun cuando no hay una sección conocida de f). El método de Newton para este problema usa el nuevo morfismo

$$\varphi(x) = x + (f'(x))^{-1}(y - f(x))$$

donde f' es la derivada de f en el sentido del cálculo. A menudo puede uno encontrar un espacio "pequeño" A en X tal que la fórmula φ define un endomorfismo de A y tal que hay exactamente un punto x_∞ en A para el cual $f(x_\infty) = y$. Como es claro que x_∞ es un punto fijo de φ, vemos que A, φ, x_∞ define una acción de $\mathbb{N}_\infty$ i.e. un sistema dinámico aumentado. El propósito de toda la construcción deriva del hecho de que a menudo la sucesión $a, \varphi(a), \varphi(\varphi(a)), \ldots$ "converge" a la solución x_∞ desde cualquier punto de inicio a en A. Ésta es frecuentemente la manera más práctica de encontrar aproximaciones a x_∞. (Contrario al caso simple de un polinomio cuadrático f, usualmente no se conoce una fórmula explícita para x_∞.) Para expresar que A es "pequeño" y que la sucesión "converge" a x_∞ requiere de un ambiente $\mathcal{B}$ algo más rico que conjuntos abstractos (tales $\mathcal{B}$ se estudian en topología y análisis).

El estudio de las gráficas reflexivas y de las gráficas generalizadas, de los sistemas dinámicos y los sistemas dinámicos aumentados y muchos otros ejemplos importantes puede comenzar desde una categoría (finita o pequeña) $\mathbf{E}$, un objeto elegido D en $\mathbf{E}$ y un topos $\mathcal{B}$ como ambiente (por ejemplo los conjuntos abstractos finitos o pequeños). Entonces, si $\mathcal{C}$ es el topos de acciones de $\mathbf{E}$ en los espacios en

$\mathcal{B}$, hay seis funtores que conectan $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$, todos determinados por adjunción por los funtores $D^* =$ "espacio subyacente de estados de D" y $P^* =$ "acción trivial". Todos ellos son útiles para analizar y comparar las acciones de interés.

$$\mathbf{1} \xrightarrow{D} \mathbf{E} \xrightarrow{P} \mathbf{1}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B} \arrow[r, bend left, "D_!"] \arrow[r, bend right, "D_*"'] & \mathcal{C} \arrow[l, "D^*"'] \arrow[r, bend left, "P_!"] \arrow[r, bend right, "P_*"'] & \mathcal{B} \arrow[l, "P^*"']
\end{tikzcd}$$

Propiedades de la categoría pequeña $\mathbf{E}$ y del objeto elegido D determinan respuestas a preguntas como:

(a) ¿Se colapsan los seis en menos (como en el ejemplo de los sistemas dinámicos aumentados $P_* = P_!$)?

(b) ¿Tiene alguno de los seis adjuntos adicionales (como por ejemplo el funtor codiscreto $P^!$ para gráficas reflexivas)?

(c) ¿Alguno de los adjuntos izquierdos (e.g. el funtor $P_! =$ componentes conexas para gráficas reflexivas) preserva productos?

(d) ¿Qué hacen los funtores al espacio de valores de verdad? (Por ejemplo, consideremos la gráfica valores de verdad (Ω): como conjunto de puntos fijos tenemos $P_*(\Omega) = 2$, pero como su conjunto subyacente tenemos $D^*(\Omega) = 5$.

A su vez estas respuestas (aunque sean simples) ayudan en el análisis y medida de las $\mathbf{E}$-acciónes más intrincadas de interés científico.

Apéndice III

El surgimiento de la teoría de las categorías dentro de las matemáticas

La unificación de las matemáticas es una estrategia importante para aprender, desarrollar y utilizar las matemáticas. Esta unificación procede de mucho trabajo detallado que está punteado por brincos cualitativos ocasionales de síntesis. La publicación en 1945 por Samuel Eilenberg y Saunders Mac Lane de su teoría de las categorías, funtores y transformaciones naturales fue uno de esos brincos cualitativos. Era también un prerrequisito indispensable para un brinco adicional, la publicación en 1958 por Daniel Kan de la teoría de funtores adjuntos. La aplicación del álgebra a la geometría había forzado a Eilenberg y Mac Lane a crear su teoría general; los métodos geométricos desarrollados por Alexander Grothendieck sobre la base de dicha teoría general fueron utilizados 50 años más tarde en la demostración de Andrew Wiles del último Teorema de Fermat y en muchas otras partes del álgebra.

En los años 1940, la aplicación que había dado lugar a la síntesis de Eilenberg y Mac Lane, a saber, el estudio de formas cualitativas de espacio en topología algebraica, comenzaron a ser estudiados por Eilenberg y Steenrod, y otros, y este desarrollo aun continúa en este siglo.

En los años 1950, Mac Lane caracterizó de manera categórica toda el álgebra lineal; Yoneda demostró que los morfismos en cualquier categoría pueden ser representados como transformaciones naturales; y Grothendieck hizo aplicaciones profundas al álgebra lineal de variación continua que surge en el analysis complejo.

Estos y otros avances permitieron rápidamente la incorporación orgánica, dentro de una nueva teoría, de ideas de gigantes anteriores:

Hermann Grassman (años 1840) verificó la conjetura de Leibniz de que la geometría es una forma de álgebra al demostrar que las figuras geométricas, ellas mismas, son entidades algebraicas porque están sujetas a operaciones específicas (tales como tomar el punto medio de un segmento de recta que conecta dos puntos dados) y que sus propiedades relevantes están determinadas por ecuaciones entre dichas operaciones.

Richard Dedekind (años 1870) caracterizó matemáticamente las operaciones de recursión e inducción utilizando intersecciones infinitas de familias de conjuntos y consideró cuidadosamente conjuntos de aproximaciones racionales como puntos en un modelo de continuo. Estos avances hicieron mucho uso de *preórdenes*, ahora definidos como categorías en las que hay a lo más un morfismo que conecta cualquier par ordenado dado de objetos. Él consideró la teoría de números y la geometría algebraica como un solo tema; para lograrlo se requería no solo una teoría $\mathcal{A}$ que pudiera ser interpretada tanto de manera covariante como contravariante sino también requería los conjuntos abstractos que habían sido hechos explícitos por su amigo Georg Cantor para servir como una subyacente $\mathcal{B}$ en la que una tal $\mathcal{A}$ pudiera ser realizada. Su trabajo inspiró el trabajo de Emmy Noether.

Felix Klein (años 1870) clasificó los objetos geométricos utilizando los *grupoides*, ahora definidos como categorías en las que todos los morfismos son invertibles.

Vito Volterra (años 1880) reconoció que los *elementos* en un espacio X son figuras $A \to X$ de varias formas dadas A (no solo puntiformes $1 \to X$) incluyendo a las líneas suaves curvadas $L \to X$. Enfatizó que junto con las funciones $X \to T$ en un espacio X, le concierne a las matemáticas las funciones $X^A \to T$ en el espacio de figuras de forma A en X; tales funciones fueron más tarde llamadas *funcionales*. Para el estudio de funcionales suaves (en el cálculo de variaciones) él analizó las figuras en X^A, por ejemplo líneas $L \to X^A$ así como figuras de forma $A \times L$ en X, i.e. $A \times L \to X$.

Emmy Noether (años 1920) Avanzó la aplicación de métodos algebraicos generales en la geometría y la física.

Witold Hurewicz (años 1930 y años 1940) capturó la conexidad de grado más alto de X utilizando la conexidad de los espacios X^A y demandó que una categoría razonable de espacios debería contener (junto con X y A) un espacio X^A que satisfaciera la *ley exponencial*

$$(X^A)^L \equiv X^{A \times L}$$

que objetiviza el análisis anterior.

George Mackey (años 1940 y años 1950) inventó el concepto de convergencia de Mackey en espacios vectoriales bornológicos y aisló la esencia del funtor dualidad en análisis funcional. Fue uno de los pioneros en aplicar matemáticas del siglo XX a la física del siglo XX.

José Sebastião e Silva (años 1940 y años 1950) reconoció la necesidad de una teoría muy general de homomorfismo en conección con su innovador trabajo, el cual fue una de las inspiraciones para el trabajo de Grothendieck en análisis funcional. La ocupación nazi de Roma impidió en un momento crucial cualquier contacto entre Silva y sus contemporaneos Mackey, Eilenberg, Mac Lane.

****

Los grupoides de Klein y los preórdenes de Dedekind siguen siendo útiles, pero muchas categorías importantes (tales como las categorías de gráficas dirigidas y de sistemas dinámicos) contienen morfismos que no son invertibles así como morfismos paralelos; de hecho, sus morfismos incluyen con el mismo estatus

– figuras en un espacio dado,
– funciones con dominio un espacio dado,
– proyecciones desde espacios producto,
– transformaciones de un espacio en otro,
– inclusiones de subespacios,
– funcionales.

Todas estas clases de morfismos no están simplemente amontonadas dentro de un gran conjunto; más bien, en su categoría reconocemos su totalidad organizada como un sistema tipificado por relaciones precisas de *dominio y codominio*, que están simbolizadas por diagramas de flechas.

En los años 1950 y 1960, el uso de instrumentos categóricos por Grothendieck, Isbell, Kan, Yoneda y otros comenzó a hacer explícitos y aplicables de manera general las intuiciones de sus predecesores y las de ellos mismos. Los roles geométricos de figuras, de espacios de morfismos y de categorías de funtores comenzaron a revelar una guía racional hacia la construcción de conceptos necesarios; así, el impráctico intento en el siglo XIX, de Frege, de englobar los conceptos como propiedades fue suplantado. Al mismo tiempo se obtuvieron nuevas revelaciones dentro de la misma lógica:

(1) los cuantificadores de Frege son adjuntos de Kan especiales de las más básicas funcionales de sustitución;
(2) los modelos de las teorías lógicas están parametrizados por topos clasificantes;
(3) los rígidamente jerárquicos “conjuntos”, aunque sirven como una herramienta en ciertas investigaciones fundacionales, pueden ser reemplazados como ambiente para la práctica matemática por las relaciones entre conjuntos abstractos cantorianos y espacios cohesivamente variables.

Al iniciar el siglo XXI, los varios campos de las matemáticas, tales como la geometría algebraica, el análisis funcional, la combinatoria, etcetera, tienen la apariencia externa de especialidades esotéricas. Sin embargo, los instrumentos e ideas categóricos ya obtenidos promenten aun simplificaciones y unificaciones adicionales que serán componentes importantes en el esfuerzo de hacer las ciencias matemáticas más accesibles a las personas que las necesitarán.

Apéndice IV

Bibliografía anotada

Textos de nivel licenciatura:

J. Bell, *A Primier of Infinitesimal Analysis*, Cambridge University Press 1988.
Utilizando algunos elementos de la teoría de categorías, se coloca al uso tradicional de infinitesimales nilpotentes en el análisis clásico y la geometría de Euler, Lie y Cartan en una base rigurosa y se aplica a muchos cálculos tradicionales de importancia central en la geometría elemental y la ingeniería. Como *Matemáticas Conceptuales*, este libro podría servir como una guía detallada a la construcción de un curso al nivel básico.

M. La Palme Reyes, G.E. Reyes, H. Zolfaghari, *Generic Figures and their Glueings*, Polimetrica, 2004.
Se discuten en detalle varios ejemplos de topos de "pregavillas", con propiedades particulares de espacios de morfismos y espacios de valores de verdad, lo que continua la elaboración de nuestra Parte V y nuestro Apéndice II más allá de las gráficas simples y los sistemas dinámicos, con "ventanas" hacia varias aplicaciones matemáticas.

R. Lavendhomme, *Basic Concepts of Synthetic Differential Geometry*, Kluwer Academic Publishers, 1996.
Éste fue el primer texto que introdujo la geometría diferencial de manera sintética utilizando la fundamentación categórica de dicho tema como lo desarrollaron Kock y otros.

F.W. Lawvere, R. Rosebrugh, *Sets for Mathematics*, Cambridge University Press, 2003.
Este texto explica en un nivel más alto muchos de los tópicos de *Matemáticas Conceptuales*, con ejemplos más avanzados de la teoría de conjuntos. Los axiomas para la categoría de conjuntos sirven como una fundamentación para los usos matemáticos de la teoría de conjuntos como ambiente para las estructuras topológicas, algebraicas y analíticas, su manipulación y su descripción mediante la lógica. Los apéndices explican brevemente muchos de los tópicos de campos matemáticos que dieron lugar al surgimiento de la teoría de categorías y a la cual es aplicado.

Textos más avanzados que presuponen conocimiento de temas de matemáticas de licenciatura avanzados:

S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer Verlag New York, 1971.
Este texto clásico usa ejemplos tales como anillos, módulos y espacios topológicos para ilustrar los usos de las categorías, y desarrolla en detalle temas tales como las extensiones de Kan y homología en categorías abelianas.

S. Mac Lane, I. Moerdijk, *Sheaves in Geometry and Logic, a First Introduction to Topos Theory*, Springer Verlag 1992.
Este texto explica de manera clara el poderoso método de las categorías de pregavillas, la relevancia lógica de los topos clasificadores y algunos de los teoremas más refinados de la teoría de topos.

P. Johnstone, *Sketches of an Elephant: a Topos Compendium*, Oxford University Press, 2002.
Estos ricos y exhaustivos volúmenes incluyen mucha investigación reciente que no es fácilmente accesible en otro lado, y contiene teoremas detallados de estructura para topos así como su aplicación a la geometría y la teoría de modelos.

A. Kock, *Synthetic Differential Geometry*, second edition, London Mathematical Society Lecture Notes Series 333, Cambridge University Press, 2006.
El estudio tradicional del cálculo multidimensional como se utiliza en geometría y en mecánica requería la existencia y propiedades básicas de espacios de morfismos generales así como la representación objetiva de los infinitesimales, pero estos estaban ausentes en las formalizaciones disponibles. Los desarrollos categóricos expuestos en este libro finalmente proveen tales fundamentaciones. Algunos de los muchos desarrollos desde la primera edición de 1981 están incluidos aquí. Ambas ediciones presentan dos enfoques, una presentación axiomática “abstracta” que expresa las propiedades intuitivas para uso directo y una construcción de modelos para los axiomas utilizando la teoría de topos.

Artículos Básicos Tempranos:

S. Eilenberg, S. Mac Lane, General Theory of Natural Equivalences, Transactions of the American Mathematical Society, **58**, 1945, 231-294.
Inicialmente Eilenberg creía que este artículo, a pesar de ser importante, sería el último necesario en su campo, lo cual resultó ser falso. Previeron de manera sorprendente algunos de los desarrollos posteriores y es aun interesante de leer.

A. Grothendieck, Sur Quelques Points d’Algebre Homologique, Tohoku Math. Journal **9**, 1957, 119-221.
Este trabajo fundamental aplica una rama del álgebra lineal, conocida como álgebra homológica, a las gavillas de funciones holomorfas y formas diferenciales que surgen en el análisis complejo, y de esta manera prepararon la base para la geometría algebraica contemporanea.

D. Kan, Adjoint Functors, Transactions of the American Mathematica Society, **87**, 1958, 294-329.
El continuo trabajo de Kan sobre los fundamentos combinatorios de la topología algebraica lo llevaron a este trabajo que ya contiene muchos de los teoremas de unicidad y de las aplicaciones típicas. Tanto las propiedades generales de continuidad como los ejemplos particulares de lo que hoy conocemos como extensiones de Kan son explícitamente clarificadas. El hecho de que los espacios de morfismos están definidos de manera única en las categorías que fueron posteriormente llamadas "topos de pregavillas" (tales como las categorías de gráficas y los sistemas dinámicos) se establecieron en este trabajo hace ya más de 50 años.

F.W. Lawvere, Functorial Semantics of Algebraic Theories, Proceedings of the National Academy of Sciences USA, **50**, 1963, 869-872. Versión completa disponible en línea en la sección de *Reprints* de la revista *Theory and Applications of Categories* (www.tac.mta.ca).
Aquí se demostró que no solo el aspecto concreto sino también el aspecto teórico abstracto de una noción algebraica, tal como "álgebra de Lie" o "retícula", pueden ser objetivizados como una categoría en el sentido algebraico. Las categorías que surgen en el álgebra universal pueden por lo tanto ser caracterizadas en su particularidad. Se demostró que un gran número de métodos de construcción de álgebras son instancias de una forma refinada de extensiones de Kan, y se expresó un método para extraer el aspecto algebraico, similar a las operaciones cohomológicas, de construcciones muy generales mediante adjunciones a gran escala.

F.W. Lawvere, Adjointness in Foundations, Dialectica **23**, 1969, 281-296. Disponible en línea en la sección de *Reprints* de la revista *Theory and Applications of Categories* (www.tac.mta.ca).
Se mostró que todos los axiomas de la teoría de números intuicionista de orden más alto, así como la relación semántica entre teoría y ejemplo, son instancias de adjunción.

Índice