Matemáticas I

USB

1998

MATEMÁTICAS I

Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas Puras y Aplicadas
Septiembre de 1998

Esta es una tercera edición de la Guía de MA-1111. La elaboración de este texto ha contado con la colaboración de muchos profesores en distintas etapas de su edición. Los redactores son Reinaldo Giudici, Stephania Marcantognini, Enrique Planchart y Lázaro Recht. Desde la primera edición se hicieron muchas correcciones incluyendo la reescritura de varios capítulos a cargo de los profesores María R. Brito, Stephania Marcantognini y Luis Mata en la segunda edición. Esta tercera edición, se presentan algunos capítulos con apéndices y éstos que contienen temas de lectura sugerida pero no requerida para el curso.

Muchos han sido los colaboradores como los profesores: Alberto Mendoza, Claudio Margaglio, Arnaldo Gómez, Thomas Berry, Alain Etcheberry, Pedro Berrizbeitia, Ana da Rocha de Viola-Piroli, en la revisión de pruebas. La profesora María T. Varela aportó muchos ejercicios.

Los preparadores Yolanda Perdomo y Sebastian García colaboraron en el montaje de los ejercicios en la segunda edición y los preparadores Gabriel Arcos y Octavio Delgado han colaborado en el montaje de las respuestas a muchos los ejercicios en esta tercera edición que aparecerán en folleto aparte.

El arte final continúa a cargo de los profesores Alberto Mendoza y Luis Mata.

Índice General

Capítulo 0

Prólogo

El Cálculo; comentarios y notas históricas

Lo que hoy día se llama *«Cálculo»* como abreviación de *Cálculo Diferencial e Integral*, es esencialmente un invento del siglo XVII, aunque tiene importantes raíces en tiempos anteriores. El cálculo es sin duda uno de los más grandes logros de la humanidad, que hizo posible todo el desarrollo científico y tecnológico de los siglos XVIII, XIX y XX y que seguirá siendo herramienta fundamental para entender los fenómenos naturales y todo lo que nos rodea, incluyendo las Ciencias Sociales y la Biología.

La parte tradicionalmente llamada *Cálculo Diferencial* es la que tiene que ver con la definición y uso de la **derivada**. El inventor de la derivada fue el matemático francés Pierre de Fermat quién es sin duda el matemático más importante y más creativo del siglo XVII. Fermat definió la derivada de una función, como lo hemos hecho nosotros en la primera definición en la Sección 11.1.3, como límite de cocientes incrementales, porque su definición de tangente en un punto,como límite de las rectas secantes que pasan por el punto, es equivalente a la dada en la Sección 11.1.3. Fermat introdujo la idea y el cálculo de la derivada para atacar problemas de lo que hoy día se llama Cálculo de Variaciones. Como se veremos en el capítulo 13 en la página 225 , los puntos donde una función alcanza máximos y mínimos son puntos donde la tangente al gráfico es horizontal y, por lo tanto, puntos donde la derivada se anula. Fermat estaba estudiando problemas de máximos y mínimos y necesitaba calcular los puntos donde una curva tenía tangente horizontal, por eso tenía que calcular la tangente a una curva en un punto cualquiera y esto lo llevó a la definición de derivada. El había inventado y desarrollado la Geometría Analítica independientemente de Descartes y había progresado mucho más que Descartes en su desarrollo, pues los problemas que tenía planteados le exigían el uso de la Geometría Analítica en tres dimensiones, cosa que Descartes nunca llegó a hacer. Además, su motivación era solamente matemática y no filosófica, como la de Descartes.

El lenguaje de Fermat y la manera como escribía las tangentes es muy moderno y parecido al de hoy día. Le permitió ganarle a Descartes en una controversia que mantuvieron por escrito, sobre el trazado de tangentes a las curvas, porque Descartes no tenía la noción de derivada. Finalmente el uso que Fermat le dá a su trazado de tangentes y a las derivadas le permitió calcular máximos y mínimos de funciones y aplicarlos en Optica, con lo cual se le debe considerar el inventor del Cálculo de Variaciones que tiene importantísimas aplicaciones en toda la Física.

Posteriormente a los trabajos de Fermat, Isaac Newton y Gottfried Leibnitz inventaron separadamente el Cálculo Integral y desarrollaron mucho más el Cálculo Diferencial. Newton se sirve de él para el desarrollo de la Mecánica Clásica, que es posiblemente el invento científico más importante en toda la historia que haya sido hecho por un solo hombre, aunque Newton conoció el trabajo de Fermat, en el caso del Cálculo Diferencial, y, en el caso del Cálculo Integral, conoció el trabajo de Barrow, su maestro, y el trabajo de los antiguos, Arquímedes principalmente.

La noción de tangente y de derivada como punto de transición entre dos conjuntos tiene otro orígen histórico. Arquímedes y Eudoxo emplearon el método de exhausión por calcular áreas encerradas en una curva. Aunque ellos no lo expresan de esta manera, el área es el punto de transición entre el conjunto de las áreas encerradas por las poligonales inscritas en la curva y el conjunto de las áreas encerradas por las poligonales circunscritas a la curva. Eudoxo (408-355 A.C.) había trabajado este problema que era una verdadera innovación en la matemática griega, pues requiere conocer y aceptar los números irracionales. Arquímedes (287-212 A.C.) desarrolló mucho más el tema y lo utilizó con gran destreza, llegando a construir una versión primitiva del Cálculo Integral. Sin embargo, ninguno de los griegos llegó a la definición precisa de tangente a una curva cualquiera, pero es posible que usaran una idea equivalente a la de puntos de transición, según

- G. Boyer, *The History of Caculus and its Conceptual Developement*, Dover, 1959:

«una recta es tangente a una curva, si toca a la curva y, en el espacio entre la curva y la recta, no cabe ninguna otra recta».

Así como se hace ciencia ficción, se puede también hacer historia ficción y preguntarse qué hubiera pasado si Arquímedes, en lugar de morir asesinado por un militar romano, hubiera logrado establecer una definición de tangente y de derivada como nuestra segunda definición de la Sección 11.6. Se hubiera desarrollado el Cálculo dieciocho siglos antes y sus consecuencias son para especular en historia ficción.

Es interesante notar que Fermat, Newton y Leibnitz, quienes conocían perfectamente bien los trabajos de Arquímides y toda la Geometría de los griegos, no optaron por el camino que ellos venían tratando y prefirieron la definición de tangente como límite de las rectas secantes. Esta definición también es muy intuitiva y tiene una gran ventaja porque permite desarrollar cálculos mucho más fácilmente. De cualquier manera la noción de límite es muy importante y crucial en el desarrollo más avanzado del Cálculo, pero Fermat, Newton y Leibnitz no lo sabían en su momento. De hecho la idea precisa de límite de funciones no aparece hasta el siglo XIX con Cauchy.

El concepto de punto de transición, que se usó para definir tangentes, también dá una excelente definición de integral, sin uso de límites, y tiene interés también en otras posibles aplicaciones. En el fondo es una manera muy geométrica de definir un número real, como, por ejemplo, el área encerrada por una curva cerrada o la derivada de una función. Por otra parte, en él intervienen nociones de matemática diferentes a las que subyacen en la definición analítica de límites (con $\varepsilon - \delta$) y su presentación a estudiantes de 1^{er} año, además de facilitar la comprensión de temas importantes, sirve para darle una idea que la Matemática y el mismo Cálculo no son sólo análisis. Hay fenómenos naturales, como el nacimiento y la muerte o la explosión de una supernova, y fenómenos sociales, como una revolución o golpe de estado, que hasta ahora se han resistido a un buen modelaje matemático. Son fenómenos discontinuos para los cuales el Análisis no tiene mucha utilidad. Claramente, ellos pueden interpretarse como puntos de transición. Al presentar estas ideas a los estudiantes de 1^{er} año queremos hacerles ver que todavía hay mucho por hacer en Matemática y en la aplicación de la Matemática a las Ciencias Naturales y a las Ciencias Sociales. El Cálculo ha sido uno de los más grandes inventos del hombre, él hizo posible el desarrollo de la Mecánica Clásica y de toda la Física Clásica, que es sin duda el mayor logro de la humanidad para entender la Naturaleza y en el mundo donde vivimos. Sin embargo, hay importantes aspectos de la Ciencia que han escapado a un modelaje matemático. La Biología es hasta el siglo XX una ciencia puramente descriptiva que clasifica, numera y observa. Exceptuando la Genética y quizás alguna otra área particular, no tiene ninguna posibilidad de predicción. Sin embargo, hoy día hay consenso en que la Biología está próxima a realizar grandes avances y se dice que el siglo XXI será el siglo de la Biología. Pero para que eso sea posible es necesario desarrollar la matemática que se adapte a ella y que pueda modelarla tan bien como lo ha hecho hasta ahora con la Física Clásica y la Física Moderna.

Las ideas expuestas de derivada y punto de transición existen en germen en el libro

- R. Courant y F. John., *Introduction to Calculus and Analysis*, Wiley, 1973,

y están desarrolladas extensamente en

- J. Marsden y A. Weinstein., *Calculus Unlimited*, Benjamin, 1981.

El estudiante interesado en Historia de la Matemática puede consultar

- E.T. Bell.,*Men of Mathematics*, Simon and Schuster, Inc., New York, 1937.

300^+ años de la Brachystochrona

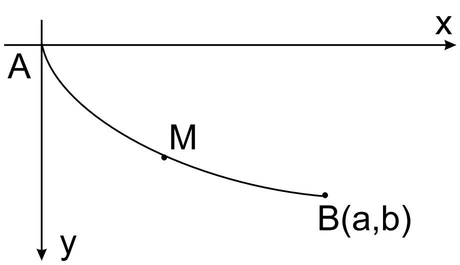
Johann Bernoulli fue profesor de matemáticas en la Universidad de Gröningen en el norte de los Países Bajos desde 1695 hasta 1705. En 1697, hace hoy 300^+ años, publicó su solución al **Problema de la Brachystochrona**.

El año anterior había desafiado a sus contemporáneos a resolverlo, y había recibido respuestas de gigantes tales como Newton, Leibnitz, Tchirnhaus, l'Hôpital y su hermano Jakob Bernoulli. Hagamos un poco de historia.

En el número de junio de 1696 de la famosa revista científica Acta Eruditorum, p. 269, leemos:

> **Invitación a todos los matemáticos a la resolución de un nuevo problema:**
> Si en un plano vertical se dan dos puntos A y B, se pide especificar la órbita AMB del punto móvil M, a lo largo de la cual dicho punto, empezando en A y bajo la influencia de su propio peso, llega a B en el menor tiempo posible. Para que aquellos que son aficionados a estos asuntos se inclinen a buscar su solución, es bueno saber que no se trata, como podría parecer, de una cuestión puramente especulativa y desprovista de uso práctico. Más bien parece, y esto podría ser difícil de creer, que es muy útil también en otras ramas de la ciencia aparte de la mecánica. Para evitar una conclusión apresurada, se debe observar que la línea recta es ciertamente la línea de menor distancia entre A y B, pero no es la que se recorre en el menor tiempo. Sin embargo, la curva AMB — que divulgaré si para e final de este año nadie más la hubiere encontrado —- es bien conocida entre los geómetras

(ver figura (1)) Más adelante, por sugerencia de Leibnitz, Bernoulli extendió el plazo para la solución



el punto móvil M, empezando en A y bajo la influencia de su propio peso, llega a B en el menor tiempo posible

Figura 1

hasta la Semana Santa de 1697. Los hechos de 1696 y 1697 fueron cruciales para el desarrollo de la ciencia en general. El desafío de Bernoulli fue recogido por las mejores mentes de su tiempo. Los matemáticos ofrecieron soluciones al problema de la brachystochrona. Aparte de Johann Bernoulli mismo, Leibnitz ofreció una, en una carta a Johann del 16 de junio de 1696 y consideró al problema espléndido. Otra fue ofrecida por Newton. La solución de Newton fue presentada a la Royal Society el 24 de febrero de 1697 y publicada anónimamente y sin demostración en las Phylosophical Transactions. Sin embargo, la identidad del autor no fue un secreto para Bernoulli ya que, como lo hizo notar, *ex ungue leonem* (se reconoce al león por sus garras). El número mencionado de Acta Eruditorum contiene una pequeña nota de Leibnitz, diciendo que él no sometía su solución porque era muy similar a la de Bernoulli. Pero también hizo notar quienes en su opinión, lo habrían sabido resolver. A saber: l'Hôpital, Huygens, si estuviera vivo, Hudde, si no hubiera abandonado las matemáticas (Hudde se hizo alcalde de Amsterdam y Huygens murió en 1695) y Newton si se tomara la molestia de considerarlo. Agreguemos aquí que Euler fue estudiante de Bernoulli en Basilea y Lagrange se interesó por los problemas «variacionales», leyendo las obras de Euler. De estas investigaciones surgieron finalmente las técnicas generales en la obra de Euler y Lagrange.

La solución de Bernoulli

En lenguaje matemático un poco más moderno, la solución de Bernoulli es así:
Elijamos los ejes x, y^* con el eje y apuntando hacia abajo.

Pongamos $(0,0)$ y (a,b) como los puntos A y B.
Un camino $f:[0,T]\longrightarrow\mathbb{R}^2$, $f(t)=(f_1(t),f_2(t))$ se llama una trayectoria admisible si

(1) $\qquad (f(0)=(0,0), f(T)=(a,b))$ y f es «suave»

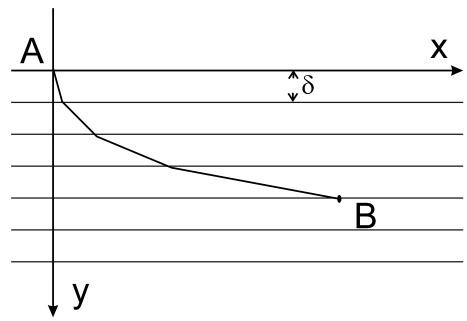
(2) $\qquad 1/2\left(\dot{f}_1(t)^2+\dot{f}_2(t)^2\right)=g\,f_2(t),\ t\in[0,T]$

donde g es la constante gravitatoria. La condición (2) refleja la conservación de la energía: En cada instante t, la energía cinética del cuerpo debe igualar la variación de la energía potencial del mismo (el decrecimiento). (La ley que dice que un cuerpo que ha caído de una altura h tiene rapidez proporcional a $\sqrt{h}$ se debe a Galileo y era bien conocida en el tiempo de Bernoulli). Un camino admisible f^* : $[0,T^*]\longrightarrow\mathbb{R}^2$ se llama **óptimo** si no hay ningún camino admisible $f:[0,T]\longrightarrow\mathbb{R}^2$ para el cual $T<T^*$. Una **brachystochrona** es una curva en $\mathbb{R}^2$ recorrida por medio de un camino óptimo.

Bernoulli basó su solución en el principio de Fermat de tiempo mínimo. Si imaginamos que en lugar de un cuerpo que cae tenemos un rayo de luz, la condición (2) nos da una fórmula para la «velocidad de la luz» c como función de la posición $c=\sqrt{2gy}$.

Si cambiamos las unidades de modo que $2g=1$, nuestro problema es exactamente equivalente al de determinar la trayectoria de un rayo de luz en un medio plano donde la velocidad de la luz varía continuamente como función de la posición según la fórmula $c=\sqrt{y}$.

Ahora dividamos el plano en franjas horizontales (ver figura (2)) $F_k=\{(x,y)/y_k\le y\le y_{k+1}\}$ de



Se divide el plano en franjas horizontales

Figura 2

altura δ, $K=0,1,\ldots$, donde $y_k=k\delta$ y tratamos a c como constante en cada franja F_k. Por ejemplo $c=c_k=\sqrt{y_{k+1}}$ en F_k. Entonces las trayectorias de los rayos de luz para este sistema «discreto» de medios ópticos deberían aproximarse a las «verdaderas» trayectorias del sistema cuando $\delta\longrightarrow 0$. Ahora bien, las trayectorias del sistema discreto se pueden estudiar mediante la ley de refracción de la luz. Es claro que los caminos luminosos serán poligonales: lineales en cada franja. Todo lo que hay que saber es cómo se quiebran al pasar de una franja a la siguiente. La respuesta se encuentra en la leyes de la óptica geométrica desarrolladas por Snellius, Fermat y Huygens.

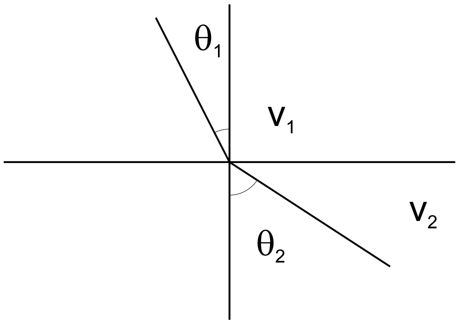
Snellius observó que si dos medios están separados por una línea recta y un rayo se refracta en la frontera entre ambos, entonces la razón de los senos de los ángulos de incidencia y refracción permanece constante (independiente del ángulo de incidencia). Más adelante, Fermat mostró que esto es precisamente lo que ocurre cuando se supone que la luz recorre una trayectoria de tiempo mínimo. Más precisamente, el resultado es que si suponemos que las velocidades de la luz en los medios son v_1 y v_2 entonces (ver figura (3))

$$\frac{\mathrm{sen}\theta_1}{\mathrm{sen}\theta_2}=\frac{v_1}{v_2}$$

donde θ_1 es el ángulo de incidencia y θ_2 es el ángulo de refracción. Esta relación entre los ángulos y las velocidades se debe a Huygens e implica la ley de Snellius.

Bernoulli usó la ley de Huygens para concluir que la cantidad $\frac{\mathrm{sen}\theta_k}{\sqrt{y_{k+1}}}$ será constante ya que en cada franja F_k la velocidad del rayo de luz es $\sqrt{y_{k+1}}$. Pasando al límite cuando $\delta\downarrow 0$ concluimos que el seno

[0]* en el plano vertical



Ley de Snellius, la razón de los senos de los ángulos de incidencia y refracción permanece constante

Figura 3

del ángulo θ de la tangente a la brachystochrona y el eje vertical debe ser proporcional a $\sqrt{y}$. Es decir, ya que

$$\text{sen}\theta = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} \quad , \quad \frac{dx^2}{dx^2 + dy^2} = Ky$$

donde K es constante. Luego:

$$\frac{dx^2 + dy^2}{dx^2} = \frac{1}{Ky} = \frac{C}{y} \quad , \quad C = \frac{1}{K}$$

y finalmente $1 + y'(x)^2 = \frac{C}{y}$.

Así que la curva que expresa la coordenada y de la brachystochrona como función del la coordenada x satisface la relación (ecuación diferencial)

(3) $$y'(x) = \sqrt{\frac{C - y(x)}{y(x)}}.$$

Las curvas dadas paramétricamente por

$$\begin{aligned} x(\phi) &= x_0 + \frac{C}{2}(\phi - \text{sen}\phi) \\ y(\phi) &= \frac{C}{2}(1 - \cos\phi) \\ 0 &\leq \phi \leq 2\pi \end{aligned}$$

satisfacen (3). Estas ecuaciones especifican la cicloide generada por un punto P en un círculo de diámetro C que rueda sobre el eje horizontal de modo que P está en $(x_0, 0)$ cuando $\phi = 0$.

El argumento que presentamos es de Bernoulli y la ecuación (3) aparece en su trabajo seguida por la afirmación **«de lo cual concluyo que la Brachystochrona es la cicloide ordinaria»**.

Dos reseñas biográficas

Concluímos este capítulo con breves reseñas biográficas de Pierre de Fermat y Augustin Louis Cauchy

Pierre de Fermat

Nació el 17 de Agosto de 1601 en Beaumont-de-Lomages, Francia.
Murió el 12 de Enero de 1665 en Castres, Francia.

Fermat, quien fue jurista de profesión, es considerado el creador de la moderna Teoría de Números. Es recordado especialmente por lo que se ha dado en llamar el «Ultimo Teorema de Fermat».

Este teorema afirma que ninguna potencia n-ésima z^n de un número entero $z \neq 0$ puede ser suma de las potencias n-ésimas x^n y y^n de otros dos números enteros $x, y \neq 0$, cuando $n > 2$. Fermat escribió en el margen de un libro, la traducción de Bachet de la *Aritmética* de Diofante, que había encontrado una demostración realmente interesante pero que el margen del libro era muy estrecho para contenerla.

El matemático británico Andrew Wiles anunció en Junio de 1993 la demostración del Teorema de Fermat pero, meses más tarde, a finales de 1993, retiró el anuncio, una vez que se descubrieron algunos problemas en su prueba. En Noviembre de 1994, Wiles anunció nuevamente, y esta vez de manera definitiva, la demostración correcta.

Los intentos por demostrar el teorema a lo largo de más de trescientos años llevaron al descubrimiento de la Teoría de Anillos Conmutativos, entre muchos otros descubrimientos matemáticos.

Fermat fue, junto con Pascal, el fundador de la Teoría de Probabilidades. Propuso, un año antes que Descartes, un sistema de Geometría Analítica. Su trabajo de recostrucción del tratado de Apolonio de Pergas sobre secciones cónicas, vía el *Algebra* de Viète, lo llevó a descubrir métodos de derivación e integración para hallar máximos y mínimos de funciones.

Fermat no publicó casi nada durante su vida, se limitó a anunciar sus descubrimientos en cartas a los amigos (Marsenne, Pascal, Gassendi, entre otros) y, en ocasiones, anotó sus resultados en los márgenes de sus libros. Su trabajo fue ignorado por muchos años hasta que fue redescubierto a mediados del siglo XIX.

Augustin Louis Cauchy

Nació el 21 de Agosto de 1789 en París, Francia.
Murió el 23 de Mayo de 1857 en Sceaux (cerca de París), Francia.

Cauchy fue un ingeniero militar y, como tal, trabajó en Cherbourg, entre 1810 y 1813. A su regreso a París, persuadido por Joseph Louis Lagrange (Turín 1736 - París 1813) y por Pierre Simon Laplace (Beaumont-en-Auge 1749 - París 1827), abandonó la carrera militar y se dedicó por completo a la matemática.

Trabajó en París en la Faculté des Sciences, el Collège de France y la Ecole Polytechnique. En 1816 recibió el Grand Prix de la Academia Francesa de las Ciencias.

Algunas de sus contribuciones incluyen investigaciones en convergencia y divergencia de series infinitas, ecuaciones diferenciales, determinantes, probabilidades y física matemática. Numerosos resultados matemáticos llevan su nombre: el Teorema Integral de Cauchy, en la teoría de funciones complejas, el Teorema de Existencia de Cauchy-Kovalevskaya, en la teoría de las ecuaciones diferenciales parciales ...; también numerosos términos matemáticos: las ecuaciones de Cauchy-Riemann, las sucesiones de Cauchy ...

Cauchy fue el primer matemático en realizar un estudio riguroso para establecer condiciones de convergencia de series infinitas y dió también una definición precisa de integral definida. Su texto *Cours d'analyse* en 1821 fue diseñado para estudiantes de la Ecole Polytechnique con el propósito de desarrollar los teoremas básicos del Cálculo con el mayor rigor matemático posible. El texto de cuatro volúmenes *Exercises d'analyse et de physique matematique*, publicado entre 1840 y 1847, es considerado muy importante.

Cauchy produjo 789 artículos matemáticos pero muchos de ellos no fueron bien recibidos por sus colegas matemáticos. Cauchy mismo no era muy querido por la mayoría de sus colegas, quizás por su caracter obstinado y agresivo.

Ardiente realista, pasó algun tiempo en Italia: dejó París después de la revolución de 1830 y, tras una corta estadía en Suiza, aceptó una oferta del rey de Piamonte para un cargo de profesor en Turín. En 1833 Cauchy viajó de Turín a Praga, en el séquito de Carlos X, en calidad de tutor de su hijo.

Cauchy regresó a París en 1838 y obtuvo nuevamente su puesto en la Academia, no así su cargo de profesor, debido a que se rehusó a prestar juramento de fidelidad. Cuando Luis Felipe fue derrocado en 1848, Cauchy reobtuvo su cargo en la Sorbona, cargo que no dejaría hasta su muerte.

Las dos biografías han sido tomadas libremente de la dirección:
`http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/BiogIndex.html`

Capítulo 1

Conjuntos

1.1 Introducción a los conjuntos y su notación.

La noción de conjunto es una idea básica en la Matemática. Hacer la teoría de conjuntos rigurosamente es una tarea más compleja de lo que se intenta en este curso. Aceptaremos que todos tenemos una idea más o menos clara de lo que es un conjunto de «objetos» o de «elementos». Hablaremos por ejemplo de:

- el conjunto de los números enteros,
- el conjunto de los números pares,
- el conjunto de los puntos de una recta,
- el conjunto de las rectas de un plano
- el conjunto de ... (provea usted otros ejemplos).

Desde la escuela básica y la escuela secundaria se ha desarrollado este lenguaje y lo utilizaremos sin más definiciones.

Los conjuntos usualmente se denotan con letras mayúsculas y sus elementos con letras minúsculas. Para decir que x es un elemento del conjunto X, escribiremos $x \in X$. Para decir que x no está en X, escribiremos $x \notin X$.

Definición: *Si Y y X son dos conjuntos, diremos que X está* incluído *en Y si todo elemento de X es también elemento de Y. Esto es, en símbolos: si $x \in X$ entonces $x \in Y$. Esta relación se escribe $X \subset Y$ y se lee X está contenido o incluido en Y, o X es parte de Y, o bien, X es un* subconjunto *de Y.*

Definición: *Diremos que dos conjuntos Y y X son* iguales *si $X \subset Y$ y $Y \subset X$. En este caso escribiremos $X = Y$.*

Aceptaremos que existe un conjunto llamado vacío, que no tiene elemento alguno y lo vamos a denotar con el símbolo $\emptyset$ y en ocasiones también se le denota por $\{\,\}$.

Ejemplos

1. El conjunto de las rectas del plano que pasan por un punto fijo O, esta contenido en el conjunto de todas las rectas del plano.
2. El conjunto de todos los números enteros múltiplos de 4, es un subconjunto del conjunto de los números pares.
3. La colección de todos los capítulos de este libro, es un ejemplo de un conjunto.

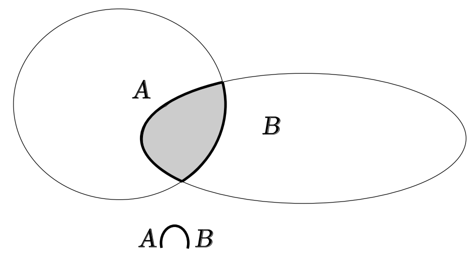
1.1.1 Algebra de los Conjuntos

Si A y B son dos conjuntos, se pueden crear nuevos conjuntos a partir de ellos mediante operaciones elementales.

1. **Intersección:** La intersección de A y B es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A y a B, se denota $A \cap B$, (figura 1.1).

   En símbolos: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}$

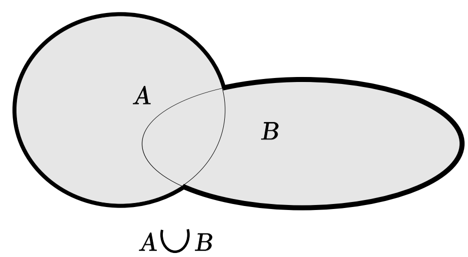
   Si la intersección de dos conjuntos es vacía, $A \cap B = \emptyset$, se dice que los conjuntos son *disjuntos*.



Intersección de dos conjuntos

Figura 1.1

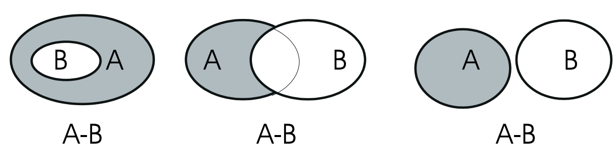
2. **La Unión:** La unión de dos conjuntos A y B es el conjunto formado por todos los elementos que están en A o en B. Se denota $A \cup B$, (figura 1.2). En símbolos $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}$.



Unión de dos conjuntos

Figura 1.2

3. **La Diferencia:** la diferencia del conjunto A menos el conjunto B es el conjunto formado por todos los elementos de A que no están en B. Se denota $A - B$. En símbolos $A - B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \notin B\}$, (figura 1.3).



Resta de conjuntos

Figura 1.3

4. **Conjunto universal o universo de discurso:** Como conjunto universal queremos denotar algún conjunto E que contenga todos los elementos que deseen considerarse en un problema, discurso o tema, sin pretender contener todo lo que no interesa al problema. Este conjunto universal se supone conocido en cada problema y del cual se pueden seleccionar elementos para construir subconjuntos.

5. **Complemento:** Digamos que tenemos un conjunto universal E. Cualquier conjunto A que se considere será un subconjunto de E ($A \subset E$). La diferencia $E - A$ se llamará el **complemento** de A y se denotará con el símbolo A^c, $(E - A = A^c)$.

1.1.2 Propiedades de las Operaciones con Conjuntos

Estas operaciones con conjuntos gozan de algunas propiedades de fácil comprobación que vamos a enunciar:

- La unión y la intersección son conmutativas
$$A \cup B = B \cup A \quad y \quad A \cap B = B \cap A$$
- También son asociativas
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \quad y \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$
- La unión es distributiva con respecto a la intersección
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
- La intersección es distributiva con respecto a la unión
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Observación: *Como un buen ejercicio de abstracción observamos que las operaciones $\cup$ (unión) y $\cap$ (intersección) en los conjuntos, tienen propiedades análogas a las de la suma (pensada como la unión) y el producto de números naturales (pensado como la intersección). Veamos que, si tenemos números naturales $a, b, c, \in \mathbb{N}$(=conjunto de los números naturales), entonces tenemos igualdades como siguen*

- $\left.\begin{array}{c} a+b=b+a \\ a.b=b.a \end{array}\right\}$ Conmutatividad
- $\left.\begin{array}{c} a+(b+c)=(a+b)+c \\ a.(b.c)=(a.b).c \end{array}\right\}$ Asociatividad
- $a.(b+c)=a.b+a.c$ $\Big\}$ Distributividad del producto respecto a la suma

Pero en los conjuntos, la propiedad de la distributividad de la unión con respecto a la intersección no se traduce bien para los naturales pues, la distributividad de la suma respecto al producto es, en general falsa, es decir:

$$\text{en general} \quad a+b.c \neq (a+b)(a+c)$$

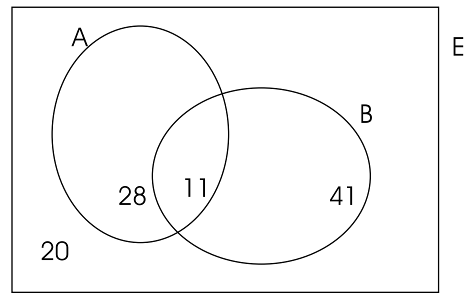
Ilustre usted con un ejemplo sencillo la posibilidad de la desigualdad anterior para números naturales y diga en cuáles condiciones se podría tener una igualdad.

1.2 Ejercicios

1. En la figura 1.4 se presenta un universo E (rectángulo), subconjuntos A y B y algunos números que representan la cantidad de elementos en cada porción del diagrama. ¿Cuántos elementos están en los siguientes conjuntos?

(a) E	(e) $A \cup B$	(i) $(A \cap B)^c$
(b) B	(f) $A \cap B$	(j) $(A \cup B)^c$
(c) A^c	(g) $A^c \cap B$	(k) $A^c \cap B^c$
(d) B^c	(h) $A \cap B^c$	(l) $A^c \cup B$.

2. Sean $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{a, b, e, f, g\}$, $C = \{b, c, e, h\}$ y el universo $E = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. Hallar:



Número de elementos en diversas regiones o conjuntos

Figura 1.4

(a) $A \cap C$
(b) $A \cup C$
(c) $A - B$
(d) A^c
(e) $A^c \cup B^c$
(f) $B^c \cap C$
(g) $(A \cap B) - B$
(h) $(B \cap C^c)^c$
(i) $B^c - A^c$
(j) $(C - B) - A$
(k) $C - (B - A)$.

3. Suponga que existe un conjunto universal E. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas y cuáles son falsas?

(a) $A \cup \emptyset = A$
(b) $A \cap E = E$
(c) $A \cup A^c = E$
(d) $A \cup A^c = A$
(e) $A \cup A = A$
(f) $A \cap A = \emptyset$
(g) $A \cup E = E$
(h) $A \cap \emptyset = \emptyset$
(i) $(A^c)^c = E$
(j) $(A - B)^c = B - A$
(k) $(A \cup B) - B = A - B$
(l) $A \cap (A - B) = A \cup B$
(m) $(A - B)^c = A^c - B^c$.

4. Si $A,\ B,\ C\ D$ son conjuntos, demostrar que:
(a) Si $A \subset C$ y $B \subset D$, entonces $A \cup B \subset C \cup D$.
(b) Si $A \subset C$ y $B \subset D$, entonces $A \cap B \subset C \cap D$.

5. Sean A y B conjuntos tales que:

(a) $A \cup B = \{a,\ b,\ c,\ d\}$
(b) $A \cap B = \{a,\ c\}$
(c) $A - B = \{b\}$

Hallar A y B.

6. Escriba las demostraciones de las propiedades asociativas y distributivas de las operaciones $\cap$ y $\cup$.

7. Sea X un conjunto, A y B subconjuntos de X entonces pruebe que:

(a) $X - (A \cap B) = (X - A) \cup (X - B)$
(b) $X - (A \cup B) = (X - A) \cap (X - B)$
(c) $A - B = A - (A \cap B)$
(d) $X - (X - A) = A$

Capítulo 2

Los números naturales y los números enteros

Los números $1,\ 2,\ 3,\ \ldots 8,\ \ldots$ y otros, son bien conocidos por todos desde la escuela; los llamamos los números naturales. En este curso deseamos pensar en 0 (cero) también como un número natural[1]. El conjunto de todos los números naturales lo denotamos con el símbolo $\mathbb{N}$.

$$\mathbb{N} = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5, \ldots n,\ \ldots\}$$

En razonamientos matemáticos o lógicos es conveniente representar los números con letras; para indicar que la letra m representa un número natural escribimos $m \in \mathbb{N}$ y lo leemos «m pertenece a $\mathbb{N}$».

Sabemos que hay infinitos números naturales, pues para cada uno de ellos hay otro distinto que le sucede (y no le precede). Hablamos del *orden* $<$ en los naturales y su propiedad de tricotomía afirmando que dados $n,\ m \in \mathbb{N}$ entonces se tiene exactamente una de las tres posibilidades:

$$n < m, \quad \text{o} \quad n = m, \quad \text{o} \quad m < n.$$

Lo más útil de estos números puede estar en su origen —para contar objetos— olvidando cualquier otra característica que no sea una cantidad. Desde la antigüedad surgió la aritmética que facilitó el conteo, siendo la suma y la multiplicación las operaciones más primitivas que conocemos desde la escuela.

Un punto importante, que quizá no se ha resaltado en el bachillerato, en el «axioma de inducción» para el conjunto de los naturales. Este «axioma» es la herramienta fundamental en Teoría Combinatoria, e importante para todo el Cálculo. El Axioma de Inducción es el tema principal de este capítulo, pero antes presentaremos un repaso de las propiedades más conocidas.

2.1 Propiedades de la suma y la multiplicación

Una operación en $\mathbb{N}$ es una manera de asociar a cada par $m, n \in \mathbb{N}$ de números naturales, otro número natural bien determinado.

Aquí recopilamos las propiedades básicas de las operaciones de suma y producto (multiplicación) y como es usual $m + n$ representa la suma de m y n, así como mn o $m.n$ denotan la multiplicación de m y n.

Las propiedades básicas de estas operaciones son:

Cualesquiera que sean los números naturales a, b, c

1. $a + b = b + a$
2. $a + (b + c) = (a + b) + c$
3. $a + 0 = a$

[1]En algunos textos el cero no se incluye dentro de los números naturales.

4. si $a+b=a+c$ entonces se tiene: $b=c$
5. $a.b=b.a$
6. $a.(b.c)=(a.b).c$
7. $a.1=a$
8. si $a.b=a.c$ y $a\neq 0,$ entonces se tiene: $b=c$
9. $a.(b+c)=a.b+a.c$

Como consecuencia de (2) y (6), se puede escribir $a+b+c$ y abc sin preocuparse del orden en que se efectuan las operaciones. Una consecuencia importante de las propiedades anteriores, es que $a.0=0$ cualquiera que sea $a\in\mathbb{N}$; en efecto,

$$\begin{aligned} a.0 &= a.(0+0) \quad \text{por (3)} \\ &= a.0+a.0 \quad \text{por (9)} \end{aligned}$$

y como $a.0=a.0+0$ (por 3), se tiene $a.0+0=a.0+a.0$ aplicando (4), se obtiene $a.0=0$.

Otra operación en $\mathbb{N}$ es la potenciación, que asocia al par m,n números naturales, no ambos nulos, el número natural m^n definido por[2]

$$\begin{aligned} &m^n=m.m....m \ \ (n \text{ veces) si } n\neq 0\ , \\ &m^0=1 \text{ si } m\neq 0\ . \end{aligned}$$

En los ejercicios se pedirá al estudiante que muestre algunas propiedades de las tres operaciones anteriores y se definirán las operaciones inversas (substracción, división y radicación).

Como ejemplo, citemos algunos productos notables:

a) $(a+b)(a+c)=a^2+a(b+c)+bc.$

b) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$

c) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$

Para ilustrar el método de demostración formal, probaremos b):

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= (a+b)(a+b) && \text{por definición} \\ &= (a+b)a+(a+b)b && \text{por (9)} \\ &= a(a+b)+b(a+b) && \text{por (5)} \\ &= a.a+ab+ba+bb && \text{por (9)} \\ &= a^2+ab+ab+b^2 && \text{por definición y (5)} \\ &= a^2+ab(1+1)+b^2 && \text{por (7) y (9)} \\ &= a^2+2ab+b^2 && \text{por (5)} \end{aligned}$$

Las propiedades a), b) y c) son ejemplos de **identidades** en $\mathbb{N}$, nombre dado usualmente a igualdades que se satisfacen cualesquiera que sean los números naturales con que se sustituyan las letras que aparecen en ellas.

Las **ecuaciones** en $\mathbb{N}$, por el contrario, se definen usualmente como igualdades que sólo se satisfacen cuando ciertas letras (las incógnitas de la ecuación) se sustituyen por ciertos números naturales. De forma más correcta, una ecuación en $\mathbb{N}$ es una manera abreviada de plantear un problema, de preguntar si existen números naturales que satisfacen ciertas condiciones, que pueden expresarse por una igualdad. Así,

$$3+x=9$$

significa: ¿existen números naturales x que sumados con 3 dan 9?

$$5x=7$$

significa: ¿existen números naturales x que multiplicados por 5 dan 7?

$$x^2=2$$

[2]El significado exacto de la expresión «n veces» puede describirse vía el axioma de inducción.

significa: ¿existen números naturales cuyo cuadrado sea 2?

La letra «x», la incógnita de la ecuación, puede reemplazarse por cualquier otra, aunque tradicionalmente se usan las últimas letras del alfabeto w, x, y, z para designar incógnitas. Sería más sugestivo el escribir las ecuaciones anteriores en la forma

$$3 + \square = 9; \quad 5.\square = 7; \quad \square^2 = 2$$

El número o los números naturales con los que pueden «llenarse» los cuadritos y obtener proposiciones verdaderas, se llaman soluciones de la ecuación.

Nótese que hemos repetido varias veces la frase «en $\mathbb{N}$»; el especificar el tipo de solución buscada es importante. De las ecuaciones anteriores, solamente la primera, $3+x = 9$, tiene solución en $\mathbb{N}$. Veremos más adelante que es posible ampliar el concepto de número, de manera que las otras dos ecuaciones (planteadas en el nuevo conjunto de números) tengan también solución.

2.2 Ejercicios

1. Use las propiedades (1)-(9) de la página 11 para probar:

   (a) Si la ecuación (en x) $a + x = b$ tiene una solución en $\mathbb{N}$ ella es única.

   (b) Si la ecuación (en x) $a.x = b$, con $a \neq 0$, tiene una solución $\mathbb{N}$, ella es única.

   (Sugerencia: en ambos casos suponga que la ecuación tiene dos soluciones m y n y pruebe, usando (1)-(9) que $m = n$).

2. Resolver las ecuaciones en $\mathbb{N}$

   (a) $2x + 4 = 10$.

   (b) $x^3 + 2x^2 = 16$.

   Pruebe que 3 es la única solución de la ecuación a).

3. Dados dos números naturales a y b, según el ejercicio anterior, si existe $c \in \mathbb{N}$ tal que $a + c = b$, existe uno solo; en ese caso, el número c se llama diferencia de b menos a, y se denota por $b - a$. En otras palabras $b - a$ es, cuando existe, el único número natural tal que

   $$a + (b - a) = b \ .$$

   Supongamos que $m - n$ y $p - q$ están definidos; probar que entonces

   (a) $(m - n) + (p - q) = (m + p) - (n + q)$.

   (b) $(m - n)(p - q) = (mp + nq) - (np + mq)$.

   Advertencia: No use ninguna «regla de signos»; use solamente la definición de diferencia y las propiedades (1)-(9) de la página 11; lo único que tiene que probar es:

   $$\begin{aligned} (n + q) + (m - n) + (p - q) &= m + p \\ (np + mq) + (m - n)(p - q) &= mp + nq \end{aligned}$$

4. Usando solamente las propiedades (1)-(9) de la página 11, demuestre las identidades siguientes:

   (a) $(m + n) + (p + q) = (m + q) + (n + p) = ((m + n) + p) + q$.

   (b) $(a + b)(c + d) = (ac + ad) + (bc + bd)$.

   (c) $(a + b)(a + c) = a^2 + a(b + c) + bc$.

   (d) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

5. Pruebe que $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ no es una identidad (esto se logra encontrando números naturales a y b donde la proposición es falsa, es decir un ejemplo donde no ocurre la igualdad). ¿Existen números naturales a, b para los cuales esta igualdad es cierta?

6. Encontrar el error en la siguiente «demostración» de que $1 = 2$: supongamos que x e y representan el mismo número natural, entonces

$$\begin{aligned} x &= y \\ x^2 &= xy \\ x^2 - y^2 &= xy - y^2 \\ (x+y)(x-y) &= y(x-y) \\ x + y &= y \\ y + y &= y \\ 2y &= y \\ 2 &= 1 \end{aligned}$$

Esto nos da una idea del cuidado que hay que tener al aplicar la propiedad (8) de la página 11 (ley de cancelación para el producto).

7. Dados dos números naturales a y b, con $a \neq 0$, la ecuación $ax = b$ tiene cuando más una solución; si la tiene, decimos que b es divisible por a y su solución la denotamos por $\frac{b}{a}$; es decir, $\frac{b}{a}$ es, cuando está definido, el único número natural tal que

$$a \cdot \frac{b}{a} = b$$

Supongamos que m es divisible por n y p es divisible por q probar:

(a) $\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq + np}{nq}$

(b) $\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{mp}{nq}$

(De nuevo: use solamente la definición y las propiedades (1)-(9); lo único que tiene que probar es que el miembro izquierdo de la igualdad multiplicado por el denominador del miembro derecho es igual al numerador del miembro derecho. Podrá apreciar que lo que prueba este ejercicio es que las definiciones usuales de suma y producto de «fracciones» son las únicas posibles al menos cuando los numeradores son divisibles por los denominadores).

8. Cuando m es divisible por p decimos que p divide a m. Pruebe que si p divide a m y p divide a n, entonces p divide a $m + n$.

9. Demuestre que cualesquiera que sean los números naturales m, n distintos de cero, se tiene:

(a) $m^p.m^q = m^{p+q}$, p y q en $\mathbb{N}$.

(b) $(m.n)^p = m^p.n^p$, $p \in \mathbb{N}$.

(c) $(m^n)^p = m^{np}$, $p \in \mathbb{N}$.

10. Si la ecuación $x^n = a$ (con n, a en $\mathbb{N}$ y $n \neq 0$) tiene una solución en $\mathbb{N}$, ella es única, se llama raiz n-ésima de a y se denota por $\sqrt[n]{a}$. Probar

(a) si $\sqrt[mn]{a}$ está definida, lo están $\sqrt[n]{a}$ y $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$ y y

$$\sqrt[mn]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\,.$$

(b) si m es divisible por n, entonces $\sqrt[n]{a^m}$ está definida y

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}\,.$$

2.3 Orden en $\mathbb{N}$

Cuando indicamos el conjunto de los números naturales, lo hacemos siempre como

$$\mathbb{N} = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5, \ldots n,\ \ldots\}$$

y no así

$$\mathbb{N} = \{5,\ 7,\ 4,\ 3,\ 2,\ 0, \ldots 1,\ \ldots\}$$

aunque ambos conjuntos tengan los mismos elementos y por tanto, sean el mismo. La razón es que siempre asociamos una «relación de orden» al conjunto $\mathbb{N}$. Esa relación puede definirse como sigue.

Definición: *Dados dos números naturales m y n, diremos que m es menor o igual que n y escribimos $m \leq n$ si la ecuación $m + x = n$ tiene una solución en $\mathbb{N}$, es decir, si existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $m + p = n$.*

Si $m \leq n$ también decimos que n es mayor o igual que m y escribimos $n \geq m$. Si $m \leq n$ y $m \neq n$, escribimos $m < n$ (o $n > m$) y decimos que m es menor que n (o n es mayor que m).

La relación $\leq$ en $\mathbb{N}$ satisface las propiedades básicas siguientes: (siendo m, n, p números naturales cualesquiera)

(1) reflexividad: $m \leq m$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

(2) antisimetría: si $m \leq n$ y $n \leq m$ entonces $m = n$.

(3) transitividad: si $m \leq n$ y $n \leq p$ entonces $m \leq p$.

(4) dicotomía: dados $m, n \in \mathbb{N}$, se tiene $m \leq n$ o $n \leq m$.

(5) monotonía: si $m \leq n$ entonces $m + p \leq n + p$ y $mp \leq np$.

(6) cancelación: si $m + p \leq n + p$, entonces $m \leq n$; si $m.p \leq n.p$ y $p \neq 0$, entonces $m \leq n$.

Todas esta propiedades, excepto (2) y (4), pueden demostrarse a partir de la definición y las propiedades básicas de la suma y el producto; demostraremos una de ellas, dejando las demás como ejercicio; en cuanto a (2) y (4), las dejaremos para más adelante en la sección de inducción.

Tratemos de probar (2): suponemos $m \leq n$ y $n \leq m$ y queremos probar $m = n$. Como $m \leq n$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $m + p = n$ y, como $n \leq m$, existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $n + q = m$; de allí se obtiene $n + q + p = n$ y por tanto $q + p = 0$, lo cual implica $p = q = 0$. Luego $m = n$. Hay un problema: no hemos probado que si $q + p = 0$ entonces $p = q = 0$; esto no es posible usando únicamente las propiedades (1)-(9).

Probemos (6):

Prueba: *La primera parte es fácil: supongamos que $m + p \leq n + p$ entonces existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $(m + p) + r = n + p$, lo cual implica $(m + r) + p = n + p$, de donde se obtiene $m + r = n$, lo cual significa $m \leq n$ que es lo que queríamos probar.*

La segunda parte no es tan sencilla y necesitamos usar la propiedad de dicotomía (4). Supongamos que $m.p \leq n.p$ con $p \neq 0$; queremos probar que, entonces, $m \leq n$; procedamos por **reducción al absurdo**, *suponiendo que $m \leq n$ es falso; por la propiedad de dicotomía esto significa que $n < m$, es decir, existe $r \in \mathbb{N}$, con $r \neq 0$, tal que $n + r = m$; multiplicando por p, se obtiene $np + rp = mp$, lo cual significa que $np \leq mp$. Esto junto con la hipótesis $mp \leq np$ implica $np = mp$ (por la antisimetría). De $np + rp = mp$ y $np = mp$, se obtiene $r.p = 0$, lo cual es una contradicción ya que $r \neq 0$ y $p \neq 0$ (explique usted por qué es una contradicción). Como el suponer que $m \leq n$ es falso nos lleva a una contradicción, $m \leq n$* **tiene que ser verdadero**. □

2.3.1 Inecuaciones

En la sección anterior vimos como la relación $=$ da lugar al concepto de ecuación; lo análogo para la relación $\leq$ (o $<$) es el concepto de inecuación. Una **inecuación** en $\mathbb{N}$ es una manera abreviada de preguntarnos si existen números naturales que satisfacen cierta condición, que puede expresarse mediante una desigualdad. Así tenemos como ejemplos:

a) $x + 6 < 10$ o $\square + 6 < 10$
significa: ¿existen números naturales, tales que el resultado de sumarlos con 6 es menor que 10 ?

b) $3x + 5 \leq 10$,

c) $2x^2 + 1 < 2$.

Los números naturales con los que puede sustituirse la incógnita y obtener proposiciones verdaderas son las soluciones de la inecuación; las soluciones de a) son $0,\ 1,\ 2,\ 3$; las de b) son 0 y 1; c) tiene una sola, 0 .

A veces es útil plantear problemas como: hallar todos los números naturales x tales que $2x + 1$ es menor que 9 y es mayor o igual que 3; esto puede escribirse en una sola línea así

$$3 \leq 2x + 1 < 9$$

pero hay que terner en cuenta que esto último representa un sistema de dos inecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + 1 < 9 \\ 2x + 1 \geq 3 \end{cases}$$

y que queremos números que satisfagan ambas a la vez; las soluciones son los números $1,\ 2$ y 3.

2.4 Ejercicios

1. Compruebe que $m < n$ si y sólo si existe $p \in \mathbb{N}$ con $p \neq 0$ tal que $m+p = n$. Enuncie propiedades de la relación $<$ similares a las de $\leq$.
2. Resolver las siguientes inecuaciones en $\mathbb{N}$:

   (a) $3x + 2 < 6$

   (b) $x + 1 \leq 16$

   (c) $x^2 + x + 1 < 15$

   (d) $3x + 3 \leq 6$

   (e)

   (f)
3. Demostrar las propiedades (1), (3) y (5) de la relación $\leq$ en $\mathbb{N}$ (página 15).
4. Sean $m, n \in \mathbb{N}$ no nulos; probar que si m es divisible por n entonces $n \leq m$.
5. Fuí al mercado y compré 50 animales, entre gallinas, pollos y pollitos. Si pagué Bs. 1000 por cada gallina, Bs. 500 por cada pollo y Bs. 100 por cada pollito y gasté Bs. 10000. ¿Cuántas gallinas, cuántos pollos y cuántos pollitos compré?
6. Sea $n \in \mathbb{N}$. Probar que el sistema de inecuaciones
   $n < x < n + 1$ no tiene soluciones en $\mathbb{N}$. (Esto no es inmediato, lo que se pide es probar que no hay ningún número natural entre n y $n + 1$).
7. Trate de probar que dados dos números naturales m y n, se tiene al menos una de las relaciones $m \leq n, n \leq m$.
8. Trate de probar que si $m \leq n$ y $n \leq m$ entonces $m = n$, usando solamente las propiedades (1)-(9)

2.5 Inducción

Supongamos que tenemos una afirmación acerca de números naturales y queremos ver si es cierta para **todos ellos**; como no podemos comprobar la afirmación para todos y cada uno de ellos, necesitamos disponer de un proceso que permita decidir, en un número finito de pasos, si la afirmación es cierta para todos los números naturales. Ese proceso es una propiedad característica del conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales, el llamado principio (o axioma) de inducción.

Veamos un ejemplo: supongamos que colocamos las piezas de un juego de dominó de pié de tal manera que cuando una cae, empuja la siguiente y la hace caer; ¿qué pasa si hacemos caer la primera pieza? . . . Aún sin realizar el experimento, cualquier persona dirá que se caen todas. Las dos características esenciales en el ejemplo, que nos permiten asegurar que todas las piezas se caen son:

- La primera se cae, y
- Al caer una pieza, hace caer a la siguiente.

Enunciemos ahora el

Principio de Inducción: sea P una afirmación acerca de los números naturales tal que:

1. La afirmación se cumple para el número 0.
2. Cada vez que P se cumple para un número natural k, se cumple también para el siguiente, $k+1$.

Entonces la afirmación P se cumple para todos los números naturales.

Ejemplo: Como ejemplo vamos a probar que dado un número natural a, se tiene

(2.1) $(1+a)^n \geq 1+na$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para demostrar esta propiedad «por inducción», se comprueba que ella satisface las dos condiciones del principio de inducción. Para comprobar que la afirmación (2.1) satisface las dos condiciones del principio de inducción, debemos probar:

1. $(1+a)^0 \geq 1+0.a$
2. si $(1+a)^k \geq 1+ka$ entonces $(1+a)^{k+1} \geq 1+(k+1)a$

Primero comprobamos que (1) es cierto: $(1+a)^0 = 1$ por definición, y $1+0.a = 1$ y por tanto (1) se cumple.

Supongamos ahora que

$$(1+a)^k \geq 1+ka \text{ («hipótesis de inducción»)}$$

entonces

$$(1+a)^{k+1} = (1+a)^k(1+a) \geq (1+ka)(1+a)$$

y como

$$(1+ka)(1+a) = 1+ka+a+ka^2 1+(k+1)a+ka^2 \geq 1+(k+1)a$$

obtenemos

$$(1+a)^{k+1} \geq 1+(k+1)a$$

Luego (2) es cierto y queda establecida la propiedad (2.1).

Antes de ver otros ejemplos, anunciamos que el principio de inducción se puede presentar en varias formas **equivalentes** que serán muy útiles. Ejemplos[3]:

Principio de Inducción II: sea P una afirmación acerca de números naturales tal que:

1. La afirmación se cumple para un número natural m.
2. Cada vez que P se cumple para un número natural $k \geq m$, se cumple también para el siguiente, $k+1$.

Entonces la afirmación P se cumple para todos los números naturales mayores o iguales a m.

Principio de Inducción III: sea $P(=P(n))$ una afirmación acerca de números naturales tal que:

1. La afirmación se cumple para $n=0$.
2. Para cada $k \geq 0$, si P se cumple para todo los naturales $n \leq k$ entonces también se cumple para el siguiente, $k+1$.

Entonces la afirmación P se cumple para todos los números naturales.

[3]En realidad estas formas del principio de inducción se pueden deducir de la primera forma (ejercicio).

Ejemplos

1. Consideremos los números impares

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13$$

ordenados por la relación $<$.
¿Qué número ocupa el lugar n en esta lista? Observemos que

1	ocupa el lugar	1
3	ocupa el lugar	2
5	ocupa el lugar	3
7	ocupa el lugar	4
9	ocupa el lugar	5
11	ocupa el lugar	6
13	ocupa el lugar	7

Los números en la columna de la izquierda de esta lista parcial, se obtienen de los correspondientes en la columna de la derecha, multiplicándolos por 2 y restándoles 1. ¿Es esto suficiente para asegurar que el número $2n-1$ es el que ocupa el lugar n?

La respuesta es ¡NO! Para aclarar este rotundo no, considere el siguiente ejemplo.

$$\left.\begin{array}{ccc} 1 & < & 1000 \\ 2 & < & 1000 \\ 3 & < & 1000 \\ 4 & < & 1000 \\ 5 & < & 1000 \\ 6 & < & 1000 \\ 7 & < & 1000 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}\right\}$$

Esta tabla contiene varias proposiciones verdaderas, pero es claro que no podemos concluir que cualquier número natural será menor que 1000.

Por otro lado, volviendo a la primera tabla de proposiciones, es cierto que el n-ésimo número impar es $2n-1$. Para probarlo, vamos a usar el principio de inducción (II), con $m=1$.

Probaremos:

(a) el número impar que ocupa el lugar 1 es $2.1-1$.

(b) si el número impar que ocupa el lugar k es $2.k-1$, entoces, el que ocupa el lugar $k+1$ es $2(k+1)-1$.

Si $2k-1$ es el número impar que ocupa el lugar k el siguiente es $2k-1+2=2(k+1)-1$ por tanto (1b) es cierto. Como (1a) es cierto también, el principio de inducción (II) asegura que cualquiera que sea n el número impar que ocupa el lugar n es $2n-1$.

2. Hallemos ahora una formula para la suma de los n primeros números naturales impares.
Observemos que

$$\begin{array}{rrl} 1= & 1= & 1^2 \\ 1+3= & 4= & 2^2 \\ 1+3+5= & 9= & 3^2 \\ 1+3+5+7= & 16= & 4^2 \\ 1+3+5+7+9= & 25= & 5^2 \end{array}$$

Esto nos lleva a conjeturar que

(2.2) $$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$$

Es decir, «la suma de los n primeros números impares es n^2». Lo probamos por inducción:

(a) (2.2) es cierto para $n=1$: inmediato.;

(b) supongamos que (2.2) es cierto para $n=k$, es decir

$$1+3+5+\ldots+(2k-1)=k^2$$

entonces

$$1+2+3+...+(2k-1)+(2k+1)=k^2+(2k+1)=(k+1)^2$$

y por tanto (2.2) también es cierto para $k+1$.
Así (2a) y (2b) implican por el principio de inducción (II), que (2.2) es cierto para todo n natural mayor o igual a 1.

3. **Un contraejemplo:** es esencial, al usar el principio de inducción, el asegurar que la afirmación en cuestión satisface las dos condiciones. Si por ejemplo, P es la afirmación

$$n=n+5$$

P es falsa para todo $n \in \mathbb{N}$, pero satisface (II- 2 en la página 17).
En efecto, si P es cierta para $n=k$, es decir, si $k=k+5$ se tiene entonces que

$$k+1=k+5+1=(k+1)+5$$

es decir, P es cierta para $n=k+1$.

4. Para todo número natural $n \geq 3$, se tiene

$$n^3 > 3n+3 \tag{2.3}$$

En efecto, (2.3) es cierta para $n=3$; supongamos que es cierta para $n=k$, es decir,

$$k^3 > 3k+3$$

entonces

$$(k+1)^3 = k^3+3k^2+3k+1 > 3k+3+3k^2+3k+1$$

y, si $k>1$, se tiene

$$3k+3+3k^2+3k+1 = 3(k+1)+3k^2+3k+1 > 3(k+1)+3$$

luego

$$(k+1)^3 > 3(k+1)+3$$

lo cual prueba que si (2.3) es cierta para $k(>1)$ lo es también para $k+1$. Por el principio de inducción (II), se tiene que (2.3) es cierta para todo número natural mayor o igual a 3.

2.6 Ejercicios recomendados

1. Observe, generalice y demuestre su generalización por inducción:

(a)

$$\begin{array}{l} 2^2-1 \text{ es múltiplo de } 3 \\ 2^4-1 \text{ es múltiplo de } 3 \\ 2^6-1 \text{ es múltiplo de } 3 \\ 2^8-1 \text{ es múltiplo de } 3 \\ \vdots \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{r} 1+\frac{1}{2}=2-\frac{1}{2} \\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=2-\frac{1}{4} \\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=2-\frac{1}{8} \\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=2-\frac{1}{16} \\ \vdots \end{array}$$

2. Calcule los cinco primeros términos de las sucesiones definidas por
   (a) $a_n = 3n$ para todo $n \in \mathbb{N}$
   (b) $a_n = n+3$ para todo $n \in \mathbb{N}$
   (c) $a_n = 3$ para todo $n \in \mathbb{N}$
   (d) $b_n = 2n^2 - n$ para todo $n \in \mathbb{N}$
   (e) $a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es par} \\ 3 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$

3. Practique el uso del símbolo $\sum$ completando las igualdades siguientes:

(a) $\sum_{k=1}^{5} a_k = \ldots$ (d) $\sum_{i=4}^{4} \frac{k}{i-1} = \ldots$ (g) $\sum_{1\le k\le 4}^{5} 2^{k-1} = \ldots$

(b) $\sum_{j=1}^{3} j^3 = \ldots$ (e) $\sum_{k=1}^{5} k = \ldots$ (h) $\sum_{k=1}^{5} 3^k = \ldots$

(c) $\sum_{j=1}^{4} 3^{2j+1} = \ldots$ (f) $\sum_{j=1}^{4} (2j-1) = \ldots$

4. Los números combinatorios $\binom{n}{k}$ con $n, k \in \mathbb{N}$ y $n \geq k$, se definen por

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Compruebe que

(a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

(b) $\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$

5. Estudie y justifique cada paso de la siguiente demostración de la fórmula del binomio

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}.b^k$$

Se procede por inducción; veamos que la fórmula es cierta para $n = 1$

$$(a+b)^1 = a+b, \quad \text{y} \quad \binom{1}{0} a^1 b^0 + \binom{1}{1} a^0 b^1 = a+b.$$

Supongamos ahora que la fórmula es cierta para $n = p$, entonces

$$\begin{aligned}
(a+b)^{p+1} &= (a+b)^p (a+b) \\
&= \left[\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} a^{p-k}.b^k\right] (a+b) \text{ (por la hipótesis de ind.)} \\
&= \left[\binom{p}{0} a^p + \binom{p}{1} a^{p-1}.b + \cdots + \binom{p}{p-1} a.b^{p-1} + \binom{p}{p} b^p\right] (a+b) \\
&= \binom{p}{0} a^{p+1} + \binom{p}{1} a^p.b + \cdots + \binom{p}{p-1} a^2.b^{p-1} + \binom{p}{p} a.b^p \\
&\quad + \binom{p}{0} a^p b + \binom{p}{1} a^{p-1}.b^2 + \cdots + \binom{p}{p-1} a.b^p + \binom{p}{p} b^{p+1}
\end{aligned}$$

usando ahora la segunda parte del ejercicio anterior para sumar los términos semejantes, se obtiene

$$\begin{aligned}
&\binom{p}{0} a^{p+1} + \binom{p+1}{1} a^p.b + \cdots \\
&\quad + \binom{p+1}{p-1} a^2.b^{p-1} + \binom{p+1}{p} a.b^p + \binom{p+1}{p+1} b^{p+1}
\end{aligned}$$

y, como

$$\binom{p}{0} = \binom{p}{p} = 1 = \binom{p+1}{0} = \binom{p+1}{p+1}$$

se obtiene, finalmente,

$$
\begin{aligned}
&(a+b)^n = \\
&\quad = \binom{p+1}{0} a^{p+1} + \binom{p+1}{1} a^p.b + \cdots \\
&\quad\quad + \binom{p+1}{p-1} a^2.b^{p-1} + \binom{p+1}{p} a.b^p + \binom{p+1}{p+1} b^{p+1} \\
&\quad = \sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} a^{p-k}.b^k
\end{aligned}
$$

Hemos probado que si la fórmula del binomio es cierta para k, entonces lo es también para $k+1$ y que es cierta para 1; luego es cierta para todo $n \geq 1$

6. Demuestre:

   (a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$

   Sug.: aplique la fórmula del binomio.

2.7 Más ejercicios de inducción

1. Demostrar por inducción:

   (a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

   (b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} i^2 = 1^2 - 2^2 + 4^2 + \cdots + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}$.

   (c) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} j = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

   (d) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} j^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

   (e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$.

   (f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2 \cdot 3^{k-1} = 2 + 6 + 18 + \cdots + 2 \cdot 3^{n-1} = 3^n - 1$.

2. Demostrar por inducción y rescribir el lado izquierdo usando el símbolo de sumatoria $\sum$:

   (a) $\displaystyle\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$.

   (b) $\displaystyle\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$.

   (c) $\displaystyle 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}$.

3. Pruebe por inducción que el número $D(n)$ de diagonales de un polígono de n lados ($n \geq 3$) es $D(n) = \frac{n(n-3)}{2}$. (diagonales=segmentos que unen vértices no adyacentes)

4. Probar las siguientes desigualdades con n entero positivo:

(a) $n < 2^n$.
(b) $1 + 2n \leq 3^n$.
(c) $(n!)^2 > n^n$ si $n \geq 3$.
(d) Si $0 < a < b$ entonces $\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1} < \left(\frac{a}{b}\right)^n$.
(e) $1 + 2 + 3 + \cdots + n < \frac{1}{8}(2n+1)^2$.

5. Demuestre la verdad de las siguientes proposiciones para n entero positivo:

(a) 3 es un factor de $n^3 - n + 3$.
(b) 2 es un factor de $n^2 + n$.
(c) 4 es un factor de $5^n - 1$
(d) 9 es un factor de $10^{n+1} + 3 \cdot 10^n + 5$.

6. Use inducción para demostrar:
Sea $a \neq 1$ entonces $1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1} = \dfrac{a^n - 1}{a - 1}$.
7. Use inducción para demostrar que para todo n entero positivo:
(a) $a - b$ es factor de $a^n - b^n$.
(b) $a + b$ es factor de $a^{2n-1} - b^{2n-1}$.
(c) Hallar una expresión que simplifique el producto: $\left(1 - \dfrac{1}{2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{3}\right)\cdots\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$ y comprobar su validez para $n \geq 2$.
8. Demuestre que las siguientes proposiciones son verdaderos para cualquier valor de $n \in N$

(a) $1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 < \dfrac{n^3}{3} < 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$
(b) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 \cdots + n)^2$
(c) $1^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3 < \dfrac{n^4}{4} < 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$
9. Demostrar las siguientes proposiciones usando el principio de inducción:
(a) $1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2} \leq 2 - \dfrac{1}{n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
(b) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
(c) $2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots + (2n)^2 = \dfrac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
(d) $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
(e) $\dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$, para todo $n \in \mathbb{N},\ n > 1$.
(f) $2^n > 2n + 1$, para todo $n \geq 3$.

2.7.1 Ejemplos resueltos

1. Demostrar que $S_n = 1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ para cualquier número $n \in \mathbb{N}$.
Supongamos que $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ entonces:

$$S_{n+1} = S_n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) =$$
$$= (n+1)(\frac{n}{2} + 1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Con esto hemos probado que la suma de los $(n+1)$ primos enteros obedece a la misma fórmula. Vemos que pasa en S_1 : $S_1 = 1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$ luego S_1 también está dada por la misma fórmula. Concluimos que

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

es cierta por todo $n \in N$.

2. Probar que la suma de los cuadrados de los primeros números naturales es $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Esto es

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Hay que probar que si esta fórmula vale para n, entonces también vale para $n+1$, esto es:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6} = \frac{2n^3 + 9n^3 + 13n + 6}{6}$$

Pero tenemos, por la hipótesis de inducción que

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

Factorizando, obtenemos

$$(n+1)\,\frac{n(2n+1)+6n+6}{6} = \frac{2n^3 + 9n^3 + 13n + 6}{6}$$

Por otra parte $S_1 = 1 = \frac{1.2.3}{6}$ lo que prueba que la fórmula es cierta por todo n.

3. Cuando se usa el principio de inducción no basta con probar que si P_n es cierta entonces P_{n+1} también es cierta, ya que hay que probar también que P_1 es cierta, o por lo menos que P_k es cierta para algún valor de k, y en ese caso P_n será cierto para todo $n \geq k$.

Veamos un *contraejemplo:*
Si la proposición

$$P_n : 1 + 2 + 3 + - + n = \frac{1}{8}(2n+1)^2$$

fuese cierta, entonces P_{n+1} también lo sería porque,

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n+1) &= \frac{1}{8}(2n+1)^2 + (n+1) \\ &= \frac{1}{8}\left((2n+1)^2 + 8n + 8\right) = \frac{1}{8}\left(4n^2 + 12n + 9\right) \\ &= \frac{1}{8}(2(n+1)+1)^2 \end{aligned}$$

Pero la proposición P_n no es cierta para ningún n.

Otros sistemas de números (lectura requerida)

La ecuación $a + x = b$ o $a.x = b$ (con $a \neq 0$): no siempre tiene solución en $\mathbb{N}$ pero si la tiene, ella es única. ¿Será posible ampliar el conjunto de los números naturales, de manera que la ecuación en cuestión tenga siempre una solución única? En otras palabras, tratamos de ampliar el conjunto de los números de manera que en el nuevo conjunto puedan definirse operaciónes $+$ y, ., tales que:

1. al aplicar estas operaciones a los números que ya teníamos, el resultado es el mismo que, antes;
2. tengan las propiedades básicas que tenían entre los «viejos números»; y
3. la ecuación en cuestión, tenga siempre una solución única en el nuevo conjunto de números.

La respuesta es afirmativa en ambos casos. Consideraremos primero la ecuación $a + x = b$ y obtendremos los llamados números enteros. A partir de éstos, considerando la ecuación: $a.x = b \quad (a \neq 0)$,: obtendremos los números racionales (o fracciones) en el próximo capítulo. En ambos casos podrá comprobarse que la extensión satisface las tres propiedades arriba deseadas.

2.8 Los números enteros

Desearíamos que la ecuación $m + \Box = n$ con $m, n \in \mathbb{N}$ tuviera siempre una solución Esto no es cierto si sólo disponemos de los números naturales; en particular la ecuación $m + \Box = 0$ sólo tiene solución cuando $m = 0$. Para que ecuaciones de este tipo tengan siempre (que tendrá que ser única por las propiedades básicas de la suma que queremos conservar) introduciremos nuevos «números» que representaremos colocando una rayita, delante de cada números natural distinto de cero; obtenemos así,

$$-1,\ -2,\ -3,\ -4,\ -5,\ -6,\ -7,\ \ldots$$

(-0 no es necesario, por cuanto la ecuación $0 + \Box = 0$ ya tiene solución en $\mathbb{N}$). El simbolo -m (« menos m ») con $m \in \mathbb{N}$, representará la única solución de la ecuación $m + \Box = 0$; esto es, el único número que sumado con m da cero.

De esta manera se obtiene un nuevo conjunto

$$\mathbb{Z} = \{\ldots,\ -103,\ \ldots,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 204,\ \ldots\}$$

cuyos elementos llamaremos números enteros; los nuevos números, $-1,\ -2,\ -3, \ldots$, se llaman **enteros negativos**, y los naturales no nulos, se llaman **enteros positivos**.

Para poder llamar números a estos entes, es necesario poder definir operaciones $+$ y . entre ellos, de manera que se conserven las propiedades básicas que tienen dichas operaciones en $\mathbb{N}$. El querer que esas propiedades se conserven, impide que las operaciones puedan definirse arbitrariamente y hace que sólo puedan definirse de una manera, como veremos a continuación. Para ver cómo han de definirse $a + b$ y $a.b$, si $a; b \in \mathbb{Z}$, supondremos que las operaciones ya están definidas y que las propiedades básicas se han conservado.

Veamos primero cómo ha de definirse $a + b$; consideremos los tres casos posibles:

1. Si $a, b \in \mathbb{N}$: entonces ya sabemos que debe ser $a + b$.

2. Si $a = -m$, $b = -n$ con $m, n \in \mathbb{N}$: entonces a y b satisfacen

   $$m + a = 0 \text{ y } n + b = 0 \text{ y, por tanto } (m + a) + (n + b) = 0 + 0 = 0;$$

   aplicando la asociatividad y conmutatividad de la suma, se obtiene $(m + n) + (a + b) = 0$; es decir, $a + b$ debe ser solución de la ecuación $(m + n) + \square = 0$, lo cual implica

   $$a + b = -(m + n)$$

3. Si $a \in \mathbb{N}$ y $b = -n$ con $n \in \mathbb{N}$: entonces b satisface $n + b = 0$ y debemos considerar los dos casos posibles, $n \leq a$ y $a \leq n$

   (a) si $n \leq a$, entonces $a - n$ es un número natural, el único que satisface $n + (a - n) = a$. Como

   $$a + (b + n) = a + (n + b) = a + 0 = a,$$

   se tiene

   $$n + (a + b) = a$$

   es decir, $a + b$ también satisface la ecuación $n + x = a$ esto implica

   $$a + b = a - n$$

   (b) si $a \leq n$, entonces $n - a$ es un número natural, el único que satisface $a + (n - a) = n$; de esto y n + b = 0, se obtiene

   $$(a + (n - a)) + b = 0, \quad \text{o} \quad (n - a) + (a + b) = 0$$

   lo cual nos dice que $a + b$ debe ser la solución de la ecuación $(n - a) + \square = 0$; esto implica,

   $$a + b = -(n - a)$$

Vemos así, que en todos los casos posibles, $a + b$ sólo puede definirse de una manera, que es precisamente la que aprendimos en el bachillerato.

Veamos ahora cómo ha de definirse $a.b$; consideremos los tres casos posibles:

1. $a, b \in \mathbb{N}$ entonces ya sabemos que debe ser $a.b$
2. $a \in \mathbb{N}$ y $b = -n$ con $n \in \mathbb{N}$ entonces b satisface $n + b = 0$ y, por tanto, $a.(n + b) = 0$ o, por la distributividad, $a.n + a.b = 0$ es decir, $a.b$ tiene que ser la solución de la ecuación $a.n + \square = 0$ lo cual implica,

   $$a.b = -(a.n)$$

   En otras palabras, «el producto del número positivo a por el número negativo $-n$, es el número negativo $-(a.n)$».

3. Si $a = -m,\ b = -n$, con $m, n \in \mathbb{N}$: entonces

   $$m + a = 0 \text{ y } n + b = 0$$

   y, por tanto,

   $$(m + a)b = 0, \text{ o } m.b + a.b = 0;$$

   y, como $m.b = -(m.n)$ por el caso anterior, obtenemos

   $$-(m.n) + a.b = 0, \quad \text{o} \quad (a.b) + (-(m.n)) = 0$$

   pero, por definición $m.n + (-(m.n)) = 0$, luego,

   $$m.n + (-(m.n)') = a.b + (-(m.n))$$

   lo cual implica (ley de cancelación),

   $$a.b = m.n$$

   Es decir, «el producto del número negativo $-m$ por el número negativo $-n$ es el número positivo $m.n$.

Vemos así que el producto de dos números enteros sólo puede definirse de una manera, que es la que aprendimos en bachillerato.

Hemos verificado la unicidad de las operaciones, pero ¿SERá POSIBLE DEFINIRLAS? En otras palabras, ¿si las definimos tal como vimos que habría que definirlas, se tendrán las tres propiedades a que aludimos en la sección anterior?

La respuesta es afirmativa. Definamos $a + b = b + a$ y $a.b = b.a$ según la discusión anterior; entonces, cualesquiera que sean los enteros a, b y c, se tiene

1. $a + b = b + a$
2. $a + (b + c) = (a + b) + c$
3. $a + 0 = a$
4. existe $a' \in \mathbb{Z}$ tal que $a + a' = 0$
5. $a.b = b.a$
6. $a.(b.c) = (a.b).c$
7. $a.1 = a$
8. Si $a.b = a.c$ y $a \neq 0$, entonces $b = c$
9. $a.(b + c) = a.b + a.c$

No probaremos todas estas propiedades, cosa un poco tediosa (por los diferentes casos a considerar). Las propiedades (1) y (5) se tienen por definición; las demás las dejaremos como ejercicios.

2.8.1 Valor absoluto

Si a es un entero, uno de los números a y $-a$ es natural; lo llamaremos **valor absoluto** de a y lo denotaremos por $|a|$. así,

$$|3| = 3;\ |0| = 0;\ |-5| = 5;$$

y

$$|a| = |-a| = \begin{cases} a & \text{si } a \text{ es no-negativo} \\ -a & \text{si } a \text{ es negativo} \end{cases}$$

2.8.2 Orden

Entre los enteros se puede definir una relación de orden $\leq$ así:

«$a \leq b$ si $b + (-a) = b - a$ es no-negativo»

Esta relación tiene propiedades análogas a las que tiene entre los números naturales; no las estudiaremos en este momento, sino que lo haremos en el capítulo siguiente al estudiar el orden entre los números racionales.

2.9 Ejercicios

1. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$. ¿De qué otra manera puede escribirse $-(a + b)$? Explique su respuesta.
2. Elimine los paréntesis en las expresiones siguientes:

   (a) $3 - (4 - (3 - 5) + (4 - 3))$

   (b) $a - (3a - (-2a + b) + (b - a))$

   (c) $a - (3b + 3(-a)(4b - 5))$

   (d) $(a + b)(a\ - ab + b^2)$

3. Demuestre las propiedades (2) a (9) de la página 27.

4. Resuelva en $\mathbb{Z}$ el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x+y &= 24 \\ x-y &= 38 \end{cases}.$$

5. Hallar todas las soluciones enteras x, y, z tal que $|x| \leq 7$, $|y| \leq 7$ y $|z| \leq 7$ para el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x+y+z &= 0 \\ x+2y+3z &= 10 \end{cases}$$

6. Halle el valor absoluto de los números:

$$-3,\ -\sqrt{4},\ -0,\ 8,\ -a,\ a^2,\ \ a^3,\ a^n$$

7. Escriba en forma desarrollada

$$\sum_{p=-2}^{1}(p^2-4p) \qquad ; \qquad \sum_{k=-2}^{1}(p_{k+2}^2-4p)$$

8. Demuestre que para todo entero ≥ -2 se tiene

(2.4) $$2a^3+3a^2+a+6 \geq 0$$

Sug.: se demuestra que la propiedad se cumple para -2 y que si se cumple para b también se cumple para $b+1$; de esos dos hechos se deduce que (2.4) es cierta para $a \geq -2$. ¿Es válido este razonamiento? ¿Por qué?

9. Enuncie alguna propiedad parecida al principio de inducción para los números enteros.

10. Demuestre que cualesquiera que sean los enteros x, y, se tiene

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

11. Halle todos los números enteros x para los cuales:

(a) $|x| = 8$

(b) $|-2x| = -2x$

(c) $|x-1| = 3$

(d) $|x|+3 = 2|x|$

(e) $|x|+3 = |2x|$

Apéndice del capítulo (lecturas sugeridas)

2.10 Teorema Fundamental de la Aritmética

Definición: *Dados $n, d \in \mathbb{Z}$, diremos que d es un* **divisor** *de n o que n es un* **múltiplo** *de d (y escribiremos $d|n$), si existe $c \in \mathbb{Z}$ tal que $n = c.d$.*

Definición: *Un entero $n > 1$, es* **primo** *si los únicos divisores positivos de n son 1 y n. Si $n > 1$ no es primo, entonces se dice que n es* **compuesto**.

Teorema 1 *Si $n > 1$ es un entero entonces n es primo o n es un producto de primos.*

Prueba: *Usaremos inducción sobre n.*

- *Si $n = 2$ el teorema es cierto pues 2 es primo.*
- *(***Hipótesis inductiva***) Supongamos que si $1 < n < k+1$ entonces n es primo o n es un producto de primos. (Nótese la diferencia en la hipótesis respecto a lo dicho en la sección de inducción).*
- *Sea $n = k + 1$. Si $k + 1$ no es primo, existen enteros c y d con $n = c.d$ y $1 < c, d < k + 1$. Por hipótesis inductiva, como $c > 1$ y $d > 1$ son enteros menores que $k + 1$, cada uno es primo o es producto de primos, por lo tanto $k + 1$ es un producto de primos.*

$\square$

Teorema 2 *Si a y b son enteros entonces admiten un divisor común d de la forma:*

$$d = ax + by$$

donde x e y son enteros. Además, cada divisor común de a y b divide a d.

Observación: *El divisor d del teorema anterior puede encontrarse en $\mathbb{N}$ y se llamará el máximo común divisor de a y b.*

Prueba:

1. *Supongamos $a \geq 0$ y $b \geq 0$. Usaremos inducción sobre $n = a + b$.*
   - *Si $n = 0$ entonces $a = b = 0$ y podemos tomar $d = 0$ con $x = y = 0$.*
   - *(***Hipótesis inductiva***) Supongamos que si $n = a + b$ con $0 \leq n < k + 1$ entonces a y b admiten un divisor común d de la forma:*

     $$d = ax + by$$

     donde x e y son enteros. Además, cada divisor común de a y b divide a d.
   - *Probemos para $n = k + 1$, es decir, $a + b = k + 1$. (Por simetría podemos suponer $a \geq b$)*

   - *Si* $b = 0$ *entonces* $d = a$, $x = 1$ *y* $y = 0$.
   - *Si* $b \geq 1$, *entonces* $(a - b) + b = (a + b) - b < k + 1$. *Por hipótesis inductiva,* $a - b$ *y* b *admiten un divisor común* d *de la forma:*

     $$d = (a - b)x + by$$

     donde x *e* y *son enteros. Este entero* d *divide también a* $(a - b) + b = a$, *luego* d *es un divisor común de* a *y* b *con* $d = ax + (y - x)b$. *Además, si un entero es un divisor común de* a *y de* b, *también divide a* $ax + (y - x)b = d$.

2. *Si* a, b *o ambos son negativos, basta aplicar el razonamiento anterior a* $|a|$ *y* $|b|$.

□

Definición: *Diremos que* $d > 0$ *es el* **el máximo común divisor** *de* a *y* b, *si* d *divide a* a, *divide a* b *y, además, cada divisor común de* a *y* b *divide a* d.

Denotaremos por (a, b) al máximo común divisor no negativo de a y de b. El Teorema (2 en la página 29) indica que si $d = (a, b)$, entonces

$$d = ax + by$$

con x e y enteros.

Teorema 3 *(***Lema de Euclides***) Si* $a|b.c$ *y* $(a, b) = 1$ *entonces* $a|c$.

Prueba: *Como* $(a, b) = 1$, *podemos escribir*

$$1 = ax + by.$$

Multiplicando ambos miembros de esta igualdad por c, *obtemos:*

$$c = acx + bcy.$$

Pero $a|acx$ *y, por hipótesis,* $a|bcy$, *entonces* $a|c$. □

Teorema 4 *Si* p *es un número primo y* $p|a.b$ *entonces* $p|a$ *o* $p|b$.

Prueba: *Supongamos que* $p|a.b$ *y que* p *no divide a* a. *Sea* $(a, p) = d$, *entonces* $d|p$ *y, por lo tanto,* $d = 1$ *o* $d = p$. *Tenemos que* $d|a$ *y que* p *no divide a* a *entonces* $d \neq p$ *y, por lo tanto,* $d = 1$. *Por el Lema de Euclides, como* $p|a.b$ *y* $(a, p) = 1$ *entonces* $p|b$. □

Daremos a continuación una generalización del Teorema anterior.

Teorema 5 *Si* p *es un número primo y* $p|a_1.a_2...a_m$ *entonces existe* i, $1 \leq i \leq m$, *tal que* $p|a_i$.

La prueba de este resultado (por inducción sobre el número m de factores) se deja al lector.

Teorema 6 *(***Teorema Fundamental de la Aritmética***) Todo entero* $n > 1$ *se puede expresar como producto de factores primos. Si se prescinde del orden de los factores, la representación es única.*

Prueba: *El Teorema (1 en la página 29) dice que todo entero* $n > 1$ *se puede expresar como producto de factores primos. Falta probar que si se prescinde del orden de los factores, la representación es única. Para esto, usaremos inducción sobre* n.

- *Si* $n = 2$ *el teorema es cierto pues* 2 *es primo.*
- *(***Hipótesis inductiva***) Supongamos que si* $1 < n < k + 1$ *entonces* n *tiene una representación única como producto de primos (si se prescinde del orden de los factores).*

- *Sea $n = k+1$. Si $k+1$ es primo, no hay nada que demostrar. Supongamos entonces que $k+1$ es compuesto y que admite dos descomposiciones en factores primos:*

  $$k+1 = p_1p_2...p_s = q_1q_2...q_t.$$

  Probaremos que $s = t$ y que cada p es igual a algún q. Como $p_1|q_1q_2...q_t$, entonces p_1 divide por lo menos a uno de los factores. Cambiando los índices de las q, si es necesario, podemos suponer que $p_1|q_1$. Como p_1, q_1 son primos, esto implica que $p_1 = q_1$. Por lo tanto:

  $$\frac{k+1}{p_1} = p_2...p_s = q_2...q_t.$$

  Como $k+1$ es compuesto, $1 < \dfrac{k+1}{p_1} < k+1$; luego, por Hipótesis inductiva, las dos descomposiciones de $\dfrac{k+1}{p_1}$ son iguales, si se prescinde del orden. Esto termina la demostración.

$\square$

2.11 El Algoritmo de Euclides.

Teorema 7 *(**Algoritmo de Euclides o Algoritmo de la División**) Para todo par de enteros a y b con $b > 0$, existen enteros q y r tales que:*

$$a = bq + r; \qquad 0 \leq r < b.$$

Prueba: *Sea*

$$S = \{a - bx \ | \ x \text{ es entero y } a - bx \geq 0\}.$$

Veamos que el conjunto S es no vacío.

- *Si $a \geq 0$ entonces al sustituir $x = -a$ en la expresión $a - bx$ obtenemos que $a - bx = a - b.(-a) = a + ab \geq 0$. Por lo tanto, si $x = -a$ entonces $a - bx \in S$, es decir, S es no vacío.*
- *Si $a < 0$ entonces al sustituir $x = a$ en la expresión $a - bx$ obtenemos que $a - bx = a - b.a = a - ba = a(1-b) \geq 0$, pues $a < 0$ y $1 - b \leq 0$. Por lo tanto, si $x = a$ entonces $a - bx \in S$, es decir, S es no vacío.*

Como S es un conjunto de enteros no negativos entonces S tiene un elemento mínimo. Sea r el menor entero contenido en S. Como r está en S existe un entero $x = q$ tal que $r = a - bx = a - bq$. Es decir, $a = bq + r$. Falta probar que $0 \leq r < b$. Como r está en S sabemos que $r \geq 0$. Supongamos, por absurdo, que $r \geq b$ entonces $a - b(q+1) = a - bq - b = r - b \geq 0$, es decir $a - b(q+1) \in S$. Pero, $a - b(q+1) = r - b < r$, es decir, r no es el menor entero contenido en S. Esto es una contradicción, por lo tanto $0 \leq r < b$. $\square$

Capítulo 3

Los números racionales y los números reales

3.1 Los números racionales

Hasta ahora hemos trabajado con los números naturales $\mathbb{N}$ y los números enteros $\mathbb{Z}$. En esta sección nos proponemos dar una descripción de lo que se entiende por *número racional*.

Como es sabido, la ecuación $mx = n, m \neq 0$, con m y n números enteros (coprimos) dados, no siempre posee una solución x en los enteros. Consideremos, por ejemplo, la ecuación muy sencilla $2x = 1$. Nace entonces la necesidad de construir otro conjunto de números, que contenga a los números enteros y donde cualquiera de las ecuaciones de la forma $mx = n, m \neq 0$, con m y n enteros, tenga siempre solución.

Consideremos para tal fin el conjunto $\mathcal{P}$ de los «pares ordenados» de números enteros

$$\mathcal{P} = \{(n, m) : n, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0\}.$$

Diremos que un par $(n, m) \in \mathcal{P}$ es *irreducible* si y sólo si n y m son coprimos, es decir, no poseen divisores comunes. Diremos que dos pares $(n_1, m_1), (n_2, m_2)$ son *equivalentes*, y escribiremos $(n_1, m_1) \equiv (n_2, m_2)$, si y sólo si $n_1 \cdot m_2 = m_1 \cdot n_2$. Por ejemplo, $(1, 2)$ es irreducible y $(1, 2) \equiv (2, 4)$.

La relación $\equiv$ es reflexiva, simétrica y transitiva, en el sentido que precisamos a continuación:

(i) Reflexividad: $(n, m) \equiv (n, m)$, para todo par $(n, m) \in \mathcal{P}$;

(ii) Simetría: $(n_1, m_1) \equiv (n_2, m_2)$ si y sólo si $(n_2, m_2) \equiv (n_1, m_1)$, para cualesquiera $(n_1, m_1), (n_2, m_2) \in \mathcal{P}$;

(iii) Transitividad:
si $(n_1, m_1) \equiv (n_2, m_2)$ y $(n_2, m_2) \equiv (n_3, m_3)$ entonces $(n_1, m_1) \equiv (n_3, m_3)$, entendiéndose que $(n_1, m_1), (n_2, n_2), (n_3, m_3) \in \mathcal{P}$.

Un número **racional**, que indicaremos por $\frac{p}{q}$, donde p, q son números enteros y $q \neq 0$, es el *conjunto*

$$\frac{p}{q} = \{(n, m) \in \mathcal{P} : (n, m) \equiv (p, q)\}. \tag{3.1}$$

Obtenemos que

$$\frac{p}{q} = \frac{p_1}{q_1} \text{ si y sólo si } (p, q) \equiv (p_1, q_1),$$

es decir, los *conjuntos* $\frac{p}{q}, \frac{p_1}{q_1}$ son iguales si y sólo si los *pares* $(p, q), (p_1, q_1) \in \mathcal{P}$ son equivalentes. Esto se debe al hecho que $\equiv$ es una relación reflexiva, simétrica y transitiva. Es así como podemos definir sin ambigüedad el número racional $\frac{p}{q}$ como el conjunto 3.1 .

Si $\frac{p}{q}$ es un número racional, llamamos **numerador** al entero p y llamamos **denominador** al entero $q \neq 0$. Está claro que el numerador y el denominador dependen del par ordenado que se use para representar al número racional.

Es natural elegir como notación para un número racional $\frac{p}{q}$ aquel elemento del conjunto 3.1 en la página 33 para el cual los enteros de la fracción (el numerador y el denominador) son coprimos y el denominador es positivo. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} = \{(1,2),(-1,-2),(2,4),(-2,-4),(3,6),\cdots\} \text{ y} \\ &-\frac{1}{2} = \frac{-1}{2} = \{(-1,2),(1,-2),(-2,4),(2,-4),(-3,6),(3,-6),\cdots\}. \end{aligned}$$

El conjunto formado por todos los números racionales lo indicaremos por el símbolo $\mathbb{Q}$.

Notemos que el conjunto de los enteros $\mathbb{Z}$ está contenido en $\mathbb{Q}$ ($\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$) puesto que todo número entero n será identificado con el conjunto

$$\frac{n}{1} = \{(n,1),(2n,2),(-2n,-2),(3n,3),(-3n,-3),\cdots\}.$$

Las operaciones de suma y producto de números enteros se extienden de modo natural a los racionales: para realizar la suma o el producto de dos números racionales $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, tomamos cualquier fracción representante de los números racionales a ser sumados o multiplicados, por ejemplo, las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{b}{d}$, respectivamente, aplicamos las reglas

$$\begin{aligned} &\frac{a}{b} + \frac{b}{d} = \frac{ad+bc}{bd}, \\ &\frac{a}{b}\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \end{aligned}$$

y consideramos como resultados aquellos números racionales que estas fracciones resultantes representan. Estas reglas son las definiciones para las operaciones de suma y producto en $\mathbb{Q}$. Puede demostrarse (hágalo) que no dependen de la fracción (o par ordenado) que se tome para representar los números racionales. Las definiciones pueden justificarse desde un punto de vista geométrico al expresar las fracciones con un común denominador para sumar cantidades escritas en las mismas unidades.

> **Observación:** *Con las definiciones anteriores, cualquier ecuación de la forma $mx = n, m \neq 0$, con m y n enteros, tiene como solución el número racional $\frac{n}{m}$.*

Estas operaciones son *cerradas* en $\mathbb{Q}$, es decir, la **suma y el producto de dos números racionales son nuevamente números racionales**.

En $\mathbb{Z}$ está dado un orden, a saber, si $n, m \in \mathbb{Z}, n < m$ significa que $m - n > 0$. Podemos definir un orden en $\mathbb{Q}$ a partir del orden en $\mathbb{Z}$ de la manera siguiente: decimos que un número racional $r = \frac{p}{q}$ es *positivo*, y escribimos $r > 0$, si y sólo si se satisface una de las siguientes propiedades para los enteros p, q:

(i) p, q son ambos positivos, i.e., $p > 0$ y $q > 0$

(ii) $-p, -q$ son ambos positivos, i.e., $-p > 0$ y $-q > 0$.

Dados dos números racionales r y s, decimos que r es *menor que* s, y escribimos $r < s$, si y sólo si $s - r > 0$.

Observe entonces que, al calcular $r - s$, con $r = \frac{a}{b}$ y $s = \frac{c}{d}$, tenemos que

$r < s$ si y sólo si $abd^2 < cdb^2$.(¡Verifíquelo!)

Si asumimos sin embargo que $b,\ d > 0$ entonces $r < s$ si y sólo si $ad < cb$.

Por otra parte, decimos que $r \leq s$ si y sólo si $r < s$ o $r = s$. La relación $\leq$ es una *relación de orden*. A continuación presentamos algunas propiedades necesarias para operar con esta relación.

3.1.1 Propiedades de las desigualdades

(i) si $r \leq s$ y $t \in \mathbb{Q}$, entonces $r + t \leq s + t$;

(ii) si $r \leq s$ y $t \leq u$, entonces $r + t \leq s + u$;

(iii) si $r \leq s$ y $t > 0$, entonces $r.t \leq s.t$;

(iv) si $0 < r \leq s$, entonces $\frac{1}{s} \leq \frac{1}{r}$;

(v) si $r \leq s$ y $t < 0$, entonces $r.t \geq s.t$

($r \geq s$ significa que $s \leq r$).

3.1.2 El valor absoluto

A partir de la noción de orden en $\mathbb{Q}$ definimos *el valor absoluto* de un número racional r, que denotamos por $|r|$, como

$$|r| = \begin{cases} r & \text{si } r \geq 0 \\ -r & \text{si } r < 0 \end{cases}$$

Es claro que $|r| = 0$ si y sólo si $r = 0$; además, $|r| \geq 0$ y $|r| = |-r|$, para todo $r \in \mathbb{Q}$. También:

(i) si $r \geq 0$, entonces $|s| \leq r$ si y sólo si $-r \leq s \leq r$;

(ii) si $r \geq 0$, entonces $|s| \geq r$ si y sólo si $s \geq r$ o $s \leq -r$;

(iii) $-|r| \leq r \leq |r|$;

(iv) $|r \cdot s| = |r| \cdot |s|$;

(v) $|r + s| \leq |r| + |s|$ (*desigualdad triangular*).

3.2 Los números reales

En esta sección introduciremos otro conjunto de números, llamado conjunto de los *números reales* que denotaremos con el símbolo $\mathbb{R}$. El conjunto $\mathbb{R}$ contiene a los número racionales $\mathbb{Q}$. Llamaremos $\mathbb{I}$ al complemento de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ el cual será un conjunto «grande» respecto $\mathbb{Q}$ (cuando se comparan apropiadamente) y será llamado el conjunto de los números «irracionales».

Los número reales surgen del deseo de representar «cantidades» que no tienen representación adecuada dentro de $\mathbb{Q}$. Como veremos, hay ecuaciones que no admiten soluciones en $\mathbb{Q}$ así como hay objetos geométricos simples que no se pueden medir exactamente usando sólo fracciones.

Empecemos, examinanado la ecuación cuadrática,

$$x^2 = 2.$$

Esta simple ecuación no posee soluciones en los números racionales. La demostración de esta afirmación no es difícil de obtener y la damos a continuación.

Prueba: *La demostración que proponemos es* por reducción al absurdo. *Queremos probar que la ecuación $x^2 = 2$ no tiene solución en los números racionales. Suponemos,* por el contrario*, que sí tiene solución racional y ello nos conducirá a un resultado* absurdo *o* contradictorio.

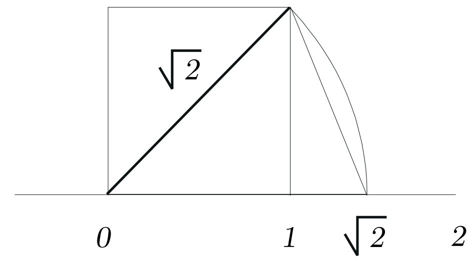
Sea pues $\frac{p}{q}$ un número racional tal que $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$. Podemos elegir p y q coprimos de manera que $\frac{p}{q}$ sea fracción irreducible. Aplicando las reglas para operar en $\mathbb{Q}$, tenemos que

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \text{ si y sólo si } p^2 = 2q^2.$$

Esto indica que 2 divide a p^2. Luego, por ser 2 un número primo, se tiene que 2 divide a p. Es decir, $p = 2n$, para algún entero n. Entonces la ecuación $p^2 = 2q^2$ toma la forma $4n^2 = 2q^2$, de donde resulta $q^2 = 2n^2$. Esto dice que 2 divide a q^2 y, por un razonamiento similar al ya aplicado a p, se obtiene que 2 divide a q. En consecuencia, 2 es divisor común de p y q, lo cual contradice que p y q sean coprimos.
$\square$

> **Observación:** *La idea en la prueba anterior y el teorema de factorización única de los naturales (como producto de números primos) permiten comprobar que la raiz cuadrada de un número natural o es un número natural o no existe entre los racionales.*

Por otro lado la solución de la ecuación $x^2 = 2$ se realiza geométricamente, por el Teorema de Pitágoras, como la longitud de la diagonal del cuadrado de lado igual a 1 (figura 3.1 en la página 36).



La diagonal del cuadrado de lado igual a 1

Figura 3.1

3.2.1 La idea es «aproximar» los irracionales con racionales

Consideremos los números racionales $r_1 = \frac{14}{10}$ y $s_1 = \frac{15}{10}$. Tenemos que la solución x de la ecuación $x^2 = 2$ verifica

$$r_1 < x < s_1, \text{ puesto que } \left(\frac{14}{10}\right)^2 < 2 < \left(\frac{15}{10}\right)^2.$$

Observamos que la diferencia entre las aproximaciones racionales r_1 y s_1 es

$$\frac{15}{10} - \frac{14}{10} = 0{,}1 = \frac{1}{10}.$$

Es decir, al aproximar x por $\frac{14}{10}$ o por $\frac{15}{10}$ se comete un error de a lo sumo un décimo.

Como segunda aproximación de x podemos tomar $r_2 = \frac{141}{100}$ y $s_2 = \frac{142}{100}$. En este caso el error cometido es a lo más $\frac{1}{100}$.

Así sucesivamente, podemos seguir tomando aproximaciones racionales r_n y s_n para x de manera que

$$r_n < x < s_n,$$

con r_n creciendo, s_n decreciendo y tal que las diferencias $s_n - r_n$ se van haciendo cada vez más pequeñas.

Esta idea de elegir r_n y s_n cada vez más cercanos entre sí a medida que n crece y, por tanto, más cercanos al valor de x a medida que n crece, no es otra que la idea intuitiva de sucesión (convergente). Usted puede leer algo de este tema en la sección 3.4 en la página 41 .

Los números irracionales se «conocían» desde la antigüedad, pero una construcción formal de los números reales no se conoció sino hasta el siglo diecinueve.

3.3 Axiomas de los Números Reales (Propiedades Básicas)

En este curso de cálculo no presentaremos una construcción de los números reales sino que, hablaremos de un conjunto de axiomas que caracterizan completamente a $\mathbb{R}$.

El sistema de los números reales $\mathbb{R}$ es un conjunto con dos operaciones básicas, adición $(+)$ y multiplicación $(.)$, y una relación de orden «menor que» $(<)$, que satisfacen los axiomas presentados en esta sección.

Axiomas relacionados con la suma

- **Axioma S1.** si $x, y \in \mathbb{R}$ entonces $x + y \in \mathbb{R}$. **(Cerradura de la suma)**
- **Axioma S2.** Si $x, y \in \mathbb{R}$ entonces $x + y = y + x$. **(Ley Conmutativa de la suma)**
- **Axioma S3.** Si $x, y, z \in \mathbb{R}$ entonces $(x + y) + z = x + (y + z)$. **(Ley Asociativa de la suma)**

- **Axioma S4.** Existe un único elemento, que denotaremos por 0, tal que para todo $x \in \mathbb{R}$, $x+0=x$. **(Elemento neutro único para la suma)**
- **Axioma S5.** Para cada $x \in \mathbb{R}$ existe un elemento, que denotaremos por $-x$, tal que $x+(-x)=0$. **(Existencia y unicidad del opuesto para la suma)**

Axioma relacionandos el producto

- **Axioma P1.** si $x, y \in \mathbb{R}$ entonces $x\,y \in \mathbb{R}$. **(Cerradura del producto)**
- **Axioma P2.** Si $x, y \in \mathbb{R}$ entonces $xy = yx$. **(Ley Conmutativa del producto)**
- **Axioma P3.** Si $x, y, z \in \mathbb{R}$ entonces $(xy)z = x(yz)$. **(Ley Asociativa del producto)**
- **Axioma P4.** Existe un único elemento, que denotaremos por 1, tal que $1 \neq 0$ y para todo $x \in \mathbb{R}$, $x1 = x$. **(Elemento neutro único para el producto)**
- **Axioma P5.** Para cada $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, existe un único elemento, que denotaremos por x^{-1}, tal que $xx^{-1} = 1$. **(Existencia y unicidad del opuesto para el producto)**

Axioma relacionando el producto y la suma

- **Axioma D.** Si $x, y, z \in \mathbb{R}$ entonces $x(y+z)+z = xy + xz$. **(Ley Distributiva del producto en la suma)**

Propiedades de la Relación de Orden $<$

- **Axioma O1.** Si $x, y \in \mathbb{R}$ entonces se verifica una y sólo una de las siguientes relaciones: $x < y$ o $y < x$ o $x = y$. **(Ley de tricotomía)**
- **Axioma O2.** Si $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$ e $y < z$ entonces $x < z$. **(Ley Transitividad)**
- **Axioma O3.** Si $x, y, z \in \mathbb{R}$ y $x < y$ entonces $x + z < y + z$. **(Ley de monotonía para la suma)**
- **Axioma O4.** Si $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x < y$ y $0 < z$ entonces $xz < yz$. **(Ley de monotonía para el producto)**

Axioma de Completitud

- **Axioma C.** Si $S \subset \mathbb{R}$ es un conjunto no vacío acotado superiormente entonces existe un elemento $s \in \mathbb{R}$ tal que $s = \sup S$.

Este último axioma requiere algunas definiciones que ahora presentamos:

3.3.1 Supremo e Infimo de un Conjunto

Definición: *Sea S un conjunto de números reales. Si existe un número real M tal que $x \leq M$ para todo $x \in S$, diremos que M es una* **cota superior** *de S y que S está* **acotado superiormente**.

Definición: *Sea S un conjunto de números reales. Si existe un número real m tal que $m \leq x$ para todo $x \in S$, diremos que m es una* **cota inferior** *de S y que S está* **acotado inferiormente**.

Ejemplos

1. $-\frac{15}{10}$, 0, 2 y 3 son cotas inferiores del conjunto $S = \{3, 5, 7\}$.
2. 7, 10 y $\sqrt{101}$ son cotas superiores del conjunto $S = \{x \in \mathbb{R} \ : \ 2 < x < 7\}$.

Definición: *Sea S un conjunto de números reales acotado superiormente. Un número real s es el* **supremo** *de S ($s = \sup S$) si verifica las dos propiedades siguientes:*

- *s es una cota superior de S.*
- *Si $M \in \mathbb{R}$ y M es una cota superior de S entonces $s \leq M$.*

Definición: *Sea S un conjunto de números reales acotado inferiormente. Un número real i es el* **ínfimo** *de S ($i = \inf S$) si verifica las dos propiedades siguientes:*

- *i es una cota inferior de S.*
- *Si $m \in \mathbb{R}$ y m es una cota inferior de S entonces $m \leq i$.*

Ejemplos

1. La cota inferior 3 es el ínfimo del conjunto $S = \{3, 5, 7\}$.
2. La cota superior 7 es el supremo del conjunto $S = \{x \in \mathbb{R} \,:\, 2 < x < 7\}$.

3.3.2 Intervalos en $\mathbb{R}$

En el Cálculo y el Análisis, los conjuntos más frecuentemente usados son los **intervalos** de números reales.

Dados dos números reales a y b tales que $a \leq b$, se pueden definir cuatro **intervalos con extremos** a **y** b de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
(a,b) &= \{x \in \mathbb{R} \,:\, a < x < b\}\\
[a,b] &= \{x \in \mathbb{R} \,:\, a \leq x \leq b\}\\
[a,b) &= \{x \in \mathbb{R} \,:\, a \leq x < b\}\\
(a,b] &= \{x \in \mathbb{R} \,:\, a < x \leq b\}
\end{aligned}$$

El primero se llama **intervalo abierto de extremos** a **y** b y el segundo **intervalo cerrado de extremos** a **y** b. Los últimos dos tipos de intervalos no son ni abiertos ni cerrados. Si $a = b$ entonces $(a,a) = [a,a) = (a,a] = \emptyset$, pero $[a,a] = \{a\}$.

Otro tipo de intervalos son los **intervalos no acotados** que definiremos a continuación:

$$\begin{aligned}
(a,\infty) &= \{x \in \mathbb{R} \,:\, a < x\}\\
[a,\infty) &= \{x \in \mathbb{R} \,:\, a \leq x\}\\
(-\infty,b) &= \{x \in \mathbb{R} \,:\, x < b\}\\
(-\infty,b] &= \{x \in \mathbb{R} \,:\, x \leq b\}\\
(-\infty,\infty) &= \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Observación: *Puede probarse que los intervalos (antes descritos) son los únicos subconjuntos I de $\mathbb{R}$ que satisfacen la siguiente propiedad:*
Si $x, z \in I$ y si $y \in \mathbb{R}$ satisface $x < y < z$ entonces $y \in I$.

3.3.3 El Valor Absoluto

Decimos que un número real x es *positivo* si $0 < x$ es decir si $x > 0$. Si $x < 0$ decimos que x es *negativo*. Observe (pruebe) que $-x$ es positivo si $x < 0$.

Definimos

$$\text{valor absoluto de } x,\quad |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0\\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases},$$

entendiéndose que $x \geq 0$ significa que $x > 0$ o $x = 0$.

3.4 Ejercicios

1. Sean $a,\ b,\ c$ y d son números reales arbitrarios. Usando los axiomas (del sistema de los números reales), demostrar que

   (a) $-(-a) = a$.

   (b) Si $ab = ac$ y $a \neq 0$, entonces $b = c$.

   (c) Si $a = b$ y $c = d$, entonces $a + c = b + d$.

   (d) $(a - b) + b = a$.

   (e) Si $a + b = c$, entonces $b = (-a) + c$.

   (f) Si $a > 0$, entonces $\dfrac{1}{a} > 0$

   (g) Si $a < b$, entonces $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$ (Para $a > 0$ y $b > 0$).

   (h) Si $a > 0,\ b > 0$ y $a < b$, entonces $a^2 < b^2$.

2. Dados los siguientes conjuntos hallar, si existen, máximos mínimos, supremos e ínfimos:

   $A = \{x \mid x < 1 \text{ y } x > 3\}$ $\quad B = \{x \mid x < 2 \text{ y } x > -1\}$

   $C = \{x \mid x < 1 \text{ y } x \geq 2\}$ $\quad D = \{x \mid -5 \leq x \leq 5\}$

   $S = \{x \mid x = 1 - \frac{1}{n},\ \text{para } n = 1,\ 2, \ldots\}$

3. Hallar la fracción correspondiente a los siguientes números racionales:

   (a) $x = 0,497497\ldots$ (b) $x = 2315,9603547547547547\ldots$

4. Hallar un número racional y un número irracional que esté entre los números:
   $x = 0,13597896$ y $y = 0,13597897$

5. Hallar dos números irracionales cuya suma sea un número racional.

6. Hallar la cota superior mínima y la cota inferior máxima (si existen) de los siguientes conjuntos. Decidir también qué conjuntos tienen máximo y mínimo (es decir, decidir cuando la cota superior mínima y la cota inferior máxima pertenecen al conjunto).

   (a) $\left\{\frac{1}{n} \mid\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}$.

   (b) $\left\{\frac{1}{n} \mid\ n \in \mathbb{Z} \text{ y } n \neq 0\right\}$.

   (c) $\{x \mid\ x^2 + x + 1 \geq 0\}$.

   (d) $\{x \mid\ x^2 + x - 1 < 0\}$.

   (e) $\{x \mid\ x < 0 \text{ y } x^2 + x - 1 < 0\}$.

   (f) $\left\{\frac{1}{n} + (-1)^n \mid\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}$.

   (g) $\left\{x \mid\ x = 0 \text{ o } x = \frac{1}{n} \text{ para algún } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}$

   (h) $\{x | 0 \leq x \leq \sqrt{2} \text{ y } x \text{ es racional }\}$.

Apéndice de los números reales

3.5 Suceciones de Cauchy

Definición: *Una* **sucesión** *de números racionales es una función del conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales al conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales.*

Una sucesión de números racionales es, por tanto, una función

$$r : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}.$$

En lugar de escribir $r(n)$, se suele escribir r_n para indicar el valor de la sucesión en n y, en lugar de $r : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, se suele escribir $\{r_n\}$ para indicar la sucesión misma.

Definición: *Una sucesión $\{r_n\}$ de números racionales se dice* **de Cauchy** *si y sólo si las diferencias $r_n - r_m$, para $n \neq m$, están tan cerca de 0 como se desee a partir de cierto natural N en adelante.*

En términos más precisos, $\{r_n\}$ es una sucesión de Cauchy si y sólo si dada cualquier cantidad positiva ε, por pequeña que sea, existe un número natural N suficientemente grande como para que sea

$$|r_n - r_m| < \varepsilon, \text{ para todo } n, m \geq N.$$

El número $\varepsilon > 0$ está en $\mathbb{Q}$.

Resulta que las sucesiones $\{r_n\}$ y $\{s_n\}$ antes indicadas para aproximar la solución no racional x de la ecuación $x^2 = 2$ son ambas sucesiones de Cauchy.

Parece, por tanto, que existen «objetos no racionales» que están asociados a aproximaciones mediante sucesiones de Cauchy de números racionales.

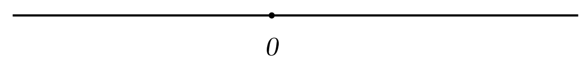
Definición: *Al conjunto de elementos que se obtienen por aproximaciones mediante sucesiones de Cauchy de números racionales se le llama conjunto de los números reales. Al conjunto de los números reales se le indica por $\mathbb{R}$.*

Dos sucesiones de Cauchy de números racionales que aproximan el mismo número real se consideran equivalentes y, en este sentido, el número real queda definido sin ambigüedad, por cuanto no depende de la sucesión de Cauchy de números racionales que lo aproxime.

El conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales está contenido en el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales ($\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$), puesto que todo racional r puede ser aproximado por la sucesión de números racionales $\{r_n\}$ dada por $r_n = r$, para todo n (la sucesión identicamente igual a r). Por otra parte, los elementos de $\mathbb{R}$ que no están en $\mathbb{Q}$ se llaman números *irracionales*. La solución x de la ecuación $x^2 = 2$ es un número irracional: el número $\sqrt{2}$.

3.6 Representación geométrica

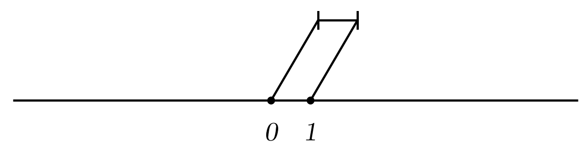
Es conveniente representar los números reales como puntos de una recta. Para ello dibujamos una recta (horizontal) y sobre ella marcamos un punto. Este punto distinguido corresponde al número 0 y lo indicamos con el número 0. Nos remitimos a la figura 3.2 en la página 42 .



El origen 0

Figura 3.2

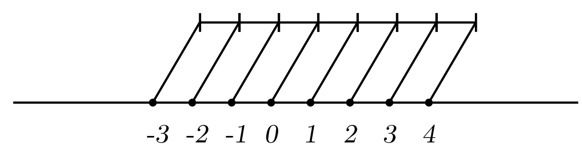
Seguidamente establecemos la *unidad* de medida, es decir, un segmento cuya longitud es igual a 1. Trasladamos el segmento sobre la recta de manera que su extremo izquierdo coincida con el 0. El otro extremo pasa a representar el número 1, como en la figura 3.3 .



La unidad 1

Figura 3.3

Trasladando el segmento a la izquierda del 0 y a la derecha del 1 vamos obteniendo puntos sobre la recta que representan los números enteros: $2, 3, 4, \cdots$, a la derecha de 1, y $-1, -2, -3, \cdots$, a la izquierda de 0. De esta manera quedan representados sobre la recta todos los números enteros, tal como se muestra en la figura 3.4 .



Trasladados de la unidad

Figura 3.4

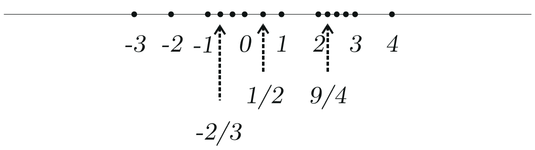
Los números racionales se representan como fracciones de segmentos unitarios. Por ejemplo, el número $\frac{1}{2}$ corresponde al punto que divide el segmento unidad de 0 a 1 en dos partes iguales; al número $\frac{9}{4}$ lo representamos dividiendo el segmento unidad de 2 a 3 en cuatro partes iguales y tomando como punto el primer punto a la derecha de 2 entre los puntos usados para realizar las divisiones (que, en términos de medida, mide $2 + \frac{1}{4}$, es decir, $\frac{9}{4}$); el número $-\frac{2}{3}$ queda representado por el segundo punto a la izquierda de 0 en que dividimos el segmento unidad de 0 a -1 en tres partes iguales (figura 3.5 en la página 43).

De esta manera a cada número racional le corresponde un punto en la recta. Quedan «huecos» en la recta que corresponden a los números irracionales. Por ejemplo, el número $\sqrt{2}$ queda representado por el punto que corresponde a trasladar con compás la diagonal del cuadrado de lado igual a 1, tal como se muestra en la figura 3.6 en la página 43 .

De esta manera a *todo* número real le corresponde un punto sobre la recta, y, recíprocamente, a *todo* punto en la recta le corresponde un número real (ya no quedan «huecos»).

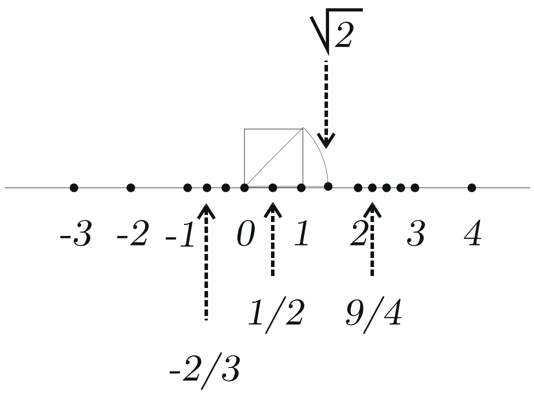
3.6.1 Representación geométrica y el valor absoluto

Valiéndonos de la representación de los números reales como puntos de una recta, podemos extender el concepto de valor absoluto del conjunto $\mathbb{Q}$ al conjunto $\mathbb{R}$. Para ello hacemos lo siguiente: decimos que un número real x es *positivo* y escribimos $x > 0$ si, en su representación como punto de la recta real, resulta que x está a la derecha de 0; decimos que x es *negativo* y escribimos $x < 0$ si x resulta



Las fracciones en $\mathbb{Q}$

Figura 3.5



El irracional raiz cuadrada de 2

Figura 3.6

representado como un punto a la izquierda de 0. Hecho esto, definimos

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases},$$

entendiéndose que $x \geq 0$ significa que $x > 0$ o $x = 0$.

Las propiedades del valor absoluto indicadas anteriormente para los números racionales valen ahora para el conjunto más grande de los números reales. En la representación de $\mathbb{R}$ como una recta, es fácil ver que $|x|$ corresponde a la longitud del segmento cuyos extremos son 0 y x y, así mismo, que $|x - y|$ corresponde a la longitud del segmento cuyos extremos son x y y.

Las operaciones de suma y producto definidas en $\mathbb{Q}$ se extienden a $\mathbb{R}$. Así mismo, la noción de orden se extiende a $\mathbb{R}$, lo que hace que el conjunto de los números reales sea un *cuerpo ordenado*. De establecer formalmente las operaciones y el orden en $\mathbb{R}$ nos ocuparemos más adelante, una vez que hallamos estudiado en detalle el desarrollo en expansión decimal de los números reales.

3.6.2 Completitud

Aquí nos ocuparemos de resaltar un aspecto importante del conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales. Precisamente, que este conjunto $\mathbb{R}$ ya no posee las «lagunas» que tenía $\mathbb{Q}$, lo que se suele indicar con la proposición «$\mathbb{R}$ es *completo*».

La formalización de este concepto nos lleva al concepto de *límite* de una sucesión convergente de números reales.

Definición:
Una **sucesión** *de números reales es una función de* $\mathbb{N}$ *en* $\mathbb{R}$.

Para denotar sucesiones y términos de sucesiones usamos la misma notación ya introducoda para el caso de sucesiones de números racionales.

La definición de sucesión de Cauchy de números reales es similar a la dada antes para sucesiones de números racionales pero ya no hace falta restringir el número ε al conjunto $\mathbb{Q}$.

Definición: *Una sucesión* $\{x_n\}$ *de números reales se dice* **convergente** *al número* x *(el* **límite** *de la sucesión), lo cual denotamos por*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x,$$

si y sólo si las diferencias $x_n - x$ *están tan cerca de* 0 *como se desee a partir de cierto número natural* N *en adelante.*

Más precisamente, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ si y sólo si dado cualquier número positivo ε, no importa cuán pequeño, existe un número natural N suficientemente grande como para que sea

$$|x_n - x| < \varepsilon \text{ para todo } n \geq N.$$

La idea de que $\mathbb{R}$ es completo está dada formalmente por el siguiente resultado.

Teorema 8 (Completitud de $\mathbb{R}$) *Toda sucesión de Cauchy de números reales converge a un número real.*

Otra manera equivalente de enunciar el concepto de completitud conlleva las nociones de conjunto no vacío de números reales acotado superiormente y de supremo de un conjunto. De estas nociones, entre las más importantes del análisis, nos ocuparemos más adelante.

Como ejemplo de sucesión convergente de números reales analicemos la sucesión $\{q^n\}$, las potencias de q, para un número real q tal que $0 < |q| < 1$. Para abordar el ejemplo requerimos el resultado que presentamos a continuación bajo la forma de ejercicio resuelto.

Ejercicio: Pruebe la desigualdad de Bernoulli: Si $x \geq -1$ y $n \in \mathbb{N}$ entonces $(1+x)^n \geq 1+nx$.
Solución: Probemos por inducción. Para $n = 1$ tenemos que $(1+x)^n \geq 1+nx$ se reduce a $(1+x) \geq 1+x$ lo cual es cierto para todo $x \in \mathbb{R}$. Ahora, para $n = k$ $(\leq k)$ suponemos que $(1+x)^k \geq 1+kx$ es cierto si $x \geq -1$. Deseamos verificar si $(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x$ es cierto para $x \geq -1$.

Sabemos que:

$$\begin{aligned}(1+x)^{k+1} &= (1+x)^k(1+x) \geq (1+kx)(1+x)\\ &= 1+x+kx+kx^2 \geq 1+x+kx = 1+(k+1)x.\end{aligned}$$

Así concluimos por inducción que la desigualdad es cierta en las condiciones dadas. Notar que en la primera desigualdad arriba se usó la tesis del ejercicio en el caso $n = k$ y el hecho que $1+x \geq 0$. También, en la ultima desigualdad de usó que $kx^2 \geq 0$.

Supongamos que $0 < q < 1$ y sea $p = \frac{1}{q}$. Entoces $p > 1$, de modo que $p = 1+x$, con $x > 0$. Aplicando la desigualdad de Bernoulli, se obtiene que $\frac{1}{q^n} = p^n = (1+x)^n \geq 1+nx$, de donde resulta

$$0 < q^n \leq \frac{1}{1+nx} < \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{n}.$$

No es díficil darse cuenta que $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$. De aquí, puesto que x es un número fijo independiente de n, se tiene que la sucesión $\{\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{n}\}$ también tiende a 0 cuando n crece a infinito . Por tanto, la sucesión $\{q^n\}$, para $0 < q < 1$, queda «atrapada» entre la sucesión $\{0\}$, cuyos términos son todos iguales a 0, y la sucesión $\{\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{n}\}$, cuyo límite es 0, y, por consiguiente, «su límite ha de ser 0».

De manera similar se demuestra que $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ en el caso que $-1 < q < 0$.

3.6.3 Series numéricas y la série geométrica

Este tema se verá con mayor énfasis en un curso posterior (para la mayoría de los estudiantes).

Para estudiar las aproximaciones racionales de un número real el método que usaremos es el desarrollo en expansión decimal de los números reales. Para ello requerimos introducir el concepto de *serie*.

Consideremos una sucesión $\{a_n\}$ de números reales, indexada para $n \geq 0$. A partir de ella podemos formar otra sucesión, llamada *sucesión de sumas parciales* o *serie numérica* de término general a_n, dada por:

$$s_0 = a_0, \quad s_1 = a_0 + a_1, \quad s_2 = a_0 + a_1 + a_2, \cdots.$$

En otras palabras, s_n es de la forma

$$s_n = \sum_{i=0}^{n} a_i,$$

donde el símbolo $\sum_{i=0}^{n}$ indica que debemos sumar los términos a_i de la sucesión desde $i = 0$ y así sucesivamente hasta $i = n$.

Por ejemplo, si $a_n = a \cdot q^n$, $a \neq 0, q \neq 1, n \geq 0$,entonces

$$s_n = \sum_{i=0}^{n} a \cdot q^i = a + a \cdot q + a \cdot q^2 + \cdots + a \cdot q^n.$$

Definición: *Decimos que la serie* $\sum_{i=0}^{n} a_i$ *tiene* **suma** *un número real* s*, y usamos la notación* $s = \sum_{i=0}^{\infty} a_i$*, si y sólo si* $\lim_{n\to\infty} s_n = s$*. En otras palabras,*

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i = s \text{ si y sólo si } \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} a_i = s.$$

La série geométrica

Recordemos la *serie geométrica* con primer término $a \neq 0$ y razón $q \neq 1$ es: $\sum_{i=0}^{\infty} a \cdot q^i$. Entonces

$$s_n = a(1 + q + q^2 + \cdots q^n) \text{ y } qs_n = a(q + q^2 + q^3 + \cdots q^{n+1}).$$

Por tanto

$$(1-q)s_n = s_n - qs_n = a(1 - q^{n+1}) \text{ de donde } s_n = a \cdot \frac{1 - q^{n+1}}{1-q}.$$

Luego, por definición,

$$\sum_{i=0}^{\infty} a \cdot q^i = \lim_{n\to\infty} a \cdot \frac{1 - q^{n+1}}{1-q}. \tag{3.2}$$

Sabemos que si $|q| < 1$ entonces $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$. En ese caso es $\lim_{n\to\infty} q^{n+1} = 0$ y, por tanto,

$$\sum_{i=0}^{\infty} a \cdot q^i = a \cdot \frac{1}{1-q}.$$

Si $|q| > 1$ la suma $\sum_{i=0}^{\infty} a \cdot q^i$, $a \neq 0, q \neq 1$, no existe.

La fórmula (3.2) se aplica también a sumas que comienzan en números M mayores que 0, puesto que

$$\sum_{i=M}^{\infty} a \cdot q^i = \sum_{i=0}^{\infty} a \cdot q^i - \sum_{i=0}^{M-1} a \cdot q^i.$$

Por ejemplo,

$$\sum_{i=2}^{\infty} 6 \cdot 10^{-i} = 6 \cdot \left[\frac{1}{1 - \frac{1}{10}} - \left(1 + \frac{1}{10}\right)\right] = 6 \cdot \left(\frac{10}{9} - \frac{11}{10}\right) = \frac{2}{30}.$$

3.7 Representación Decimal

3.7.1 Representación Decimal de los Números Naturales

Para empezar, veamos que todo número natural n se puede expresar de la forma:

$$n = d_0 + d_1 10 + d_2 10^2 + \ldots + d_N 10^N = \sum_{i=0}^{N} d_i 10^i, \tag{3.3}$$

con $d_i \in \mathbb{N}$ y $0 \leq d_i \leq 9$, para todo $i = 0,\ 1, \ldots, N$.

En efecto:

- Si $0 \leq n \leq 9$, entonces $n = d_0$ (con $d_0 = n$).
- Si $10 \leq n < 10^2$, aplicando el algoritmo de la división, $n = d_1.10 + r_1$, donde r_1 es el resto de dividir n entre 10 y por lo tanto, $0 \leq r_1 \leq 9$. Además, como $n < 10^2$, $0 \leq d_1 \leq 9$. Tomando $d_0 = r_1$, obtenemos que, en este caso, $n = d_0 + d_1 10$, con $0 \leq d_0, d_1 \leq 9$.
- Si $10^2 \leq n < 10^3$, aplicando el algoritmo de la división, $n = d_2 10^2 + r_2$, donde r_2 es el resto de dividir n entre 10^2 y por lo tanto, $0 \leq r_2 \leq 10^2$. Además, como $n < 10^3$, $0 \leq d_2 \leq 9$. Ahora:
  - Si $0 \leq r_2 \leq 9$, entonces $r_2 = d_0$ y tomando $d_1 = 0$, obtenemos que $n = d_0 + d_1 10 + d_2 10^2$, con $0 \leq d_0, d_1, d_2 \leq 9$.
  - Si $10 \leq r_2 < 10^2$, aplicando el algoritmo de la división, $r_2 = d_1 10 + r_1$, donde r_1 es el resto de dividir r_2 entre 10 y por lo tanto, $0 \leq r_1 \leq 9$. Además, como $r_2 < 10^2$, $0 \leq d_1 \leq 9$. Tomando $d_0 = r_1$, obtenemos que $r_2 = d_0 + d_1 10$ y, por lo tanto, $n = d_0 + d_1 10 + d_2 10^2$, con $0 \leq d_0, d_1, d_2 \leq 9$.
- Para todo número natural n, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $10^N \leq n < 10^{N+1}$, podemos aplicar reiteradamente el algoritmo de la división para obtener:

  $$n = d_0 + d_1 10 + d_2.10^2 + \ldots + d_N 10^N = \sum_{i=0}^{N} d_i 10^i,$$

  con $d_i \in \mathbb{N}$ y $0 \leq d_i \leq 9$, para todo $i = 0,\ 1, \ldots, N$.

Esta representación es llamada **representación decimal** (o **en base 10**) de n. Para abreviar (3.3) usualmente utilizamos la expresión:

$$n = d_N d_{N-1} \ldots d_1 d_0.$$

Ejemplo: Si $n = 7.10^2 + 0.10^1 + 3$, escribimos $n = 703$.

Si z es un entero negativo con $z = -n$, $n \in \mathbb{N}$ entonces $z = -d_N d_{N-1} \ldots d_1 d_0$, donde $d_N d_{N-1} \ldots d_1 d_0$ es la representación decimal de n.

3.7.2 Representación Decimal de los Números Racionales

Sea $s \in \mathbb{Q}$, entonces $s = \frac{m}{n}$, con $m, n \in \mathbb{Z}$ y $n \neq 0$. Usando el algoritmo de la división, es fácil ver que, además, $s = a_0 + \frac{p}{q}$ con $a_0 \in \mathbb{Z}$ y $0 < p < q$. Note que esta representación decimal es diferente a la que usamos regularmente:

Ejemplos

1. Escribimos $4 + 0{,}25$ en lugar de escribir $4{,}25$.
2. Escribimos $-6 + 0{,}25$ en lugar de $-5{,}75$.

Pero lo hacemos con el fin de dar, más adelante, una definición formal de la relación de orden en los números reales.

¿Cómo determinamos la representación decimal de un número racional de la forma $\frac{p}{q}$ con $0 < p < q$? El proceso es similar al anterior:

$$\frac{p}{q} = 0 + \frac{10p}{q}\frac{1}{10}. \tag{3.4}$$

Si dividimos $10p$ entre q obtenemos que

$$10p = a_1 q + r_1 \tag{3.5}$$

con $0 \leq a_1 < 10$ y $r_1 < q$. Sustituyendo (3.5) en (3.4) obtenemos:

$$\frac{p}{q} = 0 + a_1\frac{1}{10} + \frac{r_1}{q}\frac{1}{10}. \tag{3.6}$$

Ahora

$$\frac{p}{q} = 0 + a_1\frac{1}{10} + \frac{r_1}{q}\frac{1}{10} = 0 + a_1\frac{1}{10} + \frac{10r_1}{q}\frac{1}{10^2} \tag{3.7}$$

Si $r_1 \neq 0$ y dividimos $10r_1$ entre q obtenemos que

$$10r_1 = a_2 q + r_2 \tag{3.8}$$

con $0 \leq a_2 < 10$ y $r_2 < q$. Sustituyendo (3.8) en (3.7) obtenemos:

$$\frac{p}{q} = 0 + a_1\frac{1}{10} + a_2\frac{1}{10^2} + \frac{r_2}{q}\frac{1}{10^2}. \tag{3.9}$$

Si $r_2 \neq 0$ al multiplicar y dividir por 10 el último sumando del miembro izquierdo de la ecuación (3.9), obtenemos:

$$\frac{p}{q} = 0 + a_1\frac{1}{10} + a_2\frac{1}{10^2} + \frac{10r_2}{q}\frac{1}{10^3}. \tag{3.10}$$

Si dividimos $10r_2$ entre q obtenemos que

$$10r_2 = a_3 q + r_3 \tag{3.11}$$

con $0 \leq a_3 < 10$ y $r_3 < q$. Sustituyendo (3.11) en (3.10) obtenemos:

$$\frac{p}{q} = 0 + a_1\frac{1}{10} + a_2\frac{1}{10^2} + a_3\frac{1}{10^3} + \frac{r_3}{q}\frac{1}{10^3}. \tag{3.12}$$

Podemos repetir este proceso y obtener una sucesión de restos $r_1, r_2, r_3, \ldots$ todos positivos y menores que el divisor q hasta que ocurra una de las siguientes posibilidades:

- El proceso se detiene pues existe un número natural N tal que $r_{N+1} = 0$ y por lo tanto

  $$\frac{p}{q} = 0 + a_1\frac{1}{10} + a_2\frac{1}{10^2} + \ldots + a_N\frac{1}{10^N},$$

  donde $0 \leq a_i \leq 9$ para todo $i = 1, \ldots, N$.

- El proceso continua hasta que uno de los restos de las q primeras divisiones se repite y a partir de ahí el proceso es periódico, es decir:

  $$\begin{aligned} \frac{p}{q} &= 0 + a_1\frac{1}{10} + a_2\frac{1}{10^2} + \ldots \\ &\quad + a_r\frac{1}{10^r} + \overbrace{a_{r+1}\frac{1}{10^{r+1}} + \ldots + a_{r+t}\frac{1}{10^{r+t}}} \\ &\quad + \overbrace{a_{r+1}\frac{1}{10^{r+t+1}} + \ldots a_{r+t}\frac{1}{10^{r+2t}}} + \ldots \end{aligned}$$

Entonces si $s \in \mathbb{Q}$ y

$$s = a_0 + a_1\frac{1}{10} + a_2\frac{1}{10^2} + \ldots + a_N\frac{1}{10^N},$$

donde a_0 es número entero en base 10 y $0 \leq a_i \leq 9$ para todo $i = 1, \ldots, N$, escribiremos:

$$s = a_0 + 0, a_1 a_2 \ldots a_N.$$

para abreviar la expresión. Dicha expresión recibe el nombre de **representación decimal finita** de s.

Ejemplo:

$$126 + 7.\frac{1}{10} + 5.\frac{1}{10^2} = 126 + 0{,}75.$$

Todo número que admite representación decimal finita es un número racional. En efecto,

$$a_0 + a_1\frac{1}{10} + a_2\frac{1}{10^2} + \ldots + a_N\frac{1}{10^N} = a_0 + 0, a_1 a_2 \ldots a_N = a_0 + \frac{a_1 a_2 \ldots a_N}{10^N}.$$

Si un número racional no admite una representación decimal finita entonces:

$$\begin{aligned} s &= a_0 + a_1\frac{1}{10} + a_2\frac{1}{10^2} + \ldots \\ &\quad + a_r\frac{1}{10^r} + \overbrace{a_{r+1}\frac{1}{10^{r+1}} + \ldots a_{r+t}\frac{1}{10^{r+t}}} + \overbrace{a_{r+1}\frac{1}{10^{r+t+1}} + \ldots a_{r+t}\frac{1}{10^{r+2t}}} + \ldots \end{aligned}$$

donde a_0 es número entero en base 10 y $0 \leq a_i \leq 9$ para todo $i = 1, 2, \ldots$. En este caso escribiremos:

$$a_0 + 0, a_1 a_2 \ldots a_r \overbrace{a_{r+1} \ldots a_{r+t}}\overbrace{a_{r+1} \ldots a_{r+t}}\overbrace{a_{r+1} \ldots a_{r+t}} \ldots$$

y diremos que s admite una **representación decimal infinita periódica**, es decir, un representación decimal infinita tal que a partir de cierta posición un bloque de cifras (**período**) comienza a repetirse. Así mismo, si s es un número tal que admite una representación decimal infinita periódica, entonces s es un número racional. El procedimiento que demuestra esta última afirmación se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo: Si $r = 45{,}1563\overbrace{235}\overbrace{235}\overbrace{235}\ldots$ entonces:

$$\begin{aligned} 10^4 r &= 451.563,\overbrace{235}\overbrace{235}\overbrace{235}\ldots \\ 10^4 r &= 451.563 + 0,\overbrace{235}\overbrace{235}\overbrace{235}\ldots \\ 10^4 r &= 451.563 + \left[\frac{235}{10^3} + \frac{235}{10^6} + \frac{235}{10^9}\ldots\right] \\ 10^4 r &= 451.563 + \frac{235}{10^3}\left[1 + \frac{1}{10^3} + (\frac{1}{10^3})^2 \ldots\right], \end{aligned}$$

y la parte que está entre los corchetes es una serie geométrica cuya suma es:

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{10^3}} = \frac{10^3}{10^3 - 1}.$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} 10^4 r &= 451.563 + \frac{235}{10^3}\left[\frac{10^3}{10^3 - 1}\right] \\ 10^4 r &= 451563 + \left[\frac{235}{10^3 - 1}\right] \\ 10^4 r &= 451.563 + \frac{235}{999}, \end{aligned}$$

de donde:

$$r = \frac{451.563}{10^4} + \frac{235}{999.10^4} = \frac{451.111.672}{9.990.000}.$$

Observe que si: $r = 0,\overbrace{9}\overbrace{9}\overbrace{9}\ldots$ entonces:

$$r \quad = \quad \frac{9}{10} + \frac{9}{10^1} + \frac{9}{10^9} \ldots = \frac{9}{10}\left[1 + \frac{1}{10} + (\frac{1}{10^2}) \ldots\right],$$

de donde:

$$r = \frac{9}{10}\frac{10}{9} = 1.$$

En general, todo número racional que admite una representación decimal infinita periódica con período 9, o bien es un número entero, o bien admite también una representación decimal finita.

3.7.3 Representación Decimal de los Números Reales

Ahora, sea r un número de la forma

$$a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \frac{1}{10^i}.$$

donde a_0 es un número entero y $0 \leq a_i \leq 9$ para todo $i \geq 1$. Entonces r se expresa de la siguiente forma:

$$r = a_0 + 0, a_1 a_2 \ldots$$

Dicha expresión recibe el nombre de **representación decimal infinita** de r.

Los números que admiten una representación decimal infinita no periódica son los **números irracionales**.

Sea:

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \frac{1}{10^i}\ ; \quad (r = a_0 + x)$$

donde a_0 es un entero no negativo y $0 \leq a_i \leq 9$ para todo $i \geq 1$, un número real. Llamemos

$$s_n = a_1 \frac{1}{10} + a_2 \frac{1}{10^2} + \ldots + a_n \frac{1}{10^n}$$

Note que para $n \geq 1$:

$$s_n \leq x < s_n + \frac{1}{10^n}.$$

En efecto, como s_n es una suma parcial de la serie:

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i \frac{1}{10^i}$$

es claro que $s_n \leq x$. Ahora:

$$x \quad = \quad s_n + \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i \frac{1}{10^i} = s_n + a_{n+1}\frac{1}{10^{n+1}} + a_{n+2}\frac{1}{10^{n+2}} + a_{n+3}\frac{1}{10^{n+3}} + \ldots .$$

Como $0 \leq a_i \leq 9$ para todo $i \geq 1$,

$$x \quad \leq \quad s_n + 9\frac{1}{10^{n+1}} + 9\frac{1}{10^{n+2}} + 9\frac{1}{10^{n+3}} + \ldots = s_n + 9\frac{1}{10^{n+1}}\left[1 + \frac{1}{10^1} + \frac{1}{10^2} + \ldots\right].$$

Pero

$$1 + \frac{1}{10^1} + \frac{1}{10^2} + \ldots$$

es una serie geométrica cuya suma es:

$$\frac{1}{1-\frac{1}{10^1}} = \frac{10}{10-1} = \frac{10}{9}.$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} x &< s_n + 9.\frac{1}{10^{n+1}}\left[\frac{10}{9}\right] = s_n + \frac{9}{10^n}\left[\frac{1}{9}\right] \\ &< s_n + \frac{1}{10^n}\,. \end{aligned}$$

Lo que hemos demostrado es equivalente a:

$$x - s_n < \frac{1}{10^n}$$

donde s_n es un número racional (pues tiene representación decimal finita). Es decir, **todo número real se puede «aproximar» por una sucesión s_n de números racionales**.

3.7.4 Relación de Orden

Al conjunto de los números reales de la forma:

$$(3.13) \qquad 0, a_1a_2a_3\ldots, \qquad 0 \le a_i \le 9 \quad \text{para todo } i \ge 1,$$

lo llamaremos **intervalo de extremos 0 y 1** y lo denotaremos por $[0\ ,\ 1)$. Supondremos que (3.13) no es una expresión decimal infinita periódica de período 9, para evitar que dos números racionales tengan dos representaciones distintas.

Análogamente, si n es un número entero, al conjunto de todos los números reales de la forma:

$$(3.14) \qquad n + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \frac{1}{10^i},$$

con $0 \le a_i \le 9$ para todo $i \ge 1$, lo llamaremos **intervalo de extremos n y $n+1$** y lo denotaremos por $[n, n+1)$. Como antes, supondremos que (3.14) no es una expresión decimal infinita periódica de período 9, para evitar que dos números racionales tengan dos representaciones distintas. Es claro que $\mathbb{R}$ es la unión de todos los intervalos $[n, n+1)$.

Ejemplos

1. $\frac{15}{4} = 3 + 0{,}75 \in [3\ ,\ 4)$.
2. $-\frac{16}{3} = -6 + 0{,}666\ldots. \in [-6\ ,\ -5)$.

Si $x \in \mathbb{R}$ y $x \in [n, n+1)$, diremos que **la parte entera de x es n**.

En $\mathbb{R}$ podemos definir una relación de orden (que extiende la relación de orden definida en $\mathbb{Q}$) de la siguiente manera:

- Si la parte entera de x es diferente de la parte entera de y:

  $x > y \iff$ la parte entera de x es mayor que la parte entera de y.

- Si la parte entera de x y la parte entera de y son iguales:

  $x > y \iff$ en la primera posición en la que difieren las cifras de las partes decimales es mayor la cifra correspondiente a x.

Podemos utilizar la notación $y < x$ para indicar que $x > y$ y la notación $x \ge y$ para abreviar la afirmación: « $x > y$ o $x = y$ ». Diremos que $x \in \mathbb{R}$ es **positivo** si $x > 0$.

3.7.5 Operaciones en $\mathbb{R}$

- **Suma** Si $x, y \in \mathbb{Q}$, vienen dados por sus representaciones decimales, entonces para obtener la expresión decimal de $x + y$ utilizamos las fracciones asociadas. Por ejemplo:

$$0,\overline{6}\cdots + 0,\overline{75}\cdots = \frac{2}{3} + \frac{25}{33} = \frac{47}{33} = 1,\overline{42}\ldots$$

Ahora, si $x, y \in \mathbb{R}$ entonces $x = \sum_{i=0}^{\infty} a_i.\frac{1}{10^i}$ y $y = \sum_{i=0}^{\infty} b_i.\frac{1}{10^i}$. Sea

$$s_n = x_n + y_n = \sum_{i=0}^{n} a_i.\frac{1}{10^i} + \sum_{i=0}^{n} b_i.\frac{1}{10^i}.$$

Como $x_n, y_n \in \mathbb{Q}$ podemos utilizar el procedimiento anterior para obtener s_n. Sea $\mathcal{S} = \{s_n : n = 1, 2, 3\ldots\}$. Como el número $a_0 + b_0 + 2$ es una cota superior para $\mathcal{S}$, tiene sentido definir:

$$x + y = s,$$

donde $s \in \mathbb{R}$ es el supremo del conjunto $\mathcal{S}$.

- **Multiplicación** Sean $x = a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i.\frac{1}{10^i}$ y $y = b_0 + \sum_{i=1}^{\infty} b_i.\frac{1}{10^i}$ números reales. Sea

$$m_n = x_n.y_n = (a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i.\frac{1}{10^i}).(b_0 + \sum_{i=1}^{n} b_i.\frac{1}{10^i}).$$

Como $x_n, y_n \in \mathbb{Q}$ podemos utilizar su expresión fraccionaria para obtener m_n. Sea $\mathcal{M} = \{m_n : n = 1, 2, 3\ldots\}$. Como el número $3a_0b_0 + 1$ es una cota superior para $\mathcal{M}$, tiene sentido definir:

$$x.y = m,$$

donde $m \in \mathbb{R}$ es el supremo del conjunto $\mathcal{M}$.

Estas son las definiciones formales de la suma y de la multiplicación en $\mathbb{R}$ (no presentamos las definiciones del inverso aditivo y del inverso multiplicativo en $\mathbb{R}$, pero son similares a las anteriores). Sin embargo, en la práctica nosotros trabajamos con representaciones de números irracionales diferentes a sus expresiones decimales, por ejemplo: $\sqrt{2}$, π, etc., y operamos de acuerdo con las conocidas reglas de la aritmética. Por ejemplo:

$$(2 + 3\sqrt{2}) + (3 - \pi - \frac{\sqrt{2}}{2}) = 5 + \frac{5}{2}\sqrt{2} - \pi.$$

Capítulo 4

Inecuaciones y Valor Absoluto

4.1 Inecuaciones con una Incógnita

Ejemplos

1. ¿Para qué valores de x es $x^2 \leq 0$? Resp: sólo $x = 0$.
2. ¿Para qué valores de x es $x^2 - 1 > 0$?
   Resp: $x < 1$ ó $x > 1$, también podemos escribir esta respuesta como $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x < -1\} \cup \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 1\}$.
3. ¿Para qué valores de x es $x^2 + 1 \leq 0$? Resp: Ninguno.

En general decimos que expresiones como las anteriores, que involucran alguno de los signos $<$, $>$, $\leq$ o $\geq$, definen una *inecuación*, y queda entendido que, hay que hallar aquellos valores de x que *verifican la desigualdad* planteada.

Las inecuaciones representan conjuntos. En este capítulo queremos «resolver» inecuaciones expresando dichos conjuntos como «uniones de intervalos» y preferentemente como la **unión de la menor cantidad posible de intervalos**.

Para resolver inecuaciones hay que tener muy presente las propiedades de la relación de orden $\leq$ en $\mathbb{R}$, con respecto a las operaciones aritméticas que estudiamos antes: si $a,\ b,\ c$ son números reales

- $a \leq b \leftrightarrow a + c \leq b + c$
- $a < b \leftrightarrow a + c < b + c$

- Si $c \geq 0,\ \ a \leq b,$ entonces, $ac \leq bc$
- Si $c \leq 0,\ \ a \leq b,$ entonces, $ac \geq bc$

Ejemplo: Resolver la inecuación $\dfrac{2}{x} \leq 1$. *¡Peligro!* No hay que caer en la tentación de escribir: $\dfrac{2}{x} \leq 1 \rightarrow 2 \leq x$, luego $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 2\}$ es la solución, porque *no sabemos a priori si x es positivo o negativo*, luego no sabemos si la desigualdad va a cambiar de sentido al multiplicar por x. Una manera de resolver esta dificultad es:

$$\text{Si } x > 0 \text{entonces } \frac{2}{x} \leq 1 \rightarrow 2 \leq x.$$

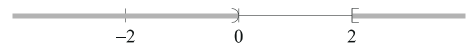
$$\text{Si } x < 0 \text{entonces } \frac{2}{x} \leq 1 \rightarrow 2 \geq x.$$

En efecto, por la cuarta propiedad arriba, y suponiendo $x < 0$, esta parte de la solución se obtiene intersectando $\{x \leq 2\}$ con $\{x < 0\}$ por lo que resulta $\{x < 0\}$.

Luego la solución completa que abarca ambos casos es

$$\{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 2\} \cup \{x \in \mathbb{R} \,|\, x < 0\},$$

es decir las dos semirectas en la figura 4.1 en la página 54 . No se considera $x = 0$, porque en ese caso $\frac{2}{x}$ no está definido.



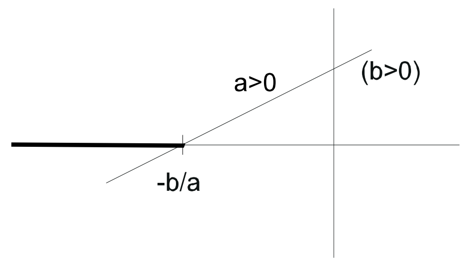
Representación de dos semirectas

Figura 4.1

Para tratar de *sistematizar* el estudio de las inecuaciones, comenzaremos por las de *primer grado en una incógnita*.

4.2 Inecuaciones lineales con una incógnita

Ejemplo: Resuelva: $ax + b \leq 0$, con $a > 0$.
La ecuación $y = ax + b$ representa una recta, y lo que se nos está pidiendo es averiguar para qué valores de x es $y \leq 0$, o ¿para qué valores de x, los puntos $ax + b$ están en el semiplano inferior?
La respuesta es (figura 4.2) $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq -\dfrac{b}{a}\}$ una semirecta en $\mathbb{R}$.

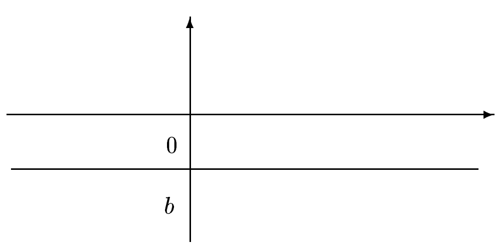


Una semirecta en $\mathbb{R}$

Figura 4.2

En el caso $ax + b \leq 0$, con $a < 0$ las consideraciones son similares, pero la respuesta es : $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq -\dfrac{b}{a}\}$ (¿por qué?). La respuesta del problema también cambia bastante si $a = 0$, ya que la inecuación es entonces $b \leq 0$ y la solución será:

- $\emptyset$ (vacío) si el número b es positivo, ya que si $b > 0$ la recta está en el semiplano superior, luego no hay solución.
- $\mathbb{R}$ si el número b es negativo o nulo ya que si $b \leq 0$, la recta $y = b$ está toda en el semiplano inferior como en la próxima figura. Luego todo número real es solución de la inecuación.



La recta $y = b$ (< 0)

Ejemplos

1. Resolver $-\sqrt{2}x+4 \leq 0$. Sol: Restando 4 en ambos miembros, tenemos $-\sqrt{2}x \leq -4$, luego dividiendo por $-\sqrt{2}$ vemos que $x \geq \dfrac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$. Por lo tanto la solución es $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 2\sqrt{2}\}$.

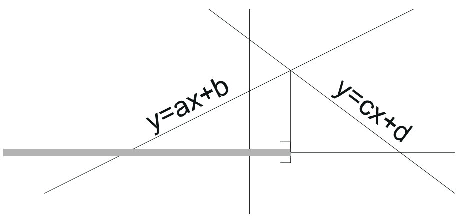
2. Resolver $\dfrac{5}{6} - 3x > 0$. Sol: Restando $\dfrac{5}{6}$ a ambos miembros: $-3x > -\dfrac{5}{6}$. Después, multiplicando por (-1) tenemos $3x < \dfrac{5}{6}$, luego $x < \dfrac{5}{18}$. Por lo tanto la solución es $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x < \dfrac{5}{18}\}$.

3. Resolver $2x+7 < 2x+1$. Sol: Restando $2x$ a ambos miembros obtenemos $7 < 1$, luego no existe solución.

Si expresamos una inecuación de primer grado de la manera siguiente:

$$ax + b \leq cx + d \; ,$$

podemos darle una interpretación geométrica al considerar las dos rectas $y = ax + b$ y $y = cx + d$. Lo que se plantea es, (figura 4.3) ¿para cuáles valores de x el gráfico de la primera recta está por debajo del gráfico de la segunda recta?



Inecuación lineal

Figura 4.3

Ejercicios

1. Halle el conjunto solución de: $3x - 2 < 8$.
2. Halle el conjunto solución de: $-2x + 4 \leq 7x + 8$.
3. Halle el conjunto solución de: $3x - 1 < 5\sqrt{2}x + \sqrt{3}$.

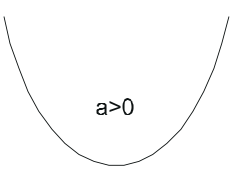
4.3 Inecuaciones de segundo grado

El problema es hallar los valores de x tales que

$$ax^2 + bx + c \leq 0, \quad (<, \; \leq, \; \geq) \quad a \neq 0$$

Como veremos más adelante, la ecuación $y = ax^2 + bx + c$ representa una parábola:

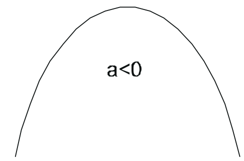
- Si $a > 0$ la parábola se abre hacia arriba, (figura 4.4).



Abre hacia arriba

Figura 4.4

- Si $a < 0$ la parábola se abre hacia abajo, (figura 4.5 en la página 56).



Abre hacia abajo

Figura 4.5

- Si $b^2 - 4ac > 0$, la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ tiene dos soluciones reales, luego la parábola corta al eje X en dos puntos.
- Si $b^2 - 4ac = 0$, la parábola es tangente al eje X.
- Si $b^2 - 4ac < 0$, la parábola no corta al eje X.

Todos los casos posibles se presentan en las figuras 4.6 en la página 57 , 4.7, 4.8, y 4.9

La inecuación $ax^2 + bx + c < 0$ tiene las soluciones obvias según el gráfico del trinomio de segundo grado. El procedimiento general es este:
— si $b^2 - 4ac < 0$, y $a > 0$, no hay solución, pero si $a < 0$, la solución es todo $\mathbb{R}$;
— si $b^2 - 4ac \geq 0$, se resuelve la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ y se factoriza el polinomio $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ donde x_1 y x_2 son las raíces del polinomio. En este caso obtenemos los gráficos posibles en las figuras 4.10 en la página 57 y 4.10:

Ejemplos

1. Resolver: $-x^2 + 3x + 4 \leq 0$. En este caso $a = -1 < 0$ y $b^2 - 4ac = 5 > 0$. Las raíces $x_1 = -1$ y $x_2 = 4$. El polinomio se factoriza: $-x^2 + 3x + 4 = -(x-1)(x-4)$ Solución: $\{x \,|\, x \leq -1\} \cup \{x \,|\, x \geq 4\}$ como en la figura 4.12 en la página 58 .
2. Resolver: $-x^2 + 3x + 4 \geq 0$. Observando la descomposición anterior o el gráfico de la parábola, la solución es $\{x \,|\, -1 \leq x \leq 4\}$.
3. Resolver: $2x^2 + 8x + 8 > 0$. $a = 2 > 0$, $b^2 - 4ac = 0$, factorizando: $x_1 = x_2 = 2 \rightarrow 2x^2 + 8x + 8 = 2(x+2)^2$. La solución es $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x \neq -2\}$ como en la figura 4.13 en la página 58 .

4.3.1 Desigualdad de Cauchy-Shwartz

Ahora presentamos una útil desigualdad en matemáticas, cuya prueba se presenta vía una aplicación de lo aprendido en esta sección.

Teorema 9 (Desigualdad de Cauchy-Shwartz) *Si $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ a_n$ y $b_1,\ b_2,\ b_3,\ \ldots\ b_n$ son números reales cualesquiera, entonces*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\, b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\ \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$$

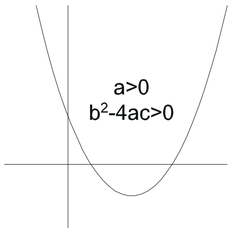
Suponiendo que alguno de los $a_k \neq 0$, la igualdad ocurre si y sólo si existe un número real x_0 tal que $a_k\, x_0 + b_k = 0$ para todo $k = 1,\ 2, \ldots, n$.

Prueba: *Consideremos la suma:*

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k\, x + b_k)^2 \geq 0 \qquad (4.1)$$

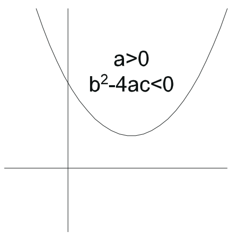
Esta es siempre positiva o nula, cualquiera que sea x, porque es una suma de cuadrados de números reales (todos ≥ 0). Desarrollando y agrupando términos obtenemos,

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k\, x + b_k)^2 = Ax^2 + 2Bx + C \geq 0$$



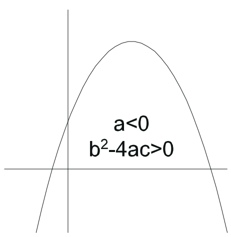
Abre hacia arriba, corta el eje X

Figura 4.6



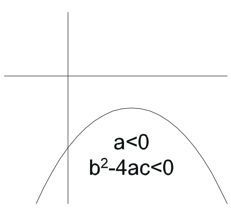
Abre hacia arriba, no corta el eje X

Figura 4.7



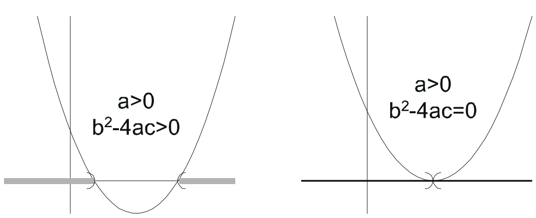
Abre hacia abajo, corta el eje X

Figura 4.8



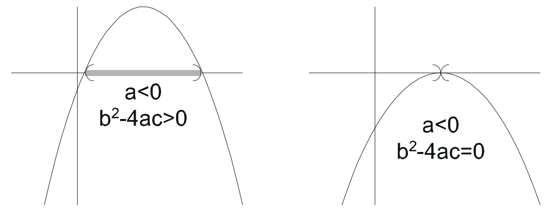
Abre hacia abajo, no corta el eje X

Figura 4.9



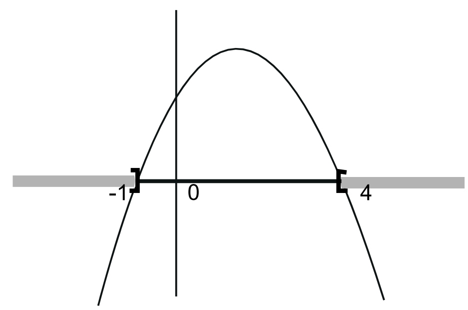
Abren hacia arriba, tocan el eje X

Figura 4.10



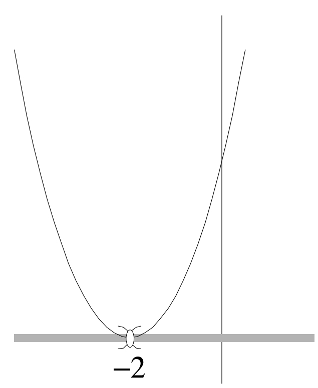
Abren hacia abajo, tocan el eje X

Figura 4.11



Solución gráfica

Figura 4.12



La recta menos un punto

Figura 4.13

Donde

$$A = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \,, \quad B = \sum_{k=1}^{n} a_k\, b_k \,, \quad C = \sum_{k=1}^{n} b_k^2$$

Como el trinomio $Ax^2 + 2Bx + C$ es siempre ≥ 0, su discriminante $B^2 - AC$ debe ser ≤ 0 (si $A \neq 0$) entonces

$$B^2 - AC = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\, b_k\right)^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\,\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) \leq 0$$

lo que prueba la desigualdad.

Si hubiese igualdad, entonces $B^2 - AC = 0$ y el trinomio tiene una solución única $x = x_0$. En consecuencia, mirando la desigualdad 4.1 en la página 56 (al inicio de esta prueba) y sustituyendo en ella $x = x_0$, se obtiene que cada sumando es cero, es decir, $a_k\, x_0 + b_k = 0$ para todo $k = 1,\, 2, \ldots, n$. $\square$

4.4 Inecuaciones racionales de primer y segundo grado

Planteamos ahora el problema de resolver inecuaciones del tipo:

$$\frac{a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_2 x^2 + b_1 x + b_0} \leq 0, \quad (<, \geq, >)$$

con $a_2 \neq 0$ o $a_1 \neq 0$ y $b_2 \neq 0$ o $b_1 \neq 0$.

Ejemplo:

$$\frac{(x-1)(x+1)}{x(x-2)} \geq 0\,.$$

Lo primero que observamos es que el polinomio $x(x-2)$, tiene como raíces 0 y 2, entonces: $x(x-2) > 0$ si $x < 0$ o $x > 2$, y $x(x-2) \leq 0$ si $0 \leq x \leq 2$.
Entonces, si $0 < x$ o $x > 2$ podemos multiplicar ambos miembros por $x(x-2) > 0$, y obtenemos $(x-1)(x+1) \geq 0$, pero $(x-1)(x+1)$ tiene raíces -1 y 1, luego $(x-1)(x+1) \geq 0$ si $x \leq -1$ o $x \geq 1$.

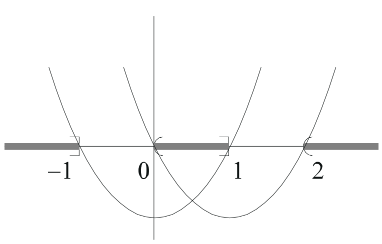
Obtenemos una primera solución escogiendo las condiciones simultáneamente que hacen $x(x-2) > 0$ y $(x-1)(x+1) \geq 0$. Esto es:

$$\{x \,|\, x \leq -1\} \cup \{x \,|\, x > 2\}.$$

Si $x(x-2) < 0$, esto es, si $0 < x < 2$, entonces debe ser $(x-1)(x+1) \leq 0$ para tener $\dfrac{(x-1)(x+1)}{x(x-2)} \geq 0$, entonces las condiciones que hacen simultáneamente $(x-1)(x+1) \leq 0$ y $x(x-2) < 0$ son: $\{x \,|\, 0 < x \leq 1\}$. Luego todas las soluciones son:

$$\{x \,|\, x \leq -1\} \cup \{x \,|\, 0 < x \leq 1\} \cup \{x \,|\, x > 2\}\,.$$

Esto es obvio si dibujamos los dos polinomios, (figura 4.14). Los intervalos donde ambos



Gráficas de los dos polinomios

Figura 4.14

polinomios tienen el mismo signo se ven claramente en el dibujo. Hay que tomar en cuenta

Conjunto solución

Figura 4.15

que $x(x-2) \neq 0$, se tiene entonces los intervalos, (figura 4.15 en la página 60) cerrado en -1, abierto en 2, abierto en 0 y cerrado en 1. La solución la escribiríamos entonces:

$$(-\infty, -1] \cup (0, 1] \cup [2, +\infty)$$

Otra manera de manejar los signos de los cuatro factores involucrados es haciendo un cuadro de variación de los signos de cada factor, como en la figura 4.16 en la página 60 .

	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,2)$	$(2,+\infty)$
x	−	−	+	+	+
x−2	−	−	−	−	+
x−1	−	−	−	+	+
x+1	−	+	+	+	+
	+	−	+	−	+

Método para hallar el conjunto solución

Figura 4.16

Todos estos procedimientos son válidos, pero insistimos que el más ilustrativo es el dibujo de las dos parábolas.

Ejemplo: Podemos resolver con este mismo método inecuaciones más complicadas: fracciones racionales de polinomios de mayor grado, siempre que podamos factorizar ambos polinomios.

$$\frac{(x-3)^7(x-2)^6(x^3+1)}{2x^3-3x^2+1} \leq 0$$

El polinomio $(x-3)^7(x-2)^6(x^3+1)$ está descompuesto en factores lineales, por lo que podemos determinar fácilmente el signo de cada uno de ellos. Hay que factorizar a $2x^3 - 3x^2+1$, es fácil notar que $x = 1$ es una raíz, luego si se divide a $2x^3 - 3x^2 + 1$ por $(x-1)$ podemos obtener las otras raíces, así: $(x-1)^2(2x+1)$. Entonces consideramos,

$$\frac{(x-3)^7(x-2)^6(x^3+1)}{(x-1)^2(2x+1)} \leq 0$$

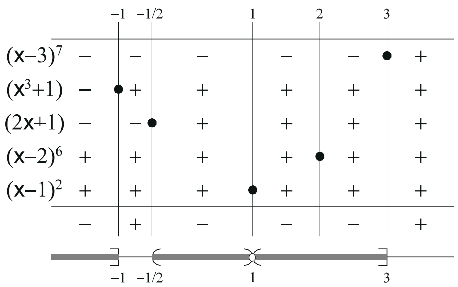
Obtenemos que $(x-2)^6$ y $(x-1)^2$ son siempre positivos, por lo que ellos no influyen en el signo de la fracción, excepto por $x = 2$ que se hace cero y por $x = 1$ donde no está definida. Por otra parte $(x-3)^7$ tiene siempre el mismo signo que $(x-3)$, ya que el exponente 7 es impar.

En este caso es mejor hacer un cuadro de signos, (figura 4.17 en la página 61).

Del cuadro se deduce la solución:

$$\{x \mid x \leq -1\} \cup \{x \mid -\frac{1}{2} < x < 1\} \cup \{x \mid 1 < x \leq 3\}$$

o bien, $(-\infty, 1] \cup (-\frac{1}{2}, 1) \cup (1, 3]$.



Cuadro de signos que dan la solución

Figura 4.17

4.5 Valor absoluto

Definición: *Si $x \in \mathbb{R}$, el valor absoluto de x, designado por $|x|$, se define como sigue:*

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Algunas propidades importantes de $|x|$ se listan a continuación.

0. $0 \leq |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
1. Si $a > 0$, la inecuación $|x| < a$ es equivalente a $-a < x < a$, es decir representa el intervalo $(-a, a)$.
   Si $a < 0$ entonces $|x| < a$ representa el conjunto vacío.
2. Para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene que $-|x| \leq x \leq |x|$, que es obvio por la definición de $|x|$.
3. **Desigualdad triangular**: si a y b son números reales, entonces

   $$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

   Prueba: *En efecto, si sumamos las dos desigualdades $-|a| \leq a \leq |a|$ y $-|b| \leq b \leq |b|$ tenemos $-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|$, lo cual es equivalente a $|a + b| \leq |a| + |b|$.* □

4. Por «iteración» por se obtiene que si $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ entonces:

   $$|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$$

   Pruébelo rigurosamente usando inducción en el número n de términos a_i en la proposición.
5. Con la desigualdad triangular podemos obtener la útil desigualdad:

   $$\forall\, a, b \in \mathbb{R}, \quad |\,|a| - |b|\,| \leq |a - b| \quad (\text{o } |a - b| \geq |\,|a| - |b|\,|).$$

   Probemos esto:

   Prueba: *basta observar, $|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b|$ (por desigualdad triangular). Igualmente $|b| = |b - a + a| \leq |a - b| + |a|$.*
   De la primera obtenemos restando $|b|$: $|a| - |b| \leq |a - b|$; de la segunda, restando $|a|$ obtenemos: $|b| - |a| \leq |a - b|$. Es decir: $|\,|a| - |b|\,| \leq |a - b|$. □

4.5.1 Interpretación geométrica de $|a - b|$

En la recta real, si el número a está representado por el punto B_a, y el número b por el punto B_b, entonces $|a - b|$ es la distancia de B_a a B_b, (figura 4.18 en la página 62). Esto se puede tomar como una definición de la distancia entre números reales. Si escribimos la desigualdad

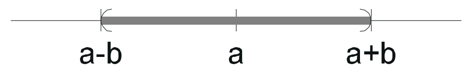
$$|x - a| < b, \quad b > 0$$

lo que estamos diciendo es que x es un punto de la recta que está a una distancia de a menor que b, (figura 4.19 en la página 62).

Para que $|x - a| < b$, se debe cumplir que $-b < x - a < b$ y sumando a, obtenemos $a - b < x < a + b$, equivalentemente $x \in (a - b, a + b)$.

Los puntos de la representación de la distancia

Figura 4.18

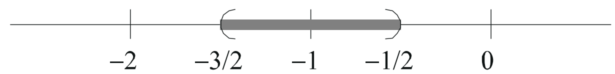


Intervalo

Figura 4.19

Ejemplos

1. $|x+1| < \frac{1}{2}$. Esto es $\frac{3}{2} < x < \frac{1}{2}$, (figura 4.20 en la página 62).



Intervalo $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$

Figura 4.20

2. $|x-4| < 2$. Esto es $2 < x < 6$, (figura 4.21 en la página 63).
3. $|x-1| < \varepsilon$. Esto es $1-\varepsilon < x < 1+\varepsilon$, (figura 4.22 en la página 63).

Ejemplo resuelto

Resolver $|x^2-2x-3| \geq x+2$.
Respuesta.

Se trata de encontrar el conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : |x^2-2x-3| \geq x+2\}$. Luego, $|x^2-2x-3| \geq x+2$ si, y sólo si, ocurre alguna de las siguientes desigualdades:

1) $x+2 \leq 0$.
2) $x+2 \geq 0$ y $x^2-2x-3 \geq x+2$.
3) $x+2 \geq 0$ y $x^2-2x-3 \leq -x-2$.

entonces, llamemos $A_1,\ A_2,\ A_3$ a los $x \in \mathbb{R}$ que cumplen (1), (2) y (3), respectivamente.

Es claro que $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$.

- $A_1 = \{x \in \mathbb{R} :\ x+2 \leq 0\} = (-\infty, -2]$
- $A_2 = \{x \in \mathbb{R} :\ x+2 \geq 0\} \cap \{x \in \mathbb{R} :\ x^2-2x-3 \geq x+2\} \Rightarrow A_2 = [-2, \infty) \cap \{x \in \mathbb{R} : x^2-3x-5 \geq 0\}$

  Hallemos las raíces de $x^2-3x-5=0$.

$$x_1 = \frac{3+\sqrt{29}}{2}, \quad x_2 = \frac{3-\sqrt{29}}{2}, \quad x_1 > x_2.$$

  entonces $x^2-3x-5 = (x-x_1)(x-x_2)$ por lo que $x^2-3x-5 \geq 0$ si, y sólo si, $(x-x_1)(x-x_2) \geq 0$, cosa que ocurre si, y sólo si

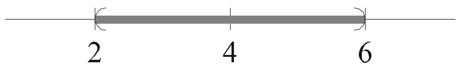
  a) $(x-x_1) \geq 0, \quad (x-x_2) \geq 0$.
  b) $(x-x_1) \leq 0, \quad (x-x_2) \leq 0$.

  Como $x_1 > x_2$ entonces esto ocurre cuando:

  a) $x \geq x_1 = \dfrac{3+\sqrt{29}}{2}$.
  b) $x \leq x_2 = \dfrac{3-\sqrt{29}}{2}$.

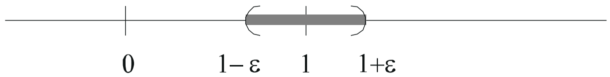
  Entonces

$$A_2 = [-2, \infty) \cap \left\{ \left(-\infty, \frac{3-\sqrt{29}}{2}\right] \cup \left[\frac{3+\sqrt{29}}{2}, \infty\right) \right\}$$



Intervalo $(2, 6)$

Figura 4.21



Intervalo $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$

Figura 4.22

$$= \left[-2, \frac{3-\sqrt{29}}{2}\right] \cup \left[\frac{3+\sqrt{29}}{2}, \infty\right).$$

- $A_3 = \{x \in \mathbb{R} : \; x+2 \geq 0\} \cap \{x \in \mathbb{R} : \; x^2 - 2x - 3 \leq -x - 2\} \Rightarrow A_3 = [-2, \infty) \cap \{x \in \mathbb{R} : x^2 - x - 1 \leq 0\}$

  Las raíces de $x^2 - x - 1 = 0$ son $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\;x_1 > x_2$.

  Entonces, $x^2 - x - 1 = (x - x_1)(x - x_2)$, por lo que $x^2 - x - 1 \leq 0$ ocurre si, y sólo si, $(x - x_1)(x - x_2) \leq 0$ que se cumple si, y sólo si, $x - x_1 \leq 0$ y $x - x_2 \geq 0$, es decir, si $x \in [x_2, x_1] = \left[\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$. Entonces

$$A_3 = [-2, \infty) \cap \left\{\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]\right\} = \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$$

Por tanto,

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \left(-\infty, \frac{3-\sqrt{29}}{2}\right] \cup \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{3+\sqrt{29}}{2}, \infty\right).$$

4.6 Ejercicios

4.7 Ejercicios adicionales

1. Resolver:

   (a) $\dfrac{2x-3}{x+2} > 0$

   (b) $\dfrac{2x+3}{3x-1} < 2$

   (c) $\dfrac{x^2-3x-10}{2x+6} > 0$

   (d) $\dfrac{x^2-4x-5}{x^2+2x-3} > 0$

   (e) $\dfrac{x^2-8x}{-x^2+5x+6} \leq 0$

   (f) $\sqrt{\dfrac{3x-9}{2x+4}} \geq 1$

   (g) $\dfrac{3}{x-9} > \dfrac{2}{x+2}$

   (h) $\left|\dfrac{x+2}{2x-3}\right| < 4$

   (i) $\left|\dfrac{6-5x}{3+x}\right| \leq \dfrac{1}{2}$

   (j) $\left|\dfrac{x^2+3x+4}{x+2}\right| < 2$

   (k) $|x^2+x-2| - |1-x| < 0$

2. En los siguientes ejercicios, halle el conjunto de todos los valores de x para los cuales se cumple la desigualdad asignada (es decir: resuelva la inecuación).

(a) $2x-3\leq 4$
(b) $3x+2\leq 3-4x$
(c) $\dfrac{2+x}{5}>1+x$
(d) $(x-1)(x+2)<0$
(e) $(1-x)(2x+3)\leq 0$
(f) $x^2-2x-3\geq 0$
(g) $x^2-x+1<0$
(h) $\dfrac{1}{x}\geq 2$
(i) $\dfrac{x+1}{x+2}\leq 2$
(j) $x(x-1)(x+1)<0$

3. Diga, justificando, para cuales valores de x se puede calcular (y es un número real) la expresión:

   (a) $\sqrt{x-1}$
   (b) $\sqrt{1-2x}$
   (c) $\sqrt{2x-3}$
   (d) $\sqrt{x^2-2x-3}$
   (e) $\sqrt[3]{x^2-4}$
   (f) $\sqrt{\dfrac{x+1}{x+2}}$

4. Diga, justificando, cuales de las siguientes igualdades son correctas y cuales no:

   (a) $|-3|=3$
   (b) $|27|=27$
   (c) $|a^2|=a$
   (d) $|-a|=a$
   (e) $|a|=a$
   (f) $\sqrt{a^2}=a$
   (g) $\sqrt{a^2}=|a|$
   (h) $\sqrt[3]{a^3}=a$
   (i) $|\sqrt{2}+\sqrt{3}-3|=\sqrt{2}+\sqrt{3}-3$

5. Resuelva las siguientes ecuaciones:

   (a) $|x-3|=x-3$
   (b) $|x-3|=4$
   (c) $|x^2-6x+8|=3$
   (d) $|x^2-6x+5|=x^2-6x+5$
   (e) $||x+1|+2|=2$
   (f) $||x-1|+2|=2$

6. Resuelva las siguientes inecuaciones:

   (a) $|x|<1$
   (b) $|x+1|\leq 3$
   (c) $|x|\geq 1$
   (d) $|x+1|>3$
   (e) $|2x-3|\leq 2$
   (f) $|1-x|<4x+1$
   (g) $\dfrac{|x-1|}{x}\leq 0$
   (h) $|34+21x-x^2|\leq -1$
   (i) $(1+x)^2\geq|1-x^2|$

Capítulo 5

Funciones

5.1 Algunas definiciones

> **Definición**: *Dados dos conjuntos X y Y, una* **función** *definida en X con valores en Y es una ley, o regla, que le asocia a cada elemento $x \in X$ un elemento y del conjunto Y, perfectamente definido y determinado por x.*
> *El elemento y determinado por x se denota $f(x)$. Se dice que f es la función y se denota $f : X \to Y$ o bien $x \mapsto f(x)$*

Para conocer una función es indispensable conocer tres cosas:

- el conjunto X, que se llama **dominio** de la función, y se denota por $\mathrm{Dom}(f)$
- el conjunto Y, que se llama **codominio** de la función
- la «ley» o regla de correspondencia f que permite encontrar el elemento $y \in Y$ cada vez que escogemos un elemento $x \in X$

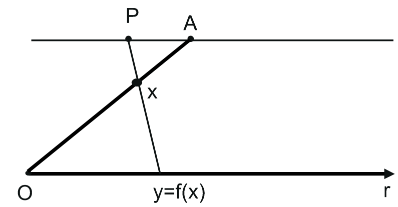
Ejemplos

1. Si X es un conjunto cualquiera y $y_0 \in Y$ es un elemento cualquiera de Y, entonces $f(x) = y_0$ es la función constante: f asocia a cada $x \in X$ el mismo elemento $y_0 \in Y$.
2. Ejemplo de función numérica: si x es un número, $f(x) = x^2 + 1$ es una regla que permite construir otro número, único, definido por x. Así al número 1 le corresponde $1^2 + 1 = 2$, al 2 le corresponde $2^2 + 1 = 5$, al número 8 le corresponde $8^2 + 1 = 65$, etc. En este caso el dominio X, es el conjunto de todos los números reales y el codominio Y también es el conjunto de todos los números reales

   Las funciones numéricas se pueden expresar por fórmulas generalmente, pero hay que tener cuidado porque las fórmulas dicen cual es la ley, o la regla, pero no especifica, ni el dominio ni el codominio.
3. La función $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$. En este caso el Dominio de f es el conjunto de todos los números distintos de 1 puesto que la división $\frac{1}{0}$, no tiene sentido. El codominio puede ser todos los números reales.
4. $g(x) = \sqrt{x}$. En este caso, el dominio de g debe ser el conjunto de todos los números positivos, si queremos que el codominio sean números reales, puesto que si x es negativo $\sqrt{x}$ daría un número complejo. La misma fórmula podría definir una función con dominio y codominio en los números complejos.

   Observación: Cuando se define una función numérica por una fórmula, hay que especificar claramente el dominio y el codominio. La misma fórmula puede dar distintas funciones o no dar ninguna función si se considera definida en diferentes conjuntos.

5. Si X es el interior del segmento $\overline{OA}$ de la figura 5.1, Y es la semirecta $\overrightarrow{Or}$ y P es un punto en la paralela a $\overrightarrow{Or}$ por el punto A. Definimos $f : X \to Y$ enviando cada punto $x \in X$ a su proyección $y = f(x)$ sobre Y desde el punto P (P está fijo y $P \neq A$).



Proyección de x desde P sobre Y

Figura 5.1

6. Es fácil describir una «regla» que no describa completamente el valor asociado a un elemento en el conjunto dominio. Dicha regla no determinará una función.
Ejemplo, en el conjunto $\mathbb{R}$ asignamos a cada $x \in \mathbb{R}$ el **elemento positivo** y **más cercano a** x. Si $x > 0$ entonces $y = x$ es el número positivo más cercano a x. Pero, por otro lado si $x \leq 0$, **no hay un elemento positivo más cercano** a x y por lo tanto la regla no asigna un valor de y.

Definición: *Si $f : X \to Y$ es una función, el conjunto $\{y \in Y \mid y = f(x) \text{ para algún } x \in X\}$ es el conjunto de todos los valores posibles de f. Este conjunto se denomina* **Imagen o Rango** *de f.*

$$\operatorname{Img}(f) = \{y \in Y \mid y = f(x) \text{ para algún } x \in X\}$$

Definición: *Si $\operatorname{Img}(f) = Y$, se dice que f es* **sobreyectiva***.*

Para cada $y \in Y$, el conjunto $\{x \in X \mid f(x) = y\}$ se llama la **preimagen** del elemento $y \in Y$ y se denota $f^{-1}(y)$, esto es

$$f^{-1}(y) = \{x \in X \mid f(x) = y\}$$

Definición: *Si para cada $y \in \operatorname{Img}(f)$, el conjunto $f^{-1}(y)$ tiene un solo elemento, la función se dice* **inyectiva***.*

Equivalentemente: f es inyectiva si y sólo si cada vez que $f(x_1) = f(x_2)$, entonces $x_1 = x_2$ (para x_1, $x_2 \in X$).

Definición: *Si la función $f : X \to Y$ es a la vez inyectiva y sobreyectiva, entonces se dice que f es* **biyectiva** *o que establece una correspondencia* **biunívoca** *entre el conjunto X y el conjunto Y.*

En conexión con la lista de ejemplos anterior tenemos:

Ejemplos

1. Si f es una función constante, entonces si X y Y tienen más de un elemento, f no es ni inyectiva ni sobreyectiva.
2. La función $f(x) = x^2 + 1$ no es inyectiva puesto que si $y_0 > 1$ existen dos valores de X para los cuales $f(x) = y_0$, son las dos soluciones de la ecuación $x^2 + 1 = y_0$, $x = \pm\sqrt{y_0 - 1}$.
Tampoco es sobreyectiva puesto que si $y_0 < 1$, no hay ningún valor de x tal que $f(x) = y_0$.
3. Ejemplos 3 y 4, no son sobreyectivas como funciones con codominio los números reales.
4. La función del ejemplo 5 es biyectiva.

5.2 Operaciones con Funciones Reales

Antes de definir operaciones con funciones es importante introducir el concepto de **igualdad de funciones**.

> **Definición:** *Sean f y g son funciones con dominios A y B respectivamente. Diremos que*
> $$f = g$$
> *si y sólo si $A = B$ y $f(x) = g(x)$, para todo $x \in A$.*

En esta sección estudiaremos sólo funciones reales (a valores reales), es decir, funciones de A en B (dominio y codominio) con $A, B \subset \mathbb{R}$.

5.2.1 Suma y Diferencia de Funciones Reales

> **Definición:** *Sean f y g son funciones reales con dominios A y B respectivamente, entonces $f + g$ es la función real con dominio $A \cap B$ y regla de correspondencia:*
> $$(f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

Esto es, el valor de $f + g$ en x es la suma del valor de f en x y del valor de g en x.

Ejemplo: Si $f(x) = 3x^2 + 4$ y $g(x) = 2x - 5$ entonces:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = 3x^2 + 4 + 2x - 5 = 3x^2 + 2x - 1.$$

Para definir diferencia de dos funciones reales, necesitamos una definición previa:

> **Definición:** *Sea f una función real con dominio A, entonces $-f$ es la función real con dominio A y regla de correspondencia:*
> $$(-f)(x) = -f(x).$$

Ejemplo: Si $f(x) = -2 + \sqrt{2x^2 - 4x + 1}$ entonces:

$$(-f)(x) = -f(x) = 2 - \sqrt{2x^2 - 4x + 1}.$$

Ahora sí podemos definir la diferencia de dos funciones reales:

> **Definición:** *Sean f y g son funciones reales con dominios A y B respectivamente, entonces $f - g$ es la función real con dominio $A \cap B$ definida por:*
> $$f - g = f + (-g).$$

Esto es equivalente a decir que el valor de $f - g$ en x es el resultado de restar al valor de f en x, el valor de g en x.

Ejemplo: Si $f(x) = 3x^2 + 4$ y $g(x) = 2x - 5$ entonces:

$$(f - g)(x) = [f + (-g)](x) = f(x) - g(x) = 3x^2 + 4 - 2x + 5 = 3x^2 - 2x + 9.$$

5.2.2 Multiplicación y Cociente de Funciones

Definición: *Sean f y g son funciones reales con dominios A y B respectivamente, entonces $f.g$ es la función real con dominio $A \cap B$ y regla de correspondencia:*
$$(f.g)(x) = f(x).g(x).$$

Esto es, el valor de $f.g$ en x es la multipicación del valor de f en x y del valor de g en x.

Ejemplo: Si $f(x) = 3x^2 + 4$ y $g(x) = 2x - 5$ entonces:
$$(f.g)(x) = f(x).g(x) = (3x^2 + 4).(2x - 5) = 6x^3 - 15x^2 + 8x - 20.$$

Para definir el cociente de dos funciones reales, necesitamos una definición previa:

Definición: *Sea f una función real con dominio A, entonces $\frac{1}{f}$ es la función real con dominio $\{x \in A : f(x) \neq 0\}$ y regla de correspondencia:*
$$\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)}.$$

Ejemplo: Si $f(x) = 2 - \sqrt{2x^2 - 4x + 4}$ entonces:
$$\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{2 - \sqrt{2x^2 - 4x + 4}}.$$
En este caso, $\mathrm{Dom}(\frac{1}{f}) = \mathbb{R} - \{0, 2\}$.

Ahora si podemos definir el cociente de dos funciones reales:

Definición: *Sean f y g son funciones reales con dominios A y B respectivamente, entonces $\dfrac{f}{g}$ es la función real con dominio*
$$A \cap \{x \in B : g(x) \neq 0\} \text{ y definida por } \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Esto es equivalente a decir que el valor de $\dfrac{f}{g}$ en x es el resultado de dividir el valor de f en x entre el valor de g en x.

Ejemplo: Si $f(x) = 3x^2 + 4$ y $g(x) = 2x - 5$ entonces:
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x^2 + 4}{2x - 5}.$$
En este caso, $\mathrm{Dom}(\dfrac{f}{g}) = \mathbb{R} - \{\dfrac{5}{2}\}$.

5.2.3 Composición de Funciones

Definición: *Sean f y g son funciones reales con dominios A y B respectivamente. La función $f \circ g$ (se lee f* **compuesta con** *g) es la función real cuyo dominio está formado por los elementos $x \in B$ tales que $g(x) \in A$ y regla de correspondencia:*
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Esto es, el valor de $f \circ g$ en x es el valor de f en $g(x)$ (siempre y cuando podamos evaluar g en x y f en $g(x)$).

Ejemplo: Sea $f(x) = 3x^2 + 4$ y $g(x) = 2x - 5$. Encuentre y $(g \circ f)(x)$.

Respuesta.

- Estudiemos primero $(f \circ g)(x)$. Como para todo elemento x del $\mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R}$ se cumple que $g(x)$ está en $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$, tenemos que el $\mathrm{Dom}(f \circ g) = \mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R}$. Luego:
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 3g(x)^2 + 4 = 3(2x - 5)^2 + 4,$$
para todo $x \in \mathbb{R}$.
- Veamos ahora que pasa con $(g \circ f)(x)$. Como para todo elemento x del $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$ se cumple que $f(x)$ está en $\mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R}$, tenemos que el $\mathrm{Dom}(g \circ f) = \mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$. Luego:
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2f(x) - 5 = 2(3x^2 + 4) - 5 = 6x^2 + 3,$$
para todo $x \in \mathbb{R}$.

El ejemplo anterior nos dice que hay casos donde $f \circ g \neq g \circ f$. Sin embargo, a continuación estudiaremos un caso particular donde $f \circ g = g \circ f$.

5.2.4 Función Inversa

Suponga que f es una función inyectiva en A, con $\mathrm{Img}(f) = B$. Como para cada elemento $y \in B$ existe un único elemento $x \in A$ tal que $f(x) = y$, podemos definir una función $g : B \to A$ de la siguiente manera:

$g(y) = x$ si y sólo si $f(x) = y$.

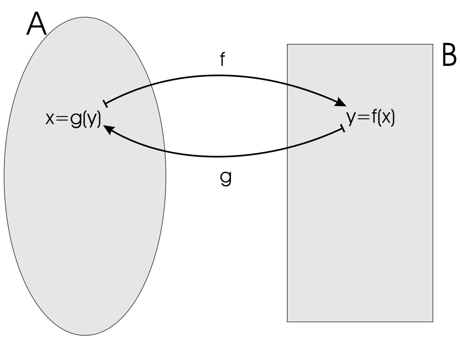


Figura 5.2

Ver figura 5.2. A la función g se le dá el nombre de **función inversa de** f y la definimos formalmente a continuación:

Definición: *Sea f una función inyectiva con dominio A e $\mathrm{Img}(f) = B$. La inversa de f (la denotaremos por f^{-1}) es una función con $\mathrm{Dom}(f^{-1})$ = B, $\mathrm{Img}(f^{-1}) = A$ y tal que :*
$$(f \circ f^{-1})(y) = y, \text{ para todo } y \in B$$
y
$$(f^{-1} \circ f)(x) = x, \text{ para todo } x \in A.$$

Dada una función inyectiva f, ¿ cómo obtener f^{-1} ?.
Una manera sencilla de hacerlo es utilizar la ecuación:

$$(f \circ f^{-1})(x) = x.$$

Ejemplo: Sea $f : \mathbb{R} - \{\frac{1}{3}\} \to \mathbb{R} - \{0\}$ definida por:

$$f(x) = \frac{1}{3x - 1}.$$

Entonces,

$$f(f^{-1}(x)) = \frac{1}{3f^{-1}(x) - 1} = x.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\frac{1}{3f^{-1}(x) - 1} &= x \Rightarrow 3f^{-1}(x) - 1 = \frac{1}{x} \Rightarrow \\ 3f^{-1}(x) &= \frac{1 + x}{x}.\end{aligned}$$

De aquí que:

$$f^{-1}(x) = \frac{1 + x}{3x}.$$

Otro método equivalente al anterior se basa en el hecho siguiente: si f es una función inyectiva y $y \in \mathrm{Img}(f)$ entonces existe un único $x \in \mathrm{Dom}(f)$ con $f(x) = y$ o, lo que es lo mismo, con $x = f^{-1}(y)$. Por lo tanto, podemos encontrar $f^{-1}(x)$ en dos pasos: primero despejando x de la ecuación $f(x) = y$, para obtener $x = f^{-1}(y)$. Luego obtenemos $y = f^{-1}(x)$ con sólo cambiar y por x. Veamos que sucede si aplicamos este método a la función del ejemplo anterior

Ejemplo: Sea $f : \mathbb{R} - \{\frac{1}{3}\} \to \mathbb{R} - \{0\}$ definida por:

$$f(x) = \frac{1}{3x - 1}.$$

Entonces,

$$y = \frac{1}{3x - 1}.$$

Por lo tanto,

$$3x - 1 = \frac{1}{y} \Rightarrow 3x = \frac{1 + y}{y}.$$

De aquí que:

$$x = \frac{1 + y}{3y}, \text{ es decir: } f^{-1}(x) = \frac{1 + x}{3x}.$$

5.3 Gráficos de funciones reales

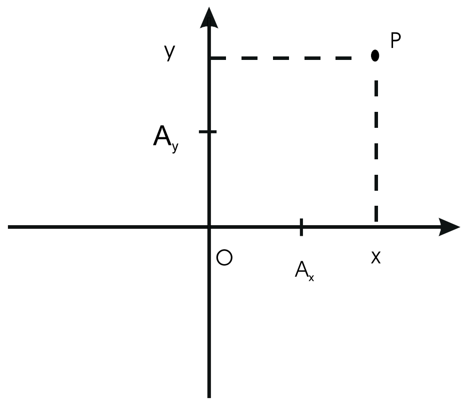
Ya definimos la *Imagen* de una función y algunos términos como *inyectiva, sobreyectiva* y *biyectiva*. Saber todo esto sobre una función es muy importante, pero una manera de visualizar todos estos conceptos al mismo tiempo es con el **gráfico** de la función.

En un plano trazamos dos rectas perpendiculares y en cada una de ellas elegimos O, el punto de corte de ambas rectas, y unidades A_x y A_y, lo que nos permite establecer una correspondencia biyectiva entre los pares de números reales y los puntos del plano. Como en la figura 5.3, al punto P correspondel par (x, y).

El número x se llama la abscisa de P y el número y se llama la ordenada de P.

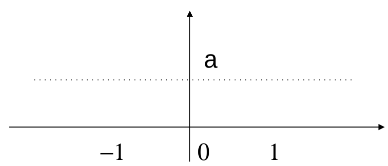
El par (x, y) se llama las coordenadas cartesianas[1] rectangulares de P.

Si tenemos una función numérica f, vamos a llamar gráfico de f al conjunto de puntos $(x, f(x))$ del plano. Estos puntos constituyen una figura en el plano que permite *ver* la función.



Las coordenadas de un punto

Figura 5.3

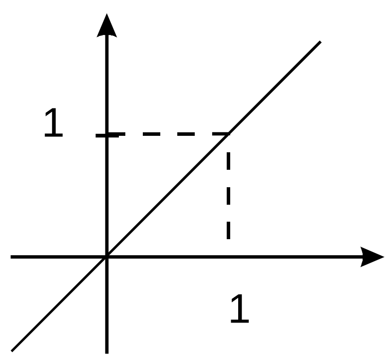


Una función constante

Figura 5.4

Ejemplos

1. La función constante $f(x) = a$, no es ni inyectiva ni sobreyectiva, su dominio es todo $\mathbb{R}$ y su imagen es el número a solamente (o el conjunto unitario $\{a\}$) como se ve en la figura 5.4.
2. La función $f(x) = x$ es biyectiva de $\mathbb{R}$ *sobre* $\mathbb{R}$ y la preimagen de cada número x es él mismo, $f^{-1}(x) = x$, (figura 5.5).



La función $f(x) = x$

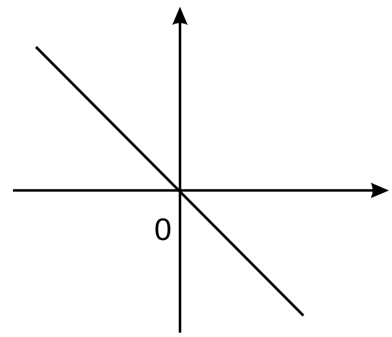
Figura 5.5

3. La función $f(x) = -x$ también es biyectiva de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}$ y la preimagen de un número x es $-x$, (figura 5.6).
4. La función parte entera de x, se define así: $[\![x]\!]$ es el mayor entero menor o igual a x.

   El gráfico está constituido por segmentos de recta en el plano. Cada segmento es cerrado a la izquierda y abierto a la derecha, (figura 5.7).

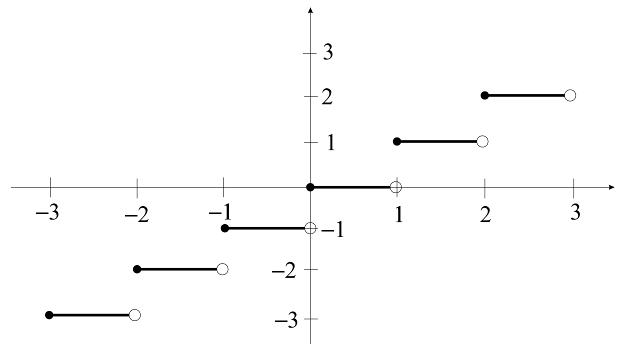
   Su dominio es todo $\mathbb{R}$, su rango también es $\mathbb{R}$ pero su imagen es $\mathbb{Z}$. Como función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ no es inyectiva ni sobreyectiva.

[1] Cartesianas por René Descartes, quién fue uno de los inventores de este método



La función $f(x) = -x$

Figura 5.6

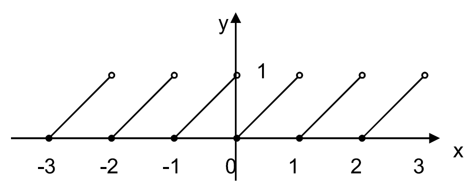


La función **parte entera** $[\![x]\!]$

Figura 5.7

Si $r \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$, la preimagen de r es $\emptyset$. Por otro lado, si $n \in \mathbb{Z}$, entonces la preimagen de n es el segmento semiabierto $[n, n+1)$.

5. La función $f(x) = \bar{x} = x - [\![x]\!]$ es la parte decimal de x, y su gráfico se ve en la figura 5.8.



La función $\bar{x} = x - [\![x]\!]$

Figura 5.8

El dominio de $\bar{x} = x - [\![x]\!]$ es todo $\mathbb{R}$ y su imagen es el intervalo $[0, 1)$, cerrado en 0 y abierto en 1 ya que la función nunca toma el valor 1.

Como función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ no es inyectiva ni sobreyectiva. La preimagen de un número $r \in [0, 1)$ es una infinidad de números: $f^{-1}(r) = \{r + n \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$.

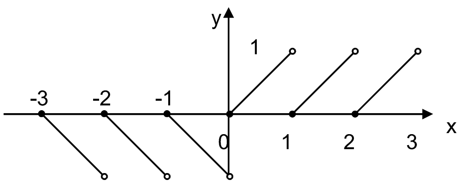
6. Definimos otra función mediante fórmulas (se dice definida a trozos):

$$g(x) = \begin{cases} x - [\![x]\!] & \text{si} \quad x \geq 0 \\ [\![x]\!] - x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Su gráfico se muestra en la figura 5.9

Tenemos entonces: $\mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R}$, $\quad \mathrm{Img}(g) = (-1, 1)$. La preimagen de un número real $r \in (-1, 1)$ es un conjunto infinito de números:

$$\begin{aligned} g^{-1}(r) = &\quad \{r + n \,|\, n \in \mathbb{N}\} \qquad \text{si } 0 \leq \text{r} < 1 \\ g^{-1}(r) = &\quad \{-n - r \,|\, n \in \mathbb{N}\} \qquad \text{si } -1 < \text{r} < 0 \end{aligned}$$



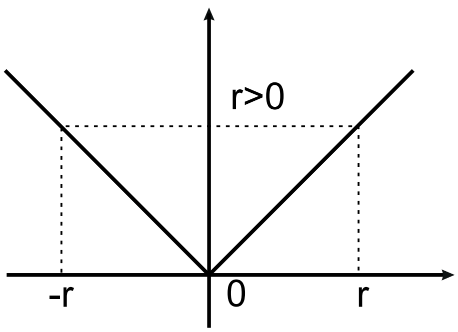
La función $g(x)$

Figura 5.9

7. Una función muy importante, y que usaremos frecuentemente, es el valor absoluto:

$$f(x) = |\,x\,| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}.$$

El dominio de f es $\mathbb{R}$, la Imagen de f es $[0, \infty)$. La preimagen de un número $r \geq 0$ es el conjunto $\{-r, r\}$ (figura 5.10).



La función $|x|$

Figura 5.10

Hasta ahora los gráficos que hemos visto, están compuestos por rectas, semirectas o segmentos. Vamos a dibujar los gráficos de funciones del tipo $f_n(x) = x^n$, primero supongamos que n es par, $n = 2p$, entonces las funciones son:

$$f_2(x) = x^2, f_4(x) = x^4, \ldots, f_{2p}(x) = x^{2p} \ldots$$

Observemos primero que para cualquier valor de x, $x^2 \geq 0$, $x^4 \geq 0, \ldots,$ $x^{2p} \geq 0, \ldots$ Entonces todos estos gráficos están en la parte superior del plano: $\{(x, y) \mid y \geq 0\}$. También observamos que $(-x)^2 = x^2, (-x)^4 = x^4, \ldots, (-x)^{2p} = x^{2p}, \ldots$ luego todos estos gráficos son simétricos respecto al eje y. Basta entonces dibujar el gráfico para valores positivos de x. Considere el intervalo $(0, 2)$ por ejemplo y divídalo en $2n$ partes iguales:

$$x_0 = 0, < x_1, < x_2 <; < \ldots < x_n = 1, < x_{n+1} < \ldots < x_{2n} = 2$$

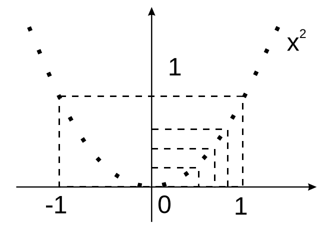
Utilizando una calculadora, calcule los valores de $x_1^2, x_2^2, ..x_{2n}^2$ y represéntelos en el plano. Obtendrá un punteado que sugiere el gráfico de $y = x^2$ como en la figura 5.11.

Hacer lo mismo con x^4, x^6, etc. Obtenemos una colección de punteados que sugieren gráficos como en la figura 5.12.

La curva que dibuja el primer gráfico de $f_2(x) = x^2$ se llama una parábola, vemos que todas las demás curvas se parecen a la parábola: todas pasan por los puntos $(1, 1)$ y $(-1, 1)$, y todas tienen mínimo valor en 0, todas son crecientes para $x > 0$ y decrecientes para $x < 0$.

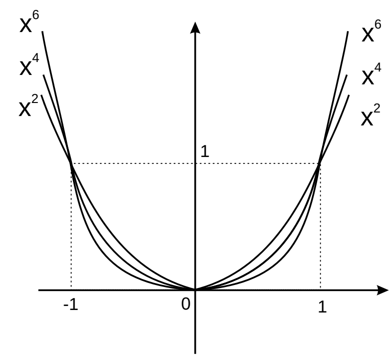
Si $p > k$, para valores de $x > 1$ los valores de x^{2p} son mayores que los de x^{2k} y para valores $0 < x < 1$ los valores de x^{2p} son menores que los de x^{2k}. A medida que aumenta el exponente, la curva «se pega más» al rectángulo, (figura 5.12).

Ninguna de estas funciones es inyectiva. Para cada valor de y, con $y > 0$ hay dos valores de x en la preimagen, $f(x) = f(-x) = y$ o bien, la preimagen de y_0, $y_0 > 0$ consta de dos puntos $\{x_0, -x_0\}$.



La función x^2

Figura 5.11



Las funciones $x^2,\ x^4,\ x^6$

Figura 5.12

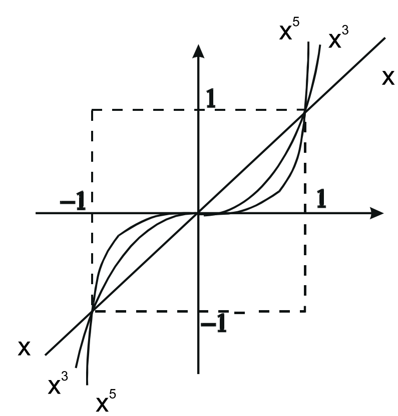
La imagen de cada función $f_n(x)$ son los reales no negativos Imagen $f_n = \{r \in \mathbb{R} \mid r \geq 0\}$.
Consideremos ahora las potencias impares

$$f_1(x) = x, f_3(x) = x^3, \ldots, f_{2k-1} = x^{2k-1} \ldots$$

Haciendo un estudio como el anterior, tenemos que cada f toma todos los valores reales, los gráficos no son simétricos respecto al eje y pero son simétricas respecto al origen 0:

$$f(-x) = -f(x)$$

Procediendo como antes, obtenemos sus gráficos usando una calculadora, (figura 5.13).

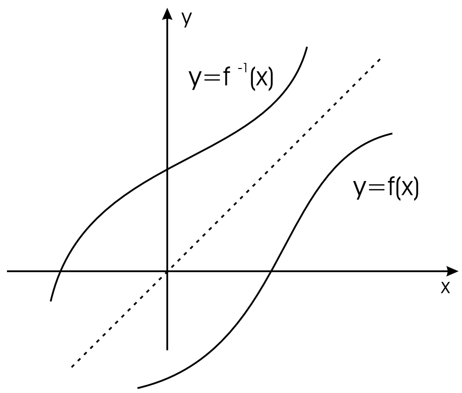


Las funciones $x;\ x^3\ \ y\ x^5$

Figura 5.13

Observemos que a medida que el exponente aumenta, los valores de $f(x)$ crecen si $x > 1$, o decrecen si $x < -1$. Entre -1 y 1, los valores «tienden a pegarse al rectángulo», (figura 5.13).

5.3.1 Gráfico de la función inversa

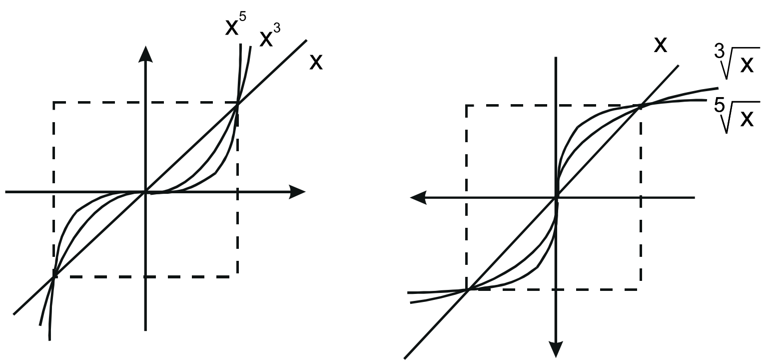


f^{-1} se obtiene reflejando el gráfico de f respecto a la recta $y = x$

Figura 5.14

El gráfico de la función f^{-1} se obtiene en forma sencilla a partir del gráfico de la función f (f inyectiva) pues (a, b) es un punto del gráfico de f si y sólo si (b, a) es un punto del gráfico de f^{-1} (ya que $f(a) = b$ si y sólo si $f^{-1}(b) = a$). Como los puntos (a, b) y (b, a) son simétricos con respecto a la recta $y = x$, el gráfico de f^{-1} se obtiene reflejando el gráfico de f con respecto a la recta $y = x$. Ver figura 5.14.

Ejemplo: Si $n = 2p + 1$ (n impar) la función $f(x) = x^{2p+1}$ es una biyección de $\mathbb{R}$ sobre



Simetría de las funciones x^{2p+1} y la raíz $2p+1$ de x

Figura 5.15

$\mathbb{R}$, por lo cual siempre tiene inversa, tales como: x, $\sqrt[3]{x}$, $\sqrt[5]{x}$, ... Sus gráficos se obtienen del gráfico de x^{2p+1} por simetría respecto a la diagonal principal, (figura 5.15).

5.3.2 Gráficos de funciones relacionadas

Es conveniente aprovechar todos los recursos geométricos posibles al momento de graficar una función, por ejemplo relacionándola con otro gráfico conocido. Aquí mostraremos algunos ejemplos importantes:

Traslaciones

Conocido el gráfico de una función $f(x)$ y dado un número $a \in \mathbb{R}$ notaremos que la función compuesta $g(x) = f(x - a)$ (compuesta de $f(x)$ con $x - a$) tiene un gráfico parecido al de f. El gráfico de g aparece corrido o trasladado a lo largo del eje x respecto a el gráfico de f. En efecto si $a > 0$, el gráfico de g se obtiene trasladando el gráfico de f hacia la derecha a unidades. Similarmente si $a < 0$, el gráfico de g se obtiene trasladando el gráfico de f hacia la izquierda a unidades.

Lo anterior se desprende del hecho que si $(b, f(b))$ es un punto cualquiera del gráfico de f, entonces el punto $(b+a, f(b)) = (b+a, g(b+a))$ es un punto del gráfico de g. Esta simple observación puede ser muy útil al resolver problemas así como puede ayudar a manejar mejor la geometría de las funciones.

Reflexiones

Dada una función $f(x)$, la función $g(x) = f(-x)$ tiene su gráfico dado por la reflexión del gráfico de f con respecto al eje y (eje $x = 0$), pues para cada punto $(b, f(b))$ del gráfico de f entonces el punto $(-b, f(b)) = (-b, g(-b))$ está en el gráfico de g.

Pensando en esta observación y la del apartado anterior para las traslaciones, podemos apreciar que el gráfico de $f(a-x) = f(-(x-a)) = f(\frac{a}{2} + (+\frac{a}{2} - x))$, se obtiene reflejando el gráfico de f con respecto al eje $x = \frac{a}{2}$ (paralelo al eje y).

Homotecias o escalamientos

Dada una función $f(x)$, y $a > 0$ la función $g(x) = f(ax)$ tiene su gráfico dado por la contracción o expansión horizontal del gráfico de f.

Por ejemplo si $a = 3$, la función $g(x) = f(3x)$ tiene su gráfico dado por la contracción horizontal del gráfico de f por un factor de 3 (dividir por 3). En efecto si tomamos el punto $(b, f(b))$ del gráfico de f entonces el punto $(\dfrac{b}{3}, f(b)) = (\dfrac{b}{3}, g(\dfrac{b}{3}))$ está en el gráfico de g, y el cual se obtiene del punto $(b, f(b))$ reduciendo la magnitud de la primera coordenada b a la tercera parte $\dfrac{b}{3}$ (mientras la segunda coordenada queda fija).

Casos similares ocurren para otros valores de $a > 0$, pero si $0 < a < 1$ entonces habrá un estiramiento de la gráfica de f. Analice usted mismo esa situación. Por otro lado ¿qué pasa cuando $a < 0$?

Combinaciones

Lo dicho en los apartados anteriores puede combinarse para ayudarnos en el bosquejo de gráfico de funciones, pero también para entender aspectos geométricos de las gráficas.

Dada una función $f(x)$, $b \in \mathbb{R}$, y $a > 0$, la función $g(x) = f(b + ax)$ tiene su gráfico dado por la contracción o expansión horizontal (factor a) del gráfico de f despues de haber sido trasladado b unidades.

En efecto, si consideramos $h(x) = f(b+x)$ obtenemos primero una traslación del gráfico de f, que depende del signo de b (a la derecha si $b < 0$).

Para terminar $g(x) = h(ax)$ y se debe hacer un reescalamiento horizontal en la gráfica anterior.

Algo similar sucede si $a < 0$, pero habrá una reflexión envuelta en el proceso de obtener la gráfica de g a partir de la gráfica de f.

Ejemplo: Para la función $g(x) = [\![2 - 3x]\!]$ obtenemos su gráfico del gráfico de $[\![x]\!]$ procediendo como sigue. Escribimos h en la forma,

$$h(x) = [\![2 + x]\!]$$

Por lo tanto pensamos en una traslación horizontal del gráfico de $[\![x]\!]$ de dos unidades a la izquierda.

Finalmente, $g(x) = h(-3x)$ y debemos hacer una contracción horizontal (factor 3) y una reflexión horizontal (factor -1) de la gráfica inmediata anterior.

Otras observaciones acerca de gráficos

Otros casos se presentan con frecuencia como $g(x) = a + f(x)$ y $g(x) = a\,f(x)$. Estos casos son sencillos de analizar y se producen traslaciones verticales de los gráficos en el caso de la suma así como estiramientos, encogimientos y reflexiones verticales en el caso del producto por una constante $a \neq 0$.

Analice usted algunos ejemplos y vea como todo esto le puede ayudar mucho al bosquejar gráficos a partir de gráficos conocidos como en los ejercicios que siguen.

5.4 Ejercicios

1. Para cada una de las funciones cuyas gráficas se ven en las figuras (5.16), (5.17), (5.18), (5.19),

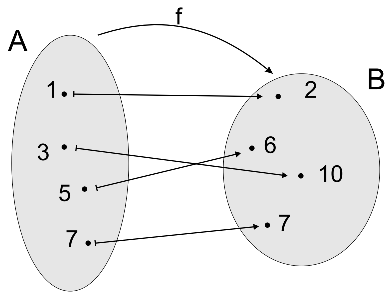


Figura 5.16

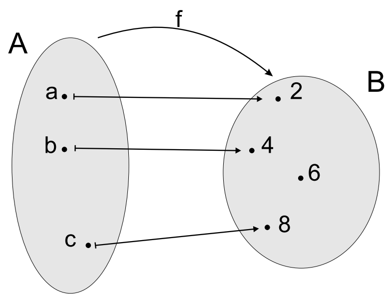


Figura 5.17

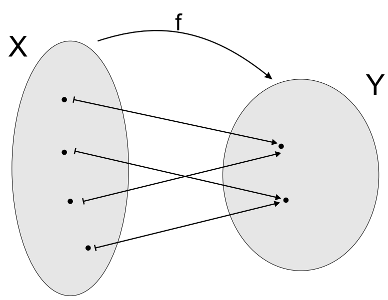


Figura 5.18

hallar su dominio e imagen, y determine si son inyectivas, sobreyectivas o biyectivas:

2. Para cada una de las funciones hallar su dominio e imagen, y determine si son inyectivas, sobreyectivas o biyectivas:
   (a) $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\},\ B = \{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$ y $f : A \longrightarrow B$ está definida por $f(x) = x + 1$.
   (b) $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ y $B = \{3,\ 5\},\ f : A \longrightarrow B$ está definida por:
   $$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si} \quad x < 3 \\ 5 & \text{si} \quad x \geq 3 \end{cases}$$
   (c) X es el conjunto de los números reales y $f : X \longrightarrow X$ está dada por:

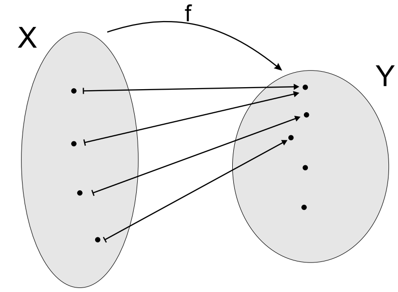


Figura 5.19

i. $f(x) = x^2$

ii. $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$

iii. $f(x) = 4$

iv. $f(x) = \sqrt{2}$

3. Sea f la función dada en la figura (5.20): Si $H = \{1,\ 2,\ 3\}$:

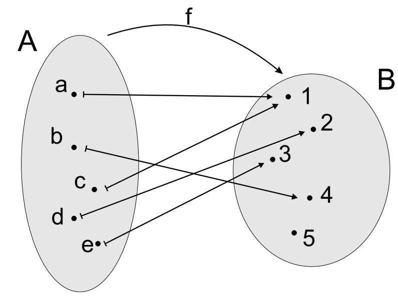


Figura 5.20

(a) Hallar $f^{-1}(H)$.

(b) Hallar $f^{-1}(B - H)$.

(c) Hallar $A - f^{-1}(H)$.

4. Graficar las siguiente funciones:

(a) $f(x) = -(x+2)^2$

(b) $f(x) = -|x+2|$

(c) $f(x) = -\sqrt{x+2}$

(d) $f(x) = -\dfrac{1}{2}(x-2)^2$

(e) $f(x) = -2|x-2| + 2$

(f) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$

(g) $f(x) = x + \dfrac{|x|}{x}$

(h) $f(x) = [\![x]\!] - x$

(i) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

(j) $f(x) = |x| + x$

(k) $f(x) = -[\![x]\!]$

(l) $f(x) = -[\![x-1]\!]$

(m) $f(x) = [\![x]\!] + 2$

(n) $f(x) = [\![x+3]\!]$

(o) $f(x) = x^2 - 2|x|$

(p) $f(x) = x^3 - 3x$

(q) $f(x) = 3x - x^2$

(r) $f(x) = [\![\sqrt{x}]\!]$

5. Graficar las siguiente funciones:

(a) $f(x) = 2|x-2| - |x+1| + x$

(b) $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si} \quad x < 0 \\ 2 & \text{si} \quad 0 \le x < 2 \\ x-2 & \text{si} \quad x \ge 2 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 4 - x^2 & \text{si} \quad 0 \le x < 2 \\ 0 & \text{si} \quad x \ge 2 \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si} \quad -2 \le x \le 1 \\ 2 & \text{si} \quad 1 < x < 2 \end{cases}$

(e) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \le 1 \\ \sqrt{x} & \text{si} \quad 1 < x \le 4 \\ 2 & \text{si} \quad x > 4 \end{cases}$

(f) $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ [\![x]\!] & \text{si} \quad 1 < x \leq 4 \\ 5 & \text{si} \quad x > 4 \end{cases}$

(g) $f(x) = \begin{cases} |x+2| & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 - 1 & \text{si} \quad 0 \leq x < 2 \\ \sqrt{x-2} & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$

Capítulo 6

Funciones Trigonométricas

Otros ejemplos de funciones numéricas muy importantes son las funciones trigonométricas. Frecuentemente en la escuela secundaria se definen las *razones trigonométricas* en un triángulo rectángulo:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}, \quad \cos\alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}, \quad \tan\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

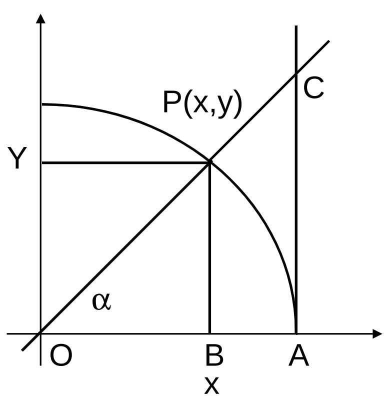
donde α es uno de los ángulos agudos del triángulo.

6.1 Las funciones trigonométricas en los reales

Como la *razón* entre un par de lados de un triángulo no varía si cambiamos el triángulo por otro *semejante* (por el teorema de Tales), siempre podremos suponer que la hipotenusa tiene longitud 1, lo que permite una representación geométrica muy conveniente:
En el cuarto de circunferencia de radio 1 (figura 6.1) tenemos

$$\operatorname{sen}\alpha = y, \quad \text{y} \quad \cos\alpha = x,$$

donde (x, y) son las coordenadas del punto P de la circunferencia determinado por el ángulo agudo α, medido desde el semieje $x > 0$.



Las coordenadas del punto P en la circunferencia determinado por el ángulo agudo α, medido desde el semieje $x > 0$

Figura 6.1

Por la semejanza de los triángulos OPB y OCA vemos que el segmento «tangente a la circunferencia» AC tiene longitud $\frac{y}{x}$ es decir $AC = \tan\alpha$ y por esto la razón $\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$ se llama *tangente*.

Obtenemos tres funciones definidas así:

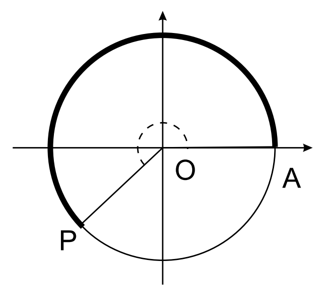
- al ángulo α le corresponde el punto P en la circunferencia unitaria donde la corta el lado del ángulo central α (medido como antes en el sentido antihorario desde el semieje $x > 0$).
- a P le corresponde su abscisa x si queremos definir $\cos\alpha$,
- su ordenada y si hablamos de $\operatorname{sen}\alpha$
- la razón $\dfrac{y}{x}$ si queremos definir $\tan\alpha$

En resumen las tres funciones se construyen así:

$$\alpha \mapsto P \mapsto y = \operatorname{sen}\alpha, \quad \alpha \mapsto P \mapsto x = \cos\alpha, \quad \alpha \mapsto P \mapsto \frac{y}{x} = \tan\alpha$$

Hasta ahora esto vale sólo para ángulos agudos medidos en la forma indicada arriba pero, si tenemos una manera de medir el ángulo en una forma general, podremos extender esta función a otros números reales. La manera más natural de hacer esto es considerando la longitud de la circunferencia de radio 1, esta es un número real llamado 2π. Dicho de otro modo, π es la longitud de una semicircunferencia de radio 1. A un ángulo cualquiera α, le corresponde un único punto P sobre la circunferencia y a este punto una única longitud medida del arco que une el punto A con P girando en sentido antihorario (contrario al movimiento de las agujas del reloj).

Este número r, con $0 \leq r < 2\pi$ se llama la medida en *radianes* del ángulo α. También se dice que es la medida en radianes del arco AP, (recorrido en sentido antihorario, figura 6.2). Entonces,



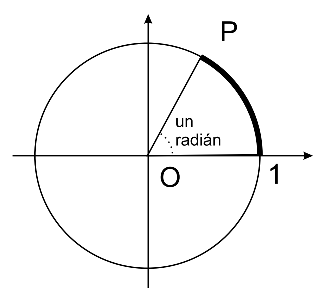
Arcos y ángulos

Figura 6.2

establecemos:

> **Definición: un radián** *es la medida del ángulo que se forma cuando se lleva sobre la circunferencia una longitud igual al radio.*

En el caso del círculo radio 1 (figura 6.3), llamado también círculo trigonométrico, Obtenemos dos



Un radián

Figura 6.3

funciones reales:

- $\operatorname{sen}\alpha = y$, ordenada de P.
- $\cos\alpha = x$, abscisa de P.

para α medido en radianes, con $0 \leq \alpha < 2\pi$, tenemos, $\operatorname{sen} : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}$ y $\cos : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}$.

La función *tangente* está definida en todos los puntos menos aquellos donde se anula x, es decir:

$$\tan : [0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \cup (\frac{3\pi}{2}, 2\pi) \to \mathbb{R}.$$

Ahora si $x \in \mathbb{R}$ es un número real *positivo* podemos definir $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ de la manera siguiente: Considerando $\alpha = x$ como una longitud que se enrolla en la circunferencia unitaria en sentido antihorario, después de dar cierto número de vueltas, se llega a algún punto P. Entonces, $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ son respectivamente la ordenada y la abscisa de este punto P. De manera precisa, si hacemos la división entera de x por 2π obtenemos $x = 2\pi n + r$ donde $n \in \mathbb{N}$ y $0 \leq r < 2\pi$, entonces definimos $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} r$ y $\cos x = \cos r$.

Si x es negativo, se repite el procedimiento anterior, pero damos vueltas en el otro sentido, es decir en *sentido horario*.

Ahora tenemos las dos funciones $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ definidas en todo $\mathbb{R}$ y observamos que: $\operatorname{Img}(\operatorname{sen} x) = \operatorname{Img}(\cos x) = [-1, 1]$ es decir, que sus valores son los números en $[-1, 1]$. Además son *periódicas* de período 2π, esto quiere decir que:

$$\left.\begin{array}{rcl} \operatorname{sen} x & = & \operatorname{sen}(x + 2k\pi) \\ \cos x & = & \cos(x + 2k\pi) \end{array}\right\} \text{ para todo } k \in \mathbb{Z}$$

Por otro lado, si vemos sus gráficas, (figuras 6.4 en la página 84 y 6.5) entonces es muy fácil ver dónde éstas funciones crecen, dónde decrecen y dónde alcanzan sus máximos y mínimos (los detalles de graficación se verán más adelante en el curso).

La tercera función, la tangente, no está definida en todo $\mathbb{R}$ puesto que hay que excluir los puntos donde se anula el coseno. El dominio de $\tan x$ es $\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Analizando el signo de la función $\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$ cuando α da una vuelta a la circunferencia, y analizando el crecimiento y decrecimiento de la función, se puede construir su gráfico como en la figura 6.6 (los detalles de graficación se verán más adelante en el curso).

También, si vemos el comportamiento del segmento AT, notamos que es una función periódica de período 2π

$$\tan(x + 2k\pi) = \tan x$$

siempre que esté definida en x. Pero también, si analizamos más detalladamente, vemos que tiene un período menor pues $\tan(x + k\pi) = \tan x$ para cualquiera que sea $k \in \mathbb{Z}$ si $\tan x$ está definida. Vemos también que $\tan x$ es siempre creciente (en cualquier intervalo contenido en su dominio) y no tiene máximos ni mínimos.

6.2 Inversas de las funciones trigonométricas

Consideremos la función $\operatorname{sen} x$. Si tenemos un punto cualquiera $r \in [-1, 1]$, vemos que la preimagen de r consta de infinitos puntos. La preimagen se llama el arcoseno de r, es decir el *arco* cuyo seno es r. Si α es tal que $\operatorname{sen}\alpha = r$ entonces:

$$\operatorname{arcsen} r \supset \{\alpha + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

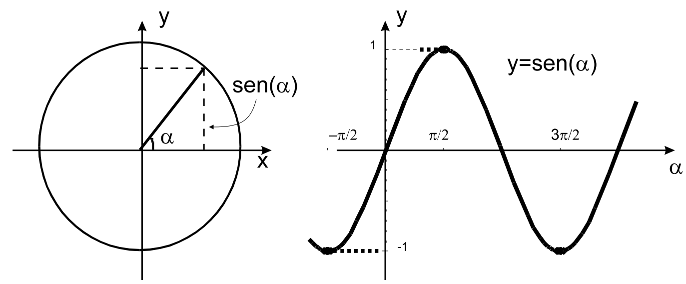
Pero también vemos en la figura 6.7, que $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}(\pi - \alpha)$ y como $(\pi - \alpha) + 2k\pi = -\alpha + (2k+1)\pi$ obtenemos finalmente que la preimagen de α es:

$$\operatorname{arcsen} r = \{\alpha + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\alpha + (2k+1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

Dicho en palabras, todos los ángulos cuyo seno es r, con $-1 \leq r \leq 1$, se obtienen de cualquier α con $\operatorname{sen}(\alpha) = r$, sumándole α a todos los múltiplos enteros pares de π y restándole α a todos los múltiplos enteros impares de π.

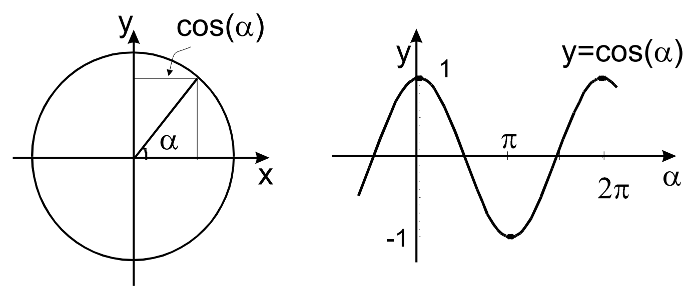
Igualmente si $r \in [-1, 1]$ y si $\cos\alpha = r$ entonces todos los ángulos cuyo coseno es r se obtienen a partir de α así, (figura 6.8):

$$\arccos r = \{\alpha + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\alpha + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$



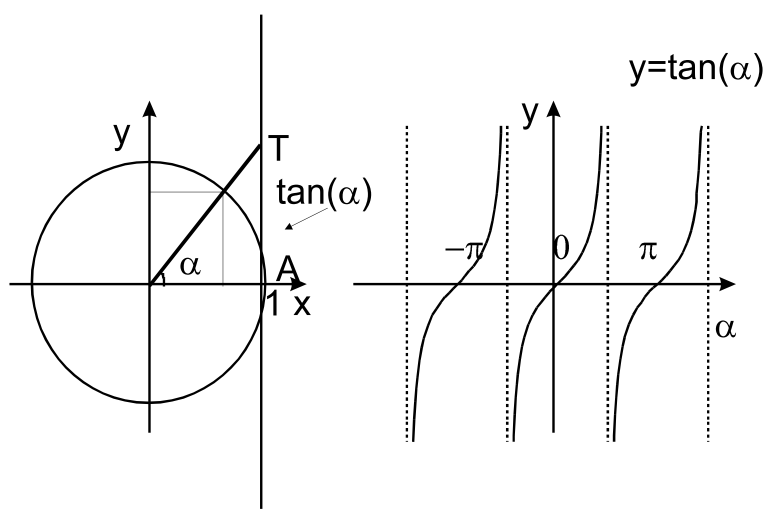
La función seno

Figura 6.4



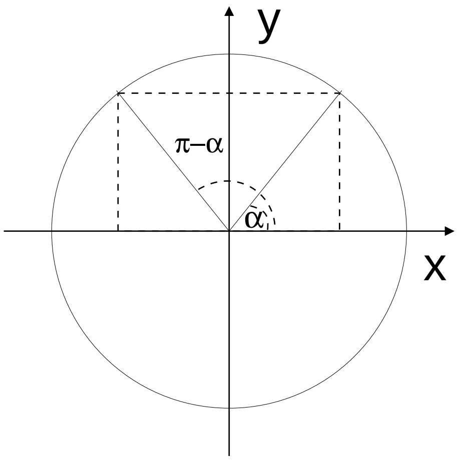
La función coseno

Figura 6.5



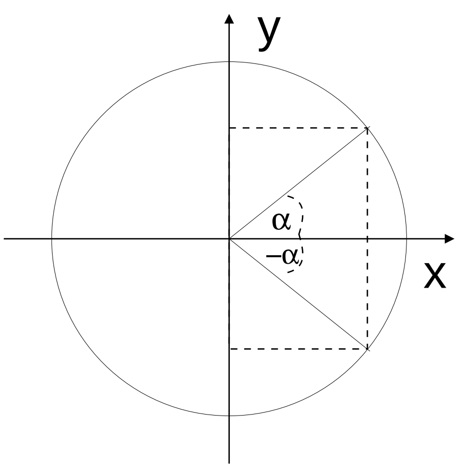
La razón entre seno y el coseno, la tangente

Figura 6.6



Ordenada= $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}(\pi - \alpha)$

Figura 6.7



$\cos\alpha = \cos(-\alpha)$, *coseno es una función par*

Figura 6.8

porque $\cos\alpha = \cos(2\pi - \alpha) = \cos(-\alpha)$. Entonces puede escribirse así:

$$\arccos r = \{2k\pi \pm \alpha \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

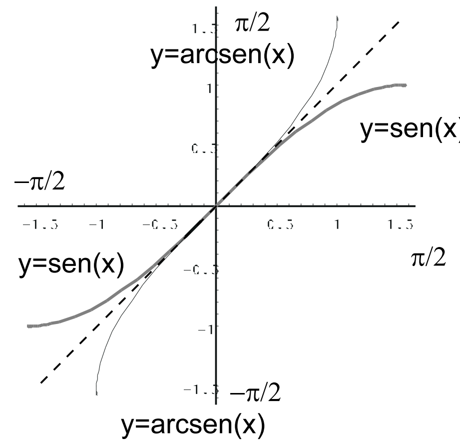
Finalmente si $r \in \mathbb{R}$ y $\tan\alpha = r$ entonces $\arctan r = \{\alpha + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Ninguna de estas funciones trigonométricas es inyectiva, pero restringidas a intervalos adecuados se obtiene, por ejemplo:

$$\mathrm{sen} : [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] \to [-1, 1] \text{ es biyectiva }, \quad \cos : [0, \pi] \to [-1, 1] \text{ es biyectiva}$$

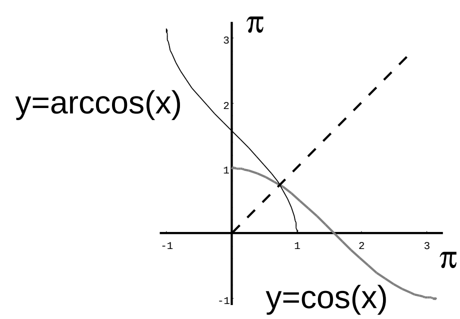
$$\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R} \text{ es biyectiva}$$

Se pueden definir funciones inversas restringidas a esos intervalos. Estas funciones inversas se llaman, por abuso de lenguaje, arcsen, arccos y arctan y sus gráficas, (figuras 6.9, 6.10 y 6.11) se pueden obtener por reflexión de las gráficas anteriores respecto a la diagonal principal (la recta $y = x$).



Gráficos de $\mathrm{sen} x$ *y* $\mathrm{arcsen} x$

Figura 6.9



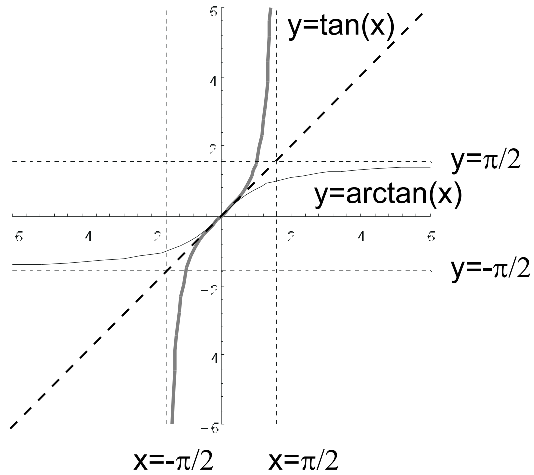
Gráficos de $\cos x$ *y* $\arccos x$

Figura 6.10

Es costumbre evitar la notación $\mathrm{sen}^{-1}\, x$, $\cos^{-1}\, x$ o $\tan^{-1}\, x$, para designar las funciones $\mathrm{arcsen} x$, $\arccos x$ y $\arctan x$, para evitar confusión con las funciones cosecante, secante y contangente.

Ejemplo: ¿Cuál tiene más puntos: Un segmento o la recta entera?

Esta pregunta tiene una bella respuesta utilizando la función tangente: $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ que es una biyección. Entonces el segmento obtenido $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ tiene el mismo número de puntos que la recta $\mathbb{R}$. Cualquier otro segmento tiene el mismo número de puntos que el segmento $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, como se ve con una proyección. Esto es sólo posible porque la recta y un segmento cualquiera son continuos.



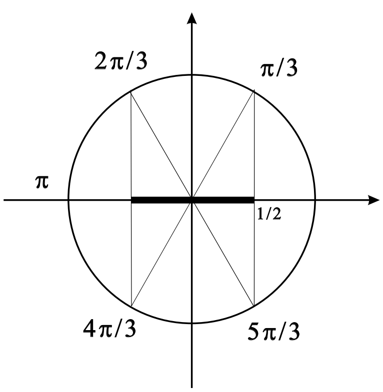
Gráficas de $\tan x$ *y* $\arctan x$

Figura 6.11

Ejercicios

1. ¿Para qué valores de x es $|\cos x| < \dfrac{1}{2}$?

   Resp: $\{x + k\pi \mid \dfrac{\pi}{3} < x < \dfrac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\}$, (figura 6.12).



Ejemplo en el círculo trigonométrico

Figura 6.12

2. Para qué valores de x es $\cos x < \dfrac{1}{2}$. Resp: $\{x + 2k\pi \mid \dfrac{\pi}{3} < x < \dfrac{5\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\}$, (figura 6.13).
3. Recordando las definiciones:

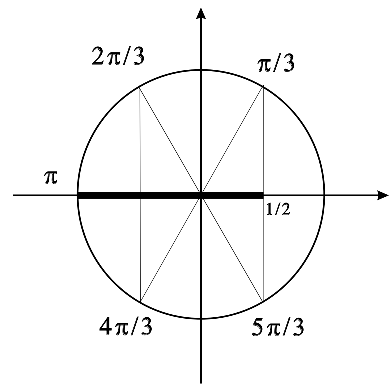
$$\csc\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}, \qquad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}, \qquad \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}.$$

   (a) Pruebe que estas funciones están representadas por la longitud de los siguientes segmentos en la circunferencia unitaria de la figura 6.14.

   $$\overline{OQ} = \csc\alpha, \qquad \overline{OC} = \sec\alpha, \qquad \overline{TQ} = \cot\alpha$$

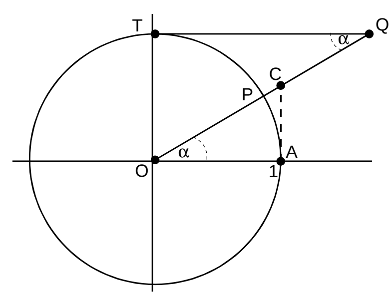
   (b) Analice cómo varían estos tres segmentos cuando el punto P recorre la circunferencia.

   (c) Encuentre el dominio de cada una de las tres funciones $\csc x$, $\sec x$, $\tan x$ y dibuje sus gráficas.



Otro ejemplo en el círculo trigonométrico

Figura 6.13



Otras funciones trigonométricas $\overline{OQ} = \csc\alpha$, $\overline{OC} = \sec\alpha$, $\overline{TQ} = \cot\alpha$

Figura 6.14

La Trigonometría (lectura requerida)

6.3 Las identidades trigonométricas

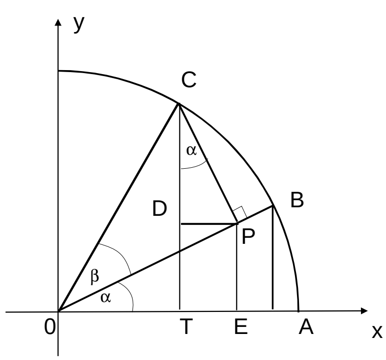
Las funciones trigonométricas están conectadas por una serie de relaciones que se estudian bajo el nombre de *trigonometría*. Todas estas relaciones se derivan de las definiciones de seno, coseno, tangente y del teorema de Pitágoras:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

De manera que toda la trigonometría no es más que una serie de variaciones sobre el Teorema de Pitágoras. Es muy importante que repase toda la trigonometría, porque será utilizada constatemente. Para comenzar ese repaso **demuestre** las siguientes fórmulas:

$$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x \qquad \cot^2 x + 1 = \csc^2 x$$

6.3.1 Fórmulas para la suma de dos ángulos



Hallar fórmulas para las funciones trigonométricas aplicadas a sumas de ángulos en términos de las funciones trigonométricas en los sumandos.

Figura 6.15

A partir del dibujo en la figura 6.15: Pruebe las igualdades siguientes:

$$\begin{array}{lcl} CD = \operatorname{sen}\beta \cos\alpha & , & PE = DT = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta \\ OE = \cos\alpha \cos\beta & , & DP = TE = \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta \end{array}$$

Luego, pruebe las siguientes fórmulas,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\alpha+\beta) &= \operatorname{sen}\alpha \cos\beta + \operatorname{sen}\beta \cos\alpha \\ \operatorname{sen}(\alpha-\beta) &= \operatorname{sen}\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}\beta \cos\alpha \\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta \\ \cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta \end{aligned}$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$
$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

6.3.2 Fórmulas para el ángulo doble

Tomando $\alpha=\beta$ en las fórmulas anteriores, obtenga:

$$\operatorname{sen}2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha, \quad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha, \quad \tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

6.3.3 Fórmulas para el ángulo medio

A partir de las fórmulas anteriores demuestre que para $0\le\alpha\le\pi/2$:

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}, \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}, \quad \tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

6.3.4 Conversión de productos en sumas y viceversa

Pruebe que:

$$\operatorname{sen}A + \operatorname{sen}B = 2\operatorname{sen}(\frac{A+B}{2})\cos(\frac{A-B}{2})$$
$$\operatorname{sen}A - \operatorname{sen}B = 2\operatorname{sen}(\frac{A-B}{2})\cos(\frac{A+B}{2})$$
$$\cos A + \cos B = 2\cos(\frac{A+B}{2})\cos(\frac{A-B}{2})$$
$$\cos A - \cos B = -2\operatorname{sen}(\frac{A+B}{2})\operatorname{sen}(\frac{A-B}{2})$$
$$\operatorname{sen}x\cos y = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y))$$
$$\operatorname{sen}x\operatorname{sen}y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$
$$\cos x\cos y = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y))$$

6.4 Teoremas de Euclides y Pitágoras

En la figura 6.4, notamos el triángulo rectángulo ΔABO y tres cuadrados, con lados iguales a los del triángulo, evocando el planteamiento de un teorema conocido,

El Teorema de Pitágoras: $|AO|^2+|BO|^2=|AB|^2$ o bien, *el área del cuadrado mayor es igual a la suma de las áreas de los dos cuadrados menores.*

Hay varias pruebas directas de este teorema que el estudiante puede encontrar. Mostraremos sin embargo una prueba que ilustra otros hechos,

Primer Teorema de Euclides: *el área del rectángulo $\square AELC$ es igual al área del cuadrado $\square AOHG$.*[1]

Queda para los lectores el encargo de probar el Teorema de Euclides. Esto puede hacerse por ejemplo, observando la misma figura 6.4 y comparando las áreas mencionadas en el teorema con el área del paralelogramo $AOMF$, la cual puede calcularse (usando la fórmula base por altura) en dos formas distintas (notar que el triángulo rectángulo ΔABO es congruente con triángulo ΔAFG).

El Teorema de Pitágoras es una consecuencia del Teorema de Euclides; el área del cuadrado más grande, visualmente igual a la suma de las áreas de los dos rectángulos, es la suma de las áreas de los dos cuadrados menores, y eso da la prueba.

[1] También el área del rectágulo $\square BCLK$ es igual al área del cuadrado $\square OBIJ$

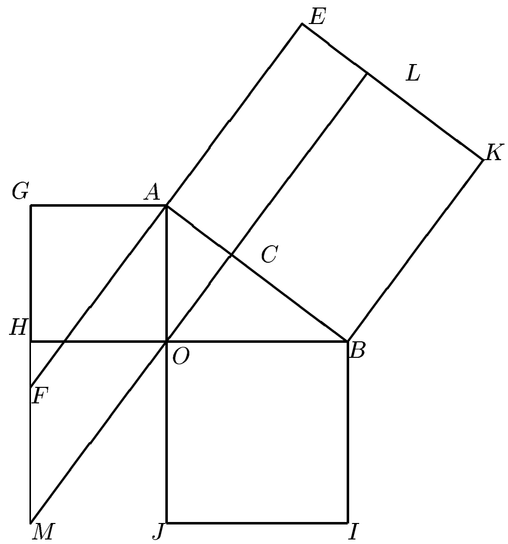


Figura 6.16 Teoremas de Pitágoras y de Euclides

6.5 Ejercicios

1. Demuestre el teorema del coseno:
$$a^2 = c^2 + b^2 - 2bc\cos\alpha$$
2. Demuestre el teorema del seno:
$$\frac{a}{\text{sen}\alpha} = \frac{b}{\text{sen}\beta} = \frac{b}{\text{sen}\gamma}$$
3. Demuestre la fórmula de Herón de Alejandría:
$$\text{Area}\, ABC = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$
donde p es el semiperímetro del triángulo,
$$p = \frac{1}{2}\,(a+b+c)$$
4. Sea $f(x) = \cos(\,\text{arcsen}x)$. Demuestre que $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ puede también definirse con la fórmula
$$f(x) = \sqrt{1-x^2}$$
¿Por qué no vale $f(x) = -\sqrt{1-x^2}$?
5. Encuentre una fórmula para $\text{sen}(\arccos x)$.
6. Encuentre una fórmula para $\text{sen}(\arctan x)$.
7. Calcule
   (a) $\text{arcsen}(-1)$
   (b) $\text{arcsen}(\frac{1}{2})$
   (c) $\tan(\,\text{arcsen}(\frac{1}{5}))$
8. Dibuje el gráfico de $\text{sen}(\,\text{arcsen}x)$. (¡Cuidado!)
9. Escribir las siguientes expresiones sin usar signos de valor absoluto:

(a) $|1+\operatorname{sen} x|$

(b) $|\operatorname{sen} 53|$

(c) $|\cos 2|$

(d) $|1+2\operatorname{sen} x\ \cos x|$

10. Resolver la ecuación: $|\operatorname{sen} x| = \cos x$
11. Resolver las siguientes inecuaciones y representar graficamente el conjunto de sus soluciones:
    (a) $|\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{4}$
    (b) $|\cos x - \frac{1}{\sqrt{3}}| < \frac{1}{100}$
12. Bosquejar la gráfica de:
    (a) $f(x) = 2\operatorname{sen}(x+\frac{\pi}{4})$
    (b) $f(x) = \frac{1}{2}\cos(x-\frac{\pi}{2})$
    (c) $f(x) = 2\tan(x+\frac{\pi}{4})$
    (d) $f(x) = \frac{1}{3}\cos(3x)$
13. Demuestre que:
    (a) $\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right) = \frac{\cos x + \operatorname{sen} x}{\sqrt{2}}$
    (b) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}-x\right) = \frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{\sqrt{2}}$.
14. (*) Usando inducción (y algo de números complejos) demuestre la fórmula (de Moivre) :

$$[r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i\operatorname{sen} n\theta)$$

Capítulo 7

Ecuación de la recta

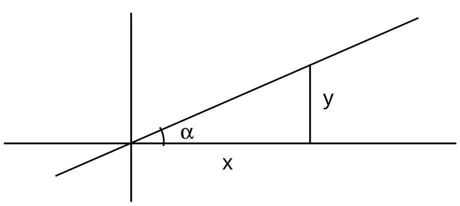
Vamos a ver que, si a y b son dos números reales, el gráfico de la función $f(x) = ax + b$ es una recta. Si $a = 0$ entonces $f(x) = b$ es la función constante: su gráfico, (figura 7.1) es una recta paralela al eje x.

Una función constante

Figura 7.1

Supongamos $a \neq 0$ y $b = 0$, entonces el gráfico de $f(x) = ax$ es una recta que pasa por $(0, 0)$, como en la figura 7.2, pues basta observar que:

$$\text{Si } x \neq 0,\ (x, y) \in \text{ recta } \iff \frac{y}{x} = \tan\alpha = a$$



Una recta por el origen

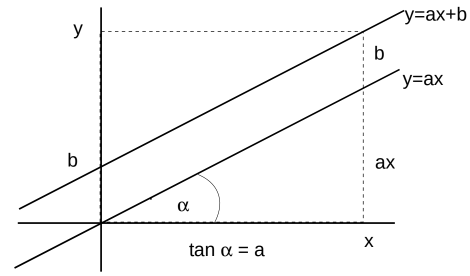
Figura 7.2

El número $a = \tan\alpha$ se llama la pendiente de la recta.

Si $a \neq 0$ y $b \neq 0$ entonces el gráfico de $f(x) = ax + b$ es una recta paralela a la anterior que pasa por el punto $(0, b)$, como en la figura 7.3. Diremos que la ecuación $y = ax + b$ es la ecuación de una recta, o que la recta es el *lugar geométrico* de los puntos del plano que satisfacen la ecuación. Esto significa que un punto P de coordenadas (x_0, y_0), está en la recta, si y sólo si sus coordenadas satisfacen la igualdad: $y_0 = ax_0 + b$.

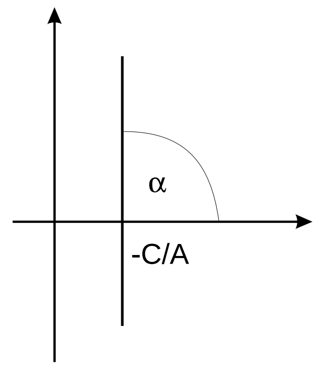
En la ecuación $y = ax+b$ aparece la y «despejada». En general, una ecuación lineal $Ax+By+C = 0$, donde A y B no son nulas simultaneamente, representa una recta, porque si $B \neq 0$, despejando y obtenemos $y = -\dfrac{A}{B}x - \dfrac{C}{B}$, que es la recta de pendiente $-\dfrac{A}{B}$. Si $B = 0$ y $A \neq 0$ la ecuación $Ax + C = 0$ representa la recta paralela al eje y por el punto $-\dfrac{C}{A}$.

En una recta vertical, es decir donde el ángulo ángulo α es $\dfrac{\pi}{2}$ diremos que tiene «pendiente infinita». Esta recta vertical no es el gráfico de ninguna función, (figura 7.4). Por esta razón es preferible



Recta con pendiente a, que corta el eje de las ordenadas (eje y) en el punto $(0, b)$

Figura 7.3



Recta vertical

Figura 7.4

pensar en términos de «ecuación de la recta» o de «lugar geométrico» como un conjunto de puntos cuyas coordenadas satisfacen una ecuación, en vez de pensar en términos de gráficos (de funciones). Obtenemos así *todas* las rectas del plano, incluso las verticales.

7.1 Geometría Analítica: método de las coordenadas

El introducir coordenadas en el plano, y caracterizar conjuntos de puntos como curvas o regiones mediante ecuaciones, nos permite estudiar las propiedades geométricas de esos conjuntos, usando para ello las propiedades de las ecuaciones que las representan. Este método se llama Geometría Analítica, y fue propuesto independientemente por Pierre Fermat (1601- 1665) y por René Descartes (1596-1650). No es realmente una nueva geometría sino un método para estudiar geometría.

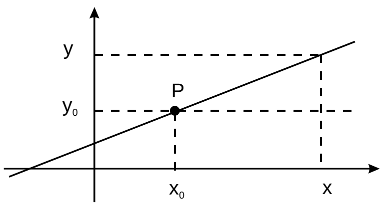
Vamos a comenzar estudiando las rectas y circunferencias en el plano. El primer problema es encontrar la ecuación de una recta que tiene ciertas propiedades o restricciones.

7.2 Ecuación de una recta que pasa por un punto P

Si el punto P tiene coordenadas (x_0, y_0) y la recta $y = ax + b$ tiene que pasar por P, entonces las coordenadas (x_0, y_0) deben satisfacer la ecuación, es decir $y_0 = ax_0 + b$.
Eliminando b de las ecuaciones, esto es, restando miembro a miembro

$$\begin{aligned} y &= ax + b \\ y_0 &= ax_0 + b \end{aligned}$$

obtenemos $y - y_0 = a(x - x_0)$, que es la ecuación general de la recta que pasa por P, (figura 7.5). Observe que si la recta no es vertical, es decir $x - x_0 \neq 0$ entonces podemos dividir por $x - x_0$ y obtenemos que $a = \dfrac{y - y_0}{x - x_0}$ es la pendiente de la recta.

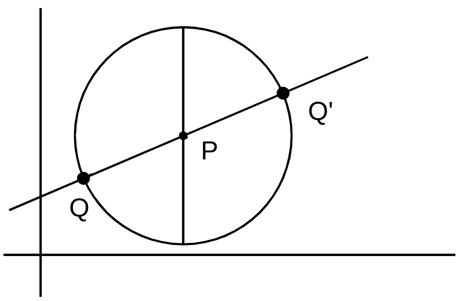


Recta por un punto $P(x_0, y_0)$

Figura 7.5

Por supuesto que hay infinitas rectas que pasan por P. Cada valor arbitrario que demos a la pendiente a, determina una recta por P.

Observación Interesante: El número de rectas que pasa por un punto P es infinito. La pendiente, el número a, da una biyección entre $\mathbb{R}$ y todas las rectas no verticales por P. Hay entonces un «continuo» de rectas por P, pero las propiedades «geométricas» de este continuo difieren de las de $\mathbb{R}$, puesto que existe una recta vertical. Si trazamos una circunferencia de centro P, cada recta por P está determinada por dos puntos opuestos q y q' en la circunferencia, (figura 7.6) y la recta vertical determinada por el diámetro vertical. La geometría de las rectas por P se parece más a la de la circunferencia que a la de



Todas las rectas por un punto

Figura 7.6

$\mathbb{R}$.

7.3 Recta que pasa por dos puntos

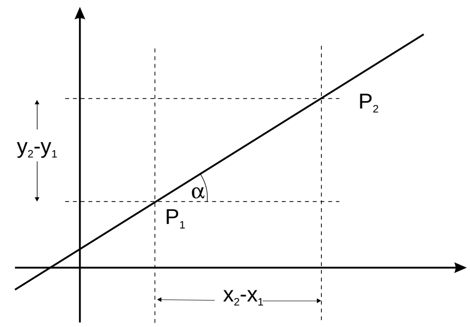
Si tenemos dos puntos distintos, P_1 de coordenadas (x_1, y_1) y P_2 de coordenadas (x_2, y_2), entonces existe una única recta que pasa por ambos. Para encontrar la ecuación de esta recta, escribimos la ecuación de una recta genérica que pase por P_1: $y - y_1 = a(x - x_1)$, (figura 7.7) y ponemos la condición de que esta recta pase por P_2: $y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1)$ entonces, si la recta no es vertical, es decir si $x_2 - x_1 \neq 0$, podemos calcular $a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ y obtenemos entonces finalmente la ecuación

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Si la recta es vertical, es decir si $x_2 = x_1$, la ecuación es: $x = x_1\ (= x_2)$

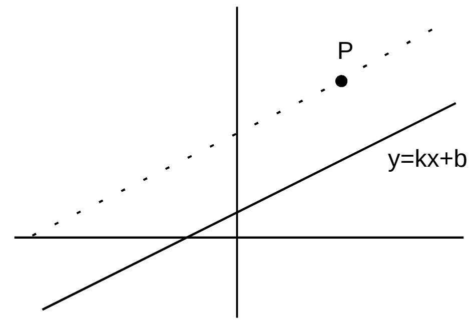
7.4 Rectas Paralelas

Dos rectas no verticales, son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente. Las ecuaciones serán $y = ax + b$ y $y = ax + b'$. Por ejemplo: halle la ecuación de la recta paralela a una dada y que pasa por el punto P de coordenadas (x_0, y_0). Dada la recta $y = kx + b$, escribimos la ecuación general de las rectas que pasan por P, (figura 7.8) $y - y_0 = a(x - x_0)$ y fijamos el valor $a = k$. la ecuación $y - y_0 = k(x - x_0)$ esta totalmente determinada por el valor $k \in \mathbb{R}$. Hemos encontrado una expresión



La recta por dos puntos

Figura 7.7



Recta paralela por un punto P

Figura 7.8

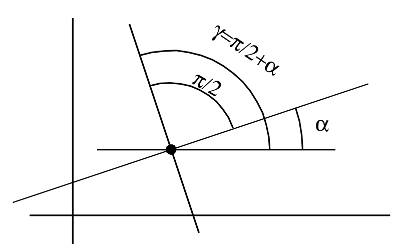
analítica del postulado de Euclides: por un punto exterior a una recta, se puede trazar una única recta paralela a ella.

Si la recta hubiera sido vertical, de ecuación $x = c$, entonces la paralela por P hubiera tenido ecuación $x = x_0$.

7.5 Rectas Perpendiculares

Veamos que dos rectas (no verticales) con pendientes a y a', son **perpendiculares** si y sólo si las pendientes satisfacen la relación $a = -\dfrac{1}{a'}$ (o $a\,a' = -1$) (figura 7.9). En efecto, si la recta $y = a'x + b'$ es perpendicular a la recta $y = ax + b$ entonces

$$a' = \tan(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\frac{1}{\tan\alpha} = -\frac{1}{a}$$



Pendientes de rectas perpendiculares

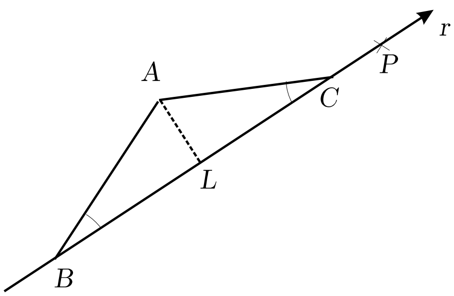
Figura 7.9

Ejemplo: Hallar la ecuación de la recta que pasa por $P\ (x_0, y_0)$ y es perpendicular a la recta $y = ax + b$. Sabemos que la ecuación general de la recta que pasa por el punto P es $y - y_0 = m(x - x_0)$. Luego, como esta recta debe ser perpendicular a la anterior, entonces $m = -\frac{1}{a}$ y, por lo tanto, la ecuación es $y - y_0 = -\frac{1}{a}(x - x_0)$.

1. Determinar cuáles de los puntos $(3,1)$, $(2,3)$, $(6,3)$, $(-3,-3)$, $(3,-1)$, $(-2,1)$ están situados en la recta $2x - 3y - 3 = 0$ y cuáles no lo están.
2. Los puntos A, B, C, D, E están situados en la recta $3x - 2y - 6 = 0$ sus abcisas son 4, 0, 2, -2, -6 respectivamente. Determinar las ordenadas de esos puntos.
3. Determinar los puntos de intersección de la recta $2x - 3y - 12 = 0$ con los ejes coordenados y dibujar la recta en el plano.
4. Hallar los puntos de intersección de las rectas
$$\begin{aligned} 3x - 4y &= 29 \\ 2x + 5y &= -19 \end{aligned}$$
5. Los lados de un triángulo están sobre las rectas
$$4x + 3y = 5, \quad x - 3y + 10 = 0, \quad x = 2$$
Determinar las coordenadas de sus vértices.
6. Un paralelogramo tiene dos de sus lados sobre las rectas $8x + 3y + 1 = 0, 2x + y = 1$ y una de sus diagonales sobre la recta $3x + 2y + 3 = 0$ determinar las coordenadas de sus vértices.
7. Dada la recta $2x + 3y + 4 = 0$, hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (2,1) y es
   (a) paralela a la recta dada.
   (b) perpendicular a la reta dada
8. Hallar las ecuaciones de las rectas que pasan por los vértices del triángulo $A(5,-4)$, $B(-1,3)$, $C(-3,2)$ y son paralelas al lado opuesto.
9. Dados los puntos medios de los lados de un triángulo $M_1(2,1)$, $M_2(5,3)$, $M_3(3,-4)$ hallar las ecuaciones de sus lados.
10. La *altura* es la recta que pasa por un vértice del triángulo y es perpendicular al lado opuesto. Dados los vértices del triángulo $A(2,1)$, $B(-1,-1)$, $C(3,2)$ hallar las ecuaciones de sus alturas.
11. La *mediana* es la recta que une un vértice de un triángulo con el punto medio de su lado opuesto. Dados los vértices del triángulo $A(1,-1)$, $B(-2,1)$, $C(3,5)$ hallar la ecuación de la perpendicular bajada desde el vértice A a la mediana trazada desde el vértice B.
12. Hallar las ecuaciones de los lados y de las medianas del triángulo que tiene como vértices $A(3,2)$, $B(5,-2)$, $C(1,0)$.
13. Dados los vértices consecutivos de un cuadrilátero convexo $A(-3,1)$, $B(3,9)$, $C(7,6)$, $D(-2,-6)$ determinar el punto de intersección de sus diagonales.
14. Hallar en la recta $2x - y - 5 = 0$ un punto P de manera que la suma de sus distancias a los puntos $(-7,1)$, $(-5,5)$ sea mínima.
15. Hallar la pendiente y la ordenada en el origen, b, de la recta $3x + 2y = 7$.
16. Pruebe que la ecuación de la recta que corta al eje X en $(a,0)$ y al eje Y en $(0,b)$ es $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. (¿Hay restricciones?).
17. Hallar la ecuación de la recta que pasa por $P(-1,5)$ y es paralela a la recta que pasa por $A(-2,1)$ y $B(-3,2)$.
18. Halle la ecuación de la recta que pasa por $A(-2,2)$ y que es perpendicular a la recta $2x + y = 4$. Encontrar el punto de corte de ambas rectas.
19. Dibuje las rectas $\frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 1$ y $\frac{x}{8} + \frac{y}{10} = 1$. ¿Son estas rectas perpendiculaes o paralelas?

20. Encuentre una fórmula para el ángulo entre dos rectas que se cortan $y = ax + b$ y $y = cx + d$, en términos de a y c (las pendientes de las rectas dadas).
21. Halle el ángulo de corte de las dos rectas $3x - y - 1 = 0$ y $4x - 2y = 1$
22. Determinar el ángulo formado por las rectas:
    (a) $5x - y + 7 = 0, \quad 3x + 2y = 0$
    (b) $3x - 2y + 7 = 0, \quad 2x + 3y - 3 = 0$
    (c) $x - 2y - 47 = 0, \quad 2x - 4y + 3 = 0$
    (d) $3x - 2y - 1 = 0, \quad 5x - 2y + 3 = 0$
23. El punto $(-4, 5)$ es un vértice del cuadrado cuya diagonal está en la recta $7x - y = 0$. Hallar las ecuaciones de los lados y de la otra diagonal.
24. Desde el punto $(-2, 3)$ se dirige hacia el eje x un rayo de luz con una inclinación de un ángulo α. Se sabe que $\tan\alpha = 3$. Hallar las ecuaciones de las rectas en las que están los rayos incidente y reflejado.
25. Demostrar que la ecuación de la recta que pasa por el punto M y es paralela a la recta $Ax + By + C = 0$, puede escribirse
$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0$$
26. La *mediatriz* es la recta que trazada por el punto medio de un lado de un triángulo es perpendicular a dicho lado. Hallar las mediatrices del triángulo que tiene como vértices $A(3, 2)$, $B(5, -2)$, $C(1, 0)$.
27. Si α , β son enteros positivos, demostrar que las coordenadas del punto $P(x, y)$ el cual divide al segmento de recta $\overline{P_1P_2}$ en la razón $\frac{\alpha}{\beta}$, es decir, $\dfrac{|P_1P|}{|P_1P_2|} = \dfrac{\alpha}{\beta}$, vienen dadas por las fórmulas
$$x = \frac{\alpha x_2 + (\beta - \alpha)x_1}{\beta}, \quad y = \frac{\alpha y_2 + (\beta - \alpha)y_1}{\beta}$$
siendo (x_1, x_2) las coordenadas del punto P_1 y (x_2, y_2) las del punto P_2.
28. Escribir las ecuaciones de las mediatrices de los lados del triángulo de vértices $A(2, 3)$, $B(-2, 1)$, $C(3, -2)$ y determinar las coordenadas del circuncentro (se llama así al punto en que se cortan las mediatrices y es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo dado).
29. Hallar las ecuaciones de las dos rectas que forman ángulo de 45° con la recta $x - 2y + 5 = 0$ y que pasan por el origen de coordenadas.
30. Hallar la ecuación de la bisectriz del ángulo agudo formado por las rectas r_1 y r_2 definidas de la siguiente forma: r_1 pasa por el punto $A(1, 2)$ y forma un ángulo de 45° con la dirección positiva del eje x, r_2 pasa por el punto $B(5, 6)$ y corta el eje x en un punto c tal que el área del triángulo ABC es igual a 12.
31. Dada la recta r_1 de ecuación $2y - 3x = 4$ y el punto $P(1, -3)$
    (a) Hallar la ecuación de la recta que para por P y es perpendicular a r_1.
    (b) Hallar una fórmula para la distancia desde un punto $Q = (x_0, y_0)$ a una recta $r = \{ax + by + c = 0\}$, donde $a, b, c, x_0, y_0 \in \mathbb{R}$.
32. Hallar las ecuaciones de las medianas del triángulo de vértices $A(3, -2)$, $B(3, 4)$, $C(-1, 1)$ y comprobar que las tres medianas se intersectan en un punto.
33. Demostrar que los segmentos de recta que unen los puntos medios consecutivos de los lados de un cuadrilátero cualquiera forman un paralelogramo.
34. Por un punto P cualquiera del plano pasan infinitas rectas. El conjunto de estas infinitas rectas se llama haz de rectas de vértice P. Sea r_1 una recta de ecuación $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ y r_2 otra recta de ecuación $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ (no paralela a la anterior) y sea α un número real cualquiera. Demostrar que la ecuación:
$$A_1x + B_1y + C_1 + \alpha(A_2x + B_2y + C_2) = 0$$
representa un haz de rectas cuyo vértice es el punto de intersección de r_1 y r_2.

35. Utilizando lo aprendido en el ejercicio anterior y sin hallar las coordenadas del punto de intersección de r_1 y r_2 contestar las siguientes preguntas, siendo las ecuaciones de $r_1 : \ 2x + 3y - 5 = 0$ y de $r_2 : \ 3x + 5y - 8 = 0$
    (a) Hallar la recta del haz que pasa por $(1, 3)$.
    (b) Hallar la recta del haz paralela al eje x.
    (c) Idem paralela el eje y.
    (d) Idem perpendicular a la recta $2x + y - 7 = 0$.
    (e) Hallar la recta del haz que forma un triángulo isósceles con los ejes de coordenadas.



ejercicio 36

Figura 7.10

36. Determinar un triángulo ABC conociendo un punto A, la longitud del lado $\overline{BC}$, la pendiente de la recta sobre la que se encuentra el lado BC y sabiendo que $\hat{B} = \hat{C}$ y que el punto P está sobre la recta BC.

    Datos: $A(2, 3), P(0, 1), m_{BC} = \frac{1}{2}, |\overline{BC}| = 5$
    Solución: la recta r está completamente determinada pues conocemos un punto y la pendiente. El problema se reduce a trazar desde A dos rectas AB y AC que forman ángulos iguales con r y tales que determinen un segmento sobre r de longitud dada igual a 5.
    Una forma simple de resolverlo, vea la figura 7.10, teniendo en cuenta que la altura AL pasa por el punto medio de BC, es determinar las coordenadas del punto L y llevar a cada lado de L segmentos de longitud $\dfrac{|\overline{BC}|}{2}$ y hallando los puntos B y C.
    Ecuación de la recta AL que pasa por A y es perpendicular a r:

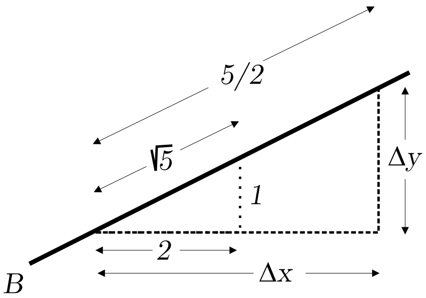
$$
\begin{aligned}
& m_{AL} = -\frac{1}{m_{BC}} = -2 \\
AL \quad : \quad & y - 3 = -2(x - 2) \Rightarrow y = -2x + 7
\end{aligned}
$$

Ecuación recta $BC : y - 1 = \frac{1}{2}(x - 0) \Rightarrow y = \frac{x}{2} + 1$
Coordenadas del punto L, intersección de AL y BC:

$$
\left\{ \begin{array}{l} y = -2x + 7 \\ y = \frac{x}{2} + 1 \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 = -\frac{5}{2}x + 6 \Rightarrow x = \frac{12}{5}, \quad y = \frac{11}{5} \\ \\ L(\frac{12}{5}, \frac{11}{5}) \end{array} \right.
$$

$$|\overline{BL}| = |\overline{LC}| = \frac{1}{2}|\overline{BC}| = \frac{1}{2}5 = \frac{5}{2}$$

Como se conoce la pendiente de BC, mediante una simple regla de tres, que resulta de aplicar el teorema de Thales, se determinan los incrementos que debemos dar a la abcisa y ordenada de L para obtener las coordenadas de C y B



ejercicio 36

Figura 7.11

$$\frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{\frac{5}{2}}{\Delta x} \Rightarrow \Delta x = \sqrt{5} \qquad \frac{\sqrt{5}}{1} = \frac{\frac{5}{2}}{\Delta y} \Rightarrow \Delta y = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$X_C = x_L + \Delta x \qquad x_B = x_L - \Delta x$$

$$Y_C = y_L + \Delta y \qquad y_B = y_L - \Delta y$$

$$x_C = \frac{12}{5} + \sqrt{5} \qquad x_B = \tfrac{12}{5} - \sqrt{5}$$

$$y_C = \frac{11}{5} + \frac{5}{2} \qquad y_C = \tfrac{11}{5} - \tfrac{5}{2}$$

Queda determinado el triángulo ABC por las coordenadas de los tres vértices:

$$A\,(2,3), \quad B\left(\frac{12}{5} - \sqrt{5}\,,\ \frac{11}{5} - \frac{5}{2}\right), \quad C\left(\frac{12}{5} + \sqrt{5}\,,\ \frac{11}{5} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\ .$$

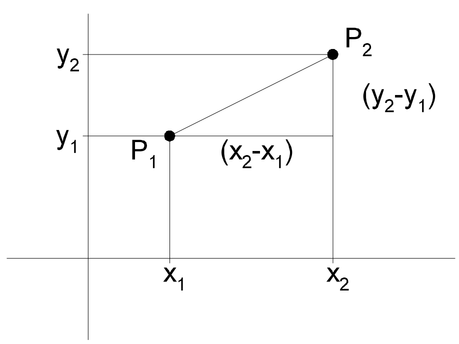
Capítulo 8

Ecuación de la circunferencia

8.1 Distancia entre dos puntos

Establecido un sistema cartesiano en el plano (coordenadas x, y), el teorema de Pitágoras nos permite hallar la distancia entre dos puntos P_1 de coordenadas (x_1, y_1) y P_2 de coordenadas (x_2, y_2), (figura 8.1) con la fórmula:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



La distancia entre dos puntos

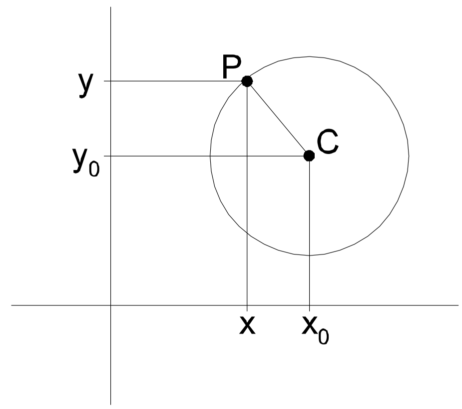
Figura 8.1

Definición: *Una circunferencia de* centro $C\ (x_0, y_0)$ *y de* radio r*, donde* r *es un número real positivo, es el lugar geométrico de los puntos* P*, que están a distancia* r *de* C.

Entonces, las coordenadas (x, y) de P (figura 8.1) deben satisfacer la ecuación $d(P, C) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r$, y al elevar al cuadrado ambos miembros obtenemos la ecuación

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \tag{8.1}$$

Por otro lado todo punto de coordenadas (x, y) que satisface la ecuación anterior, tambien está a dirtancia r del punto central $C(x_0, y_0)$, así que 8.1 es la ecuación de la circunferencia buscada.



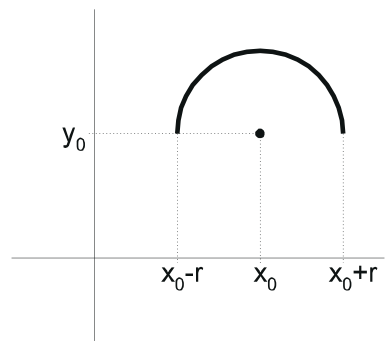
Un punto P en la circunfurencia

Figura 8.2

Observación importante: la circunferencia anterior no puede ser el gráfico de una función ya que a cada valor x del dominio debería corresponder dos valores de $f(x)$, lo que no permite definir la función. Pero si tomamos sólo media circunferencia, entonces la función f estará definida en el intervalo $[x_0 - r, x_0 + r]$ por la fórmula

$$f(x) = y_0 + \sqrt{r^2 - (x - x_0)^2}$$

(si tomamos el valor positivo de la raíz) y f tiene como gráfica la media circunferencia superior en la figura 8.3 .



Media circunferencia superior de centro (x_0, y_0)

Figura 8.3

Por otro lado la función

$$g(x) = y_0 - \sqrt{r^2 - (x - x_0)^2}$$

tiene como gráfica la semicircunferencia inferior. Igualmente es posible construir otras funciones cuya gráfica este compuesta por arcos tomados de las semicircunferencias superior e inferior, por ejemplo definidas por trozos. Escriba y dibuje usted un ejemplo de esto último.

La circunferencia es un lugar geométrico; el lugar geométrico de los puntos P que equidistan de otro punto C. Hemos visto que, analíticamente, ese lugar se describe con una ecuación dada por un polinomio de segundo grado en las variables x e y:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r^2 = 0$$

Efectuando operaciones y ordenando el polinomio obtendremos:

$$x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2 - r^2 = 0$$

El polinomio de segundo grado más general en dos variables es el siguiente:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F$$

donde A, B, C D, E, F son números reales. Si $A \neq 0$ podemos asumir $A = 1$, dividiendo por A todos los coeficientes del polinomio.

Miremos un polinomio de segundo grado en x y y como el anterior pero con $A = 1$. Para que este polinomio represente una circunferencia, debemos tener que $A = B = 1$, $C = 0$ y

$$-F + (\frac{E}{2})^2 + (\frac{D}{2})^2 \geq 0$$

En efecto, en este caso el polinomio es $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F$. Hacemos $-2x_0 = D$, $-2y_0 = E$, $x_0^2 + y_0^2 - r^2 = F$ y obtenemos:

$$x_0 = -\frac{D}{2}, \;\; y_0 = -\frac{E}{2} \text{ y } r^2 = -F + (\frac{D}{2})^2 + (\frac{E}{2})^2$$

Con esta notación el polinomio es $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r^2$ y la ecuación

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r^2 = 0$$

representa la circunferencia de centro (x_0, y_0) y radio $r \geq 0$.

Ejemplo: Sea $P(x, y) = Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F$ un polinomio de segundo grado tal que $A = B = 1$, $C = 0$ y $-F + (\frac{E}{2})^2 + (\frac{D}{2})^2 < 0$, entonces la ecuación $P(x, y) = 0$ no representa ningún lugar geométrico porque, haciendo $x_0 = -\frac{D}{2}$ y $y_0 = -\frac{E}{2}$, $P(x, y) = 0$ es equivalente a la ecuación $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = -F + x_0^2 + y_0^2 < 0$. No existe ningún par (x, y) que verifique esta ecuación (sería una circunferencia de «radio imaginario»).

8.2 Ejercicios: circunferencias y rectas

1. Encontrar la ecuación de la circunferencia de centro $(1, -2)$ y radio 3.
2. Lugares geométricos:
   (a) Sean los puntos $A(1, 0)$ y $B(4, 0)$. Halle la ecuación del lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ del plano tales que,
   $$\frac{d(P, B)}{d(P, A)} = 2$$
   Ayuda: Considere
   $$\frac{d(P, B)}{d(P, A)} = \frac{\sqrt{(x-4)^2 + y^2}}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} = 2$$
   Asi, $(x - 4)^2 + y^2 = 4((x - 1)^2 + y^2)$ es una circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio 2.

   (b) Dados dos puntos fijos cualesquiera, A, B, demuestre que el lugar geométrico de los puntos P del plano tales que,
   $$\frac{d(P, B)}{d(P, A)} = k \text{ constante}$$
   es una circunferencia. Halle esa circunferencia.

   (c) Dados dos puntos fijos cualesquiera, A, B. Halle la ecuación del lugar geométrico de los puntos P del plano tales que,
   $$d(P, A)^2 - d(P, B)^2 = k \text{ constante}$$
   Demuestre que es una recta perpendicular a la recta que pasa por A y B.
3. Hallar la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 25$ en el punto $(4, 1)$.

4. Hallar la ecuación de la circunferencia que tiene centro en el punto donde la recta $2x - 3y + 5 = 0$ corta al eje X y que pasa por el punto donde la recta $5x - y + 2 = 0$ corta al eje Y.
5. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por $(2, 3)$ y $(-1, 1)$ y cuyo centro está en la recta $x - 3y - 11 = 0$.
6. Considere dos puntos fijos $A(a_1, a_2)$ y $B(b_1, b_2)$ en el plano.
   (a) Encuentre la ecuación del lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ que equidistan de A y de B.
   (b) Pruebe que es una recta perpendicular a $\overline{AB}$. Pruebe que es la mediatriz del segmento AB.
7. Hallar la ecuación de la circunferencia que tiene como centro $C(-1, 2)$ y que pasa por el punto $A(2, 6)$.
8. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(3, 1)$ y $B(-1, 3)$ y su centro está situado en la recta $3x - y - 2 = 0$.
9. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $x^2 + 14x + y^2 + 18y = 39$, que la toca en el punto del segundo cuadrante donde $x = -2$.
10. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $A(7, -5)$ y cuyo centro es el punto de intersección de las rectas $7x - 9y - 10 = 0$ y $2x - 5y + 2 = 0$.
11. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(-3, 3)$ y $B(1, 4)$ y su centro está sobre la recta $3x - 2y - 23 = 0$.

Si se tienen dos lugares geométricos, representados por ecuaciones $f(x, y) = 0$ y $g(x, y) = 0$, hallar los puntos de intersección de los dos lugares geométricos equivale a resolver el sistema de ecuaciones en x y y.

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

12. Encuentre los puntos de corte de la recta $x + y = 1$ y la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$.
13. Sea $P(-3, 1)$ y la recta $4x - 3y + 1 = 0$, encuentre la distancia de P a la recta. Esto es la mínima distancia $d(P(-3, 1), Q(x, y))$ donde $Q(x, y)$ es un punto de la recta.

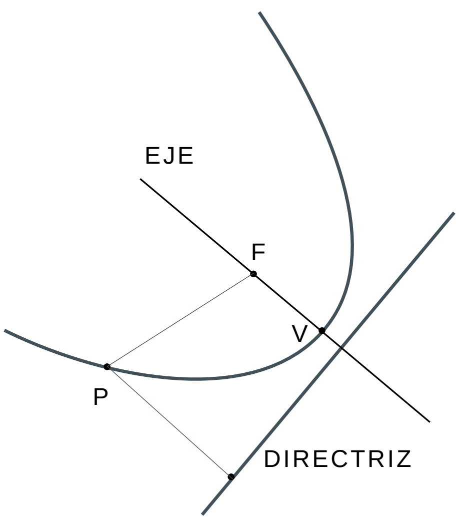
Capítulo 9

Secciones Cónicas

9.1 La Parábola

> **Definición:** *Una* **parábola** *es el conjunto de todos los puntos P del plano que equidistan de una recta fija L, llamada* **directriz***, y de un punto F (que no está en L), llamado* **foco**.

Llamaremos **eje** (de simetría) de la parábola a la recta perpendicular a la directriz L que pasa por el foco F. Al punto medio entre F y L lo llamaremos **vértice** de la parábola (ver Figura 9.1).



Una parábola

Figura 9.1

A continuación encontraremos analíticamente la ecuación de la parábola que tiene como foco al punto $F(0,p)$ y como directriz a la recta de ecuación $y=-p$. Es fácil ver que esta parábola tiene como vértice al origen y como eje de simetría al eje y. Además, según la definición, $P(x,y)$ es un punto de la parábola si y sólo si $d(P,F)=d(P,L)$ es decir:

$$\sqrt{x^2+(y-p)^2} \quad = \quad y+p.$$

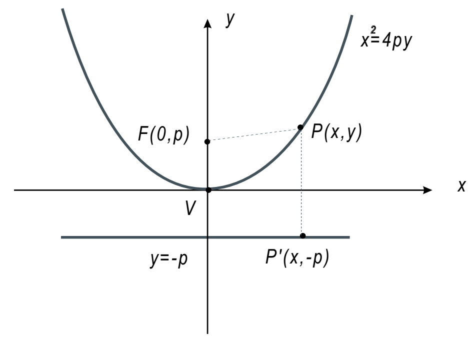
Elevando al cuadrado ambos miembros y simplificando:

$$\begin{aligned} x^2 + (y-p)^2 &= (y+p)^2 \\ x^2 + y^2 - 2yp + p^2 &= y^2 + 2yp + p^2 \\ x^2 - 2yp &= 2yp. \end{aligned}$$

Nos queda:

(9.1) $$x^2 = 4py.$$

La ecuación 9.1 se llamada la forma canónica de la ecuación de una parábola que tiene como directriz a la recta horizontal L de ecuación $y = -p$ y como foco $F(0,p)$, y un punto está sobre esta parábola si y sólo si cumple con esta ecuación. Si $p > 0$, la parábola se abre hacia arriba como en la Figura 9.2 . Si $p < 0$, la parábola se abre hacia abajo.



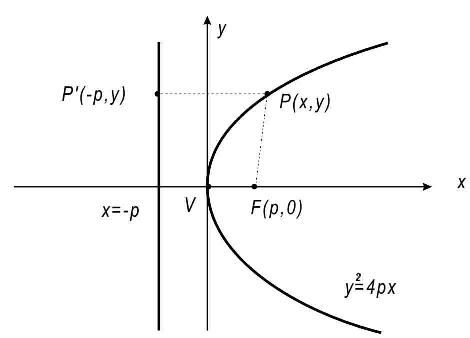
Una parábola con eje vertical

Figura 9.2

De manera similar podemos ver que la forma canónica de la ecuación de una parábola que tiene como directriz a la recta vertical L de ecuación $x = -p$ y como foco $F(p,0)$ es

(9.2) $$y^2 = 4px.$$

En este caso, si $p > 0$, la parábola se abre hacia la derecha como en la Figura 9.3 . y si $p < 0$, la parábola



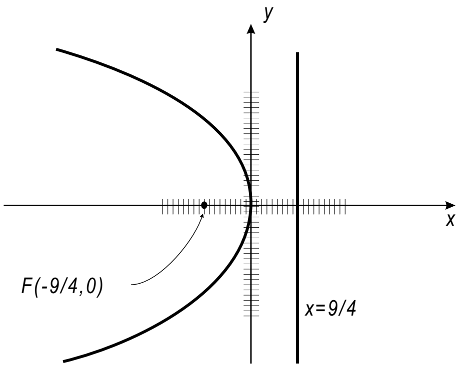
Una parábola con eje horizontal

Figura 9.3

se abre hacia izquierda.

Ejemplos

1. Encuentre el foco y la directriz de la parábola de ecuación $x = -\dfrac{1}{9}y^2$.



La parábola $y^2 = -9x$

Figura 9.4

Respuesta. Reescribiendo la ecuación dada como $y^2 = -9x$ obtenemos que $4p = -9$ es decir, $p = -\dfrac{9}{4}$. Por lo tanto, el foco es $F(-\frac{9}{4}, 0)$ y la directriz es la recta L de ecuación $x = \dfrac{9}{4}$ (ver Figura 9.4 en la página 107).

2. Determine la ecuación de la parábola con vértice $(0,0)$, que tiene al eje y como eje de simetría y que pasa por el punto $P(-3,3)$.

   Respuesta. Según las condiciones dadas, la ecuación de la parábola es de la forma $x^2 = 4py$. Como $P(-3,3)$ está sobre la parábola, $(-3)^2 = 12p$, es decir que $p = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$. Por lo tanto, la ecuación de la parábola es: $x^2 = 3y$.

9.1.1 Forma canónica de ecuación de la parábola

Ahora buscaremos la forma canónica de la ecuación de una parábola con vértice $V(h,k)$ y directriz paralela a uno de los ejes coordenados.

- Si la directriz es paralela al eje X y el vértice de la parábola es $V(h,k)$, el eje de simetría es la recta vertical $x = h$. Supongamos que el foco es el punto $F(h, k+p)$, entonces la directriz L de la parábola es la recta horizontal $y = k - p$. $P(x,y)$ está sobre la parábola si y sólo si, $d(P,F) = d(P,L)$, es decir:

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-(k+p))^2} \quad = \quad y - (k-p).$$

Elevando al cuadrado ambos miembros y simplificando:

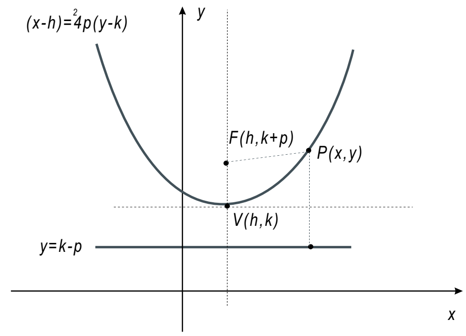
$$\begin{aligned}
(x-h)^2 + (y-(k+p))^2 &= (y-(k-p))^2 \\
(x-h)^2 + y^2 - 2y(k+p) + (k+p)^2 &= y^2 - 2y(k-p) + (k-p)^2 \\
(x-h)^2 - 2py + (k+p)^2 &= 2py + (k-p)^2 \\
(x-h)^2 - 2py + k^2 + 2pk + p^2 &= 2py + k^2 - 2pk + p^2 \\
(x-h)^2 - 2py + 2pk &= 2py - 2pk.
\end{aligned}$$

Nos queda:

$$(x-h)^2 \quad = \quad 4p(y-k). \tag{9.3}$$

Como antes, si $p > 0$, la parábola se abre hacia arriba como en la Figura 9.5 en la página 108 , y si $p < 0$, la parábola se abre hacia abajo.

Una forma alternativa, sencilla, rápida y elegante de obtener las ecuaciones canónicas anteriores se tiene partiendo de la forma de las ecuaciones con vértice en el origen y luego cambiar variables. Que el lector cambie $x \mapsto x - h$ y $y \mapsto y - k$ e interprete el significado de estos cambios.



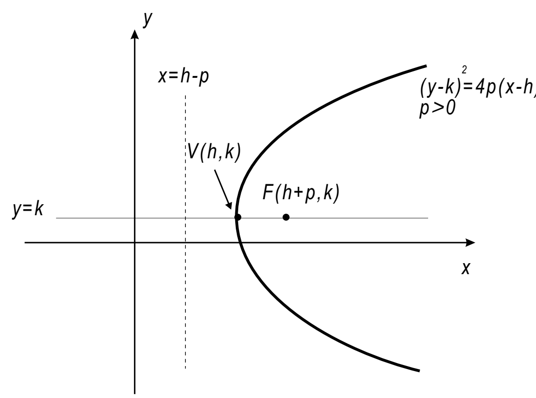
Una parábola con eje vertical y con vértice (h, k)

Figura 9.5

- Si la directriz es paralela al eje Y y el vértice de la parábola es $V(h,k)$, el eje de simetría es la recta horizontal $y = k$. Supongamos que el foco es el punto $F(h+p,k)$, entonces la directriz L de la parábola es la recta vertical $x = h-p$. De manera similar podemos ver que, en este caso, la forma canónica de la ecuación de la parábola es:

  (9.4) $$(y-k)^2 \quad = \quad 4p(x-h).$$

  Aquí, si $p > 0$, la parábola se abre hacia la derecha como en la Figura 9.6 , y si $p < 0$, la parábola



La parábola $(y-k)^2 = 4p(x-h)$

Figura 9.6

se abre hacia la izquierda.

Ejemplos

1. Determine la ecuación de la parábola que pasa por el origen, tiene vértice $V(-1,4)$ y su directriz es paralela al eje Y.

   Respuesta. Como el vértice de la parábola es $V(-1,4)$ y su directriz es paralela al eje Y, la forma canónica de su ecuación es:

   $$(y-4)^2 = 4p(x+1).$$

   Si la parábola pasa por el origen, entonces $(0,0)$ es solución de esta ecuación, es decir $(0-4)^2 = 4p(0+1)$. Por lo tanto $p = 4$ y la ecuación buscada es:

   $$(y-4)^2 = 16(x+1).$$

2. Encuentre el foco y la directriz de la parábola de ecuación $y^2 + 8y + 24 = 2x$.

Respuesta. Podemos completar cuadrados del lado derecho de la ecuación. Sumando y restado 16 nos queda:

$$2x = y^2 + 8y + 16 - 16 + 24.$$

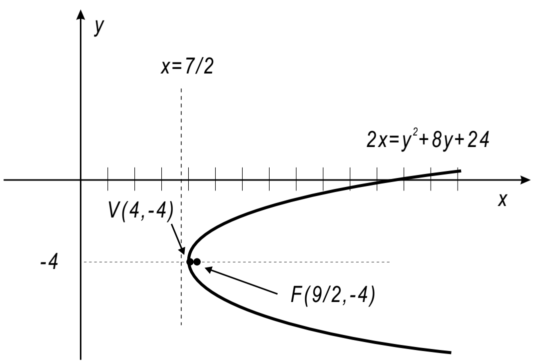
Esto es equivalente a:

$$\begin{aligned} y^2 + 8y + 16 + 8 &= 2x \\ (y+4)^2 + 8 &= 2x \\ (y+4)^2 &= 2x - 8 \end{aligned}$$

De aquí que la forma canónica de la ecuación de la parábola dada es:

$$(y+4)^2 = 2(x-4).$$

Por lo tanto, $p = \frac{1}{2}$, el foco es el punto $F(4 + \frac{1}{2}, -4) = F(\frac{9}{2}, -4)$ y la directriz es la recta vertical $x = \frac{7}{2}$, ver Figura 9.7 ,



La parábola $(y+4)^2 = 2(x-4)$

Figura 9.7

Ejercicios

1. Encontrar las coordenadas del foco y la ecuación de la directriz de cada una de las siguientes parábolas:

   (a) $x^2 = \frac{1}{2}y$

   (b) $x^2 = -4y$

   (c) $y^2 = 2x$

   (d) $-9x = 6y^2$

   (e) $\frac{1}{2}x = \frac{1}{8}y^2$

   (f) $y^2 = -\frac{1}{3}x$

   (g) $(y+5)^2 = \frac{4}{3}(x-6)$

   (h) $y^2 = -9(x-4)$

2. Escribir la ecuación de cada parábola que tenga las propiedades indicadas y graficar:

   (a) Foco en $(0, -3)$, directriz $y = 3$.

   (b) Directriz $y = -\frac{2}{3}$, vértice $(0, 0)$.

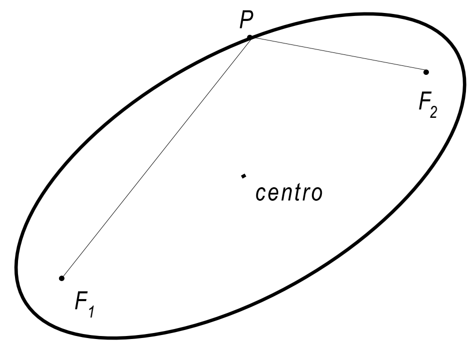
   (c) Vértice $(0, 0)$; eje vertical; el punto $(2, -2)$ está en la parábola.

   (d) Vértice $(-3, -2)$, directriz $x = -\frac{9}{2}$.

9.2 La Elipse

Definición: *Una **elipse** es el conjunto de todos los puntos P del plano (lugar geométrico) tales que la suma de las distancias de P a dos puntos fijos F_1 y F_2 del plano (llamados **focos**) es constante.*

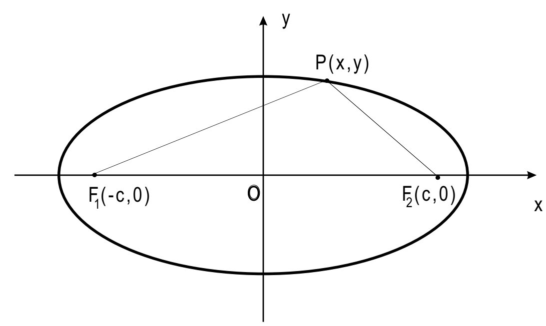
Llamaremos **centro** de la elipse al punto medio entre F_1 y F_2 (ver Figura 9.8).



Una elipse general

Figura 9.8

A continuación encontraremos las ecuaciones de las elipses que tienen como centro al punto $C(0,0)$ y como focos a los puntos $F_1(-c,0)$ y $F_2(c,0)$, $c > 0$ (ver Figura 9.9). Denotemos por $2a$ a la suma



Una elipse con centro $C(0,0)$ y con focos los puntos $F_1(-c,0)$ y $F_2(c,0)$

Figura 9.9

constante de las distancias de F_1 y F_2 a un punto P sobre la elipse (a es un parámetro adicional que se requiere para determinar la elipse). En la Figura 9.10 en la página 111 , podemos ver que $a > c$, pues la suma de las longitudes de dos lados de un triángulo ($d_1 + d_2 = 2a$) es mayor que la longitud del tercer lado ($2c$). Por definición $P(x,y)$ está en la elipse si y sólo si $d(P,F_1) + d(P,F_2) = 2a$, es decir:

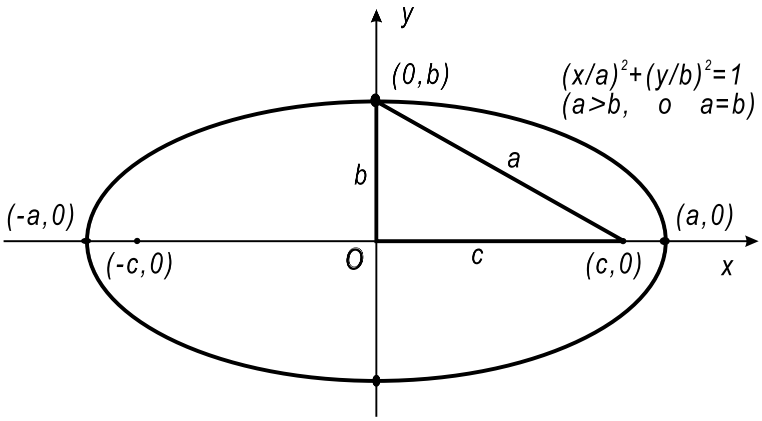
$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} \quad = \quad 2a.$$

O lo que es lo mismo:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} \quad = \quad 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Elevando al cuadrado ambos miembros y simplificando:

$$\begin{aligned}
(x+c)^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2 + y^2 \\
x^2 + 2cx + c^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + x^2 - 2cx + c^2 \\
a^2 - cx &= a\sqrt{(x-c)^2+y^2}.
\end{aligned}$$



Estudio de la ecuación de la elipse con centro $C(0,0)$ y con focos los puntos $F_1(-c,0)$ y $F_2(c,0)$

Figura 9.10

Elevando al cuadrado ambos miembros de esta última ecuación se obtiene:

$$\begin{aligned}
(a^2 - cx)^2 &= a^2[(x-c)^2 + y^2] \\
a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 &= a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 \\
a^4 - a^2c^2 &= a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 \\
a^2(a^2 - c^2) &= x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2.
\end{aligned}$$

Como $a^2 - c^2 > 0$, podemos poner $b^2 = a^2 - c^2$. Al dividir ambos lados por a^2b^2 obtenemos la forma canónica de la ecuación de una elipse con centro en el origen de coordenadas y focos $F_1(-c,0)$ y $F_2(c,0)$, $c > 0$:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Llamaremos **vértices** de la elipse a los puntos $V_1(-a,0)$ y $V_2(a,0)$ (que son los puntos donde la gráfica de la elipse interseca al eje X) y **eje mayor** al segmento de recta $\overline{V_1V_2}$ (en este caso paralelo al eje X). Los puntos donde la gráfica de la elipse interseca al eje Y son $M_1(-b,0)$ y $M_2(b,0)$. Llamaremos **eje menor** al segmento de recta $\overline{M_1M_2}$ (ver Figura 9.10).

De manera similar podemos ver que la forma canónica de la ecuación de una elipse con centro en el origen de coordenadas y focos $F_1(0,-c)$ y $F_2(0,c)$, $c > 0$, es:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

En este caso, los puntos $V_1(0,-a)$ y $V_2(0,a)$ (que son los puntos donde la gráfica de la elipse interseca al eje Y) son los vértices de la elipse y el segmento de recta $\overline{V_1V_2}$ es el eje mayor (paralelo al eje Y). Los puntos donde la gráfica de la elipse interseca al eje X son $M_1(0,-b)$ y $M_2(0,b)$ y el segmento de recta $\overline{M_1M_2}$ es el eje menor. Ver la Figura 9.11 en la página 112 .

Ejemplos

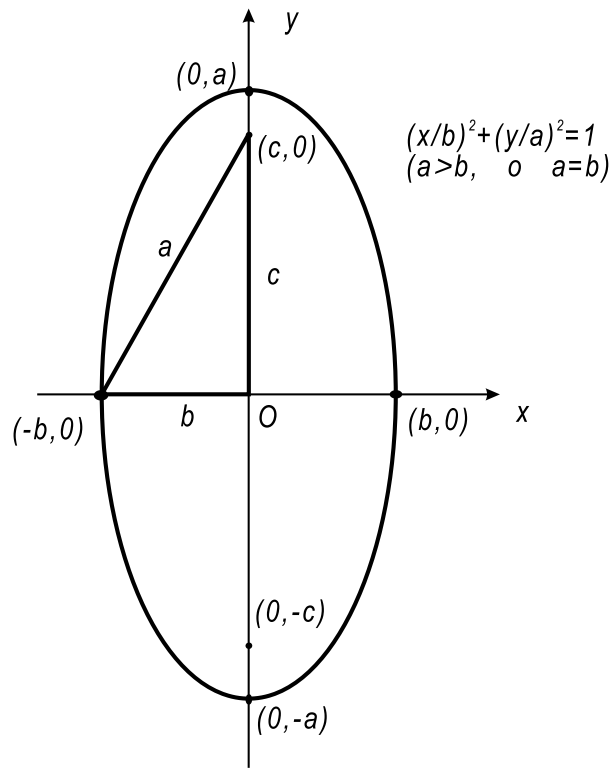
1. Encuentre los vértices y los focos de la elipse

   $$3x^2 + 4y^2 = 12.$$

   Respuesta. Si dividimos ambos miembros de la ecuación por 12 podemos reescribir la ecuación dada como

   $$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

   Por lo tanto, $a^2 = 4$, el eje mayor es paralelo al eje X y $c^2 = a^2 - b^2 = 4 - 3 = 1$. De aquí que, los focos son $F_1(-1,0)$ y $F_2(1,0)$ y los vértices son $V_1(-2,0)$ y $V_2(2,0)$.



Estudio de la ecuación de la elipse con centro $C(0,0)$ *y con focos los puntos* $(0,-c)$ *y* $(0,c)$

Figura 9.11

2. Determine la ecuación de la elipse con ejes paralelos a los ejes coordenados, que tiene un foco en $(0, 2)$, e interseca el eje Y en $y = 5$.
Respuesta. Como el foco está en el eje Y, la ecuación de la elipse debe ser de la
$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$
Además, $c = 2$, $a = 5$ y, por lo tanto, $b^2 = 25 - 4 = 21$. Entonces la ecuación buscada es:
$$\frac{x^2}{21} + \frac{y^2}{25} = 1.$$

9.2.1 La forma canónica de la ecuación de la elipse

Busquemos ahora la forma canónica de la ecuación de una elipse con centro (h, k) y ejes paralelos a los ejes coordenados (al igual que antes, denotaremos por $2a$ a la suma de las distancias de F_1 y F_2 a un punto P sobre la elipse).

- Si su eje mayor es paralelo al eje X y los focos de la elipse son $F_1(h - c, k)$ y $F_2(h + c, k)$, con un sencillo argumento de traslación de ejes se puede probar que la forma de la ecuación es:
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1.$$
Los vértices de la elipse son $V_1(h - a, k)$ y $V_2(h + a, k)$, es decir los puntos de corte de su gráfica con la recta horizontal $y = k$.
- Si su eje mayor es paralelo al eje Y y los focos de la elipse son $F_1(h, k - c)$ y $F_2(h, k + c)$, con un argumento de traslación de ejes se puede probar que la forma de la ecuación es:
$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1.$$
Los vértices de la elipse son $V_1(h, k - a)$ y $V_2(h, k + a)$, es decir los puntos de corte de su gráfica con la recta (vertical) $x = h$.

en ambos casos $a > c$ y $b^2 = a^2 - c^2$.

Ejemplos

1. Determine la forma canónica de la ecuación de la elipse que tiene focos $F_1(-1, -2)$ y $F_1(5, -2)$, y cuyo eje mayor mide 10 unidades.
Respuesta. El centro de la elipse es el punto medio entre los focos, es decir, $C(\frac{-1+5}{2}, \frac{-2-2}{2}) = C(2, -2)$. Sabemos que la distancia entre los focos es igual a $2c$ y que la longitud del eje mayor es igual a $2a$, entonces $c = 3$ y $a = 5$. Como $b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 9 = 16$ y los focos están sobre la recta horizontal $y = -2$, la forma canónica de la ecuación de la elipse es:
$$\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1.$$
2. Encuentre el centro y los focos de la elipse de ecuación $9x^2 + 16y^2 - 18x + 64y - 71 = 0$.
Respuesta. Para encontrar el centro de la elipse agrupamos los términos en x y los términos en y de la siguiente manera:
$$\begin{aligned}(9x^2 - 18x) + (16y^2 + 64y) &= 71\\ 9(x^2 - 2x) + 16(y^2 + 4y) &= 71.\end{aligned}$$
Completando cuadrado en cada una de las expresiones que están dentro de los paréntesis, obtenemos:
$$\begin{aligned}9(x^2 - 2x + 1 - 1) + 16(y^2 + 6y + 9 - 9) &= 71\\ 9(x^2 - 2x + 1) - 9 + 16(y^2 + 4y + 4) - 64 &= 71\\ 9(x^2 - 2x + 1) + 16(y^2 + 4y + 4) &= 71 + 9 + 64\\ 9(x-1)^2 + 16(y+2)^2 &= 144.\end{aligned}$$

Entonces, dividiendo ambos miembros de la última ecuación por 144 obtenemos la ecuación de la elipse:

$$\frac{(x-1)^2}{16}+\frac{(y+2)^2}{9}=1.$$

Por lo tanto, el centro de la elipse es el punto $C(1,-2)$, $a^2=16$, $b^2=9$, $c^2=a^2-b^2=7$ y los focos de la elipse son $F_1(1-\sqrt{7},-2)$, $F_1(1+\sqrt{7},-2)$.

1. Elaborar la gráfica de cada una de las siguientes elipses. Señalar las coordenadas del centro, los extremos de los ejes mayor y menor y los focos:

   (a) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$
   (b) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$
   (c) $9x^2+y^2=9$
   (d) $4x^2+9y^2=36$
   (e) $\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{4}=1$
   (f) $\frac{(x+2)^2}{4}+\frac{(y-3)^2}{9}=1$
   (g) $\frac{(x+2)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$

2. Escribir la ecuación de la elipse que tiene las propiedades dadas:

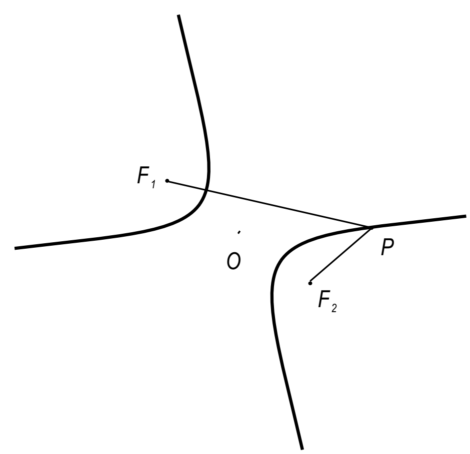
   (a) Centro en $(0,0)$; eje mayor horizontal con longitud 10, eje menor con longitud 6.
   (b) Centro en $(2,3)$, focos $(-2,3)$ y $(6,3)$; eje menor con longitud 8.
   (c) Centro en $(-5,0)$, focos $(-5,2)$ y $(-5,-2)$, $b=3$.

3. ¿Las circunferencias son elípses?

9.3 La Hipérbola

Definición: *Una* **hipérbola** *es el conjunto de todos los puntos P del plano tales que la diferencia de las distancias de P a dos puntos fijos F_1 y F_2 del plano (llamados* **focos***) es, en valor absoluto, una constante.*

Llamaremos **centro** de la hipérbola al punto medio entre F_1 y F_2 (ver Figura 9.12).



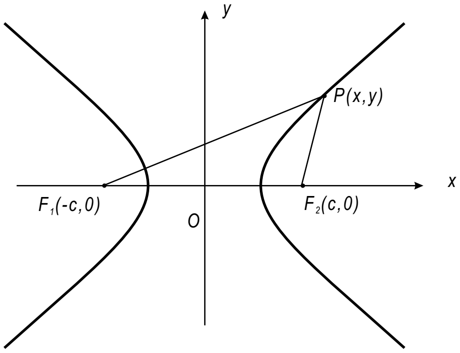
Una hipérbola

Figura 9.12

Supongamos que la hipérbola tiene como centro al punto $C(0,0)$ y como focos a los puntos $F_1(-c,0)$ y $F_2(c,0)$, $c>0$. Denotemos por $2a$ al valor absoluto de la diferencia constante de las distancias de F_1 y F_2 a un punto P sobre la hipérbola. Por definición, $P(x,y)$ está en la hipérbola si y sólo si se cumple:

(9.5) $$|d(P,F_2)-d(P,F_1)| \quad = \quad 2a.$$

En la Figura 9.13 en la página 115), podemos ver que:



La hipérbola $|d(P,F_2)-d(P,F_1)| = 2a$

Figura 9.13

$$d(P,F_2) < d(F_1,F_2) + d(P,F_1),$$

pues la suma de las longitudes de dos lados de un triángulo es mayor que la longitud del tercer lado. De la misma manera,

$$d(P,F_1) < d(F_1,F_2) + d(P,F_2).$$

Estas desigualdades son equivalentes a:

$$\begin{aligned} d(P,F_2)-d(P,F_1) &< d(F_1,F_2) \\ d(P,F_2)-d(P,F_1) &> -d(F_1,F_2). \end{aligned}$$

Es decir:

$$-d(F_1,F_2) < d(P,F_2)-d(P,F_1) < d(F_1,F_2).$$

De aquí que:

$$|d(P,F_2)-d(P,F_1)| \quad < \quad d(F_1,F_2)$$

y por lo tanto:

$$2a \quad < \quad 2c.$$

Para encontrar la canónica del la ecuación de la hipérbola con focos $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$ utilizamos la ecuación 9.5 que es equivalente a:

$$|\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2}| = 2a.$$

Elevando al cuadrado ambos miembros y simplificando:

$$\begin{aligned} (x+c)^2+y^2-2\sqrt{(x+c)^2+y^2}\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2 &= 4a^2 \\ 2x^2+2c^2+2y^2-2\sqrt{(x+c)^2+y^2}\sqrt{(x-c)^2+y^2} &= 4a^2 \\ x^2+c^2+y^2-2a^2 = \sqrt{(x+c)^2+y^2}\sqrt{(x-c)^2+y^2}. & \end{aligned}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de esta última ecuación se obtiene:

$$\begin{aligned}
(x^2+c^2+y^2)^2-4a^2x^2-4a^2c^2-4a^2y^2+4a^4 &= ((x+c)^2+y^2)((x-c)^2+y^2)\\
(x^2+c^2+y^2)^2-4a^2x^2-4a^2c^2-4a^2y^2+4a^4 &= [(x+c)(x-c)]^2+y^2(2x^2+2c^2)+y^4\\
(x^2+c^2)^2-4a^2x^2-4a^2c^2-4a^2y^2+4a^4 &= (x^2-c^2)^2\\
4x^2c^2-4a^2x^2-4a^2y^2 &= 4a^2c^2-4a^4\\
(c^2-a^2)x^2-a^2y^2 &= a^2(c^2-a^2).
\end{aligned}$$

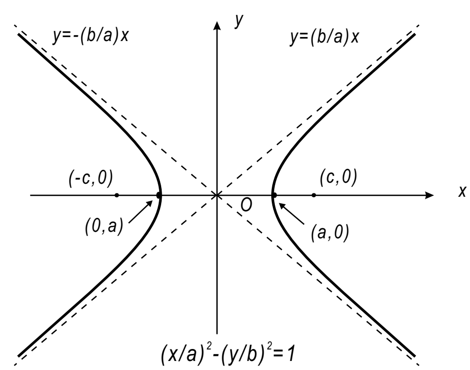
Como $c^2-a^2>0$, podemos tomar $b^2=c^2-a^2$. Al dividir ambos lados por a^2b^2 obtenemos la forma canónica de la ecuación de una hipérbola con centro en el origen de coordenadas y focos $F_1(-c,0)$ y $F_2(c,0)$, $c>0$:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2} \quad = \quad 1.$$

Llamaremos **vértices** de la hipérbola a los puntos $V_1(-a,0)$ y $V_2(a,0)$ (que son los puntos donde la gráfica de la hipérbola interseca al eje X) y **eje transversal** de la hipérbola al segmento de recta $\overline{V_1V_2}$ (en este caso paralelo al eje X). Las rectas cuyas ecuaciones son:

$$y=\pm\frac{b}{a}x,$$

son llamadas **asíntotas** de la hipérbola. (ver Figura 9.14).



La hipérbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

Figura 9.14

De manera similar podemos ver que la forma canónica de la ecuación de una hipérbola con centro en el origen de coordenadas y focos $F_1(0,-c)$ y $F_2(0,c)$, $c>0$, es:

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2} \quad = \quad 1.$$

En este caso, los puntos $V_1(0,-a)$ y $V_2(0,a)$ (que son los puntos donde la gráfica de la elipse interseca al eje Y) son los vértices de la hipérbola y el segmento de recta $\overline{V_1V_2}$ es el eje transversal (en este caso paralelo al eje Y). Las rectas cuyas ecuaciones son:

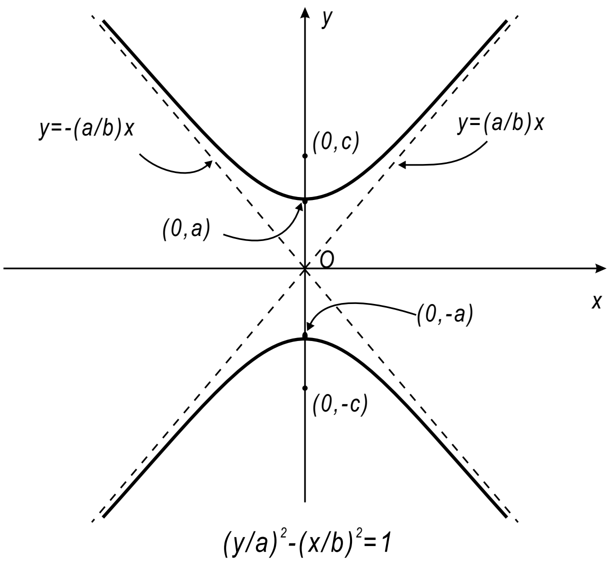
$$y=\pm\frac{a}{b}x,$$

son las asíntotas de la hipérbola. (ver Figura 9.15 en la página 117).

Ejemplos

1. Encuentre los focos y las asíntotas de la hipérbola

$$9x^2-y^2=9.$$



La hipérbola $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

Figura 9.15

Respuesta. Si dividimos ambos miembros de la ecuación por 9 podemos reescribir la ecuación dada como

$$x^2 - \frac{y^2}{9} = 1.$$

Por lo tanto, $a^2 = 9$, $b^2 = 1$ el eje transversal es paralelo al eje X y $c^2 = a^2 + b^2 = 10$. De aquí que, los focos son $F_1(-\sqrt{10}, 0)$ y $F_2(\sqrt{10}, 0)$ y las asíntotas son

$$y = \pm 3x$$

2. Determine la ecuación de la hipérbola que tiene vértices $V_1(-10, 0)$ y $V_2(10, 0)$ y tiene como asíntotas a las rectas de ecuaciones

$$y = \pm\frac{1}{2}x.$$

Respuesta. Como los vértices están en el eje X la ecuación de la hipérbola debe tener la forma

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Además, $a = 10$, $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$, es decir, $b = \frac{1}{2}a = 5$. La ecuación buscada es:

$$\frac{x^2}{100} - \frac{x^2}{25} = 1.$$

9.3.1 La forma canónica de la ecuación de la hipérbola

Busquemos ahora la forma canónica de la ecuación de una hipérbola con centro (h, k) y ejes paralelos a los ejes coordenados (al igual que antes, denotamos por $2a$ al valor absoluto de la diferencia de las distancias de F_1 y F_2 a un punto P sobre la hipérbola).

- Si su eje transversal es paralelo al eje X y los focos de la hipérbola son $F_1(h - c, k)$ y $F_2(h + c, k)$, y otra vez, vía una traslación de ejes se puede probar que la la ecuación es:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1.$$

Los vértices de la hipérbola son $V_1(h-a,k)$ y $V_2(h+a,k)$, es decir los puntos de corte de su gráfica con la recta horizontal $y=k$. Las rectas:

$$y-k=\pm\frac{b}{a}(x-h),$$

son las asíntotas de la hipérbola.

- Si su eje transversal es paralelo al eje Y y los focos de la hipérbola son $F_1(h,k-c)$ y $F_2(h,k+c)$, se puede probar (vía una traslación de ejes) que la ecuación es:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2} = 1.$$

Los vértices de la hipérbola son $V_1(h,k-a)$ y $V_2(h,k+a)$, es decir los puntos de corte de su gráfica con la recta vertical $x=h$. Las rectas:

$$y-k=\pm\frac{a}{b}(x-h),$$

son las asíntotas de la hipérbola.

en ambos casos $c>a$ y $b^2=c^2-a^2$.

Ejemplos

1. Determine la forma canónica de la ecuación de la hipérbola que tiene focos $F_1(5,-2)$ y $F_1(5,4)$ y un vértice en (5,3).

   Respuesta. Como conocemos los focos podemos encontrar el centro de la hipérbola $C(\frac{5+5}{2},\frac{-2+4}{2})=C(5,1)$ y el valor de $c=4-1=3$. Así mismo, como las coordenadas x de los focos son iguales, sabemos que el eje transversal de la hipérbola es vertical. Como la coordenada y del vértice (3) es mayor que la coordenada y del centro (1) entonces $a=3-1=2$ Por lo tanto, $b^2=c^2-a^2=9-4=5$ y la ecuación buscada es

$$\frac{(y-1)^2}{4}+\frac{(x-5)^2}{5}=1.$$

2. Encuentre el centro, los focos y las asíntotas de la hipérbola de ecuación

$$9x^2-y^2-36x+12y-9=0.$$

   Respuesta. Para encontrar el centro de la hipérbola,agrupamos los términos en x y los términos en y de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}(9x^2-36x)-(y^2-12y) &= 9\\ 9(x^2-4x)-(y^2-12y) &= 9.\end{aligned}$$

   Completando cuadrados en cada una de las expresiones que están dentro de los paréntesis, obtenemos:

$$\begin{aligned}9(x^2-4x+4-4)-(y^2-12y+36-36) &= 9\\ 9(x^2-4x+4)-36-(y^2-12y+36)+36 &= 9\\ 9(x-2)^2-(y-6)^2 &= 9.\end{aligned}$$

   Entonces, dividiendo ambos miembros de la última ecuación por 9 obtenemos la forma canónica de la ecuación de la hipérbola:

$$(x-2)^2-\frac{(y-6)^2}{9}=1.$$

   Por lo tanto, el centro de la hipérbola es el punto $C(2,6)$, $a^2=1$, $b^2=9$, $c^2=a^2+b^2=10$, los focos son $F_1(2-\sqrt{10},6)$, $F_1(2+\sqrt{10},6)$ y las rectas:

$$y-6=\pm\sqrt{10}(x-2),$$

   son las asíntotas de la hipérbola.

9.4 Ejercicios

1. Elaborar la gráfica de cada hipérbola. Señalar las coordenadas del centro, vértices y focos:

   (a) $\dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{9} = 1$

   (b) $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{25} = 1$

   (c) $\dfrac{y^2}{16} - \dfrac{x^2}{4} = 1$

   (d) $9x^2 - y^2 = 9$

   (e) $25y^2 - 9x^2 = 225$

   (f) $4x^2 - 9y^2 = 36$

   (g) $\dfrac{(y-1)^2}{16} - \dfrac{(x+2)^2}{4} = 1$

   (h) $\dfrac{(x+3)^2}{16} - \dfrac{(y-2)^2}{9} = 1$

2. Escribir la ecuación de la hipérbola que tenga las propiedades indicadas:

   (a) Centro $(0,0)$, focos $(\pm 6, 0)$, vértices $(\pm 4, 0)$.

   (b) Centro $(-2,3)$; eje transversal vertical con longitud 6, $c = 4$.

   (c) Centro $(4,4)$; vértices en $(\pm 4, 7)$, $b = 2$.

9.5 Ejercicios adicionales

1. Identificar cada cónica:

   (a) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$

   (b) $y = 2x^2 - 4x + 5$

   (c) $4x^2 + y^2 - 16x + 8y = -28$

   (d) $x^2 - 9y^2 - 2x - 8 = 0$

   (e) $x^2 + 4y^2 + 2x - 3 = 0$

   (f) $y = x^2 + 8x - 2$

2. Encontrar la ecuación del lugar geométrico de los puntos tales que la suma de sus distancias a $F_1(1,-3)$, $F_2(-1,-3)$ es $2\sqrt{3}$.

3. Demostrar que, en la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, la longitud del segmento trazado desde $(0,b)$ hasta el foco es a.

4. Hallar la ecuación de la parábola cuyo eje es paralelo al eje X, y que pasa por lo puntos $(0,0)$, $(8,-4)$ y $(3,1)$.

5. Hallar la ecuación de la elipse que pasa por los puntos $(1,3)$, $(-1,4)$, $(0, 3 - \frac{\sqrt{3}}{2})$, $(-3,3)$ y que tiene sus ejes paralelos a los ejes coordenados.

6. Hallar la ecuación de la hipérbola que pasa por los puntos $(3,-2)$ y $(7,6)$, tiene su centro en el origen y el eje transversal coincide con el eje X.

Capítulo 10

Límites de funciones

En la segunda mitad del siglo XVII, Isaac Newton (Woolsthorpe 1642 - Londres 1727) y Gottfried Wilhelm Leibnitz (Leipzig 1646 - Hannover 1716) sentaron las bases de esa gran invención matemática que es el cálculo infinitesimal. Se coronó así un enorme trabajo preparatorio en el que tomaron parte, a través de los siglos, muchos y muy destacados matemáticos, y cuyos inicios se remontan a los métodos de los antiguos griegos para el cálculo de áreas y volúmenes. Hoy podemos afirmar, sin dudarlo, que el concepto de *límite* constituye la herramienta fundamental del cálculo. Sin embargo, no fue sino hasta principos del siglo XIX que Augustin-Louis Cauchy (París 1789-Sceaux 1857) dió una sólida base matemática a la noción de límite, introduciendo de esa manera la «exactitud» en el análisis matemático. A lo largo de los casi 200 años que van desde Newton y Leibnitz hasta Cauchy, se produjeron extraordinarios avances en el análisis matemático y en sus aplicaciones a la física y la geometría, pero en un lenguaje que, a falta de rigor matemático, recurría a menudo a la intuición y se prestaba a interpretaciones confusas o erroneas. El concepto vago de «infinitamente pequeño», acuñado por Leibnitz, ha sido sustituido por el concepto preciso de límite, dado por Cauchy. Este es el concepto más importante del cálculo y, quizás, el más difícil también.

10.1 Límites de funciones de variable continua

Nos ocuparemos de enunciar de manera precisa la proposición:

«el límite de la función $f(x)$ es igual a L cuando x tiende a c»

10.1.1 Un ejemplo de límite

Para empezar, consideremos un caso particular, por ejemplo, la función $f(x) = (x+3x^2)/x$ (figura 10.1 en la página 122).

La función está definida para todos los valores reales de x distintos de 0, ya que, para $x = 0$, el denominador se anula. Si convenimos en considerar solamente valores de x próximos a 0, pero no el valor $x = 0$ (para el cual $f(x)$ ni siquiera está definida), podemos dividir entre x tanto el numerador como el denominador, encontrando la fórmula más sencilla $f(x) = 1 + 3x$, que, vale la pena subrayar, define la función $f(x)$ unicamente para $x \neq 0$. Si representamos el gráfico $y = f(x)$, vemos que, para valores de x «próximos» a 0, los valores correspondientes de $y = f(x)$ se hallan «próximos» a 1.

Para describir exactamente lo anteriormente expuesto, conviene hallar una fórmula explícita para la diferencia entre el valor $f(x)$ y el número 1:

$$f(x) - 1 = \frac{x + 3x^2}{x} - 1 = (1 + 3x) - 1 = 3x.$$

Es evidente que esta diferencia puede hacerse *tan pequeña como se quiera* limitando x a un entorno *suficientemente pequeño* de 0. En particular, si queremos que sea $\mid f(x) - 1 \mid < \frac{1}{10}$, bastará tomar x tal que

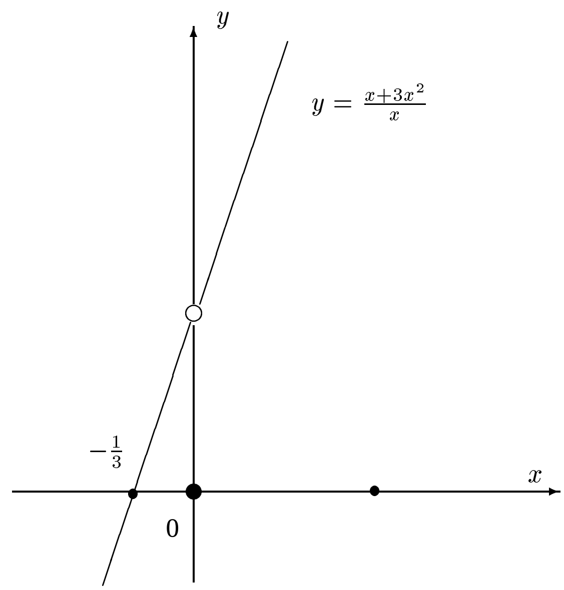


Figura 10.1 *El gráfico* $y = \frac{x+3x^2}{x}$

$3 \mid x \mid < \frac{1}{10}$, i.e., tal que $\mid x \mid < \frac{1}{30}$; si queremos que sea $\mid f(x) - 1 \mid < \frac{1}{100}$, bastará limitarse a considerar aquellos números x tales que $\mid x \mid < \frac{1}{300}$. En general: si ε es un número positivo cualquiera, no importa cuan pequeño, será $\mid f(x) - 1 \mid < \varepsilon$ siempre y cuando sea $\mid x \mid < \delta$, donde $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$. En efecto, si

$$x \neq 0 \text{ y } \mid x \mid < \frac{\varepsilon}{3} \text{ entonces } \mid f(x) - 1 \mid = 3 \mid x \mid < \varepsilon.$$

10.1.2 Definición por ε's y δ's

La situación planteada en el ejemplo anterior puede llevarse al marco general.

> **Definición:** *La función $f(x)$ tiene* **límite** *igual a L cuando x tiende a c si y sólo si, dado cualquier $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ (que depende de ε) tal que (para $x \in \mathrm{Dom} f$) si*
> $$x \neq c \quad y \quad \mid x - c \mid < \delta \text{ entonces } \mid f(x) - L \mid < \varepsilon.$$
> *(figura 10.2 en la página 123)*

Si $f(x)$ tiene límite igual a L cuando x tiende a c, escribimos

$$\lim_{x \to c} f(x) = L.$$

10.1.3 Otro ejemplo de límite

Pasemos a considerar otro ejemplo. Sea $f(x) = (x^3 - 1)/(x - 1)$. La función está definida unicamente para $x \neq 1$, ya que para $x = 1$ se anula el denominador. Vamos a analizar el comportamiento de la función cuando x tiende a 1. Como $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$ y estamos considerando valores próximos a 1 pero distintos de 1, obtenemos la fórmula más sencilla $f(x) = x^2 + x + 1$, al dividir tanto el numerador como el denominador de la espresión de $f(x)$ por $x - 1$. Esta fórmula vale unicamente para $x \neq 1$ pero nos indica que, al hacer x tender a 1, obtenemos como límite $L = 3$. Para demostrar que efectivamente $\lim_{x \to 1} \frac{x^3-1}{x-1} = 3$, recurrimos a la definición: dado cualquier $\varepsilon > 0$, queremos hallar $\delta > 0$ tal que si

$$x \neq 1 \quad y \quad \mid x - 1 \mid < \delta \text{ entonces } \left| \frac{x^3 - 1}{x - 1} - 3 \right| < \varepsilon.$$

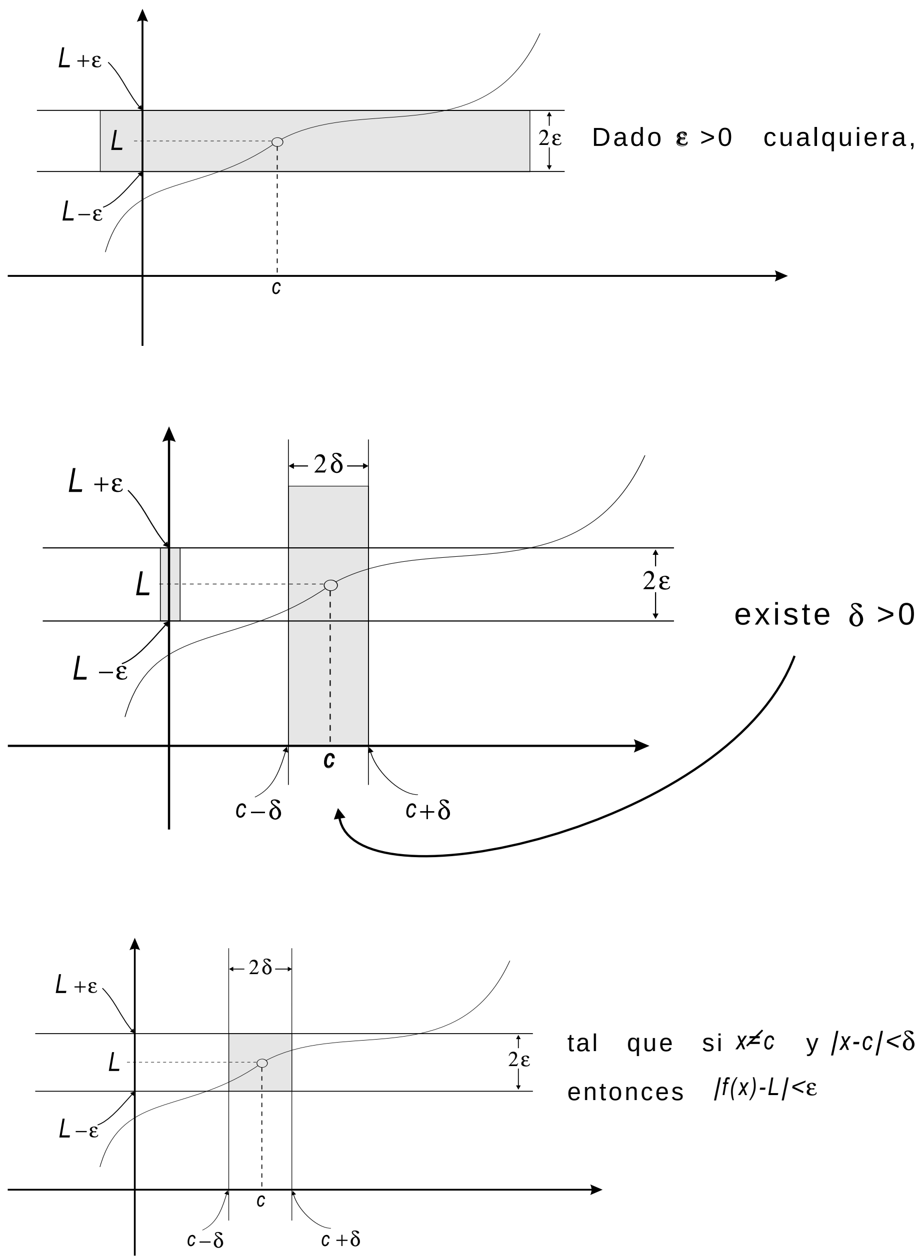


Figura 10.2 Definición por ε's y δ's

Vemos que si $x \neq 1$,

$$\frac{x^3-1}{x-1} - 3 = (x^2+x+1) - 3 = x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1),$$

de modo que

$$\left|\frac{x^3-1}{x-1} - 3\right| = \mid x+2 \mid \mid x-1 \mid .$$

En vista de que estamos analizando el comportamiento de la función $f(x)$ cuando x tiende a 1, nos conviene restringir nuestra atención a aquellos números $x \neq 1$ cuya distancia a 1 es, digamos, menor que 1. Estos son los números $x \neq 1$ en el intervalo $(0,2)$. Al poner esta restricción, estamos considerando $\delta_1 = 1$ como un primer «candidato» para nuestra elección de δ. Bajo la condición de pertenecer x al intervalo $(0,2)$, tenemos que $2 < x+2 < 4$, de donde concluimos que $\mid x+2 \mid < 4$ y, por tanto,

$$\left|\frac{x^3-1}{x-1} - 3\right| < 4 \mid x-1 \mid .$$

De modo que, si queremos que sea $\left|\frac{x^3-1}{x-1} - 3\right| < \varepsilon$, bastará tomar $\mid x-1 \mid < \frac{\varepsilon}{4}$. Esto indica que $\delta_2 = \frac{\varepsilon}{4}$ es el segundo «candidato» a δ.

Ahora la elección de δ puede hacerse tomando el menor número entre $\delta_1 = 1$ y $\delta_2 = \frac{\varepsilon}{4}$. En efecto, si $\delta = \min(1, \frac{\varepsilon}{4})$ y $x \neq 1$ verifica $\mid x-1 \mid < \delta$, entonces, por un lado, $x \in (0,2)$ de modo que $\left|\frac{x^3-1}{x-1} - 3\right| < 4 \mid x-1 \mid$, y, por otra parte, $\mid x-1 \mid < \frac{\varepsilon}{4}$ de donde $\left|\frac{x^3-1}{x-1} - 3\right| < \varepsilon$.

10.1.4 El límite es único

Es evidente que el número 0 tiene la propiedad de que su valor absoluto (¡que es 0!) es menor que cualquier número positivo ε. Esta propiedad caracteriza al número 0, en el sentido que si x es un número tal que $|x| < \varepsilon$, para todo $\varepsilon > 0$, entonces $x = 0$. Para demostrar el aserto recurrimos a una *prueba por reducción al absurdo*: supongamos que $x \in \mathbb{R}$ verifica que $|x| < \varepsilon$, para todo $\varepsilon > 0$, pero que $x \neq 0$. Entonces $|x| > 0$ (por ser $x \neq 0$) y, en particular, para $\varepsilon = \frac{1}{2}|x| > 0$, es $|x| < \frac{1}{2}|x|$ (puesto que $|x| < \varepsilon$, para todo $\varepsilon > 0$). De la desigualdad

$$|x| < \frac{1}{2}|x|, \text{ puesto que } |x| > 0,$$

sigue que ¡$1 < \frac{1}{2}$! (dividiendo ambos lados de la desigualdad por $|x|$). La contradicción viene de suponer que $x \neq 0$, por lo tanto, podemos concluir que $x = 0$. Hemos así establecido el siguiente resultado.

Lema 10 *$|x| < \varepsilon$, para todo $\varepsilon > 0$, si y sólo si $x = 0$.*

El Lema 10 provee una herramienta para tratar el siguiente tipo de situaciones: supongamos que tenemos dos números $x, y \in \mathbb{R}$. Para demostrar que $x = y$ basta establecer que $|x-y| < \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$, es decir, que $|x-y|$ es más pequeño que cualquier cantidad positiva. Armados con nuestra definición de límite, estamos ahora en condiciones de demostrar nuestro primer teorema.

Teorema 11 *Una función $f(x)$ no puede tener dos límites cuando x tiende a c. I.e. (es decir), si $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x\to c} f(x) = M$, entonces $L = M$.*

Prueba: *Aquí y en todo lo que sigue usaremos «$0 < \mid x-c \mid < \delta$» para indicar que «$x \neq c$ y $\mid x-c \mid < \delta$».*

Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que si $x \in \operatorname{Dom} f$ y

$$0 < \mid x-c \mid < \delta_1 \textit{ entonces } \mid f(x) - L \mid < \varepsilon,$$

y existe $\delta_2 > 0$ *tal que si* $x \in \mathrm{Dom} f$ *y*

$$0 <\mid x - c \mid < \delta_2 \textit{ entonces } \mid f(x) - M \mid < \varepsilon.$$

Hemos tenido que emplear dos números δ_1 *y* δ_2 *ya que no podemos asegurar que el número* $\delta > 0$ *que funciona en una definición vaya a funcionar en la otra. Sin embargo, ahora es fácil concluir que si* $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$*, i.e.,* δ *se elige como el mínimo entre* δ_1 *y* δ_2*, y* $x \in \mathrm{Dom} f$ *verifica*

$$0 <\mid x - c \mid < \delta \textit{ entonces } \mid f(x) - L \mid < \varepsilon \text{ y } \mid f(x) - M \mid < \varepsilon.$$

Así, si fijamos $x \in \mathrm{Dom} f$ *tal que* $0 <\mid x - c \mid < \delta$ *y aplicamos la desigualdad triangular, obtenemos*

$$\mid L - M \mid = \mid (L - f(x)) + (f(x) - M) \mid \leq \mid L - f(x) \mid + \mid f(x) - M \mid < 2\varepsilon,$$

donde ε *es cualquier número positivo.*

Esto, en virtud del Lema 10 en la página 124 , implica $L = M$*.* □

10.2 Límites laterales

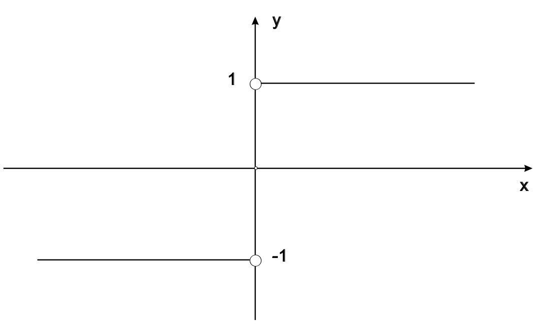
Aquí nos proponemos ilustrar, a través de algunos ejemplos, las situaciones en las que la función $f(x)$ no tiene límite cuando $x \to c$.

Ejemplos

1. Sea $f(x)$ la función definida por

   $$f(x) = \frac{|x|}{x}.$$

   Está claro que la función no está definida para $x = 0$ (figura 10.3).



El gráfico $y = \frac{|x|}{x}$

Figura 10.3

   Si $x > 0$ entonces $|x| = x$, de modo que $f(x) = 1$, y si $x < 0$ entonces $|x| = -x$ y, por tanto, $f(x) = -1$. Esto dice que la función $f(x)$ está definida por reglas distintas según sea $x > 0$ o $x < 0$: la regla para $x > 0$ le asigna el valor 1 a $f(x)$ y la regla para $x < 0$ le asigna el valor -1 a $f(x)$.

   Por tanto, si hacemos $x \to 0$, debemos distinguir dos casos: el caso que x esté a la *derecha* de 0, i.e., $x > 0$, y el caso que x esté a la *izquierda* de 0, i.e., $x < 0$.

   Para los números a la derecha de 0, la función se mantiene constantemente igual a 1, lo que sugiere que el límite de $f(x)$ cuando $x \to 0$ y $x > 0$ es igual a 1. Por otra parte, para los números a la izquierda de 0, la función es constante e igual a -1, lo que parece indicar que el límite de $f(x)$ cuando $x \to 0$ y $x < 0$ es igual a -1.

Basándonos en este caso particular, podemos plantear la situación general.

Definición: *Decimos que*

(i) el **límite por la derecha** *de la función $f(x)$ cuando $x \to c$ es igual a L si y sólo si, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in \operatorname{Dom} f$ y*

$$0 < x - c < \delta \text{ entonces } \mid f(x) - L \mid < \varepsilon;$$

(ii) el **límite por la izquierda** *de la función $f(x)$ cuando $x \to c$ es igual a M si y sólo si, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in \operatorname{Dom} f$ y*

$$0 < c - x < \delta \text{ entonces } \mid f(x) - M \mid < \varepsilon.$$

Escribimos, respectivamente,

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = L \text{ y } \lim_{x \to c^-} f(x) = M,$$

entendiéndose que los símbolos «$x \to c^+$» y «$x \to c^-$» denotan que «$x \to c$ y $x > c$» , en el primer caso, y que «$x \to c$ y $x < c$» , en el segundo.

Los límites por la derecha y por la izquierda se conocen también bajo el nombre de *límites laterales*.

Está claro que si el límite de $f(x)$ cuando $x \to c$ existe y es igual a L, entonces los límites laterales existen y son iguales a L. Reciprocamente, si los límites laterales existen y son iguales, digamos a L, entonces, dado $\varepsilon > 0$, existen $\delta_1, \delta_2 > 0$ tales que

$$\text{si } x \in \operatorname{Dom} f \text{ y } 0 < x - c < \delta_1 \text{ entonces } \mid f(x) - L \mid < \varepsilon$$

y

$$\text{si } x \in \operatorname{Dom} f \text{ y } 0 < c - x < \delta_2 \text{ entonces } \mid f(x) - L \mid < \varepsilon.$$

Si tomamos $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ y suponemos $0 < \mid x - c \mid < \delta$, tenemos que o bien

$$0 < x - c < \delta \leq \delta_1 \text{ o bien } 0 < c - x < \delta \leq \delta_2,$$

según sea $x > c$ o $x < c$, respectivamente. En cualquiera de los dos casos, es

$$\mid f(x) - L \mid < \varepsilon,$$

lo que demuestra que el límite de $f(x)$ cuando $x \to c$ existe y es igual a L.

La discusión anterior puede resumirse bajo la forma de una proposición.

Proposición 12 *El límite de $f(x)$ cuando $x \to c$ existe y es igual a L si y sólo si los límites laterales de $f(x)$ cuando $x \to c$ existen y son iguales a L.*

La proposición provee un criterio para mostrar que $\lim_{x \to c} f(x)$ *no* existe: este es el caso si los límites laterales existen pero son distintos.

En el ejemplo tenemos que

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1 \text{ y } \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1.$$

Como $1 \neq -1$, concluimos que $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$ no existe.

Empleamos los límites laterales también en el caso que la función $f(x)$ no esté definida en todo un entorno de c sino solamente para $x > c$ o para $x < c$. Este es el caso, por ejemplo, de la función $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x-2}}$, que está definida unicamente para $x > 2$, puesto que la expresión bajo la raíz cuadrada debe ser positiva. Dejamos como ejercicio verificar que $\lim_{x \to 2^+} \frac{x-2}{\sqrt{x-2}} = 0$.

Ejemplos

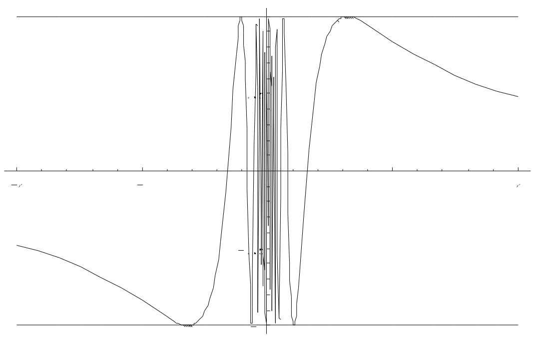
1. Sea $f(x)$ la función definida por

$$f(x) = \operatorname{sen}\frac{1}{x},$$

para $x \neq 0$ (figura 10.4 en la página 127).

Como la función seno toma valores unicamente en $[-1, 1]$, el límite de $\operatorname{sen}\frac{1}{x}$ cuando $x \to 0$, de existir, es un número en $[-1, 1]$.

Fijemos un intervalo I que contiene a 0. No importa el tamaño de I, podemos ver que la función $\operatorname{sen}\frac{1}{x}$ toma todos los valores posibles de -1 a 1 en el intervalo I. En otras palabras, fijado un intervalo I en el eje X que contiene a 0 y dado cualquier número $y \in [-1, 1]$ en el eje Y, existe algún número $x \in I$ tal que $\operatorname{sen}\frac{1}{x} = y$. Podemos ser más precisos, existe en I un número de la forma $x = \frac{1}{t+2n\pi}$, con n entero y $\operatorname{sen} t = y$, tal que $\operatorname{sen}\frac{1}{x} = \operatorname{sen}(t + 2n\pi) = \operatorname{sen} t = y$. Por ejemplo, si $y = 1$, entonces $x = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$ está en I, para algún entero n, y $\operatorname{sen}\frac{1}{x} = \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} + 2n\pi) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1$.



La función $f(x) = \operatorname{sen}\frac{1}{x}$

Figura 10.4

Estos argumentos indican que la función oscila un número infinito de veces entre -1 y 1 en cualquier intervalo, no importa cuan pequeño, que contenga al 0. Parece entonces que ningún número L en $[-1, 1]$ puede ser el límite de $\operatorname{sen}\frac{1}{x}$ cuando $x \to 0$.

Para demostrar esto formalmente, recurrimos a la definición: si no es cierto que «$\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen}\frac{1}{x} = L$» , entonces no se cumple que «dado cualquier $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $0 <\mid x \mid< \delta$ entonces $\left|\operatorname{sen}\frac{1}{x} - L\right| < \varepsilon$». Debemos pues ver que *existe* $\varepsilon_0 > 0$ tal que, *cualquiera* que sea $\delta > 0$, *existe* x_0 que verifica $0 <\mid x_0 \mid< \delta$ pero no $\left|\operatorname{sen}\frac{1}{x_0} - L\right| < \varepsilon_0$.

La figura 10.4) nos indica que $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$ cumple lo que deseamos establecer.

En efecto, el intervalo $(L - \frac{1}{2}, L + \frac{1}{2})$ no contiene a todos los números en $[-1, 1]$, de modo que podemos fijar y_0 en $[-1, 1]$ tal que $\mid y_0 - L \mid\geq \frac{1}{2}$. Para ese y_0 y para cualquier $\delta > 0$, existe un número $x_0 \neq 0$ en $(-\delta, \delta)$ tal que $\operatorname{sen}\frac{1}{x_0} = y_0$. En otras palabras, $0 <\mid x_0 \mid< \delta$ pero $\left|\operatorname{sen}\frac{1}{x_0} - L\right| \geq \varepsilon_0$.

2. Sea $f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$.

Está claro que la función no está definida para $x = 3$.

Si consideramos puntos de la forma $3 \pm \frac{1}{n}$, con $n = 1, 2, 3, 4, \cdots$ vemos que $f(3 \pm \frac{1}{n}) = n^2$. Así, $f(3 \pm 1) = 1$, $f(3 \pm \frac{1}{2}) = 4$, $f(3 \pm \frac{1}{3}) = 9$, $f(3 \pm \frac{1}{4}) = 16, \cdots$, $f(3 \pm \frac{1}{10^{10}}) = 10^{20}$, etc.. Esto nos indica que

$$\lim_{x\to 3} \frac{1}{(x-3)^2} = \infty,$$

en el sentido que precisamos a continuación.

10.3 Límites infinitos

Definición: *Decimos que la función $f(x)$* **tiende a ∞** *cuando x tiende a c si y sólo si, para cada $K>0$, existe $\delta>0$ tal que si $x\in \operatorname{Dom} f$ y*

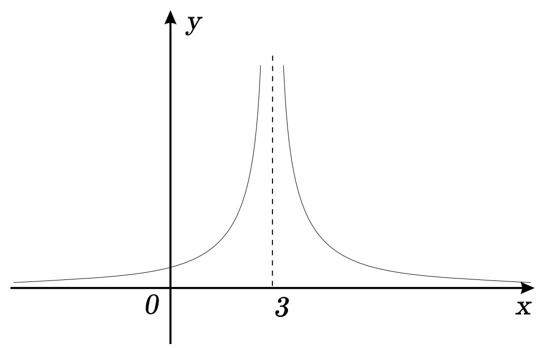
$0<|\ x-c\ |<\delta$ *entonces* $f(x)>K$,

y escribimos

$$\lim_{x\to c} f(x)=\infty.$$

Esta terminología resulta útil aunque no sea muy coherente, porque ∞ no es un número, es tan sólo un *símbolo*. Mientras la condición «$|\ f(x)-L\ |<\varepsilon$» expresa el hecho que los valores $f(x)$ están próximos a L, la condición «$f(x)>K$» expresa el hecho que los valores $f(x)$ son grandes.

Volvamos al ejemplo que nos interesa. Un dibujo con el gráfico $y=\frac{1}{(x-3)^2}$ (figura 10.5) muestra que, para valores de x próximos a 3, los valores de y son grandes.



El gráfico $y=\frac{1}{(x-3)^2}$

Figura 10.5

Formalmente, dado $K>0$, si queremos que sea $\frac{1}{(x-3)^2}>K$, bastará considerar aquellos puntos x tales que $0<|\ x-3\ |<\frac{1}{\sqrt{K}}$ (puesto que si $0\ <|\ x\ -\ 3\ |<\frac{1}{\sqrt{K}}$ entonces $0<(x-3)^2<\frac{1}{K}$, de modo que $\frac{1}{(x-3)^2}>K$).

Ejemplos

1. La función $f(x)=-\frac{1}{(x-3)^2}$ tiende a $-\infty$ cuando $x\to 3$.

   La analogía entre el comportamiento de esta función y la función dada en el Ejemplo 2 en la página 127 , cuando x tiende a 3, puede indicarse en los siguientes términos: mientras la condición «$f(x)>K$» expresa el hecho que $f(x)$ es grande, la condición «$f(x)<-K$» expresa que $f(x)$ tiende a $-\infty$.

Definición: *Decimos que la función $f(x)$* **tiende a $-\infty$** *cuando x tiende a c si y sólo si, para cada $K>0$, existe $\delta>0$ tal que si $x\in \operatorname{Dom} f$ y*

$0<|\ x-c\ |<\delta$ *entonces* $f(x)<-K$,

y escribimos

$$\lim_{x\to c} f(x)=-\infty.$$

Ejemplos

1. Para analizar el comportamiento de la función $f(x)=\frac{1}{x-3}$, al tender x a 3, debemos distinguir dos casos: cuando $x\to 3^+$, y cuando $x\to 3^-$.

Definición. *Decimos que*

(i) el **límite por la derecha** *de la función* $f(x)$ *es* ∞ *cuando* $x \to c$ *si y sólo si, dado cualquier* $K > 0$, *existe* $\delta > 0$ *tal que si* $x \in \operatorname{Dom} f$ *y*

$$0 < x - c < \delta \text{ entonces } f(x) > K;$$

(ii) el **límite por la derecha** *de* $f(x)$ *es* $-\infty$ *cuando* $x \to c$ *si y sólo si, dado cualquier* $K > 0$, *existe* $\delta > 0$ *tal que si* $x \in \operatorname{Dom} f$ *y*

$$0 < x - c < \delta \text{ entonces } f(x) < -K.$$

Escribimos

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = \infty \text{ y } \lim_{x\to c^+} f(x) = -\infty,$$

respectivamente.
Analogamente se definen los símbolos

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = \infty \text{ y } \lim_{x\to c^-} f(x) = -\infty.$$

(¡Convénzase que puede escribir las definiciones!)
En el ejemplo que nos ocupa

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{1}{x-3} = \infty \text{ y } \lim_{x\to 3^-} \frac{1}{x-3} = -\infty.$$

A continuación vamos a analizar otro ejemplos, pero antes conviene dejar claro que cuando decimos que
«$\lim_{x\to c} f(x)$ existe y es igual a L» ,
nos referimos a que
«existe un (¡ único!) *número real* L con la propiedad que dado cualquier $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in \operatorname{Dom} f$ y $0 <| x - c |< \delta$ entonces $| f(x) - L |< \varepsilon$» .
Por consiguiente, el límite de $f(x)$ cuando $x \to c$ no existe o bien cuando $f(x)$ tiende a $\pm\infty$ ya sea que $x \to c$ o $x \to c^{\pm}$ (como en los Ejemplos 2 en la página 127 , 1 en la página 128 y 1 en la página 128), o bien cuando la función tiene *infinitas oscilaciones* en cualquier intervalo que contenga a c (como es el caso para la función $f(x) = \operatorname{sen}\frac{1}{x}$ dada en el Ejemplo 1 en la página 127 que oscila de -1 a 1 alrededor de 0), o bien cuando la función tiene un *salto* en c (como la función $f(x) = \frac{x}{|x|}$ en el Ejemplo 1 en la página 125 , que salta de -1, a la izquierda de 0, a 1, a la derecha de 0) . Podemos resumir lo anterior en la figura 10.6 .

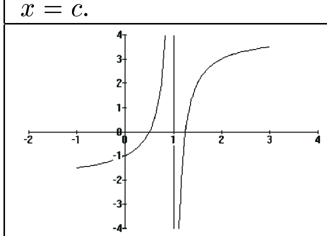
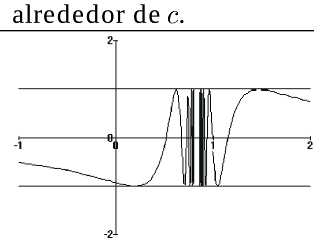
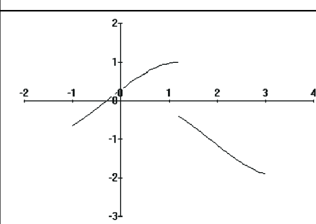
$\lim_{x\to c^{\pm}} f(x) = \pm\infty$		$\lim_{x\to c^+} f(x) \neq \lim_{x\to c^-} f(x)$
El gráfico de $y = f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x = c$.	El gráfico de $y = f(x)$ tiene infinitas oscilaciones alrededor de c.	El gráfico de $y = f(x)$ tiene un salto en c.
		

Figura 10.6 $\lim_{x\to c} f(x)$ no existe

10.4 Ejercicios

1. Usando la definición, demostrar que:

   (a) $\lim_{x\to -1}(5x+8)=3$
   (b) $\lim_{x\to -3}(2x+1)=-5$
   (c) $\lim_{x\to 1}(4x+3)=7$
   (d) $\lim_{x\to 3}(7-3x)=-2$
   (e) $\lim_{x\to -3}x^2=9$
   (f) $\lim_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x+1}=-2$
   (g) $\lim_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=6$
   (h) $\lim_{x\to a}x=a$
   (i) $\lim_{x\to 5}(x^2-3x)=10$
   (j) $\lim_{x\to 3}\dfrac{4}{x+1}=2$
   (k) $\lim_{x\to -3}\dfrac{1}{x}=-\dfrac{1}{3}$
   (l) $\lim_{x\to -4}\dfrac{1}{x+3}=-1$

2. Calcular los siguientes límites:

   (a) $\lim_{x\to 3}\dfrac{4x-5}{5x-1}$
   (b) $\lim_{x\to -1}\dfrac{2x+1}{x^2-3x+4}$
   (c) $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$
   (d) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2-x}{2x^2+5x-7}$
   (e) $\lim_{x\to 5}\dfrac{3x^2-13x-10}{2x^2-7x-15}$
   (f) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}$

3. Determinar si los límites de las siguientes funciones existen:

   (a) $f(x)=\begin{cases} x+4 & \text{si} \quad x\le -4 \\ 4-x & \text{si} \quad -4<x \end{cases}$ $\quad \lim_{x\to 4}f(x)$.

   (b) $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x\le 2 \\ 8-2x & \text{si} \quad 2<x \end{cases}$ $\quad \lim_{x\to 2}f(x)$.

   (c) $f(x)=\begin{cases} 2x+3 & \text{si} \quad x<1 \\ 2 & \text{si} \quad x=1 \\ 7-2x & \text{si} \quad 1<x \end{cases}$ $\quad \lim_{x\to 1}f(x)$.

   (d) $f(x)=\begin{cases} 2 & \text{si} \quad x<-2 \\ \sqrt{4-x^2} & \text{si} \quad -2\le x\le 2 \\ -2 & \text{si} \quad 2<x \end{cases}$ $\quad \lim_{x\to -2}f(x)$, $\lim_{x\to 2}f(x)$.

   (e) $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x<-1 \\ x^2 & \text{si} \quad -1\le x\le 1 \\ 1-x & \text{si} \quad 1<x \end{cases}$ $\quad \lim_{x\to 1}f(x)$, $\lim_{x\to -1}f(x)$.

4. Hallar los siguientes límites, si existen:

   (a) $\lim_{x\to 4}[\![x-3]\!]$
   (b) $\lim_{x\to 3}[\![x]\!]+[\![4-x]\!]$
   (c) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{|x-1|}$
   (d) $\lim_{x\to 2}[\![x]\!]-x$

5. Sea $f(x)=\begin{cases} kx-3 & \text{si} \quad x\le -1 \\ x^2+k & \text{si} \quad -1<x \end{cases}$.

   Hallar el valor de k para que $\lim_{x\to -1}f(x)$ exista.

6. Sea $f(x)=\begin{cases} 2x-a & \text{si} \quad x\le -1 \\ ax+2b & \text{si} \quad -3\le x\le 3 \\ b-5x & \text{si} \quad 3<x \end{cases}$.

   Hallar los valores de a y b para que $\lim_{x\to -3}f(x)$ y $\lim_{x\to 3}f(x)$ existan.

10.4.1 Límites al infinito

A veces es útil conocer el comportamiento de una función a medida que nos alejamos del orígen, hacia la derecha o hacia la izquierda.

Consideremos, por ejemplo, la función

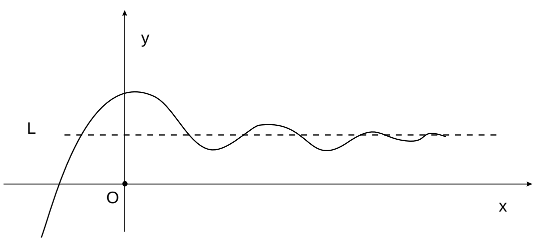
$$f(x) = \frac{1}{x}$$

y veamos qué ocurre si $x > 0$ es muy grande.

Si es, por ejemplo, $x > 1000$ entonces es $\frac{1}{x} < \frac{1}{1000}$. Si consideramos $x > 100000$, entonces $\frac{1}{x} < \frac{1}{100000}$. En general: para $x > N$, es $\frac{1}{x} < \frac{1}{N}$. Esto indica que para valores grandes de x, $\frac{1}{x}$ está cerca de 0. Escribimos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

El símbolo $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ se lee «límite de $f(x)$ cuando x tiende a infinito» , y un límite de la forma $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ se suele llamar *límite al infinito.* La figura 10.7 ilustra la situación general cuando es $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$.



$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

Figura 10.7

Definición. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ *significa que dado* $\varepsilon > 0$, *existe* $N > 0$ *tal que si*

$$x > N \textit{ entonces } \mid f(x) - L \mid < \varepsilon.$$

En el caso de la función $f(x) = \frac{1}{x}$, para la cual $L = 0$, basta elegir $N = \frac{1}{\varepsilon}$, como el lector puede comprobar por sí mismo.

No tenemos que restringirnos a considerar valores grandes de x, podemos admitir que $\mid x \mid$ tiende a infinito para valores positivos de x o para valores negativos de x. Así, por ejemplo,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Definición. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$ *significa que dado* $\varepsilon > 0$, *existe* $N > 0$ *tal que si*

$$x < -N \textit{ entonces } \mid f(x) - L \mid < \varepsilon.$$

Consideremos ahora la función

$$f(x) = x^3 - 2x$$

.

Si $x > 0$ es muy grande, entonces x^3 es mucho más grande que $2x$ y $f(x)$ es muy grande. El lector podrá convencerse sin mayores dificultades que

$$\lim_{x\to\infty} x^3 - 2x = \infty.$$

De la misma manera podemos ver que

$$\lim_{x\to-\infty} x^3 - 2x = -\infty.$$

Definición. *Decimos que*

(i) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ $\left(\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty\right)$ *si y sólo si, dado* $K > 0$ *existe* $N > 0$ *tal que si*

$x > N$ *entonces* $f(x) > K$ $(respectivamente,\ f(x) < -K)$;

(ii) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ $\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty\right)$ *si y sólo si, dado* $K > 0$ *existe* $N > 0$ *tal que si*

$x < -N$ *entonces* $f(x) > K$ $(respectivamente,\ f(x) < -K)$.

10.4.2 El límite de $(\operatorname{sen} x)/x$ cuando $x \to 0$

Si x indica la medida en radianes de un ángulo, entonces la expresión $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ tiene sentido para todo número real x excepto para $x = 0$. El lector con acceso a una calculadora puede computar valores aproximados de $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ para valores pequeños de x. La tabla 10.1 reporta valores aproximados de $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$.

grados	**x (radianes)**	**sen$x$**	**(sen$x$)/x**
10^o	$0,17453$	$0,17365$	$0,99495$
5^o	$0,08727$	$0,08716$	$0,99873$
2^o	$0,0349$	$0,03489$	$0,99971$
1^o	$0,01745$	$0,01745$	$1,00000$

Tabla 10.1 *Valores aproximados de* $(\operatorname{sen} x)/x$

La tabla, aunque aproximada, parece indicar que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

A continuación damos una «demostración» del hecho que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.

De la definición de las funciones trigonométricas en el círculo de radio igual a 1, si x es la medida en radianes del ángulo $B\hat{O}C$ (o, simplemente la medida del arco $\overset{\frown}{BC}$), entonces, para $0 < x < \frac{\pi}{2}$, tenemos que (figura 10.8 en la página 133)

$$\overline{CA} < \overset{\frown}{BC} < \overline{DB},$$

donde

$$\overline{CA} = \operatorname{sen} x; \quad \overset{\frown}{BC} = x; \quad \overline{DB} = \tan x,$$

de modo que

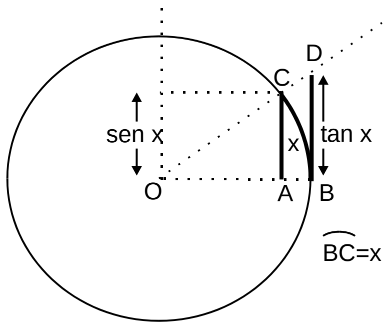
$$\operatorname{sen} x < x < \tan x.$$

De aquí, dividiendo entre sen$x$, obtenemos

$$1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x} \quad \text{o} \quad \cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1. \tag{10.1}$$

Ahora bien, para $0 < x < \frac{\pi}{2}$, es $\operatorname{sen}^2 x < x^2$, ya que $0 < \operatorname{sen} x < x$, y también $\cos^2 x < \cos x$, puesto que $0 < \cos x < 1$. Por tanto,

$$\cos x > \cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x > 1 - x^2,$$



$\operatorname{sen} x; x; \tan x$

Figura 10.8

i.e.,

(10.2) $$1 - x^2 < \cos x.$$

Combinando (10.1) y (10.2), obtenemos

(10.3) $$1 - x^2 < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1,$$

bajo la condición de ser $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

En realidad, (10.3) vale también para $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, puesto que

$$\frac{\operatorname{sen}(-x)}{-x} = \frac{-\operatorname{sen} x}{-x} = \frac{\operatorname{sen} x}{x} \text{ y } (-x)^2 = x^2.$$

A partir de (10.3), concluimos que si $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ entonces

$$\left|\frac{\operatorname{sen} x}{x} - 1\right| = 1 - \frac{\operatorname{sen} x}{x} < x^2.$$

Luego, dado $\varepsilon > 0$, si queremos que sea

$$\left|\frac{\operatorname{sen} x}{x} - 1\right| < \varepsilon, \text{ para todo } 0 < |x| < \delta,$$

bastará escoger $\delta = \sqrt{\varepsilon}$.

Esto prueba que efectivamente

(10.4) $$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

El límite (10.4) juega un papel especial en el cálculo de las derivadas de las funciones seno, coseno y tangente además de que permite obtener muchos otros límites trigonométricos. Por ejemplo,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1, \text{ ya que } \frac{\tan x}{x} = \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x}, \text{ y } \lim_{x \to 0} \cos x = 1.$$

En el cálculo anterior, hemos asumido como cierto que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \left(\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) \left(\frac{1}{\lim\limits_{x \to 0} \cos x}\right),$$

relación que intuimos debe cumplirse, puesto que, en este caso particular, *existen* ambos límites

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}, \text{ y } \lim_{x \to 0} \cos x,$$

siendo este último distinto de cero.

En las páginas que siguen nos ocuparemos de discutir estas y otras relaciones entre límites.

10.4.3 Propiedades de los límites

Consideremos la función

$$f(x) = x \ \mathrm{sen}\frac{1}{x}.$$

La función no está definida para $x = 0$, (figura 10.9 en la página 134). Sin embargo, para todo $x \neq 0$,

$$\left| x \ \mathrm{sen}\frac{1}{x} \right| = \mid x \mid \ \left| \mathrm{sen}\frac{1}{x} \right| \leq \mid x \mid \tag{10.5}$$

puesto que el valor absoluto del seno de cualquier arco está acotado por 1.

La relación 10.5 indica que

$$\lim_{x\to 0} x \ \mathrm{sen}\frac{1}{x} = 0.$$

Para convencerse de este hecho basta notar que, dado $\varepsilon > 0$, al escoger $\delta = \varepsilon$, se cumple que si $0 < |x| < \delta$ entonces $|x \, \mathrm{sen}\frac{1}{x}| < \varepsilon$.

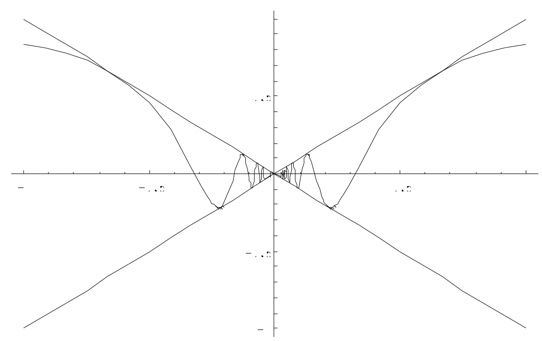


Gráfico de $y = x\,\mathrm{sen}(1/x)$

Figura 10.9

Es conviente observar que $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$,

$$\lim_{x\to 0} \mathrm{sen}\frac{1}{x} \text{ no existe}$$

(Ejemplo 1 en la página 127) pero que $\lim\limits_{x\to 0} x \ \mathrm{sen}\frac{1}{x}$ existe y es igual a 0. Este ejemplo muestra que el límite del producto de dos funciones puede existir aunque el límite de una de las dos funciones no exista. Es preciso, por tanto, ser cuidadosos al analizar el límite del producto de dos funciones de las cuales al menos una no tiene límite. El límite del producto puede que exista como en el ejemplo con el que iniciamos esta discusión o puede que no exista como en el caso de las funciones $|x|$ y $\frac{1}{x}$. En efecto, para estas funciones, es $\lim\limits_{x\to 0} |x| = 0$ pero no existen ni $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$ (compare con el Ejemplo 1 en la página 128) ni $\lim\limits_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ (Ejemplo 1 en la página 125).

Por el contrario, el límite del producto de dos funciones que tienen *ambas* límite es *siempre* el producto de los límites. Esta es una propiedad muy útil de los límites. Otras propiedades se refieren a las demás operaciones algebraicas de suma y cociente de funciones.

Teorema 13 *Supongamos que*

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \text{ y } \lim_{x\to c} g(x) = M.$$

Entonces

(a) $\lim\limits_{x\to c} f(x) + g(x) = L + M;$

(b) $\lim_{x\to c} f(x)g(x) = L.M$;

(c) $\lim_{x\to c} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{L}$, *siempre y cuando sea* $L \neq 0$.

En particular:

(d) $\lim_{x\to c} k\, f(x) = k\, L$, *para toda constante* $k \in \mathbb{R}$;

(e) $\lim_{x\to c} f(x) - g(x) = L - M$;

(f) $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$, *siempre y cuando sea* $M \neq 0$.

Podemos reemplazar $x \to c$ por $x \to \pm\infty$ o $x \to c^{\pm}$, en el sentido que las propiedades *(a)—(f)* valen también para límites al infinito y límites laterales.

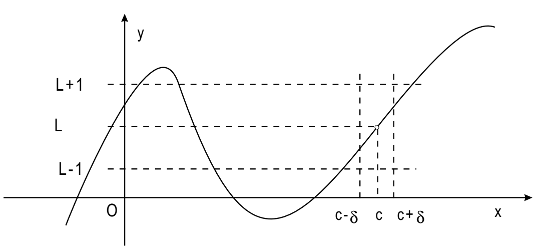
Para probar el Teorema 13 en la página 134 recurrimos al siguiente resultado.

Proposición 14 *Si el límite de $f(x)$ cuando $x \to c$ existe, entonces $f(x)$ es acotada en un intervalo que contiene a c, con la posible excepción del punto c. I.e., existen $\delta > 0$ y $m,\ M \in \mathbb{R}$ tales que $m \leq f(x) \leq M$, para todo $x \in Dom f$ tal que $0 < |x - c| < \delta$.*

En la hipótesis podemos reemplazar el límite de $f(x)$ cuando $x \to c$ por los límites al infinito o los límites laterales, pero en la conclusión, la condición de ser $f(x)$ acotada se cumple en un intervalo de la forma (N, ∞) o de la forma $(-\infty, -N)$ según $x \to \infty$ o $x \to -\infty$, respectivamente, o en un intervalo de la forma $(c, c+\delta)$ o de la forma $(c-\delta, c)$ según $x \to c^+$ o $x \to c^-$, respectivamente.

Prueba: *(de la Proposición 14) Un dibujo permite interpretar el resultado que deseamos demostrar (figura 10.10).*

Como $\lim_{x\to c} f(x) = L$, entonces, en particular, a $\varepsilon = 1$ corresponde $\delta > 0$ tal que si $x \in \operatorname{Dom} f$ y $0 < |x - c| < \delta$, entonces $L - 1 < f(x) < L + 1$. La demostración está completa si tomamos $m = L - 1$



Si $f(x)$ tiene límite en c entonces $f(x)$ es acotada alrededor de c

Figura 10.10

y $M = L + 1$. De la demostración sigue además que si $\mu = \max\{|m|, |M|\}$, entonces $|f(x)| \leq \mu$, para todo $x \in \operatorname{Dom} f$ tal que $0 < |x - c| < \delta$. Esto es así puesto que

$$M \leq |M| \leq \mu \text{ y } m \geq -|m| \geq -\mu, \text{ de modo que } -\mu \leq m \leq f(x) \leq M \leq \mu.$$

□

Hemos así demostrado la proposición 14 como también el siguiente corolario.

Corolario 15 *Si $\lim_{x\to c} f(x) = L$, entonces existen $\delta > 0$ y $\mu > 0$ tales que $|f(x)| < \mu$, para todo $x \in \operatorname{Dom} f$ tal que $0 < |x - c| < \delta$.*

Prueba: *(del Teorema 13 en la página 134) Antes que nada observemos que* (d), (e) *y* (f) *siguen de* (a), (b) *y* (c) *y del hecho que, para toda constante $k \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to c} k = k$. En efecto si vale* (b) *entonces* (d) *sigue de*

$$\lim_{x\to c} k\, f(x) = (\lim_{x\to c} k)(\lim_{x\to c} f(x)) = kL.$$

En particular,

$$\lim_{x\to c} -g(x) \;=\; \lim_{x\to c} (-1)g(x) \;=\; (-1)M \;=\; -M.$$

De modo que si vale (a) *entonces se tiene* (e) *puesto que*

$$\lim_{x\to c} f(x) - g(x) \;=(\lim_{x\to c} f(x)) + (\lim_{x\to c} -g(x)) \;=\; L - M.$$

Además, si valen (b) *y* (c) *entonces también vale* (f) *ya que*

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} \;=(\lim_{x\to c} f(x)).(\lim_{x\to c} \frac{1}{g(x)}) \;=\; L.\frac{1}{M} \;=\; \frac{L}{M}.$$

Aquí demostraremos (b) *y* (c) *mientras que* (a) *quedará como ejercicio para el lector.*
Para verificar que

$$\lim_{x\to c} f(x)g(x) = LM, \text{ debemos analizar la expresión } |f(x)g(x) - LM|.$$

De la aplicación de la desigualdad triangular obtenemos

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - LM| \;&=\; |(f(x)g(x) - f(x)M) + (f(x)M - LM)| \\ &\le\; |(f(x)|\,|g(x) - M| \;+\; |M|\,|f(x) - L|. \end{aligned}$$

Sabemos que dado $\varepsilon > 0$, existen $\delta_1,\ \delta_2 > 0$ tales que, para $x \in \operatorname{Dom} f$,

(10.6) *si* $0 < |x - c| < \delta_1$ *entonces* $|f(x) - L| < \varepsilon$,

(10.7) *si* $0 < |x - c| < \delta_2$ *entonces* $|g(x) - L| < \varepsilon$.

Sabemos además que existen δ_3 y $\mu > 0$ tales que, para $x \in \operatorname{Dom} f$,

si $0 < |x - c| < \delta_3$ *entonces* $|f(x)| < \mu$.

Así, si $\delta = \min\{\delta_1,\ \delta_2,\ \delta_3\}$ y (para $x \in \operatorname{Dom} f$) $0 < |x - c| < \delta$ entonces

$$|f(x)g(x) - LM| < \mu\varepsilon + |M|\varepsilon = (\mu + |M|)\varepsilon.$$

En las ecuaciones 10.6 y 10.7, podemos reemplazar ε por $\frac{\varepsilon}{\mu+|M|}$ puesto que puede interpretarse que las expresiones $|f(x) - L|$ y $|g(x) - M|$ son más pequeñas que cualquier cantidad positiva, por ejemplo, $\frac{\varepsilon}{\mu+|M|}$, si x pertenece a adecuados intervalos alrededor de c expresados en términos de ciertos $\delta_1,\ \delta_2 > 0$.

De esta forma podemos concluir que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para $x \in \operatorname{Dom} f$,

si $0 < |x - c| < \delta$ *entonces* $|f(x)g(x) - LM| < \varepsilon$.

Para mostrar (c)*, consideremos ahora la expresión*

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{L}\right| = \frac{|f(x) - L|}{|L|\,|f(x)|}.$$

Claramente, esta expresión carece de sentido si $f(x) = 0$ en las proximidades del punto c y si $L = 0$. El imponer la condición $L \neq 0$ garantiza que la expresión bajo exámen está bien definida. En efecto si $\lim_{x\to c} f(x) = L \neq 0$, entonces a $\varepsilon = \frac{|L|}{2}$ (que es positivo por ser $L \neq 0$) corresponde $\delta_4 > 0$ tal que, para $x \in \operatorname{Dom} f$,

si $0 < |x - c| < \delta_4$ *entonces* $L - \dfrac{|L|}{2} < f(x) < L + \dfrac{|L|}{2}$.

Por tanto, si $L > 0$ entonces $|L| = L$ y

$$f(x) > L - \frac{|L|}{2} = \frac{L}{2} > 0,$$

y si $L < 0$ *entonces* $|L| = -L$ *y*

$$f(x) < L + \frac{|L|}{2} = \frac{L}{2} < 0.$$

En consecuencia, para $x \in \operatorname{Dom} f$*,*

$$\textit{si } 0 < |x - c| < \delta_4 \textit{ entonces } |f(x)| > \frac{|L|}{2}.$$

Obtenemos pues que si $x \in \operatorname{Dom} f$ *y* $0 < |x - c| < \delta_4$ *entonces*

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{L}\right| < \frac{2}{L^2}|f(x) - L|, \textit{ puesto que } \frac{1}{|f(x)|} < \frac{2}{|L|}.$$

Luego, si $\delta = \min(\delta_1, \delta_4)$ *y (para* $x \in \operatorname{Dom} f$*)* $0 < |x - c| < \delta$ *entonces*

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{L}\right| < \frac{2}{L^2}\varepsilon.$$

Reemplazamos ε *por* $\frac{L^2}{2}\varepsilon$ *y concluimos que, para* $x \in \operatorname{Dom} f$*,*

$$\textit{si } 0 < |x - c| < \delta \textit{ entonces } \left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{L}\right| < \varepsilon.$$

□

Teorema 16 *Si* $\lim_{x\to a} g(x) = b$ *y* $\lim_{x\to b} f(x) = f(b)$ *entonces* $\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(b)$*.*

Podemos reemplazar $\lim_{x\to a} g(x) = b$ en la hipótesis por $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = b$ o $\lim_{x\to c^\pm} g(x) = b$, pero en la conclusión del teorema debemos tomar $\lim_{x\to\pm\infty} f(g(x)) = f(b)$ o $\lim_{x\to c^\pm} f(g(x)) = f(b)$, respectivamente. También podemos suponer que $g(x)$ tiende a b pero es $g(x) \geq b$ y $\lim_{x\to b^+} f(x) = f(b)$ o que $g(x)$ tiende a b pero es $g(x) \leq b$ y $\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$.

Queremos apuntar también que la hipótesis de ser $\lim_{x\to b} f(x) = f(b)$ es esencial, en el sentido que si $\lim_{x\to a} g(x) = b$ y $\lim_{x\to b} f(x) = L$ entonces no podemos dar por seguro que $\lim_{x\to a} f(g(x)) = L$. Consideremos, por ejemplo,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \\ x & \text{si } x > 1 \end{cases}, \quad g(x) = \left[x + \frac{1}{2}\right].$$

Entonces $\lim_{x\to 1} g(x) = 1$, $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$ pero $\lim_{x\to 1} f(g(x)) = 0$ ¡Compruebelo usted mismo! Sírvase para ello de los gráficos representados en la figura 10.11 en la página 138 . Otro ejemplo está dado por

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}, \; g(x) = 1.$$

Aquí $f(x)$ no está definida en $x = 1$, de manera que $f(g(x))$ no está definida para ningún valor de x. Así que, aún cuando $\lim_{x\to a} g(x) = 1$ y $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$, ¿qué sentido tiene la expresión «$\lim_{x\to a} f(g(x))$»?

Prueba: *Dado* $\varepsilon > 0$*, existe* $\delta > 0$ *tal que si* $|x - b| < \delta$ *entonces* $|f(x) - f(b)| < \varepsilon$ *y a* $\delta > 0$ *le corresponde* $\delta_1 > 0$ *tal que si* $0 < |x - a| < \delta_1$ *entonces* $|g(x) - b| < \delta$*. Así, si* $0 < |x - a| < \delta_1$ *entonces por ser* $|g(x) - b| < \delta$*, resulta* $|f(g(x)) - f(b)| < \varepsilon$*.* □

Pasemos a considerar algunos ejemplos.

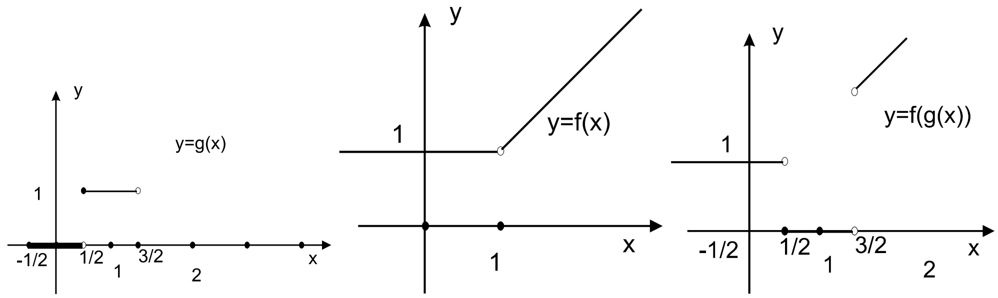


Figura 10.11 Gráficos $y = g(x), \; y = f(x),$ e $y = f(g(x))$

Ejemplos

6. Para $p \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^p} = 0$$

puesto que

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ y } \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^p} = \underbrace{(\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x}).(\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x})\dots(\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x})}_{p \text{ veces}},$$

de acuerdo con el Teorema 13, (b).

7. Para $r \in Q$ y $r > 0$,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^r} = 0.$$

En efecto, $r = \frac{p}{q}$, con $p, q \in N$, de modo que, por el Teorema 16 en la página 137 ,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{p/q}} = (\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^p})^{1/q} = 0$$

puesto que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^p} = 0 \text{ y } \lim_{x\to 0^+} x^{1/q} = 0^{1/q} = 0.$$

(Observe que $\frac{1}{x^p}$ *decrece* a 0 cuando $x \to \infty$ y que $f(x) = x^{1/q}$ está definida unicamente para x *positivo*)

8. A partir del Ejemplo 6 podemos resolver límites cuanto $x \to \pm\infty$ para expresiones racionales, i.e., de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)}$, con $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios. Consideremos, por ejemplo,

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 + 25x - 32}{6x^3 + 21x^2 + 7}.$$

Dividimos tanto el numerador como el denominador por la mayor potencia de x que es, en este caso, x^3, y aplicamos el Teorema 13, (d), (a), (e) y (f) para obtener

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 + 25x - 32}{6x^3 + 21x^2 + 7} &= \\ = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{25}{x^2} - \frac{32}{x^3}}{6 + \frac{21}{x} + \frac{7}{x^3}} &= \\ = \frac{0 + 25 \cdot 0 - 32 \cdot 0}{6 + 21 \cdot 0 + 7 \cdot 0} &= 0.\end{aligned}$$

9. A partir de los Ejemplos 6 y 7 , podemos resolver límites cuando $x \to \infty$ para expresiones que involucren radicales. Consideremos, por ejemplo,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}+3x}{2x+7}.$$

Dividimos tanto el numerador como el denominador de $f(x) = \frac{\sqrt{x}+3x}{2x+7}$ por x y aplicamos el Teorema 13, (d), (a) y (f) para obtener

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}+3x}{2x+7} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}+3}{2+\frac{7}{x}} = \frac{0+3}{2+7.0} = \frac{3}{2}.$$

10. Para resolver el

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{2x-1}-1}{\sqrt{x}-1}$$

multiplicamos y dividimos por $(\sqrt{2x-1}+1)(\sqrt{x}+1)$ y aplicamos el Teorema 13. Así obtenemos

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{2x-1}-1}{\sqrt{x}-1} = \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{2x-1}-1)(\sqrt{2x-1}+1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(\sqrt{2x-1}+1)} = \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{(2x-2)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{2x-1}+1)} = \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{2(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{2x-1}+1)} = \frac{2\cdot 2}{2} = 2. \end{aligned}$$

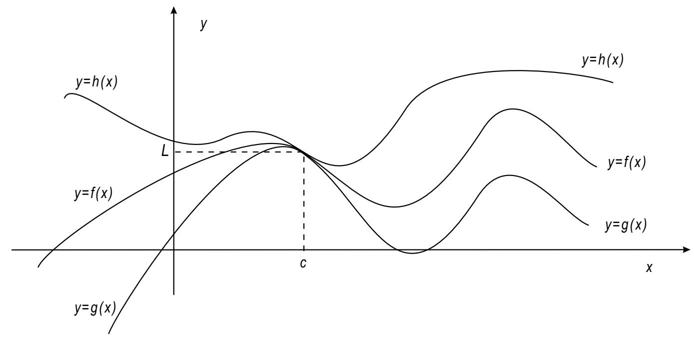
10.4.4 Ejercicios

Calcular los siguientes límites:

1. $\lim_{x\to -\infty} \frac{3x-5}{2x+3}$
2. $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+5x-1}{x^2-2}$
3. $\lim_{x\to\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2+1}+x}$
4. $\lim_{x\to -\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2+1}+x}$
5. $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+x}}{\sqrt{x^2+x+1}+x}$
6. $\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{4x^2+x+1}+\sqrt{x^2+x}}{\sqrt{9x^2+x+2}+3x}$
7. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{\operatorname{sen} 3x}$
8. $\lim_{x\to 0} \frac{x \operatorname{sen} x}{\cos x - 1}$
9. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan 3x}{2x}$
10. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{3x}$
11. $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$
12. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \operatorname{sen} x}{x^3}$
13. $\lim_{x\to\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)$
14. $\lim_{x\to -\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)$.

10.4.5 Ley del Sandwich

Otra propiedad útil de los límites es la que se conoce bajo el nombre de *«Ley del Sandwich»*. Esta se relaciona con el hecho de que los límites preservan las desigualdades entre funciones. La idea es que si $f(x)$ está *«atrapada»* entre $g(x)$ y $h(x)$ en un intervalo alrededor de c y $g(x)$ y $h(x)$ tienen el *mismo* límite L cuando $x \to c$ entonces también $f(x)$ debe tender a L cuando $x \to c$ (figura 10.12 en la página 140).



Ley del Sandwich

Figura 10.12

Teorema 17 *Supongamos que $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, para todo x en un intervalo alrededor de c, con la posible excepción de c. Si*

$$\lim_{x \to c} g(x) = \lim_{x \to c} h(x) = L$$

entonces

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

Prueba: *Sabemos que dado $\varepsilon > 0$, existen $\delta_1, \delta_2 > 0$ tales que*

$$\textit{si } 0 < |x - c| < \delta_1 \textit{ entonces } -\varepsilon < g(x) - L < \varepsilon$$

y

$$\textit{si } 0 < |x - c| < \delta_2 \textit{ entonces } -\varepsilon < h(x) - L < \varepsilon.$$

Sabemos que existe $\delta_3 > 0$ tal que

$$\textit{si } 0 < |x - c| < \delta_3 \textit{ entonces } g(x) \leq f(x) \leq h(x).$$

Si $\delta = \min\{\delta_1,\, \delta_2,\, \delta_3\}$ y $0 < |x - c| < \delta$ entonces

$$-\varepsilon < g(x) - L < f(x) - L < h(x) - L < \varepsilon.$$

□

Un caso en el que la «Ley del Sandwich» se aplica es el siguiente. Sea $f(x)$ una función acotada en un intervalo alrededor de c, con la posible excepción de c, y supongamos que $\lim\limits_{x \to c} g(x) = 0$. Entonces,

$$\lim_{x \to c} f(x)\, g(x) = 0.$$

En efecto, que $f(x)$ sea acotada en un intervalo alrededor de c, con la posible excepción de c, significa que existen $\delta > 0$ y $M > 0$ tales que

$$|f(x)| \leq M, \text{ para todo } 0 < |x - c| < \delta.$$

Por tanto, si $0 < |x - c| < \delta$ entonces

$$|f(x)\, g(x)| = |f(x)|\, |g(x)| \leq M|g(x)|, \text{ es decir, } -M|g(x)| \leq f(x)\, g(x) \leq M|g(x)|.$$

Del hecho que $\lim\limits_{x \to c} g(x) = 0$ tenemos que $\lim\limits_{x \to c} |g(x)| = 0$, puesto que, por el Teorema 16 en la página 137 , $\lim\limits_{x \to c} |g(x)| = |\lim\limits_{x \to c} g(x)\,|$ (si $\lim\limits_{x \to c} g(x)$ existe). Luego, de acuerdo con el Teorema 13 en la página 134 , (d),

$$\lim_{x \to c} -M|g(x)| = \lim_{x \to c} M|g(x)| = 0.$$

De aquí, aplicando la «Ley del Sandwich» (Teorema 17), resulta

$$\lim_{x\to c} f(x)\, g(x) = 0.$$

Lo anterior ofrece otra demostración de que

$$\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0, \text{ (¡convénzase usted mismo!).}$$

10.5 Ejercicios

Se proponen como ejercicios los dados en

R. Giudici y R. Silva de Giudici, *Guía de Problemas Matemáticas I*, Segunda Edición (1995), Equinoccio.

- pp. 51-53, Nos. 1-15
- pp. 54-55, Nos. 1-10
- pp. 56-61, Nos. 1-6, 10-23, 24 (a)-(e) y (g)-(i), 25, 27-40

Además se proponen los siguientes ejercicios.

1. Diga si las oraciones siguientes son correctas o no; justifique.

   (a) $\lim_{x\to c} f(x) = L$, si, y sólo si, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para algún $x \neq c$ con $|x - c| < \delta$ se tiene $|f(x) - L| < \epsilon$.

   (b) $\lim_{x\to c} f(x) = L$ si, y sólo si, existen números reales positivos ϵ y δ tales que si $0 < |x - c| < \delta$ entonces $|f(x) - l| < \epsilon$.

   (c) $\lim_{x\to c} f(x) = L$ si, y sólo si, para cada $\delta > 0$ es posible encontrar un $\epsilon > 0$ tal que $|f(x) - L| < \delta$ cada vez que $0 < |x - c| < \epsilon$.

   (d) Si $\lim_{x\to c} f(x) = L$ entonces para cada $\epsilon > 0$ existe un $x \neq c$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$.

2. Pruebe (a partir de la definición)

   (a) $\lim_{x\to 2}(2x + 1) = 5$

   (b) $\lim_{x\to -1}(3x - 4) = -7$

   (c) $\lim_{x\to 0}(7x + 2) = 2$

   (d) $\lim_{x\to 3}\dfrac{3}{x} = 1$

3. Calcule los límites siguientes y, en cada caso, justifique indicando el teorema o teoremas usados.

   (a) $\lim_{x\to 2}\sqrt{5 + \sqrt[3]{2x^5}}$

   (b) $\lim_{x\to 0}\cos(\operatorname{sen} x)$

   (c) $\lim_{x\to 0}\cos(\pi\dfrac{\operatorname{sen} x}{x})$

   (d) $\lim_{x\to \pi}\dfrac{\operatorname{sen} x}{\pi - x}$

4. Calcule los siguientes límites.

   (a) $\lim_{x\to 3}\dfrac{x^2 - 9}{x + 3}$

   (b) $\lim_{x\to -2}\dfrac{\frac{1}{x+1} + 1}{x + 2}$

   (c) $\lim_{h\to 0}\dfrac{\frac{1}{5+h} - \frac{1}{5}}{h}$

   (d) $\lim_{x\to 4}\dfrac{\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2}}{x - 4}$

   (e) $\lim_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{2 + h} - 2}{h}$

   (f) $\lim_{x\to -1}\dfrac{x^3 + 1}{x^2 + 1}$

5. Calcule los siguientes límites.

(a) $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}3x}{x}$

(b) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}$

(c) $\lim_{x\to -2}\frac{\tan\,\pi x}{x+2}$

(d) $\lim_{x\to a}\frac{\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}a}{x-a}$

(e) $\lim_{x\to \pi}\frac{1-\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\pi-x}$

6. Hállese $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

(a) $f(x)=x^n$

(b) $f(x)=\frac{1}{x}$

(c) $f(x)=\sqrt{x}$

(d) $f(x)=\frac{1}{x}$

(e) $f(x)=\operatorname{sen}x$

(f) $f(x)=\cos x$

7. Calcule los siguientes límites.

(a) $\lim_{x\to 0+}\frac{1}{\sqrt{x}}$

(b) $\lim_{x\to 2+}\sqrt{x^2-1}$

(c) $\lim_{x\to 4-}f(x)$ donde $f(x)=3x-2$ si $x\geq 4$ y $f(x)=4$ si $x<4$

(d) $\lim_{x\to 1+}\frac{x^2+3}{x-1}$ y $\lim_{x\to 1-}\frac{x^2+3}{x-1}$

8. Calcule los siguientes límites.

(a) $\lim_{x\to +\infty}\frac{(x+1)^2}{x^2+1}$

(b) $\lim_{x\to -\infty}\frac{1000x}{x^2-1}$

(c) $\lim_{x\to +\infty}(x+\sqrt{1-x^2})$

(d) $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x^2+x}{x-1}$

(e) $\lim_{x\to 2+}\frac{3x^2-5}{\operatorname{sen}\pi x}$

9. Para qué valores de la constante $a\in\mathbb{R}$ existe $\lim_{x\to 0}f(x)$ en los casos siguientes.

(a) $f(x)=a\,\operatorname{sen}\frac{1}{x}$

(b) $f(x)\equiv a$

(c) $f(x)=\sqrt[3]{ax}$

(d) $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-9}{x+3} & \text{si } x\neq 3\\ a & \text{si } x=3\end{cases}$

(e) $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-a^2}{x-a} & \text{si } x>a\\ a^2 & \text{si } a\leq x\end{cases}$

(f) $f(x)=a\,\operatorname{sen}\frac{1}{x}$

10. Calcule los siguientes límites.

(a) $\lim_{x\to 64}\frac{x-8}{\sqrt[3]{x-4}}$

(b) $\lim_{x\to +\infty}x\operatorname{sen}\frac{1}{x}$

(c) $\lim_{x\to +\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}})$

(d) $\lim_{x\to -2}\frac{-x^3+7x+6+\sqrt{x^3+7x^2+16x+12}}{x+2}$

11. Calcule $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{(x-1)^2}$.

12. Calcule $\lim_{x\to +\infty}x(x^2+1-x)$.

13. Calcule $\lim_{x\to 0^-}\frac{|\operatorname{sen}x|}{x}$.

14. Halle $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + ... + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_0}$.
15. Justifique $\lim\limits_{x\to 1} f(x-1) = \lim\limits_{x\to 0} f(x)$.
(Es decir, justifique que si uno de los límites existe, entonces existe también el otro y son iguales).
16. Calcular los siguientes límites:

(a) $\lim\limits_{t\to\frac{3}{2}} \sqrt{\dfrac{8t^3-27}{4t^2-9}}$

(b) $\lim\limits_{x\to 25} \dfrac{\sqrt{x}-5}{x-25}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$

(d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$

(e) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{x^2-4}$

(f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^2-3x}{x}$

(g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^3-x^2}{4x^2-3x}$

(h) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2+x-2}$

(i) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$

(j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}(1-\sqrt{1-x})$

(k) $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$

(l) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-\sqrt{8x}}{\sqrt{2x}-2}$

(m) $\lim\limits_{t\to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}}{\sqrt{x}-1}$

(n) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+x+1}}{x}$

(o) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x\sqrt{x}-a\sqrt{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$

(p) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x}$.

17. Calcular los siguientes límites:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{5+x}-\sqrt{5}}{x}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^4+x^3+x}{x^2-2x}$

(c) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x-2}{2-\sqrt{4x-x^2}}$

(d) $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{[\![x]\!]-x}{3-x}$

(e) $\lim\limits_{x\to 2^-} \left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{3}{x^2-4}\right)$

(f) $\lim\limits_{x\to -4^-} \left(\dfrac{2}{x^2+3x-4}-\dfrac{3}{x+4}\right)$

Apéndice: Límites de sucesiones

10.6 Sucesiones

Recordemos que una *sucesión* de números reales es una función a valores reales definida en el conjunto de los números naturales, i.e., una función

$$c : \mathbb{N} \to \mathbb{R}.$$

Se suele usar la notación con subíndices y, en lugar de $c(n)$, indicar por c_n el valor de la sucesión c en el número natural n. El valor particular c_n se llama también n-ésimo término de la sucesión. Además, como es usual, se identifica la sucesión c con el conjunto $\{c_n | n \in \mathbb{N}\}$ y se designa la propia sucesión mediante el símbolo $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ o simplemente $\{c_n\}$. Así pues, $\{\frac{1}{n}\}$, $\{(-1)^n\}$ y $\{2n+1\}$ designan las sucesiones x, y y z definidas por

$$\begin{aligned} x_n &= \tfrac{1}{n}, \\ y_n &= (-1)^n, \\ z_n &= 2n+1. \end{aligned}$$

Se obtiene una representación conveniente de las sucesiones marcando sus valores sobre la recta real, tal como se ilustra en la figura 10.13 en la página 146 .

El comportamiento de la sucesión $\{\frac{1}{n}\}$ al tender n a infinito es esencialmente igual al de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ al tender x a infinito. En la interpretación geométrica anterior vemos que los términos de la sucesión $\{\frac{1}{n}\}$ se van acumulando alrededor de 0, en el sentido que cualquier intervalo que contiene al 0 contiene a *todos* los términos a partir de cierto N. Más precisamente, consideremos un intervalo $I = (-\varepsilon, \varepsilon)$, con centro en el punto 0 y longitud total 2ε. Si elegimos $\varepsilon = 10$, entonces todos los términos x_n se encuentran en el intervalo I. Si elegimos $\varepsilon = \frac{1}{10}$, los primeros 10 términos están fuera del intervalo I, pero todos los términos de x_{11} en adelante se encuentran en I. También si escojemos $\varepsilon = \frac{1}{100000}$, solamente los primeros 100000 términos de la sucesión no están en I, mientras que a partir de $n = 100001$ todos los términos x_n se encuentran en I. Evidentemente, el razonamiento vale para cada número positivo ε: en lo que elijamos un número $\varepsilon > 0$, no importa cuan pequeño, podemos encontrar un número $N \in \mathbb{N}$ tan grande como para que sea

$$\frac{1}{N} < \varepsilon,$$

de donde resulta que todos los términos x_n de la sucesión para los cuales $n \geq N$ están en $(-\varepsilon, \varepsilon)$, y sólo el número finito de términos $x_1, x_2, \cdots, x_{N-1}$ se encuentra fuera de $(-\varepsilon, \varepsilon)$ (lo expuesto aquí se ilustra para $\varepsilon = \frac{1}{10}$ en la figura 10.14 en la página 146).

La discusión anterior indica que el *límite* de la sucesión $\{\frac{1}{n}\}$ es 0.

Sobre la base de este ejemplo y explotando la analogía entre el comportamiento de la función $f(x)$ cuando x tiende a infinito y el comportamiento de la sucesión $\{c_n\}$ cuando n tiende a infinito, se puede dar la definición precisa de límite de una sucesión. Reemplazamos la proposición «$x > N$», que indica que x tiende a infinito, en el caso de funciones de variable continua, por la proposición «$n \geq N$, que indica que n tiende a infinito, en el caso de sucesiones.

Definición. *El* **límite** *de la sucesión $\{c_n\}$ es igual a c si y sólo si dado cualquier $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que*

$$| c_n - c | < \varepsilon, \ para\ todo\ n \geq N.$$

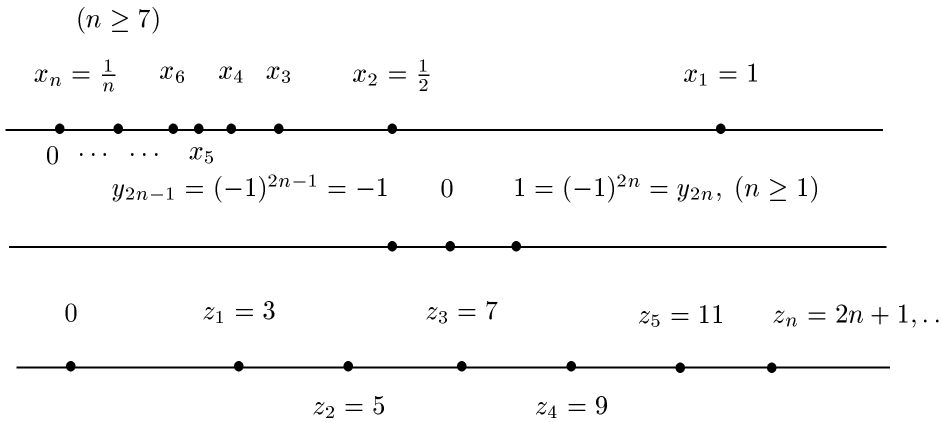


Figura 10.13 *Representación de sucesiones en la recta real*

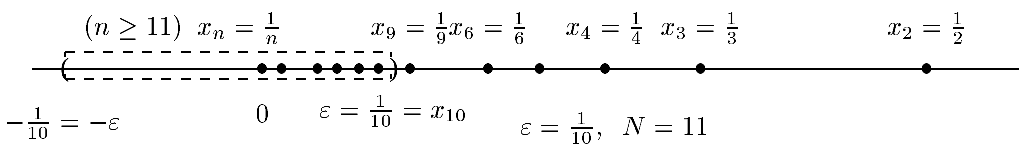


Figura 10.14 *La sucesión* $\{\frac{1}{n}\}$*:* ε *versus* N

El hecho que el límite de una sucesión $\{c_n\}$ sea igual a c se expresa simbolicamente escribiendo

$$\lim_{n \to \infty} c_n = c$$

o, simplemente,

$$c_n \to c \qquad \text{cuando } n \to \infty$$

(que se lee «el límite de c_n es igual a c cuando n tiende a infinito» o «c_n converge a c cuando n tiende a infinito»).

Una sucesión que tiene límite se llama *convergente*, en caso contrario, *divergente*.

Para dar otro ejemplo, consideremos la sucesión

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots,$$

cuyo término general es $c_n = \frac{n}{n+1}$. El hecho que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{n}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1},$$

donde $\frac{1}{n} \to 0$ cuando $n \to \infty$, nos indica que la sucesión $\{c_n\}$ converge a 1. Para demostrar que efectivamente $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = 1$, vamos a emplear la definición: dado $\varepsilon > 0$, queremos hallar $N \in \mathbb{N}$ tal que sea $\mid \frac{n}{n+1} - 1 \mid < \varepsilon$, para todo $n \geq N$.

Como

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \frac{1}{n+1}$$

y si $n \geq N$

$$\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{N+1},$$

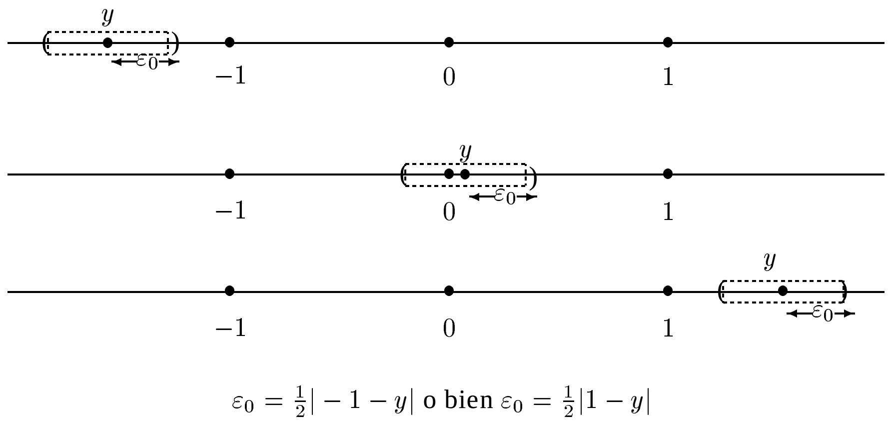


Figura 10.15 *La sucesión* $\{(-1)^n\}$*: elección de* ε_0

para garantizar que sea $\mid \frac{n}{n+1} - 1 \mid < \varepsilon$, para todo $n \geq N$, bastará tomar $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N+1} < \varepsilon$ ($\mid \frac{n}{n+1} - 1 \mid = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{N+1} < \varepsilon$ para todo $n \geq N$ con $\frac{1}{N+1} < \varepsilon$).

Pasemos a considerar las sucesiones $\{y_n\}$ y $\{z_n\}$ dadas al comienzo, i.e.,

$$y_n = (-1)^n, \qquad z_n = 2n+1.$$

La figura 10.13 en la página 146 muestra que los términos de la sucesión $\{y_n\}$ oscilan entre -1 y 1, según sea n impar o par. Podemos establecer que no existe ningún $y \in \mathbb{R}$ tal que $y_n \to y$ cuando $n \to \infty$. Para ello debemos tener presente que lo que queremos ver es que algún intervalo que contiene a y excluye a un número infinito de términos o, dicho de otra manera, a algún término que no corresponde a ninguno de los primeros $N-1$ términos, sin importar cuál sea N.

Formalmente: que no sea cierto que « $\lim_{n\to\infty} y_n = y$» significa que no es cierto que «dado cualquier $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\mid y_n - y \mid < \varepsilon$ para todo $n \geq N$» . Debemos pues demostrar que *existe* $\varepsilon_0 > 0$ tal que, *cualquiera* que sea $N \in \mathbb{N}$, *existe* n_0 tal que $n_0 \geq N$ y, sin embargo, $\mid y_{n_0} - y \mid \geq \varepsilon_0$.

Si $y = -1$, está claro que si el intervalo $I = (-1-\varepsilon_0, -1+\varepsilon_0)$ no contiene al número 1, entonces tampoco contiene a los términos y_n para n par; analogamente, si $y = 1$ y el intervalo $I = (1-\varepsilon_0, 1+\varepsilon_0)$ no contiene al número -1, entonces tampoco contiene a los términos y_n con n impar. Esto sugiere elegir, en cualquiera de los dos casos, por ejemplo, $\varepsilon_0 = 1$: si $y = -1$, entonces, para cualquier $N \in \mathbb{N}$, vemos que $n_0 = 2N$ verifica que $n_0 = 2N > N$ y $\mid y_{n_0} - y \mid = \mid 1-(-1) \mid = 2 > 1 = \varepsilon_0$; si $y = 1$, entonces, para cualquier $N \in \mathbb{N}$, vemos que $n_0 = 2N+1$ verifica que $n_0 = 2N+1 > N$ y $\mid y_{n_0} - y \mid = \mid -1-1 \mid = 2 > 1 = \varepsilon_0$.

Si y es cualquier número real distinto de -1 y 1, entonces elegimos $\varepsilon_0 > 0$ tal que ni $-1 \in (y-\varepsilon_0, y+\varepsilon_0)$ ni $1 \in (y-\varepsilon_0, y+\varepsilon_0)$, tal como indica la figura 10.15 . Para nuestra elección de ε_0, está claro que, cualquiera que sea $N \in \mathbb{N}$, si $n_0 = 2N$, entonces $n_0 = 2N > N$ e $y_{n_0} = 1 \notin (y-\varepsilon_0, y+\varepsilon_0)$, de modo que $\mid y_{n_0} - y \mid = \mid 1 - y \mid \geq \varepsilon_0$.

La figura 10.13 sugiere que los términos de la sucesión $\{z_n\}$ se hacen más y más grandes a medida que n se hace más y más grande. Más precisamente, fijemos un número $K > 0$. Si elegimos $K = 1$, entonces todos los términos z_n verifican que $z_n > K$. Si elegimos $K = 10$, entonces solamente los términos $z_1 = 3, z_2 = 5, z_3 = 7$ y $z_4 = 9$ no son mayores que K, pero todos los términos de z_5 en adelante son mayores que K. Si elegimos $K = 100000$, entonces $z_n > K$, para todo $n \geq 50000$. Evidentemente, el razonamiento vale para cualquier número positivo K: en lo que elijamos un número $K > 0$, no importa cuan grande, podemos encontrar un número $N \in \mathbb{N}$ tan grande como para que sea

$$2N+1 > K,$$

de donde resulta que todos los términos z_n de la sucesión para los cuales $n \geq N$ verifican $z_n > K$ (lo expuesto aquí se ilustra para $K = 10$ en la figura 10.16 en la página 148).

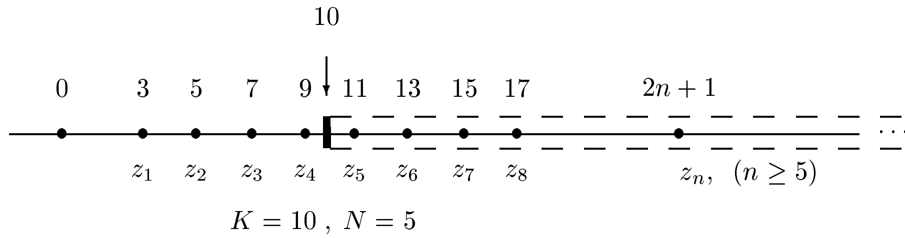


Figura 10.16 *La sucesión* $\{2n+1\}$*:* K *versus* N

La discusión anterior indica que también la sucesión $\{2n+1\}$ es divergente. Sin embargo, a diferencia de los términos de la sucesión *oscilante* $\{(-1)^n\}$, los términos de la sucesión $\{2n+1\}$ siguen otro patrón: *tienden a infinito*. Más precisamente,

Definición. *La sucesión* $\{c_n\}$ **tiende a infinito** *si y sólo si dado cualquier* $K > 0$*, existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$c_n > K, \ \textit{para todo } n \geq N.$$

El hecho que una sucesión $\{c_n\}$ tienda a infinito se expresa simbolicamente escribiendo

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \infty \text{ o, simplemente, } c_n \to \infty \quad \text{cuando } n \to \infty.$$

La interpretación de los símbolos

$$\lim_{n\to\infty} c_n = -\infty \text{ o } c_n \to -\infty \quad \text{cuando } n \to \infty$$

es ahora, a la luz de lo que hemos discutido hasta aquí, muy fácil.

Definición. *La sucesión* $\{c_n\}$ **tiende a** $-\infty$ *si y sólo si dado cualquier* $K > 0$*, existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$c_n < -K, \ \textit{para todo } n \geq N.$$

Tampoco resultará difícil dar ejemplos de sucesiones que tienden a $-\infty$: $\{-\sqrt{n}\}$ es sólo uno de ellos.

Como en el caso de funciones de variable continua, resulta que el límite de una sucesión convergente de números reales es único. Más precisamente,

Teorema 18 *Una sucesión convergente* $\{c_n\}$ *no puede tener dos límites diferentes. I.e., si* $\lim_{n\to\infty} c_n = c$ *y* $\lim_{n\to\infty} c_n = d$*, entonces* $c = d$*.*

Podemos dar la demostración del resultado sobre las líneas de la demostración del resultado correspondiente para funciones (Teorema 11 en la página 124). Reemplazamos la proposición «$x \neq c$ y $|x-c| < \delta$», que indica que x tiende a c pero no es igual a c, en el caso de funciones, por la proposición «$n \geq N$», que indica que n tiende a infinito, en el caso de sucesiones.

Prueba: *Puesto que* $c_n \to c$ *cuando* $n \to \infty$*, sabemos que para todo* $\varepsilon > 0$*, existe* $N_1 \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$| c_n - c | < \varepsilon, \text{ para todo } n \geq N_1.$$

Sabemos también, puesto que $c_n \to d$ *cuando* $n \to \infty$*, que existe* $N_2 \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$| c_n - d | < \varepsilon, \text{ para todo } n \geq N_2.$$

Hemos tenido que emplear dos números N_1 *y* N_2 *ya que no podemos asegurar que el número* $N \in \mathbb{N}$ *que funciona en una definición vaya a funcionar en la otra. Sin embargo, ahora es fácil concluir que para todo* $\varepsilon > 0$*, existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$| c_n - c | < \varepsilon \text{ y } | c_n - d | < \varepsilon, \text{ para todo } n \geq N;$$

basta elegir $N = max(N_1, N_2)$, i.e., N igual al máximo entre N_1 y N_2.

Para completar la demostración, usamos la desigualdad triangular y establecemos que

$$| c - d | = | (c - c_N) + (c_N - d) | \leq | c - c_N | + | c_N - d | < 2\varepsilon,$$

donde ε es cualquier número positivo. De aquí, en virtud del Lema 10 en la página 124 , concluimos que $c = d$. ☐ ☐

Podemos resumir de la manera siguiente lo expuesto hasta aquí en este apéndice. Las sucesiones de números reales pueden ser convergentes o divergentes. Una sucesión $\{c_n\}$ es convergente cuando

«existe un (‘!único!) *número real* c con la propiedad que dado cualquier $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $| c_n - c | < \varepsilon$, para todo $n \geq N$».

Por consiguiente, una sucesión $\{c_n\}$ es divergente o bien cuando $c_n \to \pm\infty$ (por ejemplo, las sucesiones $\{2n + 1\}$ y $\{-\sqrt{n}\}$) o bien cuando es oscilante (por ejemplo, la sucesión $\{(-1)^n\}$.

Podemos seguir explotando la analogía entre las definiciones de límite de una función y límite de una función, y dar las versiones para sucesiones de los Teoremas 13 en la página 134 y 17 en la página 140 , y de la Proposición 14 en la página 135 y su corolario, Corolario 15 en la página 135 . El Teorema 16 en la página 137 puede reinterpretarse, en términos de sucesiones, de la manera siguiente.

Teorema 19 *$\lim_{x\to c} f(x) = L$ si y sólo si $\lim_{n\to\infty} f(c_n) = L$, para toda sucesión $\{c_n\}$ tal que $\lim_{n\to\infty} c_n = c$ y $c_n \neq c$, para todo n.*

Prueba: *Supongamos que*

$$\lim_{x\to c} f(x) = L$$

y sea $\{c_n\}$ una sucesión tal que $\lim_{n\to\infty} c_n = c$ y $c_n \neq c$, para todo n.

Por un lado, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } 0 < | x - c | < \delta \text{ entonces } | f(x) - L | < \varepsilon.$$

Por otra parte, para ese $\delta > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$| c_n - c | < \delta, \text{ para todo } n \geq N.$$

Luego,

$$| f(c_n) - L | < \varepsilon, \text{ para todo } n \geq N.$$

Esto muestra que efectivamente

$$\lim_{n\to\infty} f(c_n) = L.$$

Reciprocamente, supongamos que

$$\lim_{n\to\infty} f(c_n) = L,$$

para toda sucesión $\{c_n\}$ tal que $\lim_{n\to\infty} c_n = c$ y $c_n \neq c$, para todo n. Queremos demostrar que

$$\lim_{x\to c} f(x) = L.$$

Supongamos, por el contrario, que esto último no es cierto. Entonces, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe x_n con $0 < | x_n - c | < \frac{1}{n}$ pero $| f(x_n) - L | \geq \varepsilon_0$. (Observemos que el hecho que no sea cierto que «$\lim_{x\to c} f(x) = L$» significa que «existe *$\varepsilon_0 > 0$ tal que para* todo *$\delta > 0$, en particular, para $\delta = \frac{1}{n}$*, existe *algún número, que podemos indicar por x_n, tal que $0 < | x_n - c | < \delta = \frac{1}{n}$ y, sin embargo, $| f(x_n) - L | \geq \varepsilon_0$.»)*

Si demostramos que la sucesión $\{x_n\}$ así obtenida tiende a c cuando $n \to \infty$, entonces, por un lado, podemos decir que $\{f(x_n)\}$ tiende a L, cuando $n \to \infty$, mientras que, por otra parte, tenemos que ¡ $| f(x_n) - L | \geq \varepsilon_0$, para todo n!

La contradicción que resulta daría por terminada la prueba. Por tanto, lo que resta por demostrar es que efectivamente la sucesión $\{x_n\}$ *tiende a* c *cuando* $n \to \infty$.

Debemos pues ver que, dado cualquier número positivo, llamemoslo ε*, existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$|\, x_n - c \,| < \varepsilon, \text{ para todo } n \geq N.$$

La demostración es muy sencilla: basta observar que $|\, x_n - c \,| < \frac{1}{n}$ *y que si* $n \geq N$*, con* $N \in \mathbb{N}$ *tal que* $\frac{1}{N} < \varepsilon$*, entonces* $\frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$ *y, por tanto,* $|\, x_n - c \,| < \frac{1}{n} < \varepsilon$. ☐ ☐

El resultado que acabamos de demostrar puede usarse para mostrar que el límite de una función $f(x)$ no existe cuando $x \to c$: bastará tomar dos sucesiones, digamos $\{c_n\}$ y $\{d_n\}$, con $c_n \to c$, $d_n \to c$, $c_n \neq c$ y $d_n \neq c$, para todo n, tales que $\lim\limits_{n\to\infty} f(c_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(d_n)$. Este es el caso para la función $f(x) = \operatorname{sen}\frac{1}{x}$ del Ejemplo 1 en la página 127 . Cuando analizamos el ejemplo en cuestión vimos que, para cualquier número $y \in [-1, 1]$, la sucesión $\{\frac{1}{t+2n\pi}\}$, con $\operatorname{sen} t = y$, verifica que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{t+2n\pi} = 0$ y $\operatorname{sen}\frac{1}{\frac{1}{t+2n\pi}} = y$. Así, para dos números *distintos* en $[-1, 1]$, digamos y y z, tenemos dos sucesiones, a saber, $\{\frac{1}{t+2n\pi}\}$ y $\{\frac{1}{u+2n\pi}\}$, con $\operatorname{sen} t = y$ y $\operatorname{sen} u = z$, tales que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{t+2n\pi} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{u+2n\pi} = 0$ y $\operatorname{sen}\frac{1}{\frac{1}{t+2n\pi}} = y \neq z = \operatorname{sen}\frac{1}{\frac{1}{u+2n\pi}}$.

10.6.1 Sucesiones monótonas

El tipo más sencillo de sucesión convergente está constituido por las sucesiones monótonas acotadas.

Una sucesión $\{c_n\}$ es *creciente, no decreciente, decreciente* o *no creciente* según sea, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} &c_n < c_{n+1}, \\ &c_n \leq c_{n+1}, \\ &c_n > c_{n+1}, \\ &c_n \geq c_{n+1}, \end{aligned}$$

respectivamente. La sucesión se dice *monótona* en cualquiera de los cuatro casos.

Una sucesión $\{c_n\}$ es *acotada superiormente* si y sólo si existe un número S tal que

$$c_n \leq S, \text{ para todo } n \in \mathbb{N};$$

acotada inferiormente si y sólo si existe un número s tal que

$$c_n \geq s, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Ejemplos de sucesiones monótonas acotadas son las sucesiones

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots \text{ y } \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots.$$

De hecho, $\{\frac{1}{n}\}$ es decreciente y acotada inferiormente, y $\{\frac{n}{n+1}\}$ creciente y acotada superiormente: para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$c_n = \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} = c_{n+1} > 0$$

y

$$c_n = \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} < 1 - \frac{1}{n+2} = \frac{n+1}{n+2} = c_{n+1} < 1.$$

Es fácil determinar el comportamiento de una sucesión monótona. Una sucesión monótona creciente o no decreciente puede aumentar indefinidamente, como en el caso de la sucesión

$$3, 5, 7, 9, 11, \cdots$$

donde $c_n = 2n + 1$, o de la sucesión

$$1, 1 + 2, 1 + 2 + 3, 1 + 2 + 3 + 4, \cdots$$

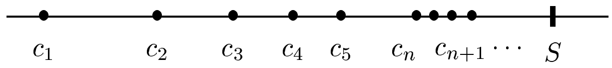


Figura 10.17 *Sucesión creciente acotada superiormente*

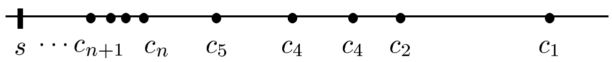


Figura 10.18 *Sucesión decreciente acotada inferiormente*

donde $c_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$. En estas circunstancias, $c_n \to \infty$. Pero, si los términos de la sucesión están acotados superiormente por un número S, entonces nuestra intuición nos dice que $\{c_n\}$ debe converger a un número c que es menor o a lo sumo igual a S; véase la figura 10.17 en la página 151 .

Analogamente, una sucesión monótona decreciente o no creciente puede diverger a $-\infty$ o, en caso que sus términos estén acotados inferiormente por un número s, converger a un número $c \geq s$; véase la figura 10.18 en la página 151 .

Teorema 20 *Toda sucesión monótona creciente o no decreciente acotada superiormente es convergente.*

Un enunciado análogo vale para sucesiones monótonas *decrecientes* o *no crecientes acotadas inferiormente*. Es notable el hecho que no es necesario que el valor del límite sea establecido de antemano; el teorema afirma que, bajo las condiciones requeridas, el límite *existe*.

Prueba: *Supongamos que $\{c_n\}$ es una sucesión creciente acotada superiormente. I.e.,*

$$c_n < c_{n+1}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

y existe $S \in \mathbb{R}$ tal que

$$c_n \leq S, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

El conjunto C formado por todos los términos c_n está acotado superiormente, de modo que, por el Axioma del Supremo, C tiene supremo, digamos, c. Afirmamos que, dado $\varepsilon > 0$, existe *$N \in \mathbb{N}$ tal que*

$$c - \varepsilon < c_N. \tag{10.8}$$

Si esto no fuese cierto, i.e., si para todo *$n \in \mathbb{N}$ fuese*

$$c_n \leq c - \varepsilon,$$

entonces $c - \varepsilon$ resultaría ser una cota superior de C y, por ser c la menor de las cotas superiores, tendría que ser

$$c \leq c - \varepsilon$$

lo cual es absurdo.

A partir de (10.8), puesto que la sucesión es creciente, concluímos que

$$c - \varepsilon < c_n, \text{ para todo } n \geq N. \tag{10.9}$$

Por otra parte, para todo $n \in \mathbb{N}$, es

$$c_n \leq c < c + \varepsilon. \tag{10.10}$$

Combinando (10.9) y (10.10), obtenemos que, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mid c_n - c \mid < \varepsilon, \text{ para todo } n \geq N.$$

La anterior es la formulación abstracta de límite, por tanto, lo que hemos obtenido es precisamente que

$$\lim_{n\to\infty} c_n = c = \sup C.$$

□ □

El teorema que acabamos de demostrar depende de la introducción de los números irracionales, sin los cuales no sería verdadero, ya que, como vimos en el capítulo dedicado a los números reales, los números racionales por sí solos no satisfacen el Axioma de Completitud o Axioma del Supremo. El teorema, además, permite «obtener» cada número irracional (por ejemplo, $\sqrt{2}$) via un proceso de paso al límite de sucesiones monótonas acotadas de números racionales. De ello nos ocuparemos a continuación.

10.6.2 Aproximaciones de la raiz cuadrada de 2

Sabemos que la diagonal del cuadrado de lado igual a 1 mide $\sqrt{2}$ o, equivalentemente, que $\sqrt{2}$ es la longitud de la hipotenusa del triángulo rectángulo de catetos iguales a 1. Puesto que la longitud del cateto es menor que la de la hipotenusa y esta es menor que la suma de las longitudes de los dos catetos, podemos concluir que

$$1 < \sqrt{2} < 2.$$

Por tanto, $\sqrt{2} \in I_1 = [1,2]$.

Dividamos el intervalo cerrado I_1, cuya longitud es igual a 1, en dos subintervalos cerrados de longitud $\frac{1}{2}$. Estos son los intervalos $\left[1, \frac{3}{2}\right]$ y $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$, puesto que $\frac{3}{2} = \frac{1+2}{2}$. Como $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} > 2$, podemos afirmar que

$$1 < \sqrt{2} < \frac{3}{2}.$$

Por consiguiente, $\sqrt{2} \in I_2 = \left[1, \frac{3}{2}\right]$.

Dividamos ahora el intervalo I_2, cuya longitud es $\frac{1}{2}$, en los dos subintervalos $\left[1, \frac{5}{4}\right]$ y $\left[\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right]$ de longitud $\frac{1}{2^2}$, donde $\frac{5}{4} = \frac{1+\frac{3}{2}}{2}$. Puesto que $\left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{16} < 2$, observamos que

$$\frac{5}{4} < \sqrt{2} < \frac{3}{2}.$$

En consecuencia, $\sqrt{2} \in I_3 = \left[\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right]$.

Procedamos de igual manera con el intervalo I_3 y dividámoslo en los dos subintervalos $\left[\frac{5}{4}, \frac{11}{8}\right]$ y $\left[\frac{11}{8}, \frac{3}{2}\right]$, de longitud $\frac{1}{2^3}$, donde $\frac{11}{8} = \frac{\frac{5}{4}+\frac{3}{2}}{2}$. Como $\left(\frac{11}{8}\right)^2 = \frac{121}{64} < 2$, tenemos por seguro que

$$\frac{11}{8} < \sqrt{2} < \frac{3}{2}.$$

Luego, $\sqrt{2} \in I_4 = \left[\frac{11}{8}, \frac{3}{2}\right]$.

Prosiguiendo de esta forma, obtenemos una sucesión de intervalos cerrados

$$I_1, I_2, I_3, \cdots, I_n, \cdots \text{ tal que } \sqrt{2} \in I_n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

e

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots \supset I_n \supset I_{n+1} \supset \cdots.$$

Además, la longitud de cada intervalo I_n es igual a $\frac{1}{2^{n-1}}$. Más precisamente, si representamos cada intervalo I_n por $I_n = [a_n, b_n]$, entonces $a_n < \sqrt{2} < b_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, y

(i) $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \cdots \leq \sqrt{2}$;

(ii) $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n \geq b_{n+1} \geq \cdots \geq \sqrt{2}$;

(iii) $b_n - a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

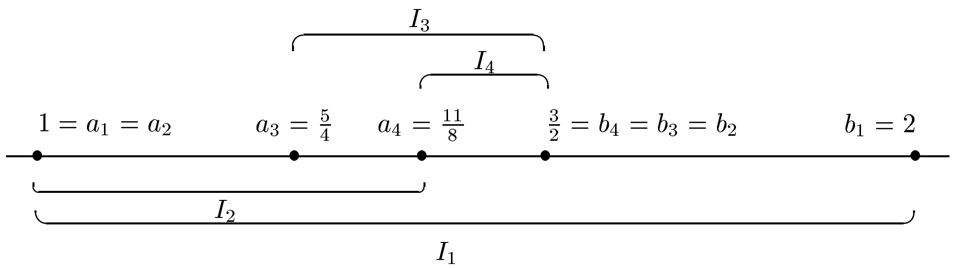


Figura 10.19 *Los intervalos* I_1, I_2, I_3, I_4

La figura 10.19 en la página 153 representa la construcción de los primeros 4 intervalos I_1, I_2, I_3, I_4.

De acuerdo con (i), $\{a_n\}$ es una sucesión no decreciente acotada superiormente por $\sqrt{2}$. Por consiguiente, existe un número $a \leq \sqrt{2}$ tal que $a_n \to a$ cuando $n \to \infty$. Por otra parte, según (ii), $\{b_n\}$ es una sucesión no creciente acotada inferiormente por $\sqrt{2}$. En consecuencia, existe un número $b \geq \sqrt{2}$ tal que $b_n \to b$ cuando $n \to \infty$. I.e.,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \leq \sqrt{2} \leq b = \lim_{n\to\infty} b_n. \tag{10.11}$$

A partir de (iii), sigue que $b_n = a_n + \frac{1}{2^{n-1}}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Un hecho muy útil que usaremos aquí es que la suma de dos sucesiones convergentes es una sucesión convergente que converge a la suma de los límites. De hecho, si consideramos suceciones de números reales en lugar de funciones de una variable contínua, valen las propiedades correspondientes enunciadas en el Teorema 13 en la página 134 .

Tenemos pues que

$$b = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n + \frac{1}{2^{n-1}} = a,$$

puesto que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0$. (¿Es esto cierto?)

De aquí, en virtud de (10.11), concluímos que

$$a = b = \sqrt{2}.$$

Hemos así construido dos sucesiones, la sucesión no decreciente $\{a_n\}$ y la sucesión no creciente $\{b_n\}$, tales que

$$a_n < \sqrt{2} < b_n, \quad b_n - a_n = \frac{1}{2^{n-1}}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

y

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \sqrt{2}.$$

Luego, dado $\varepsilon > 0$, existen $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tales que

$$\sqrt{2} - a_n = \mid a_n - \sqrt{2} \mid < \varepsilon, \text{ para todo } n \geq N_1$$

y

$$b_n - \sqrt{2} = \mid b_n - \sqrt{2} \mid < \varepsilon, \text{ para todo } n \geq N_2.$$

Como $\sqrt{2} - a_n < b_n - a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$ y $b_n - \sqrt{2} < b_n - a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$, si queremos que sea $\sqrt{2} - a_n < \varepsilon$ para todo $n \geq N_1$ y $b_n - \sqrt{2} < \varepsilon$ para todo $n \geq N_2$, bastará elegir $N_1 = N_2 = N$ tal que sea $\frac{1}{2^{N-1}} < \varepsilon$.

Lo anterior es útil en el caso que deseemos hallar un valor aproximado, por defecto o por exceso, de $\sqrt{2}$ con cualquier grado de aproximación. El error que cometemos es el valor absoluto de la diferencia entre el valor real de $\sqrt{2}$ y el valor aproximado. Un valor aproximado por defecto con error menor que una cantidad fija (pequeña) $\varepsilon > 0$ está dado por a_N con $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^{N-1}} < \varepsilon$, y un valor aproximado por exceso con un error de aproximación menor que ε está dado por b_N con $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^{N-1}} < \varepsilon$.

Para fijar ideas, supongamos que queremos aproximar $\sqrt{2}$ con dos decimales exactos. Lo que buscamos es, por tanto, un valor aproximado de $\sqrt{2}$ con un error de aproximación menor que $\varepsilon = 10^{-3}$. Un valor aproximado por defecto es a_N y otro por exceso es b_N, siempre y cuando N se elija de manera tal que sea $\frac{1}{2^{N-1}} < 10^{-3}$. Debemos, por tanto, hallar N tal que sea $5^3 < 2^{N-4}$, i.e.,

$$125 < 2^{N-4}.$$

La tabla 10.2 en p. 154, presenta las primeras 12 potencias de 2.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096

Tabla 10.2

Observamos en la tabla que $125 < 128 = 2^7$, luego, para que sea $125 < 2^{N-4}$ debe ser $N - 4 = 7$, i.e., $N = 11$. Reportamos los primeros 14 términos de las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$, en la tabla 10.3 .

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
a_n	1	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{11}{8}$	$\frac{11}{8}$	$\frac{45}{32}$	$\frac{45}{32}$	$\frac{181}{128}$	$\frac{181}{128}$	$\frac{181}{128}$	$\frac{181}{128}$	$\frac{181}{128}$	$\frac{181}{128}$	$\frac{11585}{8192}$
b_n	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{23}{16}$	$\frac{23}{16}$	$\frac{91}{64}$	$\frac{91}{64}$	$\frac{363}{256}$	$\frac{725}{512}$	$\frac{1449}{1024}$	$\frac{2897}{2048}$	$\frac{5793}{4096}$	$\frac{5793}{4096}$

Tabla 10.3

Por lo tanto, $a_{11} = 1,4140625$ y $b_{11} = 1,4150390625$ son los valores aproximados de $\sqrt{2}$ que estamos buscando.

En lugar de bisecar los intervalos hubiésemos podido trisecarlos o, en general, dividirlos en m subintervalos de igual longitud. Si hubiésemos elegido dividir los intervalos en 10 partes iguales, los intervalos que habríamos obtenido tendrían longitud $1, 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, \cdots$, y a_4 y b_4 habrían sido aproximaciones de $\sqrt{2}$ con dos decimales exactos:

$$\begin{array}{rcl}
1^2 = 1 & < 2 < & 2^2 = 4 \\
(1,4)^2 = 1,96 & < 2 < & (1,5)^2 = 2,25 \\
(1,41)^2 = 1,9881 & < 2 < & (1,42)^2 = 2,0264 \\
(1,414)^2 = 1,999396 & < 2 < & (1,415)^2 = 2,002225.
\end{array}$$

¿Puede explicar este hecho?

10.6.3 Sucesiones recursivas y otras aproximaciones de la raiz cuadrada de 2

Algunas sucesiones tienen la peculiaridad que c_{n+1} se obtiene a partir de c_n bajo la misma regla de formación con la que c_n se obtiene de c_{n-1}, de manera que el mismo proceso, repetido indefinidamente, permite construir la sucesión entera a partir de un término inicial dado. En tales casos se habla de *sucesiones recursivas*.

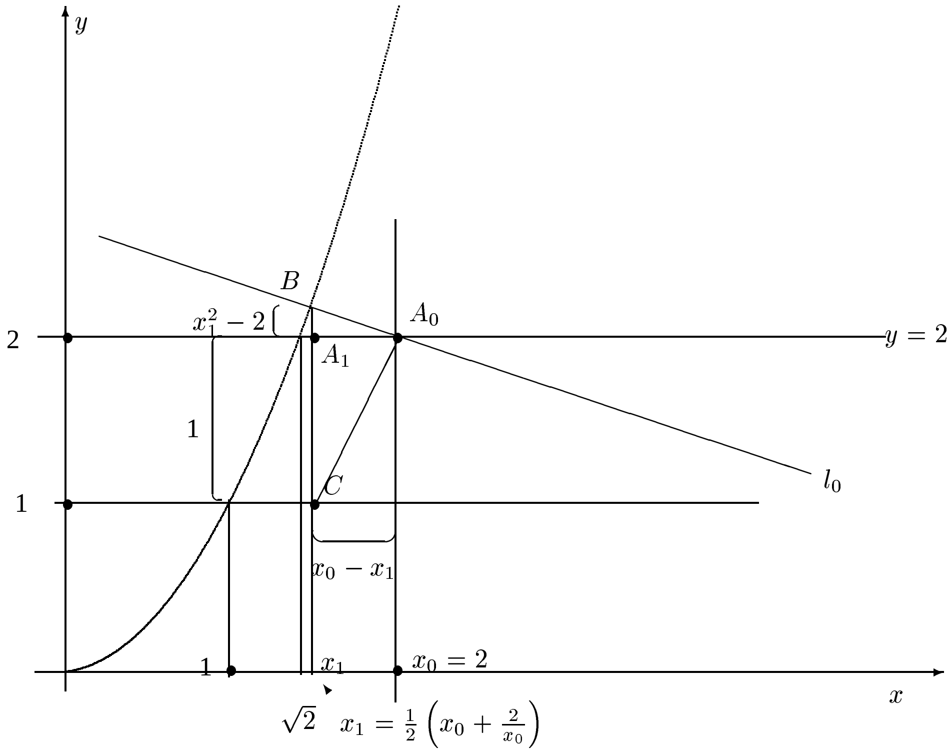


Figura 10.20 $x_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{2}{x_0}\right)$

Por ejemplo, la sucesión

$$2, \frac{1}{2}\left(2+\frac{2}{2}\right), \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+\frac{2}{\frac{3}{2}}\right), \frac{1}{2}\left(\frac{17}{12}+\frac{2}{\frac{17}{12}}\right), \cdots$$

admite una regla de formación del tipo indicado: cada término, a partir del primero, se obtiene del término anterior tomando la mitad de la suma del término anterior más dos veces el inverso del término anterior. Así las fórmulas

$$c_0 = 2, c_n = \frac{1}{2}\left(c_{n-1} + \frac{2}{c_{n-1}}\right)$$

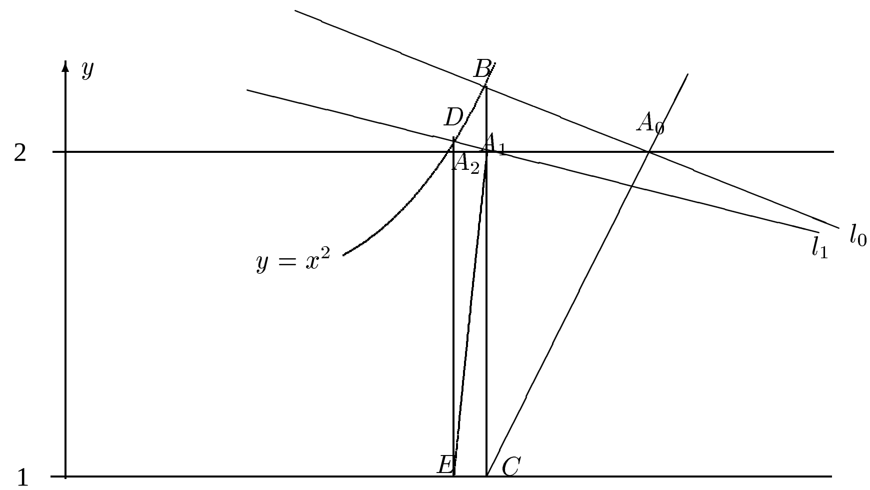
definen toda la sucesión.

Como veremos a continuación, la sucesión recursiva recién presentada converge a $\sqrt{2}$ y sus términos pueden por tanto usarse para obtener aproximaciones de $\sqrt{2}$. Cambiaremos la notación, a efectos de la construcción cuyos detalles presentaremos enseguida, y, en lugar de ‘c’, escribiremos ‘x’ para indicar la sucesión.

Conviene notar que $\sqrt{2}$ es la abscisa del punto donde se intersectan el arco de la parábola $y = x^2$ que corresponde a $x \geq 0$ y la recta horizontal $y = 2$ (figura 10.20). Esto es así simplemente porque $\sqrt{2}$ es la raíz positiva de la ecuación cuadrática $x^2 = 2$.

Si, en lugar de la recta $y = 2$, consideramos una recta l_0 ligeramente «inclinada» respecto a la recta $y = 2$, tal como se muestra en la figura 10.20, el punto de intersección de l_0 y la parábola $y = x^2$, tiene abscisa $x_1 > \sqrt{2}$. La «inclinación» de la recta l_0 está fijada por la siguiente regla. Queremos que el ángulo $B\hat{A}_0C$ sea recto, de manera que los triángulos A_1BA_0 y A_1A_0C sean semejantes. De la semejanza de los triángulos en cuestión resulta entonces

$$\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1A_0}} = \frac{\overline{A_1A_0}}{1}, \text{ i.e., } \frac{x_1^2-2}{x_0-x_1} = \frac{x_0-x_1}{1}.$$



$x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{2}{x_1}\right)$

Figura 10.21 $x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{2}{x_1}\right)$

Por consiguiente, x_1 verifica

$$x_1^2 - 2 = (x_0 - x_1)^2 = x_0^2 - 2x_0x_1 + x_1^2 \text{ o, equivalentemente, } x_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{2}{x_0}\right).$$

Repetimos la construcción anterior ahora con una recta l_1 trazada por A_1, de manera que el ángulo $D\hat{A}_1E$ sea recto y los triángulos A_2DA_1 y A_2A_1E sean semejantes (figura 10.21). De esta manera obtenemos que x_2 verifica

$$x_2^2 - 2 = (x_1 - x_2)^2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$$

o, equivalentemente,

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{2}{x_1}\right).$$

Iterando este proceso, obtenemos la sucesión recursiva $\{x_n\}$ dada por

$$x_0 = 2, x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}\right).$$

Debido a la construcción misma, tenemos que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$x_n^2 \geq 2$$

(puesto que $x_n^2 - 2 = (x_{n-1} - x_n)^2 \geq 0$), y

$$x_n > x_{n+1}$$

(por ser $x_n - x_{n+1}$ la longitud del lado $\overline{A_{n+1}A_n}$). En otras palabras, $\{x_n\}$ es una sucesión decreciente acotada inferiormente por $\sqrt{2}$.

Por el principio de las sucesiones monótonas (Teorema 20 en la página 151), tenemos que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, donde $x \geq \sqrt{2}$. La ecuación $x_n^2 - 2 = (x_{n-1} - x_n)^2$ (que conduce a la fórmula $x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}\right)$) toma la forma $x^2 - 2 = 0$, cuando $n \to \infty$ (para convencernos de este hecho, bastará demostrar que si $c_n \to c$ entonces $c_n^2 \to c^2$). Por lo tanto, podemos concluir que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}.$$

Luego, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_n - \sqrt{2} = \mid x_n - \sqrt{2} \mid < \varepsilon, \text{ para todo } n \geq N.$$

Es claro que

$$x_n - \sqrt{2} = \frac{x_n^2 - 2}{x_n + \sqrt{2}}.$$

Como $1 < \sqrt{2} < x_n$, entonces $2 < x_n + \sqrt{2}$, de modo que

$$\frac{x_n^2 - 2}{x_n + \sqrt{2}} < \frac{x_n^2 - 2}{2}.$$

De aquí, puesto que $\{x_n\}$ es decreciente, concluimos que $\frac{x_n^2-2}{x_n+\sqrt{2}} < \frac{x_N^2-2}{2}$, para todo $n \geq N$. Obtenemos, por tanto, que

$$x_n - \sqrt{2} < \frac{x_N^2 - 2}{2}, \text{ para todo } n \geq N.$$

Luego, si queremos que sea $x_n - \sqrt{2} < \varepsilon$, para todo $n \geq N$, bastará asegurarnos que $x_N^2 - 2 < 2\varepsilon$.

Podemos usar la sucesión $\{x_n\}$ para hallar valores aproximados (por exceso) de $\sqrt{2}$. Un valor aproximado con dos decimales exactos, i.e., con un error de aproximación menor que $\varepsilon = 10^{-3}$, está dado por x_N siempre y cuando $x_N^2 - 2 < 2 \cdot 10^{-3} = \frac{1}{500}$. La tabla 10.4 reporta los primeros 4 términos de la sucesión $\{x_n\}$ y las correspondientes diferencias $x_n^2 - 2$.

n	1	2	3	4
x_n	$\frac{3}{2}$	$\frac{17}{12}$	$\frac{577}{408}$	$\frac{665857}{470832}$
$x_n^2 - 2$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{144}$	$\frac{1}{166464}$	$\frac{1}{221682772224}$

Tabla 10.4

Observamos que $x_3^2 - 2 = \frac{1}{166464} < \frac{1}{500}$. Por lo tanto, $x_3 = 1,4142156863$ es el valor aproximado que estamos buscando. Vemos que también es cierto que $\frac{1}{166464} < \frac{1}{50000} = 2 \cdot 10^{-5}$, de manera que $1,4142156863$ resulta ser un valor aproximado de $\sqrt{2}$ con 4 decimales exactos. Analogamente, como $\frac{1}{221682772224} < 50000000000 = 2 \cdot 10^{-11}$, se sigue que $x_4 = 1,4142135624$ es una aproximación de $\sqrt{2}$ con 10 decimales exactos.

Si comparamos la sucesión recursiva $\{x_n\}$ con las sucesiones que obtuvimos en la sección anterior, es evidente que los términos de $\{x_n\}$ son aproximaciones más «precisas y rápidas» al valor real de $\sqrt{2}$.

Para finalizar, queremos apuntar que, así como resolvimos recursivamente la ecuación cuádratica $x^2 - 2 = 0$, el mismo proceso puede emplearse para resolver muchas otras ecuaciones algebraicas. Por ejemplo, reescribamos la ecuación cúbica $x^3 - 5x + 1 = 0$ en la forma

$$x = \frac{1}{5 - x^2},$$

escojamos un valor inicial, digamos $x_0 = 0$, y pongamos

$$x_n = \frac{1}{5 - x_{n-1}^2}.$$

De esta forma, obtenemos la sucesión

$$\begin{array}{lcl} x_1 & = \frac{1}{5} = & 0,2 \\ x_2 & = \frac{25}{124} = & 0,20161290323 \\ x_3 & = \frac{15376}{76255} = & 0,20163923677 \\ & \ldots & \end{array}$$

que converge a un número x que es solución de la ecuación dada ¿Hay más soluciones?

Procesos recursivos o iterados como los aquí expuestos son muy útiles, ya que proveen demostraciones acerca de la existencia de soluciones de problemas de muy variada índole, al tiempo que establecen métodos de aproximación para las soluciones de dichos problemas.

10.6.4 El número e

Uno de los aspectos más sobresalientes del concepto de límite es que *muchos números están dados unicamente como límites de sucesiones*. Un ejemplo ilustrativo está representado por el número e. Este número, que fue introducido por Leonhard Euler (Basilea 1707 - San Petersburgo 1783), en su tratado *Introductio in analysin infinitorum*, ha tenido, desde su aparición en el escenario matemático, un papel muy destacado e importante. El número e, como veremos a continuación, es, *por definición*, el límite de la sucesión $\{a_n\}$ dada por

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

y también el límite de la sucesión $\{b_n\}$ definida por

$$b_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!},$$

donde, para cada $j \in \mathbb{N}$, $j!$ (léase «j factorial») indica el producto de los primeros j números naturales: $j! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot j$.

Para comprobar que efectivamente las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ tienen límite, usaremos el principio de las sucesiones monótonas (Teorema 20 en la página 151). Para ello, requerimos analizar las fórmulas para las potencias n-ésimas de un binomio, digamos $(a+b)^n$, y las fórmulas para $n!$.

Con un cálculo directo obtenemos

$$\begin{aligned}
(a+b)^1 &= a + b, \\
(a+b)^2 &= (a+b)(a+b) \\
&= a(a+b) + b(a+b) = a^2 + 2ab + b^2, \\
(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)^2 \\
&= a(a^2 + 2ab + b^2) + b(a^2 + 2ab + b^2) \\
&= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,
\end{aligned}$$

y así sucesivamente. Si examinamos el procedimiento con el que obtuvimos $(a+b)^2$ de $(a+b)^1$ y $(a+b)^3$ de $(a+b)^2$, es evidente que el desarrollo de $(a+b)^n$ se obtiene multiplicando cada término del desarrollo de $(a+b)^{n-1}$, primero por a, luego por b y sumando. Llegamos así al esquema presentado en la tabla 10.5 .

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
 & & & & & & a & & + & & b & & & & & & \\
 & & & & & \overset{a}{\swarrow} & & \overset{b}{\searrow} & & \overset{a}{\swarrow} & & \overset{b}{\searrow} & & & & & \\
 & & & & a^2 & & + & & 2ab & & + & & b^2 & & & & \\
 & & & \overset{a}{\swarrow} & & \overset{b}{\searrow} & & \overset{a}{\swarrow} & & \overset{b}{\searrow} & & \overset{a}{\swarrow} & & \overset{b}{\searrow} & & & \\
 & & a^3 & & + & & 3a^2b & & + & & 3ab^2 & & + & & b^3 & & \\
 & \overset{a}{\swarrow} & & \overset{b}{\searrow} & & \overset{a}{\swarrow} & & \overset{b}{\searrow} & & \overset{a}{\swarrow} & & \overset{b}{\searrow} & & \overset{a}{\swarrow} & & \overset{b}{\searrow} & \\
a^4 & & + & & 4a^3b & & + & & 6a^2b^2 & & + & & 4ab^3 & & + & & b^4
\end{array}$$

Tabla 10.5

Basándonos en el esquema podemos deducir la regla general para la formación de los coeficientes en el desarrollo de $(a+b)^n$. Si los coeficientes del desarrollo de $(a+b)^n$ se ordenan en una fila de acuerdo con las potencias decrecientes de a y crecientes de b, obtenemos el siguiente cuadro triangular

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 \\
\multicolumn{15}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}
\end{array}$$

de manera que, por ejemplo,

$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7.$$

La regla para formar el triángulo es muy simple: comenzamos con los coeficientes 1 y 1 de $a+b$, en cada fila escribimos un 1 al comienzo y un 1 al final, y, para completar, obtenemos cada uno de los restantes números como la suma del número que le antecede y del número que le sigue en la fila inmediatamente superior. Así, por ejemplo, en la filas 6 y 7 tenemos

$$\begin{array}{cccccccc}
 & 1 \quad 6 & 15 & 20 & 15 & 6 \quad 1 & \\
1 & \underbrace{1+6}_{7}\ \underbrace{6+15}_{21} & \underbrace{15+20}_{35} & \underbrace{20+15}_{35} & \underbrace{15+6}_{21} & \underbrace{6+1}_{7} & 1
\end{array}$$

El cuadro se conoce bajo el nombre de *triángulo de Pascal*, debido al uso ingenioso que le dió Blaise Pascal (Clermont-Ferrand 1623 - París 1662) en el cálculo de las probabilidades y en el análisis combinatorio.

Si usamos la notación

$$(a+b)^n = C_0^n a^n + C_1^n a^{n-1}b + C_2^n a^{n-2}b^2 + \cdots + C_{n-1}^n ab^{n-1} + C_n^n b^n,$$

entonces, de acuerdo con la ley de formación del triángulo de Pascal, tenemos:

$$\begin{aligned}
C_0^n &= 1,\\
C_k^n &= C_{k-1}^{n-1} + C_{k+1}^{n-1},\ k = 1, \cdots, n-1,\\
C_n^n &= 1.
\end{aligned}$$

Usando estas relaciones es posible demostrar que

$$C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!},\ k = 0, \cdots, n,$$

donde $0! = 1$ y $j! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot j$, para cada número natural j. Así, en particular, $C_2^7 = 21$ está dado por

$$C_2^7 = \frac{7!}{2!(7-2)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{(1 \cdot 2)(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5)} = \frac{6 \cdot 7}{2} = 3 \cdot 7,$$

y, en general,

$$\begin{aligned}
C_k^n &= \frac{n!}{k!(n-k)!}\\
&= \frac{1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot (n-k) \cdot (n-k+1) \cdot \cdots \cdot (n-1) \cdot n}{(1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot k)(1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot (n-k))}\\
&= \frac{(n-k+1) \cdot \cdots \cdot (n-1) \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot k}.
\end{aligned}$$

Esta fórmula, que da los valores de los coeficientes del desarrollo del binomio, se conoce bajo el nombre de *teorema del binomio*.

Después de este *intermezzo* aritmético, volvamos a dirigir nuestra atención a las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$, con $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ y $b_n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}$. De acuerdo con el teorema del binomio, hallamos que

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 1+n\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3}+\cdots+\frac{1}{n^n}\\ &= 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\\ &\quad+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1-\frac{n-1}{n}\right).\end{aligned}$$

Si reemplazamos n por $n+1$, obtenemos

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} &= 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\\ &\quad+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\\ &\quad+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)\\ &\quad+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1-\frac{n}{n+1}\right),\end{aligned}$$

donde

$$0<1-\frac{j}{n}<1-\frac{j}{n+1}<1,\ \text{para todo } j=1,\cdots,n-1,$$

y

$$\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1-\frac{n}{n+1}\right)=\frac{1}{(n+1)^{n+1}}>0.$$

Por tanto, para todo $n\in\mathbb{N}$,

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=a_{n+1}$$

y

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}=b_n.$$

La primera relación dice que la sucesión $\{a_n\}$ es creciente.

De la segunda, puesto que $3!=2\cdot3>2^2, 4!=2\cdot3\cdot4>2^3,\cdots,n!=2\cdot3\cdot\cdots\cdot n>2^{n-1}$, resulta

$$a_n<b_n<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}},$$

relación que vale para todo $n\in\mathbb{N}$. Sabemos que la suma de los primeros n términos de la progresión geométrica $1,\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\cdots,\frac{1}{2^{n-1}},\cdots$ está dada por

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=2\left(1-\frac{1}{2^n}\right).$$

De aquí, puesto que $1-\frac{1}{2^n}<1$, concluímos que ambas sucesiones están acotadas superiormente por 3.

Como b_{n+1} se obtiene de b_n sumando el incremento positivo $\frac{1}{(n+1)!}$, es evidente que la sucesión $\{b_n\}$ también es creciente.

Esto muestra que el número e, como límite de la sucesión $\{a_n\}$, está bien definido y que la sucesión $\{b_n\}$ converge a un número b tal que $e \leq b \leq 3$.

Por otra parte, sean $n, N \in \mathbb{N}$ tales que $N > n$. Entonces

$$\begin{aligned}
b_n &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \\
&= \left\{1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{N}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{N}\right)\left(1 - \frac{2}{N}\right)\right. \\
&\quad \left. + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{N}\right)\left(1 - \frac{2}{N}\right)\cdot \cdots \cdot \left(1 - \frac{n-1}{N}\right)\right\} \\
&\quad + \left\{\frac{1}{2!}\left[1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)\right] + \frac{1}{3!}\left[1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)\left(1 - \frac{2}{N}\right)\right]\right. \\
&\quad \left. + \cdots + \frac{1}{n!}\left[1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)\left(1 - \frac{2}{N}\right)\cdot \cdots \cdot \left(1 - \frac{n-1}{N}\right)\right]\right\},
\end{aligned}$$

donde la primera expresión entre llaves es menor que a_N, a saber,

$$\begin{aligned}
&1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{N}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{N}\right)\left(1 - \frac{2}{N}\right) \\
&+ \cdots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{N}\right)\left(1 - \frac{2}{N}\right)\cdot \cdots \cdot \left(1 - \frac{n-1}{N}\right) < a_N
\end{aligned}$$

y la segunda expresión, es decir,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2!}\left[1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)\right] + \frac{1}{3!}\left[1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)\left(1 - \frac{2}{N}\right)\right] \\
&+ \cdots + \frac{1}{n!}\left[1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)\left(1 - \frac{2}{N}\right)\cdot \cdots \cdot \left(1 - \frac{n-1}{N}\right)\right],
\end{aligned}$$

tiende a 0 cuando hacemos $N \to \infty$ y dejamos n fijo.

En otras palabras, si n, N son números naturales tales que $N > n$, entonces b_n es menor que la suma de a_N y un número positivo que tiende a 0 cuando dejamos n fijo y hacemos N tender a infinito.

Por consiguiente, para cada $n \in \mathbb{N}$, $b_n \leq e$, de modo que $b \leq e$.

Si combinamos esta última desigualdad con la desigualdad $e \leq b$, obtenida anteriormente, concluimos que $e = b$. En otras palabras, e es, por definición, el límite de la sucesión creciente $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$ y también el límite de la sucesión $\left\{1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right\}$.

Para expresar el hecho que

$$\lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} = e,$$

podemos escribir

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots.$$

Así, si elegimos b_{10} como valor aproximado de e, entonces el error de aproximación, que no es más que la diferencia $e - b_{10}$, puede ser estimado facilmente:

$$\begin{aligned}
e - b_{10} &= \frac{1}{11!} + \frac{1}{12!} + \cdots \\
&= \frac{1}{11!}\left(1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{12 \cdot 13} + \cdots\right) \\
&< \frac{1}{11!}\left(1 + \frac{1}{11} + \frac{1}{11^2} + \cdots\right) \\
&= \frac{1}{11!}\frac{1}{1 - \frac{1}{11}} = \frac{1}{10 \cdot 10!} = \frac{1}{36288000}.
\end{aligned}$$

El error de aproximación es menor que $\frac{1}{10^7}$, de modo que las primeras 7 cifras de b_{10}, es decir, $2,718281$, dan un valor aproximado de e con 6 decimales exactos.

Para concluir, veamos que e es irracional. Para demostrarlo, recurrimos a una demostración por reducción al absurdo y suponemos que sea $e = \frac{p}{q}$, donde p y q son números enteros. Sabemos que $b_1 = 2$ es menor que e y que e mismo es menor que 3, i.e., que $2 < e < 3$. Por tanto, si p es un número natural, entonces q es cuando menos igual a 2. Sabemos también que a $\varepsilon = \frac{1}{4\cdot q!}$ corresponde $N \in \mathbb{N}$ tal que $e - b_n < \varepsilon$, para todo $n \geq N$. Si es $r = \max(q, N)$, entonces

$$\begin{aligned} p \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (q-1) = \frac{p}{q} \cdot q! = e \cdot q! = b_r \cdot q! + (e - b_r) \cdot q! \\ = \{q! + q! + 3 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot q + 4 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot q + \cdots + q + 1\} \\ + \left\{\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \cdots + \frac{1}{(q+1)(q+2)\cdot \cdots \cdot r}\right\} \\ + (e - b_r) \cdot q!. \end{aligned}$$

El primer miembro a la izquierda en la cadena de igualdades es ciertamente un nomero entero. En el último miembro a la derecha la primera expresión entre llaves también es un número entero, la segunda expresión es menor que la suma $\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^{r-q}}$, ya que $q \geq 2$, y, por oltimo, $(e - b_r) \cdot q! < \frac{1}{4}$, por ser $e - b_r < \frac{1}{4\cdot q!}$. Como

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^{r-q}} = \frac{1}{3}\frac{1 - (\frac{1}{3})^{r-q+1}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{r-q+1}\right) < \frac{1}{2},$$

hallamos que el primer miembro a la izquierda en la cadena de igualdades es igual a la suma de tres números: un número entero, un número positivo menor que $\frac{1}{2}$ y un número positivo menor que $\frac{1}{4}$. Esta conclusión presenta una contradicci-n: el número entero en el primer miembro no puede ser igual a la suma de un número entero mŒs un número positivo menor que $\frac{3}{4}$.

10.7 Ejercicios

1. Demostrar que $\dfrac{n}{n^2+1} \to 0$ cuando $n \to \infty$.
   (Sugerencia: $n/(n^2+1) < n/n^2 = 1/n$)
2. Demostrar que $\dfrac{n^2+1}{n^3+1} \to 0$ cuando $n \to \infty$.
   (Sugerencia: $n^2 + 1/(n^3+1) < (n^2+1)/n^3 < 2/n$)
3. Demostrar que si $|q| < 1$ entonces $q^n \to 0$ cuando $n \to \infty$.
   (Sugerencia: use el principio de las sucesiones monótonas (Teorema 20 en la página 151) para mostrar que existe un número real a tal que $q^n \to a$ cuando $n \to \infty$ y use que también $q^{n+1} \to a$ cuando $n \to \infty$ para mostrar que $aq = a$, ¿Cómo obtiene de aquí que $a = 0$?)
4. Demostrar que las siguientes sucesiones divergen.
   (a) $1,\ 1/2,\ 1,\ 1/3,\ 1,\ 1/4,\ 1,\ 1/5,\ \ldots$
   (b) $c_n = \dfrac{n^2+1}{n}$
   (c) $c_n = q^n$, $q > 1$
   (Sugerencia: use que $(1+h)^n > 1 + nh > nh$, para todo $h > 0$)
   (d) $c_n = q^n, q \leq -1$
5. Demostrar que, cuando $n \to \infty$:
   (a) $\left(\dfrac{x^2}{1+x^2}\right)^n \to 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$
   (b) $\left(\dfrac{x}{1+x^2}\right)^n \to 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$

(c) $\left(\dfrac{x^3}{4+x^2}\right)^n \to 0$, para todo $|x| < 2$, y
$(\dfrac{x^3}{4+x^2})^n$ diverge, para $|x| > 2$

6. Suponga $0 < p < 1$ y demuestre que $\sqrt[n]{p} \to 1$ cuando $n \to \infty$.
(Sugerencia: $0 < p < 1 \Rightarrow \sqrt[n]{p} < 1 \Rightarrow \sqrt[n]{p} = \dfrac{1}{1+h_n}$, donde $0 < h_n$; por tanto, $p = \dfrac{1}{(1+h_n)^n} < \dfrac{1}{nh_n}$, de modo que $0 < h_n < \dfrac{1}{np}$ y $h_n \to 0$ cuando $n \to \infty$)

7. Suponga $p > 1$ y demuestre que $\sqrt[n]{p} \to 1$ cuando $n \to \infty$.
(Sugerencia: $p > 1 \Rightarrow \sqrt[n]{p} = 1 + h_n$, donde $0 < h_n$; por tanto, $p = \dfrac{1}{(1+h_n)^n} > n\,h_n$ de modo que $0 < h_n < \dfrac{p}{n}$ y $h_n \to 0$ cuando $n \to \infty$)

8. Demuestre que $\sqrt[n]{n} \to 1$ cuando $n \to \infty$.
(Sugerencia: $\sqrt[n]{n} = (\sqrt[n]{\sqrt{n}})^2$ y $\sqrt[n]{\sqrt{n}} > 1 \Rightarrow \sqrt[n]{n} = (1+k_n)^2$ donde $\sqrt[n]{\sqrt{n}} = 1 + k_n$ y $\sqrt{n} = (1+k_n)^n > n\,k_n$; use lo anterior para mostrar que $k_n \to 0$ cuando $n \to \infty$ y deduzca de allí que $\sqrt[n]{n} \to 1$ cuando $n \to \infty$)

9. Sea $c_0 = 1,\ c_n = \sqrt{1 + c_{n-1}}$. Demuestre que $c_n \to \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ cuando $n \to \infty$. (Los términos de esta sucesión *recursiva* son llamados «números de Fibonacci» en honor de Fibonacci o Leonardo da Pisa, matemático italiano de la edad media hacia el año 1228).

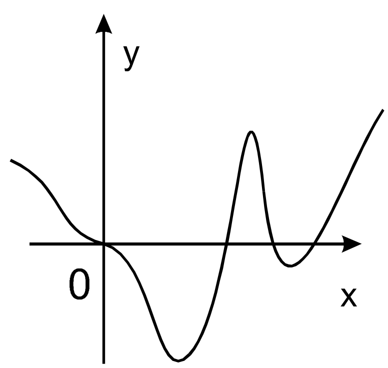
10. Hallar el límite cuando $n \to \infty$ de:
(a) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.
(Sugerencia: $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}$
(b) $\sqrt{n^2+a} - \sqrt{n^2+b}$
(c) $\sqrt{n^2+an+b} - n$
(d) $\sqrt[n]{a^n + b^n}$ si $a > b > 0$
(Sugerencia: $a < \sqrt[n]{a^n + b^n} < \sqrt[n]{2}a$)
(e) $\sqrt[n]{a^n + b^n + c^n}$ si $a > b > c > 0$
(Sugerencia: $a < \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n} < \sqrt[n]{3}a$)
(f) $\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)^n$.
(Sugerencia: $(1 + \dfrac{1}{n})^n \to e$ cuando $n \to \infty$)

Capítulo 11

Funciones continuas

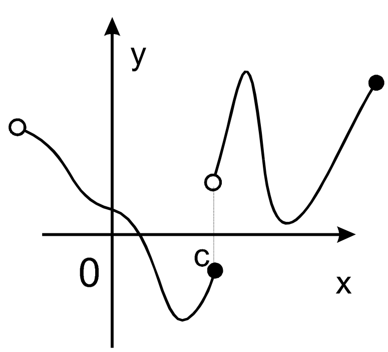
11.1 Continuidad

Las funciones continuas constituyen una clase fundamental para las operaciones del análisis matemático. Una idea intuitiva de función continua se tiene al considerar que su gráfico es continuo, en el sentido que se puede dibujar sin levantar el lápiz de la hoja de papel, como en la figura 11.1 y no como en la figura 11.2 .



Función continua

Figura 11.1



Función discontinua

Figura 11.2

Una función continua provee la expresión matemática de la situación muy frecuente de que a «incrementos pequeños» de la variable independiente corresponden «incrementos pequeños» de la variable dependiente. Ejemplos de esta situación vienen dados por las leyes que gobiernan el movimiento de los cuerpos, leyes que a menudo están dadas por fórmulas del tipo $s = f(t)$ (que expresan la distancia s dependiente del tiempo t). Debido a que el tiempo y la distancia «son continuos», una ley de movimiento, $s = f(t)$, establece entre ellos una relación continua caracterizada por el hecho que a un incremento pequeño del tiempo corresponde, como mencionamos antes y reiteramos aquí, un incremento pequeño de la distancia.

Si consideramos una función arbitraria $y = f(x)$ y un valor particular c de la variable independiente, entonces la función refleja un «proceso continuo en el punto c» siempre y cuando a valores x que difieren poco de c correspondan valores de la función $f(x)$ que difieren poco del valor $f(c)$. En otras palabras, si el incremento $x - c$ de la variable independiente tiende a 0, entonces el incremento $f(x) - f(c)$ de la función también tiende a cero. Podemos formular lo anterior expresando que

$$f(x) - f(c) \to 0 \text{ cuando } x - c \to 0$$

o bien escribiendo que

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

Esta relación constituye la definición matemática de *continuidad de la función en el punto* c. Es decir,

Definición: *La función* $f(x)$ *es* **continua** *en* c *si y sólo si* $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.

11.2 Observaciones sobre el concepto de continuidad

Si analizamos la definición de continuidad vemos que para que la función $f(x)$ sea continua en el punto c se requiere que las siguientes tres condiciones sean satisfechas:

(i) La función debe estar definida en el punto, i.e., c debe pertenecer al dominio de f, de lo contrario la expresión «$f(c)$» carece de sentido;

(ii) El límite de la función $f(x)$ cuando x tiende a c debe existir, i.e., debe existir un número real L tal que $\lim_{x \to c} f(x) = L$, en caso contrario, la expresión «$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$» no tiene ningún sentido;

(iii) El límite L debe ser igual al valor de la función en el punto c, i.e., debe ser $L = f(c)$, de modo que, si en la definición de límite ponemos $L = f(c)$, tenemos que, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } |x - c| < \delta \text{ entonces } |f(x) - f(c)| < \varepsilon$$

(la restricción $x \neq c$ impuesta en la definición de límite deja de ser necesaria puesto que la desigualdad $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$ es automáticamente satisfecha para $x = c$).

Como ejemplo, analizaremos la continuidad de la función $f(x) = x^2$ en un punto fijo c.

Para verificar que

$$\lim_{x \to c} x^2 = c^2 \text{ o equivalentemente } \lim_{x \to c} x^2 - c^2 = 0$$

basta observar que

$$| x^2 - c^2 |=| x + c | | x - c |$$

o, si se prefiere, que

$$\lim_{x \to c} x^2 - c^2 = \lim_{x \to c} (x - c)(x + c) = (\lim_{x \to c} x - c) \cdot (\lim_{x \to c} x + c) = 0 \cdot 2c = 0.$$

En este ejemplo, el valor particular del punto c parece no tener relevancia, en el sentido que $f(x) = x^2$ es continua en *cada* punto c de la recta real.

> **Definición:** *Decimos que la función $f(x)$ es* **continua en** *un conjunto C de números reales si y sólo si es continua en cada punto de dicho conjunto.*

Si C es un intervalo abierto de la forma (a, b) o $C = \mathbb{R}$, la definición anterior se interpreta fácilmente. Si C es un intervalo que contiene a alguno de sus extremos, i.e., C es de la forma $[a, b)$, $(a, b]$ o $[a, b]$, entonces definimos la continuidad de f en C pidiendo que f sea continua en cada $c \in (a, b)$ y además que en cada extremo (incluido) en el intervalo C se cumple que el límite lateral correspondiente existe y ese límite lateral es igual al valor de f en el extremo en cuestión:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \quad , \quad \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b), \text{ respectivamente .}$$

Como ejemplos de funciones continuas podemos considerar las funciones elementales x^n con $n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\operatorname{arcsen} x$, $\arccos x$: funciones estas que son continuas en los conjuntos donde están definidas (¡Convénzase usted mismo!). Sus gráficos están presentados en las seis figuras desde 11.3 en la página 168 hasta 11.8 en la página 169 .

Si nos referimos al gráfico de la función $y = f(x)$, podemos dar la definición de función continua de la manera geométrica siguiente. Elegimos un número $\varepsilon > 0$ cualquiera y trazamos dos rectas paralelas al eje x a distancia $f(c) - \varepsilon$ y $f(c) + \varepsilon$ de modo de obtener una banda horizontal de ancho 2ε centrada en $f(c)$. Si $f(x)$ es continua en c, entonces *siempre* es posible hallar un número $\delta > 0$ tal que *toda* la parte del gráfico que está comprendida en la banda vertical de ancho 2δ y centrada en c esté contenida en la banda horizontal de ancho 2ε y centrada en $f(c)$. Nos remitimos a la figura 11.9 en la página 170 .

11.3 Tipos de discontinuidad

La función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ provee un ejemplo de función discontinua en el punto 0. En este caso observamos que la función está definida en toda la recta real salvo en 0, de modo que la función está definida en cualquier intervalo que contiene al punto 0 excepto en el punto 0 mismo. Aquí la condición que falla es que 0 pertenezca al dominio de la función. En cualquier otro punto $c \neq 0$ tenemos que

$$\lim_{x \to c} \frac{1}{x} = \frac{1}{c}$$

En efecto, si $c \neq 0$ entonces $|c| > 0$, i.e., la distancia de c a 0 es la cantidad positiva $|c|$, y podemos restringir la atención a aquellos puntos x en el intervalo $\left(c - \dfrac{|c|}{2}, c + \dfrac{|c|}{2}\right)$.

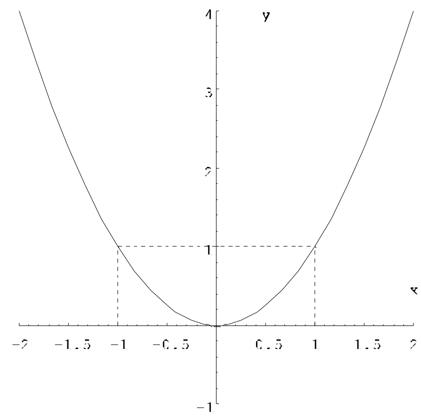
Este intervalo es de la forma $\left(\dfrac{c}{2}, \dfrac{3c}{2}\right)$ o $\left(\dfrac{3c}{2}, \dfrac{c}{2}\right)$, según sea $c > 0$ o $c < 0$, respectivamente, así que la distancia de cualquiera de sus puntos al punto 0 es mayor que $\dfrac{|c|}{2}$, ver figura 11.10 en la página 170 . Luego, para x en el intervalo, es

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{c}\right| = \frac{|\ x - c\ |}{|\ x\ |\,|\ c\ |} < \frac{2}{c^2}\ |\ x - c\ |\ .$$

Por tanto, dado cualquier $\varepsilon > 0$, basta elegir $\delta = \min\left(\dfrac{|c|}{2}, \dfrac{c^2\varepsilon}{2}\right)$ para garantizar que si $|\ x - c\ | < \delta$ entonces $\left|\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{c}\right| < \varepsilon$. De la discusión anterior sigue que $f(x) = \dfrac{1}{x}$ es continua en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

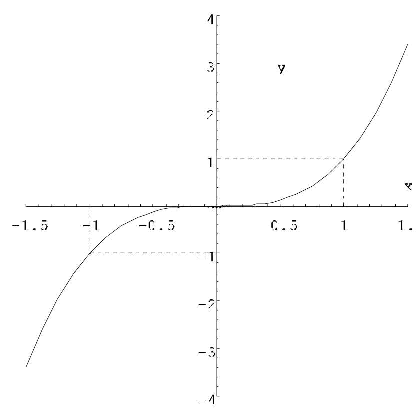
La función $g(x) = \dfrac{|x|}{x}$ sirve como otro ejemplo de función discontinua en el punto 0. Nuevamente, la condición que falla es que 0 pertenezca al dominio de la función. Sin embargo, hay «cierta» diferencia entre el comportamiento de la función $f(x)$ y el de la función $g(x)$ (ver figura 11.11 en la página 171). Mientras que

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty, \text{ y } \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty, \text{ tenemos que } \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1, \text{ y } \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$$



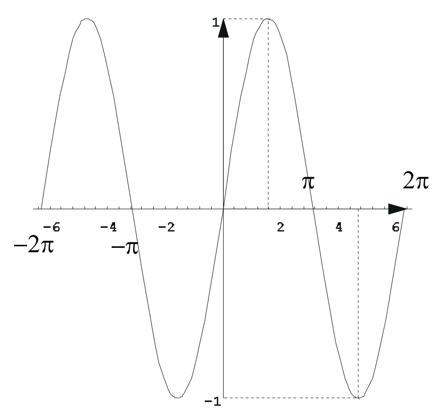
$y = x^n,\ n$ *par*

Figura 11.3



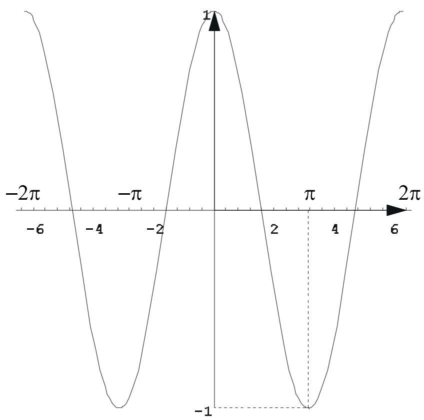
$y = x^n,\ n$ *impar*

Figura 11.4



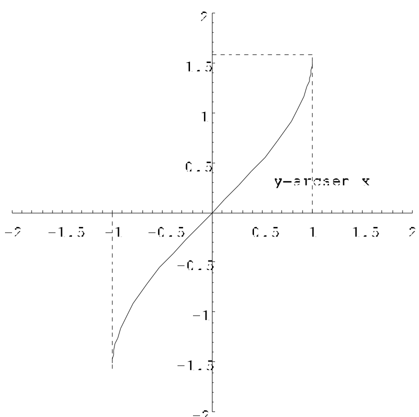
$y = \operatorname{sen} x$

Figura 11.5



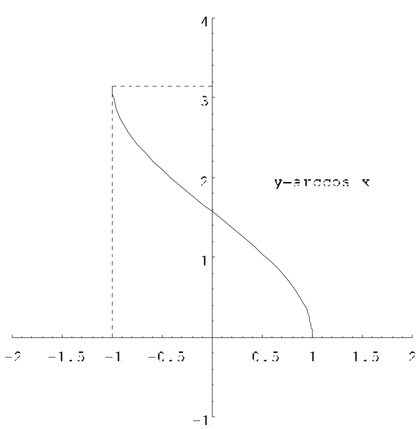
$y = \cos x$

Figura 11.6



$y =$ arcsen$x$

Figura 11.7



$y = \arccos x$

Figura 11.8

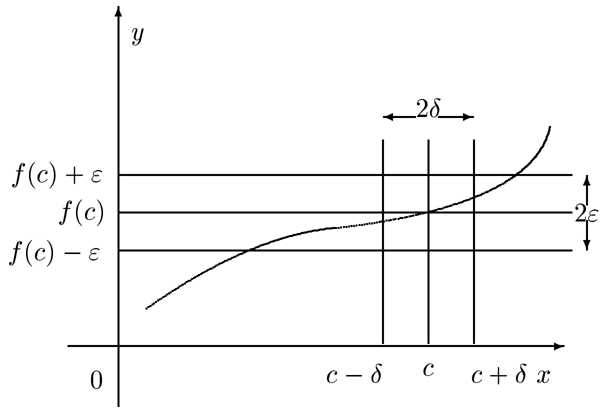


Figura 11.9 *función continua en c*

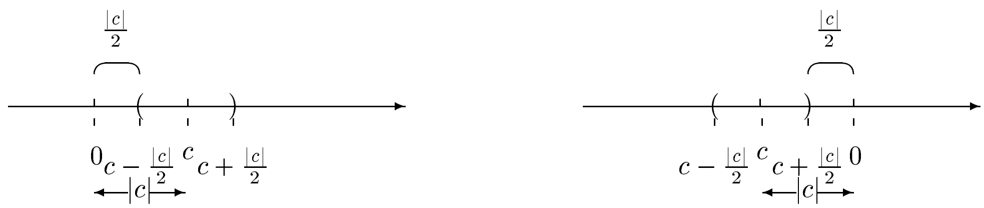


Figura 11.10 *El intervalo* $\left(c-\dfrac{|c|}{2}, c+\dfrac{|c|}{2}\right)$*, con* $c \neq 0$

Si la función tiende a ∞ o $-\infty$ cuando $x \to c$ o cuando $x \to c^{\pm}$, decimos que la función tiene una *discontinuidad infinita* en el punto c. Si los límites laterales de la función cuando $x \to c$ existen pero son distintos, decimos que la función tiene una *discontinuidad de salto (finito)* en el punto c.

Así, en los ejemplos que nos ocupan, tenemos que $f(x) = \dfrac{1}{x}$ tiene una discontinuidad infinita en 0 mientras que $g(x) = \dfrac{|x|}{x}$ tiene una discontinuidad de salto en 0.

Las funciones $h(x) = \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$ y $k(x) = x \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$, proveen otros ejemplos de funciones discontinuas en 0. Nuevamente lo que falla en ambos casos es que 0 pertenezca al dominio de la función. En el primer caso la discontinuidad en 0 no es infinita y tampoco de salto ya que los límites laterales simplemente no existen. En el segundo caso tenemos que $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{sen}\dfrac{1}{x} = 0$.

Si $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ existe y es igual a L pero, o bien $f(x)$ no está definida en c o bien $L \neq f(c)$, decimos que la función $f(x)$ tiene una *discontinuidad removible* o *evitable* en el punto c.

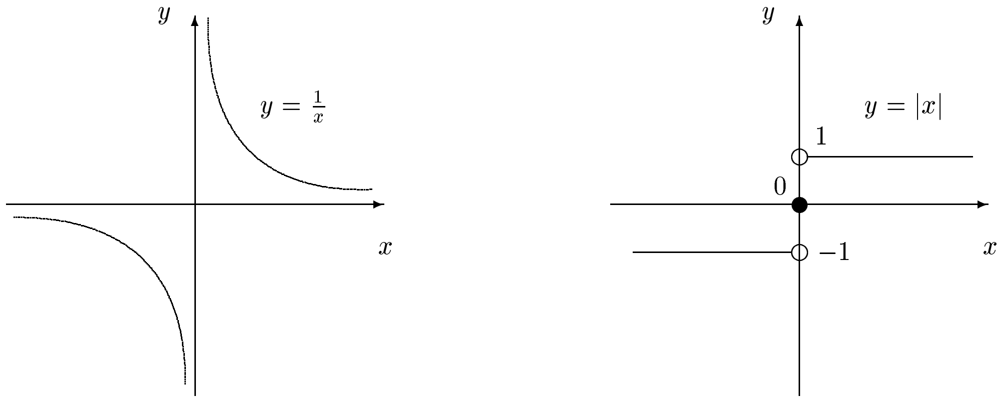
Si $f(x)$ tiene una discontinuidad removible en el punto c entonces podemos definir una nueva función, que llamaremos $F(x)$ (como en la figura 11.12 en la página 171) con las siguientes propiedades:

(i) $F(x) = f(x)$ si $x \neq c$.

(ii) F es continua en c.

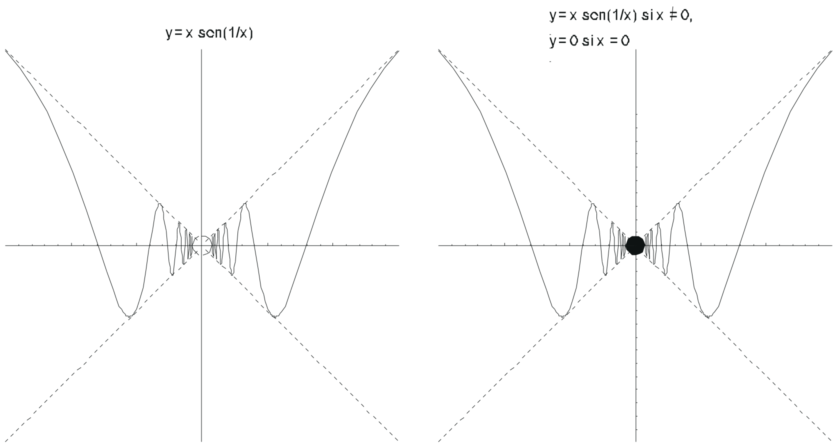
La elección de $F(x)$ *no puede ser otra* que

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq c \\ L & \text{si } x = c \end{cases}$$



discontinuidad infinita discontinuidad de salto

Figura 11.11 *los gráficos* $y = \frac{1}{x}$ *y* $y = \frac{|x|}{x}$



discontinuidad removible

Figura 11.12

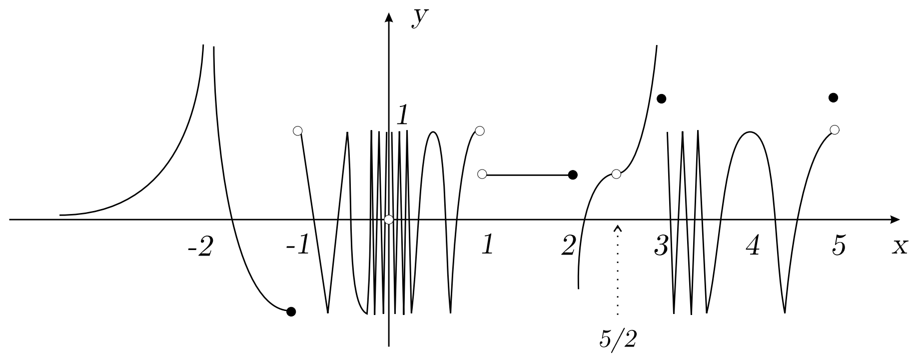
Dejamos al lector la comprobación de que $F(x)$ tiene las propiedades requeridas. Así en el caso de la función $k(x) = x \ \text{sen} \dfrac{1}{x}$, tenemos una discontinuidad removible en 0 y

$$K(x) = \begin{cases} x \,\text{sen}\, \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

es una función que coincide con $k(x)$ en los puntos $x \neq 0$ y que es continua en 0. De hecho, $K(x)$ es continua en toda la recta real. La comprobación de este hecho resultará más fácil una vez que hayamos estudiado ciertas propiedades de las funciones continuas, por lo que la posponemos para más adelante.

Hasta aquí hemos estudiado distintas funciones con distintos tipos de discontinuidad en un solo punto. En todos los ejemplos falla la condición que el punto pertenezca al dominio de la función. La tabla 11.1 en la página 172 ilustra diversas situaciones que pueden presentarse.

En los puntos $-2, 0, 1$ y $\dfrac{5}{2}$ vemos que la función no está definida (pero sí lo está en cualquier otro punto de $(-\infty, 5]$; al tender a los puntos $-1, 2$ y 3 no existe el límite de la función, más precisamente, $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -1 \neq 1 = \lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$ (salto), $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 1$ y $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$ (discontinuidad infinita por la derecha), $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$ no existe (discontinuidad infinita por la izquier-



	discontinuidad infinita	discontinuidad de salto	discontinuidad removible	ninguna de las anteriores
¿Pertenece c al dominio de $f(x)$? NO $\Rightarrow$ SI $\Downarrow$	$c=-2$	$c=1$	$c=\frac{5}{2}$	$c=0$
¿Existe $\lim\limits_{x\to c} f(x)$? NO $\Rightarrow$ SI $\Downarrow$	$c=2$ (por la derecha) $c=3$ (por la izquierda)	$c=-1$	NO TIENE SENTIDO PLANTEAR ESTA POSIBILIDAD	$c=3$ (por la derecha)
¿Es $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$? NO $\Rightarrow$			$c=5$	

Tabla 11.1 *tipos de discontinuidad*

da); en el punto 5 tenemos que la función está definida, $f(5)=2$, $\lim\limits_{x\to 5} f(x)=1$ pero, claramente, $\lim\limits_{x\to 5} f(x)\neq f(5)$ (discontinuidad removible).

Antes de terminar esta discusión acerca de los distintos tipos de discontinuidad, queremos analizar un ejemplo más complejo de función discontinua.

La función de Riemann

El ejemplo con el que queremos finalizar está dado por la llamada función de Riemann. Esta función, que debe su nombre al matemático alemán Georg Friedrick Bernard Riemann (Bresclenz 1.826-Selasca 1866), se define en $(0,1)$ por

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \\ \dfrac{1}{q} & \text{si } x=\dfrac{p}{q} \text{ fracción irreducible} \end{cases}$$

Para cualquier número c, con $0<c<1$, la función $f(x)$ tiende a 0 al tender x a c. Uno puede asumir este hecho a manera de «acto de fe» y deducir entonces que $f(x)$ es discontinua en todos los puntos racionales de $(0,1)$ y continua en los puntos irracionales de $(0,1)$. La función de Riemann provee pues un ejemplo de función discontinua con un número *infinito* de puntos de discontinuidad (más aún, los puntos de discontinuidad forman un conjunto *denso* en $(0,1)$, en el sentido que todo punto de $(0,1)$ puede aproximarse por puntos de dicho conjunto). Para el lector interesado en la prueba de que $\lim_{x \to c} f(x) = 0$, para cada $0 < c < 1$, incluimos a continuación una breve discusión de este hecho.

La función de Riemann, $\lim_{x \to c} f(x) = 0$

Consideremos un número cualquiera $\varepsilon > 0$ y sea $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande como para que sea $\varepsilon > \dfrac{1}{N}$ pero $\varepsilon \leq \dfrac{1}{N-1}$. Observamos que los únicos números x para los cuales es falso que $\mid f(x) - 0 \mid < \varepsilon$ son $x =$:

$$\frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{2}{3};\ \frac{1}{4};\ \frac{3}{4};\ \frac{1}{5};\ \frac{2}{5};\ \frac{3}{5};\ \frac{4}{5};\ \ldots;\ \frac{1}{N-1};\ \ldots;\ \frac{N-2}{N-1}.$$

Si c es irracional, entonces c no es ninguno de esos números. Si c es racional, entonces puede pasar que c sea precisamente uno de esos números. En cualquier caso sólo hay un número finito de tales números y podemos elegir entre ellos el que está más próximo a c y no es el propio c, i.e., elegimos $\dfrac{p}{q}$ tal que

$$0 < \left| \frac{p}{q} - c \right| \leq \mid x - c \mid$$

para *todo* x tal que $\mid f(x) - 0 \mid \geq \varepsilon$. Podemos tomar δ como esta distancia mínima. Así si $0 < \mid x - c \mid < \delta$ entonces x *no es ninguno* de los números para los cuales $\mid f(x) - 0 \mid \geq \varepsilon$ y por lo tanto se cumple $\mid f(x) - 0 \mid < \varepsilon$.

11.4 Operaciones con funciones continuas

En las páginas anteriores dimos algunos ejemplos de funciones continuas. Podemos dar otros muchos ejemplos una vez que hayamos demostrado los siguientes dos teoremas.

Teorema 21 *Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas en c entonces*

(a) $f(x) + g(x)$

(b) $f(x) \cdot g(x)$

(c) $\dfrac{1}{f(x)}$, *siempre y cuando sea $f(c) \neq 0$.*

son funciones continuas en c.

En particular:

(d) $kf(x)$, *para toda constante $k \in \mathbb{R}$,*

(e) $f(x) - g(x)$,

(f) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, *siempre y cuando sea $g(c) \neq 0$,*

son funciones continuas en c.

Prueba: *Puesto que $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en c,*

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c) \quad y \quad \lim_{x \to c} g(x) = g(c).$$

Por el Teorema 13 en la página 134 , esto implica que

$$\lim_{x \to c} f(x) + g(x) = f(c) + g(c),$$

lo cual es precisamente la afirmación de que la función $f(x) + g(x)$ es continua en c. Las demostraciones de las partes (b) y (f) se dejan al lector. □

Partiendo de la función constante, $f(x) = k$, y de la función identidad, $g(x) = x$, podemos aplicar el Teorema 21 para concluir que las funciones (monomios)

$$k\,x^n,$$

con $k \in \mathbb{R}$ constante y $n \in \mathbb{N}$, y los polinomios

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

con $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ constantes y $n \in \mathbb{N}$, son funciones continuas en todo $\mathbb{R}$. Que la función x^n, $n \in \mathbb{N}$, es continua en $\mathbb{R}$ ya lo habíamos mencionado; que la función $p(x)$ sea continua dice que *todas* las funciones polinómicas son continuas.

También, a partir del Teorema 21 en la página 173 , podemos concluir que las funciones racionales

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

son continuas en todos los puntos x tales que $q(x) \neq 0$. En particular, la función $\dfrac{1}{x}$ es continua para todo $x \neq 0$, como ya habíamos apuntado.

Funciones más complicadas, como por ejemplo, la función

$$h(x) = \frac{\operatorname{sen}^2 x + x^4 \cos x}{\operatorname{sen}^{30} x + 4x^2 \operatorname{sen} x},$$

puede demostrarse ahora que son continuas en los conjuntos donde están definidas.

El Teorema 21 en la página 173 , sin embargo, no parece ser útil para demostrar la continuidad de funciones tales como $\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$ y $x \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$ para $x \neq 0$. Necesitamos un resultado referente a la *composición* de funciones continuas y la continuidad de las funciones trigonométricas.

Teorema 22 *Si f(x) es continua en c y $g(y)$ es continua en $f(c)$, entonces la composición $g \circ f(x)$ es continua en c.*

Prueba:

Puesto que $g(y)$ es continua en $f(c)$, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

1. *si $\mid y - f(c) \mid < \delta$ entonces $\mid g(y) - g(f(c)) \mid < \varepsilon$.*

Puesto que $f(x)$ es continua en c, a ese $\delta > 0$ corresponde un número δ' > 0 tal que

2. *si $\mid x - c \mid < \delta$' entonces $\mid f(x) - f(c) \mid < \delta$.*

Nos remitimos a la la figura 11.13 en la página 175 .

La relación 1 puede interpretarse como que cualquier número y a distancia menor que δ de $f(c)$ satisface que su imagen por g, a saber, $g(y)$, está a distancia menor que ε de $g(f(c))$.

La relación 11.4 dice que si un número x está a distancia menor que δ' de c entonces el número $y = f(x)$ está a distancia menor que δ de $f(c)$. Por tanto, deducimos que

$$\textit{si } \mid x - c \mid < \delta' \textit{ entonces } \mid g(f(x)) - g(f(c)) \mid < \varepsilon,$$

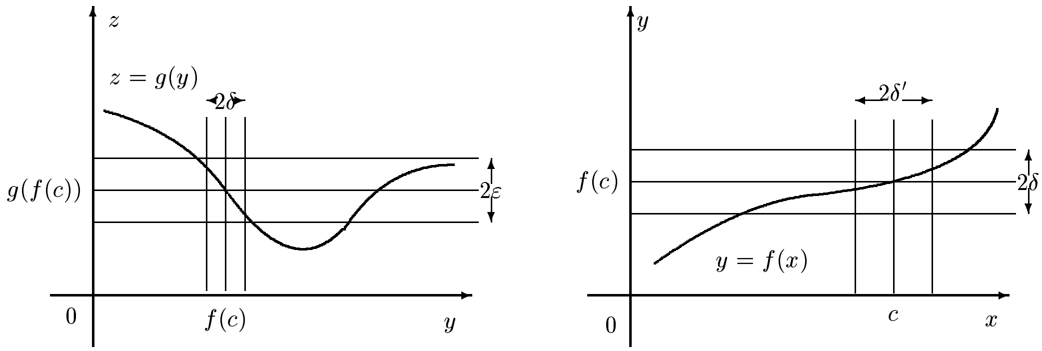
lo que prueba que $g \circ f(x)$ es continua en c. ☐

Podemos ahora volver a considerar las funciones $\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$ y $x \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$. Aplicando los Teoremas 21 en la página 173 y 22 y usando la continuidad de la función seno se concluye que dichas funciones son continuas en $x \neq 0$. Por ejemplo, la función $x \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$ es el resultado de multiplicar el monomio x con la función compuesta $f \circ g$ donde $g(x) = \frac{1}{x}$ y $f(x) = \operatorname{sen} x$, siendo todas estas funciones continuas en $x \neq 0$.

Note que del teorema 22 la continuidad de la función compuesta $g \circ f(x)$ en c depende de la continuidad de $f(x)$ en c y de $g(y)$ en $f(c)$. Por ejemplo, si $f(x)$ es continua en c entonces $|f(x)|$ es continua en c (¿por qué?). Sin embargo el hecho que $f(x)$ no sea continua en c **no implica** que $|f(x)|$ no sea continua en c. Por ejemplo, la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

no es continua en 0 mientras que la función $|f(x)|$ es continua en todo $\mathbb{R}$ puesto que es la función constante igual a 1 como en la figura 11.14 en la página 175 .



$$|g(f(x)) - g(f(c))| < \varepsilon \;\Leftarrow\; |y - f(c)| < \delta$$
$$|g(f(x)) - g(f(c))| < \varepsilon \;\Leftarrow\; |f(x) - f(c)| < \delta \;\Leftarrow\; |x - c| < \delta'$$

Figura 11.13 *composición de funciones continuas*

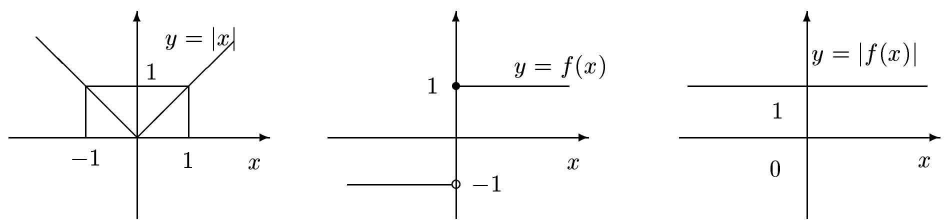


Figura 11.14 *los gráficos* $y = |x|,\ y = f(x)$ *y* $y = |f(x)|$

Ejercicios

1. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

   (a) $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$

   (b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

   (c) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x-4}}$

   (d) $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x-3}$

   (e) $f(x) = \dfrac{\sqrt{9-x}}{\sqrt{x-6}}$

   (f) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

   (g) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x-3|}{x-3} & \text{si} \quad x \neq 3 \\ 1 & \text{si} \quad x = 3 \end{cases}$

   (h) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x^2}{1+x} & \text{si} \quad x \neq -1 \\ 1 & \text{si} \quad x = -1. \end{cases}$

2. Determinar cuáles de las siguientes funciones son continuas en los intervalos que se indican:

   (a) $f(x) = \dfrac{x}{x-2},\ (-\infty, 0],\ [0, \infty),\ (0, 2),\ (0, 2],\ [2, \infty),\ (2, \infty).$

   (b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1},\ (0, 1),\ (-1, 1),\ [0, 1],\ (-1, 0],\ (-\infty, -1],\ (1, \infty).$

   (c) $f(x) = [\![x]\!],\ (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}),\ (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}),\ (1, 2),\ [1, 2),\ (1, 2].$

3. Hallar los valores de c y k que hacen que las siguientes funciones sean continuas en $\mathbb{R}$.

(a) $f(x) = \begin{cases} cx^2 - 3 & \text{si} \quad x \leq 2 \\ cx + 2 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} c^2 x & \text{si} \quad x < 1 \\ 3cx - 2 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} x + 2c & \text{si} \quad x < -2 \\ 3cx + k & \text{si} \quad -2 \leq x \leq 1 \\ 3x - 2k & \text{si} \quad 1 < x \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} 4x & \text{si} \quad x \leq 1 \\ cx + d & \text{si} \quad -1 < x < 2 \\ -5x & \text{si} \quad x \geq 2. \end{cases}$

4. Hallar los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones y determinar el tipo de discontinuidad de cada uno.

(a) $f(x) = \dfrac{|x^2 - 16|}{x^2 - 16}$

(b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 16}$

(c) $f(x) = \dfrac{x - 3}{x^2 - x - 6}$

(d) $f(x) = \dfrac{x - 2}{x^3 + x^2 - 6x}$

(e) $f(x) = \dfrac{x + 2}{x^3 - 8}$

(f) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 + x - 6}$

11.5 Dos teoremas fundamentales sobre las funciones continuas

Bernhard Placidus Johann Nepomuk Bolzano (Praga 1.781–1.848) fue un sacerdote que hizo significativas y muy importantes contribuciones a la matemática. En su trabajo sobre las paradojas del infinito *Paradoxien des Unendlichen*, Bolzano apuntó, por vez primera, que muchas de las afirmaciones, aparentemente obvias, referentes a las funciones continuas, deben ser rigurosamente demostradas para garantizar que pueden ser usadas en toda su generalidad. Una de tales afirmaciones es la que hoy se conoce bajo el nombre de «Teorema de Bolzano». El teorema corresponde perfectamente a nuestra idea intuitiva de curva continua, que, para pasar de un punto por debajo del eje x a otro punto por arriba del eje x, debe cortar el eje x en algún punto (ver figura 11.15).

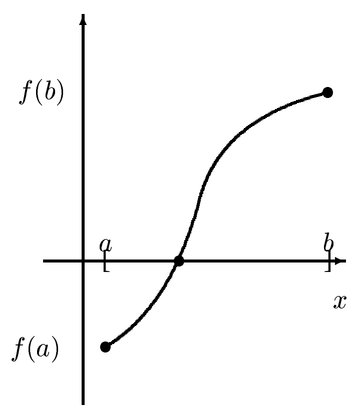


Figura 11.15 *el Teorema de Bolzano*

Teorema 23 (Bolzano) *Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, y $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, entonces existe al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.*

Si $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos entonces o bien $f(a) < 0 < f(b)$ (como en la figura 11.15) o bien $f(a) > 0 > f(b)$ (como en la figura 11.16 en la página 177). La conclusión del teorema es que hay, al menos, un punto donde la función se anula pero puede haber más de un punto con esa propiedad.

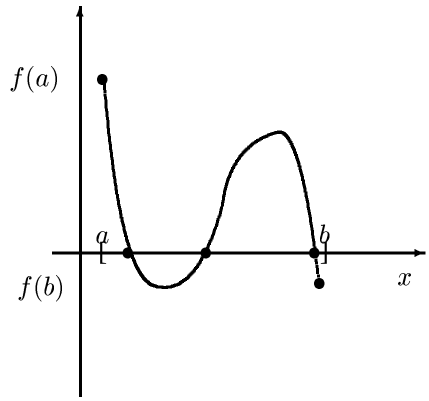


Figura 11.16 *el Teorema de Bolzano (2)*

Las figuras 11.15 y 11.16 en la página 177 parecen indicar que la conclusión del Teorema de Bolzano, tal como lo hemos enunciado, puede hacerse «más fuerte», al darnos cuenta que, más aún, la función continua $f(x)$ en el intervalo $[a,b]$ toma *todos* los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$, en el sentido que si $f(a) < d < f(b)$ o $f(a) > d > f(b)$ entonces existe al menos un punto $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = d$ y, en ese contexto, la restricción de que $f(a)$ y $f(b)$ tengan signos opuestos no parece tener ninguna relevancia (figura 11.17 en la página 177). El hecho de que una función continua $f(x)$ en un intervalo cerrado $[a,b]$ tome todos los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$, suele llamarse el **Teorema del Valor Intermedio** y parece ser resultado más general que el Teorema de Bolzano pero, como veremos ambos teoremas son equivalentes.

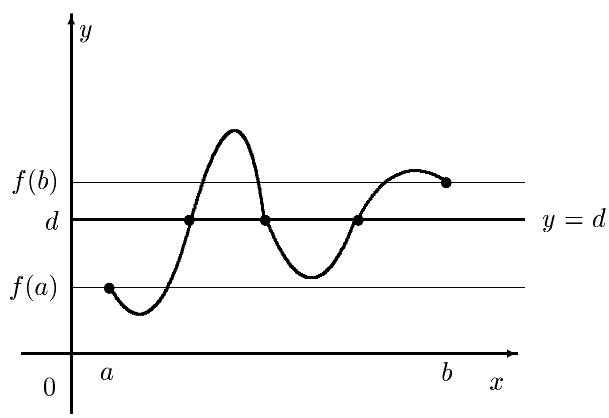


Figura 11.17 *el Teorema de Bolzano (3)*

En efecto, sea $g(x)$ la función definida en $[a,b]$ por $g(x) = f(x) - d$. Entonces $g(x)$ es continua y $g(a) < 0 < g(b)$ o $g(a) > 0 > g(b)$, según sea $f(a) < d < f(b)$ o $f(a) > d > f(b)$, respectivamente. Aplicamos el Teorema de Bolzano y obtenemos que existe $c \in (a,b)$ tal que $g(c) = 0$. Pero que sea $g(c) = 0$ es equivalente a que sea $f(c) = d$.

Podemos resumir la discusión anterior bajo la forma de teorema.

Teorema 24 *Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[a,b]$ entonces $f(x)$ toma todos los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$.*

Las hipótesis del Teorema de Bolzano (y de su corolario, el Teorema 24) son restrictivas y esenciales. Consideremos, por ejemplo, la función $f(x) = \frac{|x|}{x}$ en el intervalo cerrado $[-2, 2]$ (ver la figura 11.18 en la página 178). Entonces $f(x)$ es continua en todo punto de $[-2, 2]$ salvo en 0, y

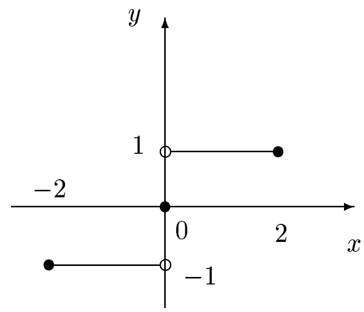


Figura 11.18 *la continuidad en las hipótesis del Teorema de Bolzano es esencial*

$f(-2) = -1 < 0 < 1 = f(2)$, pero no existe ningún punto $c \in (-2, 2)$ tal que $f(c) = 0$; la discontinuidad en el solo punto 0 es suficiente para «destruir» la conclusión del Teorema de Bolzano.

Daremos una demostración formal del Teorema de Bolzano pero dejamos a juicio del lector el aceptarlo y aplicarlo sin demostrarlo con todo rigor.

Prueba: *Vamos a recurrir a argumentos que ya hemos empleado antes en algunas de las demostraciones del Capítulo 11 en la página 165 sobre límites. Repetiremos los argumentos para lograr una demostración autocontenida. La idea de la demostración que proponemos es «localizar» el punto $c \in (a, b)$ como el* menor *punto donde se anula la función.*

Supongamos que $f(a) < 0 < f(b)$. Como $f(x)$ es continua en $[a, b]$, entonces, en particular, $f(x)$ es continua en a, por lo que $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$. Luego, dado $\varepsilon = -\frac{f(a)}{2} > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $a \leq x < a + \delta$ entonces $\frac{3f(a)}{2} < f(x) < \frac{f(a)}{2} < 0$. Sea $a < \alpha < a + \delta$ fijo. Entonces $f(x) < 0$ para todo $x \in [a, \alpha]$ (ver la figura 11.19).

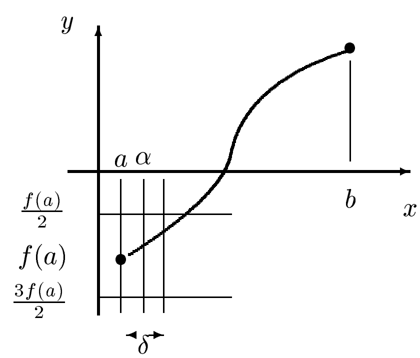


Figura 11.19 *existe $\alpha > a$ tal que $f(x) < 0$, para todo $x \in [a, \alpha]$*

Lo anterior prueba que existe $\alpha > a$ tal que $f(x) < 0$, para todo $x \in [a, \alpha]$.

Por consiguiente, el conjunto A dado por

$$A = \{a < \alpha \leq b : \ f(x) < 0 \ \ en\ [a, \alpha]\}$$

es no vacío. El punto b (que, claramente, no pertenece a A) es una cota superior para A. Por el axioma del supremo, existe $a < c \leq b$ tal que $c = \sup A$.

Nos planteamos demostrar que $f(c) = 0$. Si asumimos por un momento que $f(x)$ efectivamente se anula en c, sigue de manera inmediata que $c < b$ (c no puede ser b ya que $f(b) > 0$).

Para verificar que $f(c) = 0$ recurrimos a una demostración por reducción al absurdo. Supongamos pues que $f(c) \neq 0$. Es o bien $f(c) < 0$ o bien $f(c) > 0$.

Si $f(c) < 0$ entonces $c < b$ (no puede ser $c = b$ debido a que $f(b) > 0$). Como f(x) es continua en c y $c \in (a,b)$, entonces $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$, de modo que, dado $\varepsilon = -\dfrac{f(c)}{2} > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $c - \delta < x < c + \delta$ entonces $\dfrac{3f(c)}{2} < f(x) < \dfrac{f(c)}{2} < 0$. Esto dice que $f(x) < 0$ en $(c-\delta, c+\delta)$. Sea $c < \beta < c + \delta$ fijo y sea $\alpha \in A$ tal que $c - \delta < \alpha < c$. La existencia de α está garantizada por ser $c = supA$, ya que si fuera $\alpha \leq c - \delta$, para todo $\alpha \in A$, entonces $c - \delta$ sería cota superior de A y tendría que ser $c \leq c - \delta$, lo cual es absurdo. Tenemos, pues, que $f(x) < 0$ tanto en $[a, \alpha]$ como en $(c-\delta, \beta)$. Por consiguiente (ver la figura 11.20) $f(x) < 0$ en $[a, \beta]$ o, lo que es equivalente, $\beta \in A$.

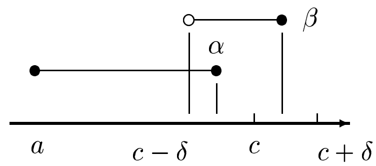


Figura 11.20 $f(x) < 0$, *en* $[a, \beta]$

Pero, entonces, debe ser $\beta \leq c$, lo cual es claramente imposible ya que se eligió $c < \beta$. La contradicción viene de asumir que $f(c) < 0$. Por tanto, la suposición $f(c) < 0$ es falsa.

Si $f(c) > 0$ entonces puede ser $c = b$. En cualquier caso, puesto que $f(x)$ es continua en c; es $\lim_{x\to c^-} f(x) = f(c)$. Luego, dado $\varepsilon = \dfrac{f(c)}{2} > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $c - \delta < x \leq c$ entonces $0 < \dfrac{f(c)}{2} < f(x) < \dfrac{3f(c)}{2}$. Esto dice que $f(x) > 0$ en $(c - \delta, c]$. De nuevo podemos afirmar que existe $\alpha \in A$ tal que $c - \delta < \alpha$. Tenemos entonces que $f(\alpha) < 0$, ya que $f(x) < 0$ en $[a, \alpha]$ y también que $f(\alpha) > 0$, puesto que $f(x) > 0$ en $(c-\delta, c]$ y $\alpha \in (c - \delta, c)$. Esto es absurdo, de modo que la suposición $f(c) > 0$ conduce de igual manera a una contradicción (ver la figura 11.21).

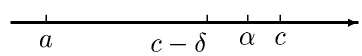


Figura 11.21 $f(\alpha) < 0$, *pero* $f(x) > 0$ *en* $(c - \delta, c]$

No pudiendo ser ni $f(c) < 0$ ni $f(c) > 0$, queda $f(c) = 0$ como única posibilidad. La demostración para el caso $f(a) > 0 > f(b)$ sigue de la discusión anterior tomando $-f(x)$ en lugar de $f(x)$. De hecho, $-f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y $-f(a) > 0 > -f(b)$, luego, en vista de lo ya demostrado, existe $c \in (a, b)$ tal que $-f(c) = 0$, i.e., tal que $f(c) = 0$. □

Otra propiedad importante de las funciones continuas fue formulada por Karl Wilhelm Theodor Weierstrass (Ostenfelde 1.815-Berlín 1.897), matemático alemán a quien, más quizás que a ningún otro, se debe la tendencia moderna de rigor y precisión en el análisis matemático. De manera intuitiva, la propiedad expresa que el gráfico de una función continua en un intervalo cerrado debe tener un punto más alto que cualquier otro y un punto más bajo que cualquier otro (ver la figura 11.22 en la página 180).

Teorema 25 (Weierstrass) *Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$. Entonces existen un punto $x^0 \in [a, b]$ donde $f(x)$ alcanza su máximo valor y un punto $x_0 \in [a, b]$ donde $f(x)$ alcanza su mínimo valor.*

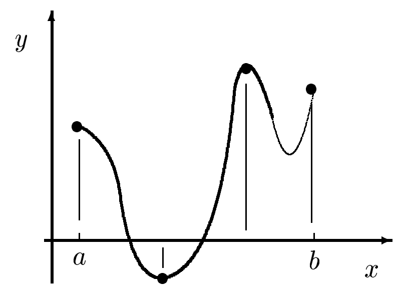


Figura 11.22 *el teorema de Weierstrass*

Que $f(x)$ alcance su máximo valor en x^0 significa que $f(x) \leq f(x^0)$, para todo $x \in [a,b]$, y que $f(x)$ alcance su mínimo valor en x_0 significa que $f(x_0) \leq f(x)$, para todo $x \in [a,b]$. Por tanto, de la conclusión del Teorema de Weierstrass se desprende que toda función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ es acotada, i.e., existen $m, M \in \mathbb{R}$ tales que $m \leq f(x) \leq M$, para todo $x \in [a,b]$.

Lo que afirma el Teorema de Weierstrass es que toda función continua en un intervalo cerrado es acotada y, *más aún*, alcanza allí sus valores máximo y mínimo.

Conviene observar que una función (discontinua) en un intervalo cerrado, aunque acotada, no necesariamente tiene un máximo o mínimo valor. Consideremos, por ejemplo, la función $f(x)$ definida en $[0,1]$ por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \text{ es irracional} \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x \text{ es racional} \end{cases}$$

Como estamos trabajando en el intervalo cerrado $[0,1]$, podemos asegurar que la función $f(x)$ toma valores comprendidos entre 0 y 1, i.e.,

$$0 \leq f(x) \leq 1, \text{ para todo } x \in [0,1].$$

Más aún, podemos afirmar que la función $f(x)$ toma valores próximos a 0 y a 1 tanto como se quiera, si se elige x irracional suficientemente próximo a 0 o a 1, respectivamente. Sin embargo, f(x) no es *nunca* igual a 0 o a 1, puesto que, para x racional, $f(x) = \frac{1}{2}$, y para x irracional, $f(x) = x$. Por tanto, los valores 0 y 1 no pueden ser alcanzados. Llegamos a la misma conclusión si reemplazamos el intervalo cerrado $[0,1]$ por cualquiera de los intervalos $(0,1), [0,1)$ o $(0,1]$.

Las hipótesis del Teorema de Weierstrass son esenciales, en el sentido que la conclusión del teorema puede ser falsa si omitimos alguna de las suposiciones como:

- que $f(x)$ está definida en un intervalo cerrado
- que $f(x)$, es continua allí (intervalo cerrado).

Por ejemplo, la función $f(x)$ definida en $[-1,1]$ por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

es, por un lado, continua en $(0,1]$, pero no admite un valor máximo allí, i.e., no existe ningún número real M tal que $\frac{1}{x} \leq M$, para todo $x \in (0,1]$, y, por otra parte, la función no es continua en todo el intervalo cerrado $[-1,1]$, puesto que tiene una discontinuidad infinita en 0 y no es tampoco acotada en $[-1,1]$ (ver la figura 11.23 en la página 181).

En resumen, los ejemplos dados muestran que una función discontinua en un intervalo cualquiera, no necesariamente cerrado, puede ser acotada pero no tener valor máximo o mínimo, que una función

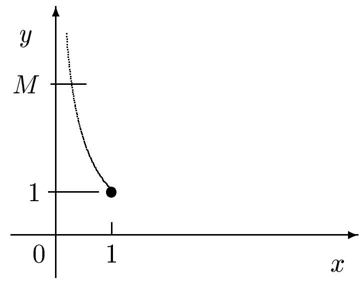


Figura 11.23 *no existe* $M \in \mathbb{R}$ *tal que* $\frac{1}{x} \leq M$, *para todo* $x \in (0,1]$

continua en un intervalo que no es cerrado puede ser no acotada y que una función discontinua en un intervalo cerrado puede ser no acotada.

A continuación incluimos la demostración del Teorema de Weierstrass. Como para la demostración del Teorema de Bolzano, dejamos al lector la elección de estudiarla u omitirla.

Prueba: *La demostración que proponemos sigue el mismo método empleado para la demostración del Teorema de Bolzano.*

Sabemos que $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$. *Luego, dado* $\varepsilon = 1$, *existe* $\delta > 0$ *tal que si* $a \leq x < a+\delta$ *entonces* $f(a)-1 < f(x) < f(a)+1$. *Por tanto, si fijamos* $a < \alpha < a+\delta$, *podemos concluir que* $f(x)$ *es acotada en* $[a,\alpha]$, *más aún, podemos decir que* $f(a)-1 \leq f(x) \leq f(a)+1$, *para todo* $x \in [a,\alpha]$.

Esto prueba que el conjunto A *dado por*

$$A = \{a < \alpha \leq b : \ f(x) \ \text{ es acotada en } [a,\alpha]\}$$

es no vacío. El punto b *es, por la manera en que hemos definido* A, *una cota superior para* A. *De acuerdo con el axioma del supremo, existe* $a < c \leq b$ *tal que* $c = \sup A$.

Si demostramos que $c = b$ *entonces quedaría establecido que* $f(x)$ *es acotada en* $[a,b]$.

Supongamos, por el contrario, que $c < b$. *Puesto que* $f(x)$ *es continua en* c *y* $c \in (a,b)$, *entonces* $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$. *Así que, dado* $\varepsilon = 1$, *existe* $\delta > 0$ *tal que si* $c-\delta < x < c+\delta$ *entonces* $f(c)-1 < f(x) < f(c)+1$. *Sigue de aquí que* $f(x)$ *es acotada en* $(c-\delta, c+\delta)$. *Sabemos que existe* $\alpha \in A$ *tal que* $c-\delta < \alpha$, *de modo que si* β *es un punto fijo (pero cualquiera) con* $c < \beta < c+\delta$, *resulta que* $f(x)$ *es acotada tanto en* $[a,\alpha]$ *como en* $(c-\delta,\beta]$ *y, por tanto en* $[a,\beta]$. *Luego* $\beta \in A$ *(ver la figura 11.24) y debe*

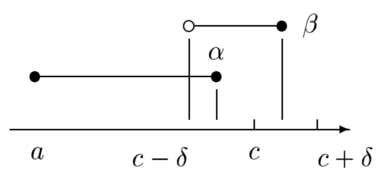


Figura 11.24 $f(x)$ *es acotada en* $[a,\beta]$

ser $\beta \leq c$. *Pero esto es claramente imposible ya que* β *se eligió tal que* $c < \beta$. *La contradicción viene de suponer que* $c < b$. *Por tanto, la única posibilidad es que sea* $c = b$.

Tenemos entonces que $f(x)$ *es acotada en* $[a,b]$, *i.e., el conjunto*

$$\{f(x) : \ x \in [a,b]\}$$

es acotado. Sean m *y* M *el ínfimo y el supremo de ese conjunto. Queremos demostrar que existen* $x_0, x^0 \in [a,b]$ *tales que* $f(x_0) = m$ *y* $f(x^0) = M$.

Supongamos, por el contrario, que $f(x) > m$, para todo $x \in [a,b]$. Entonces la función $g(x)$ definida en $[a,b]$ por

$$g(x) = \frac{1}{f(x) - m},$$

es continua en $[a,b]$. Por lo que ya hemos establecido, $g(x)$ es acotada en $[a,b]$. Así, si

$$M_1 = \sup\{\ g(x) :\ x \in [a,b]\},$$

entonces $0 < g(x) \le M_1$, para todo $x \in [a,b]$. Resulta de aquí que:

$$f(x) \ge m + \frac{1}{M_1} > m,\ \text{para todo } x \in [a,b].$$

Esto dice que $m + \dfrac{1}{M_1}$ es cota inferior de $f(x)$, pero esto es claramente imposible puesto que m es la mayor de las cotas inferiores. La contradicción viene de suponer que $f(x) > m$, para todo $x \in [a,b]$. Por tanto, lo que vale es que existe $x_0 \in [a,b]$ tal que $f(x_0) = m$.

De manera similar se demuestra que existe $x^0 \in [a,b]$ tal que $f(x_0) = M$. □

Las demostraciones de los teoremas de Bolzano y Weierstrass tienen un carácter no constructivo puesto que no proveen un método para hallar la posición exacta de un cero o del máximo o del mínimo de una función continua en un intervalo cerrado. Hemos demostrado únicamente la existencia de los valores destacados.

Los teoremas son, sin embargo, muy útiles y son usados para demostrar muchas propiedades, algunas de las cuales no son del todo obvias a simple vista.

De algunas de las aplicaciones del Teorema de Bolzano nos ocuparemos a continuación.

11.6 Ceros de funciones

Dada la función $f(x)$, decimos que c es *raíz* o *cero* de $f(x)$ si y sólo si $f(c) = 0$.

Así, por ejemplo, los puntos de la forma $k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, son todos ceros de la función $\operatorname{sen} x$, y c es cero de la función polinómica $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ si, y sólo si

$$a_n c^n + a_{n-1}c^{n-1} + \cdots + a_1 c + a_0 = 0.$$

No toda función tiene necesariamente un cero: la función $f(x) = \operatorname{sen} x - 2$ no tiene ningún cero puesto que $-1 \le \operatorname{sen} x \le 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$, y la función cuadrática $g(x) = x^2 + 1$ tampoco tiene ningún cero (real) ya que $x^2 \ge 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Por otra parte, la función algo más compleja, $h(x) = \operatorname{sen}^2 x - x^3 + 2$ tiene un cero en el intervalo $[0,\pi]$. La afirmación, que no parece obvia, sigue de aplicar el Teorema de Bolzano, puesto que $h(x)$ es continua en $[0,\pi]$, $h(0) = 2 > 0$ y $h(\pi) = -\pi^3 + 2 < 0$. También la función polinómica $q(x) = x^{375} + 624x^{210} - 325$ tiene un cero en el intervalo $[0,1]$, ya que $q(0) = -325 < 0$ y $q(1) = 300 > 0$.

En el caso que estemos tratando con funciones polinómicas de la forma:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

con n impar, tenemos, a partir del Teorema de Bolzano, un resultado general que incluye en particular, el caso de la función $q(x)$ dada arriba. Más precisamente:

Teorema 26 *Si n es impar, entonces cualquier ecuación*

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

tiene al menos una raíz (real).

Prueba: *Consideremos la función polinómica*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Sabemos que $p(x)$ *es una función continua (toda función polinómica lo es). Si hallamos dos puntos* a *y* b *tales que* $p(a)$ *y* $p(b)$ *tienen signos opuestos, entonces, de aplicar el Teorema de Bolzano, sigue el resultado deseado.*

Tenemos que $p(0) = a_0$*; si* $a_0 = 0$*, no queda nada por demostrar:* 0 *es raíz de la ecuación. Si* $a_0 \neq 0$ *entonces* 0 *puede ser uno de los puntos* a *y* b *que estamos buscando.*

Nuestra intuición nos dice que para números x *con* $|x|$ *grande, el signo de* $p(x)$ *depende del signo de* x^n*, en el sentido que si* $|x|$ *es grande y* $x > 0$*, entonces* x^n *es positivo y mucho mayor que* $a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$*, tanto como para que sea* $p(x) > 0$*, y si* $|x|$ *es grande y* $x < 0$*, entonces* x^n *es negativo y mucho menor que* $a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ *tanto como para que resulte* $p(x) < 0$*.*

Así, si $a_0 > 0$ *podemos elegir* $b < 0$ *tal que* $p(b) < 0$ *y aplicamos el Teorema de Bolzano en el intervalo cerrado* $[b, 0]$*, y si* $a_0 < 0$ *elegimos* $b > 0$ *con* $p(b) > 0$ *y aplicamos el Teorema de Bolzano en el intervalo cerrado* $[0, b]$*.*

De acuerdo con todo lo anteriormente expuesto, para demostrar el resultado basta verificar que, para $|x|$ *grande, el signo de* $p(x)$ *depende del signo de* x^n*.*

Tomemos la función $\dfrac{p(x)}{x^n}$*. Es*

$$\frac{p(x)}{x^n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}.$$

Como $\displaystyle\lim_{|x|\to\infty} \frac{1}{x^k} = 0$*, para todo* $k \in \mathbb{N}$*, sigue que*

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{p(x)}{x^n} = 1.$$

Luego, dado $\varepsilon = 1$*, existe* $N > 0$ *tal que si* $|x| > N$ *entonces* $\left|\dfrac{p(x)}{x^n} - 1\right| < \dfrac{1}{2}$*. Así, si* $|x| > N$ *entonces*

$$\frac{p(x)}{x^n} > \frac{1}{2},$$

de modo que,

$$\text{si } x > N \text{ entonces } p(x) > \frac{x^n}{2} > 0 \quad \text{y} \qquad \text{si } x < -N \text{ entonces } p(x) < \frac{x^n}{2} < 0$$

□

En el enunciado del Teorema 6 consideramos la ecuación

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$$

con $a_n = 1$ y n impar. La condición de ser $a_n = 1$ no es restrictiva ya que si $a_n \neq 0$ entonces, al dividir por a_n, conseguimos la ecuación:

$$x^n + \frac{a_{n-1}}{a_n}x^{n-1} + \cdots + \frac{a_1}{a_n}x + \frac{a_0}{a_n} = 0$$

que es obviamente equivalente a la ecuación original. Que n sea impar es, en cambio, una condición esencial, puesto que, para n par, no siempre podemos garantizar la existencia de raíces reales. Por ejemplo, la ecuación $x^2 + 1 = 0$ no tiene raíces reales, la ecuación $x^2 + 2x + 1 = 0$ tiene una raíz real doble $x_0 = -1$ y la ecuación $x^2 + 2x - 3 = 0$ tiene dos raíces reales $x_1 = -3$ y $x_2 = 1$.

Ejercicios

1. Determine si el teorema del valor intermedio es válido para el valor de k dado. Si el teorema se cumple, halle c tal que $f(c) = k$. Si el teorema no es aplicable, dé la razón.
   (a) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3,\ [-1, 2],\ k = 2.$
   (b) $f(x) = x^3 - 2x,\ [-3, 0],\ k = -3.$
   (c) $f(x) = \dfrac{4}{x+2},\ [-3, 1],\ k = \dfrac{1}{2}.$

(d) $f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si} \quad -4 \leq x \leq -2 \\ 2-x & \text{si} \quad -2 < x \leq 1 \end{cases}$, $[-4, 1]$, $k = \dfrac{1}{2}$.

2. Demuestre que las siguientes ecuaciones tiene una raíz entre los puntos indicados:
   (a) $x^5 - 3x^4 - 2x^3 - x + 1 = 0$ entre 0 y 1.
   (b) $x^3 - 4x^2 + x + 3 = 0$ entre 1 y 2.
   (c) $x^3 + x + 3 = 0$ entre -2 y -1.

11.7 Ejercicios adicionales

Se proponen como ejercicios los dados en

R. Giudici y R. Silva de Giudici, *Guía de Problemas Matemáticas I*, Segunda Edición (1995), Equinoccio.

- pp. 62-64, Nos. 1-15

Además se proponen los siguientes ejercicios.

1. Considere las funciones cuyos gráficos se dan en las figuras 11.25 , 11.26 , 11.27 en la página 185 , y diga dónde son continuas.

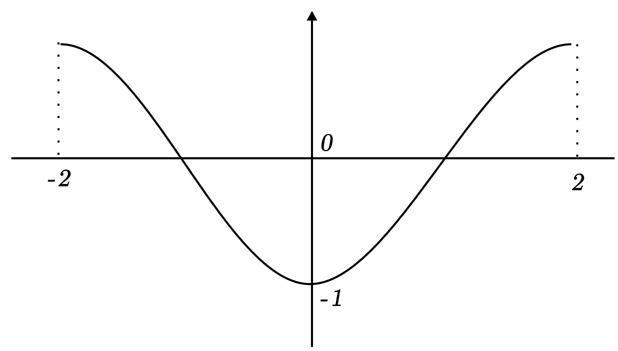


Figura 11.25

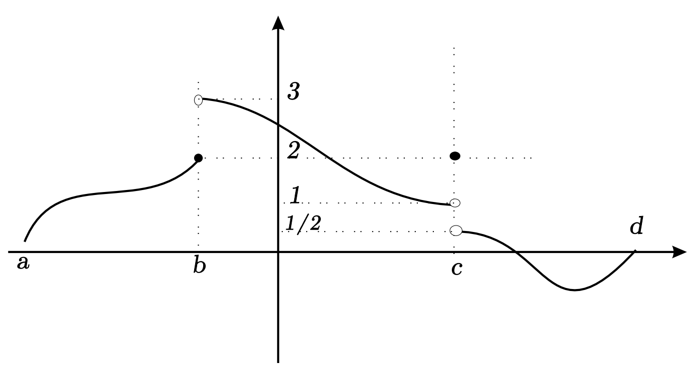


Figura 11.26

2. Dibuje aproximadamente el gráfico de las funciones siguientes y diga dónde son continuas
   (a) $f(x) = |x^2 - 2x|$
   (b) $f(x) = 2\left[\dfrac{x}{2}\right]$

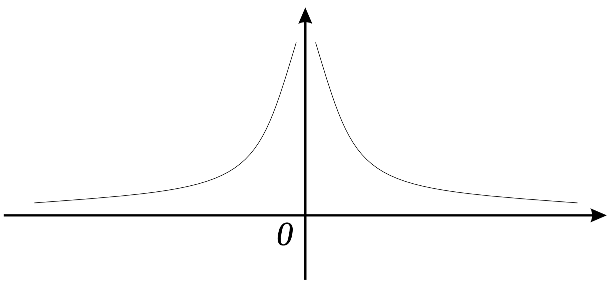


Figura 11.27

(c) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } |x| \geq \dfrac{\pi}{6} \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } |x| < \dfrac{\pi}{6} \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \end{cases}$

(e) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-3x^2+5x-3}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

3. Estudie la continuidad de las funciones siguientes en los puntos indicados.

   (a) $f(x) = |x^3 - 2x|$ en 0 y 1

   (b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{\sqrt{x}+\sqrt{2}} & \text{si } x \neq -\sqrt{2} \\ \dfrac{-4}{\sqrt{2}} & \text{si } x = -\sqrt{2} \end{cases}$ en 0 y $\sqrt{2}$

   (c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|-1}{\sqrt{x}-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$ en 1 y $\sqrt{2}$

4. Dé ejemplos (mediante gráficos y, si es posible, fórmulas) de funciones que satisfagan lo siguiente.

   (a) $f : [0, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua excepto en 0 y 1.

   (b) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ discontinua en exactamente tres puntos.

   (c) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ discontinua en $x = 0$, pero tal que $g(x) = (f(x))^2$ sea continua.

   (d) $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ discontinuas en $x = 1$, pero tales que $f(x) \cdot g(x)$ sea continua.

   (e) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$ para $x \leq 2$, es continua pero $f(2) \neq 4$.

5. A partir de la definición probar que las funciones siguientes son continuas en los puntos indicados.

   (a) $f(x) = x$; todo $x_0 \in \mathbb{R}$

   (b) $f(x) = |x|$; todo $x_0 \in \mathbb{R}$

   (c) $f(x) = \sqrt{x}$; en 0.

   (d) $f(x) = a$; todo $x_0 \in \mathbb{R}$.

   (e) $f(x) = \dfrac{1}{x}$; en 2.

6. Sea f una función continua en [-2,7] y supongamos que f no se anula en ningún punto de ese intervalo. Pruebe que $\dfrac{f(x)}{f(y)}$ es positivo si $x, y \in [-2, 7]$.

7. Sea f la función definida por
$$f(x)=\begin{cases} x & \text{si } x\le 2\\ x^3-4x^2+10 & \text{si } 2<x<4\\ \operatorname{sen}(\pi x)+8 & \text{si } x\ge 4\end{cases}$$
   (a) Halle
   $$\lim_{x\to 0} f(x),\quad \lim_{x\to 1} f(x),\quad \lim_{x\to 5} f(x).$$
   (b) Estudie el comportamiento de f alrededor de los puntos 2 y 4.
8. Sabiendo que $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ es continua y satisface
$$\begin{aligned} &f(x)=ax+3 && \text{si } x\le 0\\ &f(x)=b\,(x^2+1) && \text{si } 0<x<1\\ &f(x)=c\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2} && \text{si } x\ge 1\\ &f(-3)=9 \end{aligned}$$
   Calcule las constantes a, b, c.
9. Estudie la continuidad de las funciones siguientes.
   (a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|-1}{1-\sqrt{x}} & \text{si } x\ne -1\\ 0 & \text{si } x=-1\end{cases}$
   (b) $f(x)=\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$
   (c) $f(x)=\sqrt{\operatorname{sen} x}$
   (d) $g(x)=\sqrt{1-x^2}$
10. Para qué valores de 'a' son continuas las funciones definidas por
   (a) $f(x)=\begin{cases} a\cdot\arctan x & \text{si } x\ne -1\\ \dfrac{4x}{a\pi} & \text{si } x<1\end{cases}$
   (b) $f(x)=\begin{cases} 10^{\frac{-1}{x^2}} & \text{si } x\ne 0\\ 3a & \text{si } x=0\end{cases}$
11. Dé ejemplos de funciones tales que:
   (a) No exista ninguno de los límites laterales en $x_0=2$
   (b) Exista el límite por la derecha en $x_0=2$, pero no por la izquierda.
12. Sea f la función definida por
$$f(x)=\begin{cases}\operatorname{sen}(2+x)\,\cos\dfrac{1}{2+x} & \text{si } x\ne -2\\ 0 & \text{si } x=-2\end{cases}$$
   (a) Pruebe que f es continua.
   (b) Pruebe que $\displaystyle\lim_{x\to -2}\frac{f(x)-f(-2)}{x+2}$ no existe.
13. Calcule $\displaystyle\lim_{x\to\pi}\arctan(\tan^2\frac{x}{2})$
14. Pruebe que la ecuación $\tan x=x$ tiene infinitas raíces reales.
15. Encuentre (si existe) el menor $\varepsilon>0$ para el cual exista $\delta>0$ tal que
$$|x-1|\le\delta\Longrightarrow|x^2+x-1|\le\varepsilon$$
   y compruebe que para $\varepsilon=\dfrac{1}{7}$ no existe ningún $\delta>0$ que «sirva».

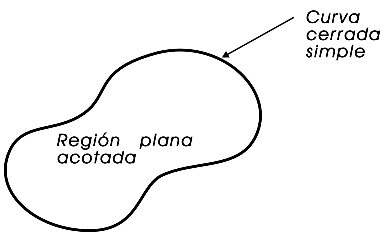
16. Dé ejemplos de funciones $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que
    (a) f es discontinua en $x = 3$, pero $\operatorname{sen}(\, f(x)\,)$ es continua.
    (b) f es discontinua en $x = 7$, pero $[f(x)]$ es continua.
17. Supongamos que f está definida alrededor de 0 y que $|f(x)| \leq M$ para todos los x en un intervalo alrededor de 0. Pruebe que $\lim\limits_{x \to 0} x f(x) = 0$. Compare con $\lim\limits_{x \to 0} x \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$.
18. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y supongamos que $f(x) < a$ para todo x. Pruebe que si existe $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \alpha$, entonces $\alpha \leq a$. Dé un ejemplo que muestre que en general no se puede concluir que $\alpha < a$.
19. Supongamos que $f : (-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$ toma sólo valores racionales y es continua; si $f(0) = 3$, ¿cuánto vale $f(\frac{1}{2})$?
20. Sea $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ continua. Pruebe que f tiene por lo menos un punto fijo, es decir, existe al menos un $x \in [0, 1]$ tal que $f(x) = x$.
21. Sea f continua en x_0. Pruebe que si x_n es una sucesión que converge a x_0, entonces la sucesión $f(x_n)$ converge a $f(x_0)$.
22. Pruebe que el recíproco del problema anterior es cierto: si $f(x_n) \longrightarrow f(x_0)$ para toda sucesión $x_n \longrightarrow x_0$, f es continua en x_0. Sugerencia: usar reducción al absurdo.
23. Sea f la función definida por $f(x) = \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$, la cual no está definida en 0; compruebe que no hay manera de definir f en 0 de manera que resulte continua y que a pesar de ello f tiene la propiedad del valor intermedio.

Apéndice: Una aplicación geométrica del Teorema de Bolzano

El teorema de Bolzano puede ser usado para demostrar propiedades geométricas.

Comencemos por demostrar que *cualquier región plana acotada puede ser inscrita en un cuadrado.*

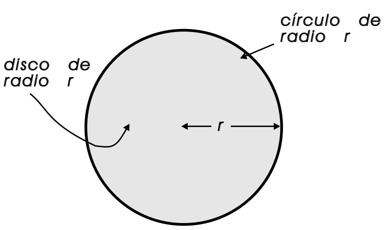
Por región plana acotada indicamos la porción del plano que se halla dentro de cualquier curva cerrada simple, como en la figura 11.28 . Por ejemplo, un círculo de radio $r > 0$ es una curva cerrada



región plana acotada por una curva cerrada simple

Figura 11.28

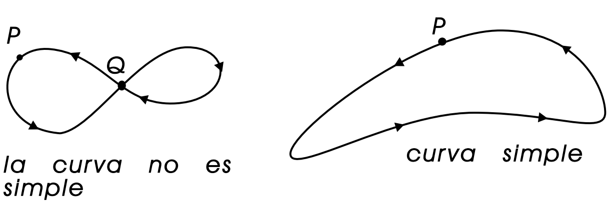
simple y el disco de radio $r > 0$ es una región plana acotada (figura 11.29). Una curva en el plano



el disco de radio r como ejemplo de región plana acotada

Figura 11.29

es cerrada si al recorrerla en su totalidad a partir de cualquier punto P sobre la misma, regresamos al mismo punto P de partida, como se ilustra en la figura 11.30 . Una curva cerrada es *simple* si al

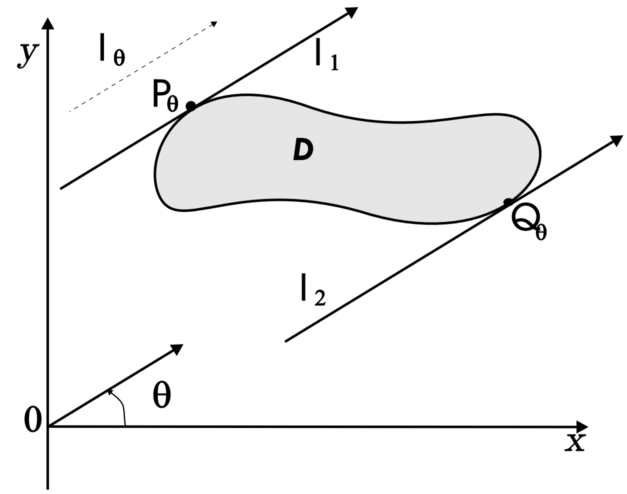


ejemplos de curvas cerradas

Figura 11.30

recorrerla en su totalidad desde cualquier punto sobre la misma no pasamos por un mismo punto Q más de una vez. La curva a la izquierda de la figura 11.30 no es simple, mientras que la curva a la derecha y las curvas de las figuras 11.28 y 11.29 son todas simples.

Después de esta breve nota explicativa volvamos al problema que nos ocupa. Fijemos un sistema cartesiano de coordenadas de manera que la región plana acotada, llamémosla D, se encuentre en el primer cuadrante, como se ilustra en la figura 11.31 .



sistema de referencia para abordar el problema

Figura 11.31

Al tomar el origen de coordenadas como punto fijo en el plano obtenemos un haz de semirrectas orientadas cada una de las cuales forma un ángulo θ, con el eje x. Nos limitamos a considerar aquellas semirrectas orientadas para las cuales $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$. Tomemos una recta l_θ orientada como la semirrecta que forma el ángulo θ con el eje x y procedemos a mover esta recta paralelamente a sí misma hasta las posiciones l_1 y l_2. Las rectas l_1 y l_2 son tangentes a la curva cerrada simple que acota a D en los puntos P_θ y Q_θ, respectivamente (remitámonos a la figura 11.31).

Pasemos a considerar el ángulo $\theta + \frac{\pi}{2}$ y procedamos como antes hasta obtener las rectas orientadas l_3 y l_4. De esta manera la región D queda encerrada en el rectángulo de vértices A_θ, B_θ, C_θ y D_θ, como se ilustra en la figura 11.32 .

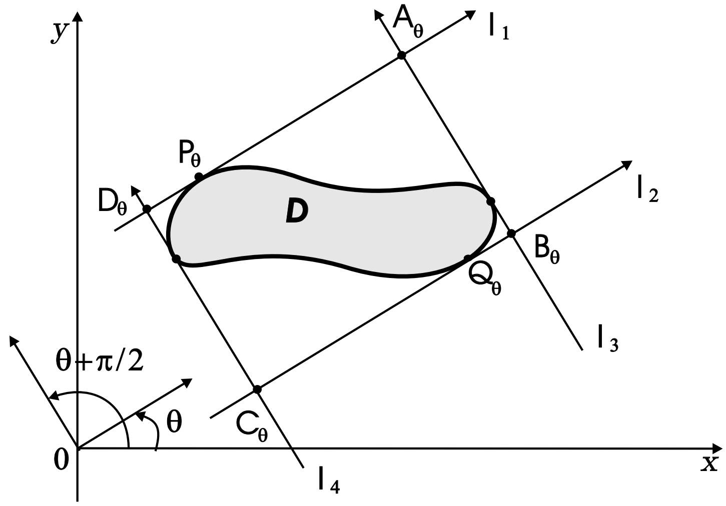
Tomemos la función $f(\theta) = \overline{A_\theta D_\theta} - \overline{A_\theta B_\theta}$ que para cada ángulo θ, con $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, mide las diferencias entre las longitudes de los lados $A_\theta D_\theta$ y $A_\theta B_\theta$. La función $f(\theta)$ varía de manera continua al crecer θ de 0 a $\frac{\pi}{2}$, en el sentido que si los ángulos θ_1 y θ_2 difieren muy poco entre sí entonces los rectángulos que encierran a D y están determinados por θ_1 y θ_2 difieren también muy poco (figura 11.33 en la página 191).

Si $f(0) = \overline{A_0 D_0} - \overline{A_0 B_0}$ es, por ejemplo, positivo, entonces $f(\frac{\pi}{2}) = \overline{A_{\frac{\pi}{2}} D_{\frac{\pi}{2}}} - \overline{A_{\frac{\pi}{2}} B_{\frac{\pi}{2}}} = \overline{A_0 B_0} - \overline{A_0 D_0} = -f(0)$ es negativo (figura 11.34 en la página 191). De acuerdo con el Teorema de Bolzano, existe un ángulo θ_0 tal que $f(\theta_0) = 0$, es decir, tal que el rectángulo que encierra a D y está determinado por θ_0 es un cuadrado.

Con un razonamiento similar podemos encontrar que *cualquier región plana acotada puede dividirse en cuatro partes de igual área.*

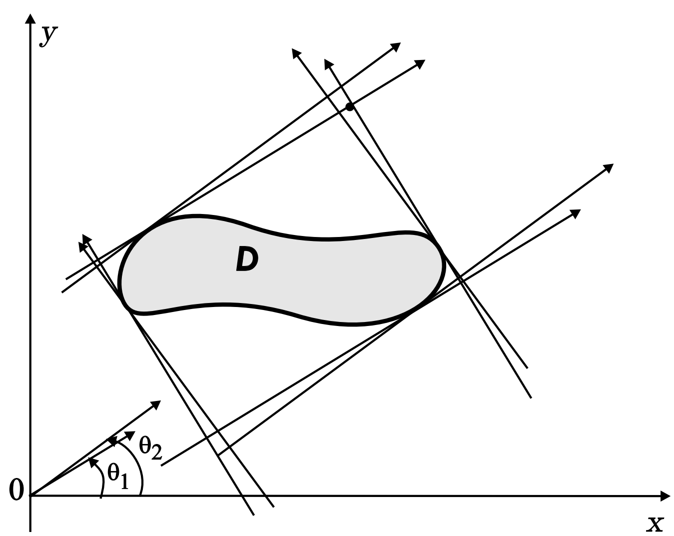
Para ello regresamos a la discusión anterior en la que definimos una recta orientada l_θ para cada ángulo θ, con $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$. Movamos l_θ hasta la posición l_1 de manera que la región D quede dividida en dos regiones de igual área. Tomemos ahora el ángulo $\theta + \frac{\pi}{2}$ y procedamos a dividir D en dos mitades. Nos referimos para la construcción a la figura 11.35 en la página 192 . De esta forma la región D queda dividida en cuatro partes. Si numeramos las cuatro partes de D como en la figura 11.35 en la página 192 , tenemos

$$D_1 + D_4 = D_2 + D_3 \text{ y } D_1 + D_2 = D_3 + D_4,$$



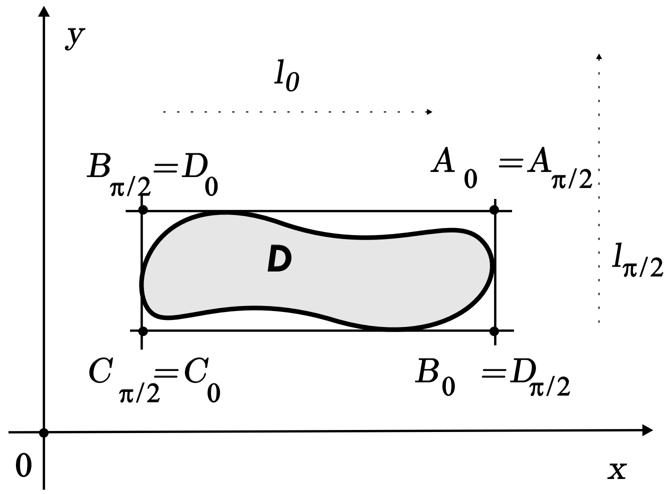
rectángulo dado por θ que encierra a D

Figura 11.32



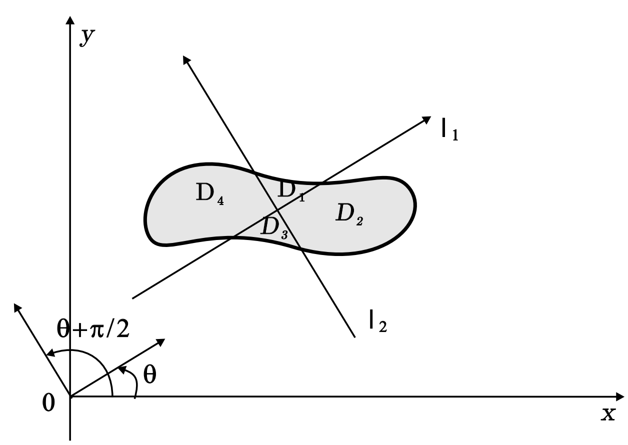
$f(\theta)$ es continua

Figura 11.33



los rectángulos correspondientes a $\theta = 0$ y $\theta = \frac{\pi}{2}$

Figura 11.34



las cuatro partes en que queda dividida la región D

Figura 11.35

de donde sigue que

$$D_4 - D_2 = D_2 - D_4, \text{ i.e. } D_2 = D_4$$

y, por consiguiente

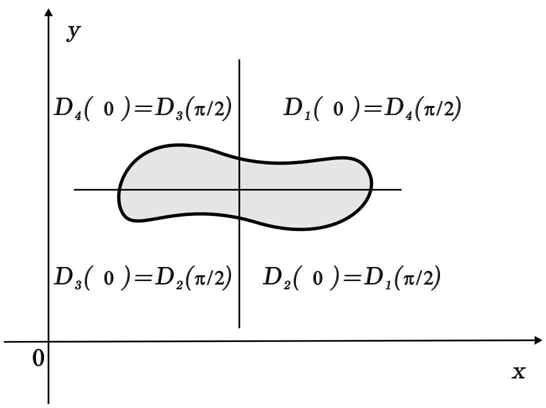
$$D_1 = D_3.$$

Así, si demostramos que existe un ángulo θ_0 para el cual

$$D_1(\theta_0) = D_2(\theta_0),$$

entonces quedaría también demostrado el resultado deseado.

Consideremos la función $f(\theta) = D_1(\theta) - D_2(\theta)$, si $f(0) = D_1(0) - D_2(0)$ es, por ejemplo, positivo, entonces, como $D_1(\frac{\pi}{2}) - D_2(\frac{\pi}{2}) = D_2(0) - D_3(0) = D_2(0) - D_1(0)$, resulta que $f(\dfrac{\pi}{2}) = -f(0)$ es negativo (ver figura 11.36). Por consiguiente, puesto que $f(\theta)$ varía de manera continua al crecer θ



las cuatro partes correspondientes a $\theta = 0$ *y* $\theta = \frac{\pi}{2}$

Figura 11.36

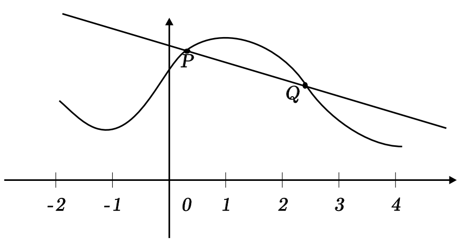
de 0 a $\dfrac{\pi}{2}$, de acuerdo con el Teorema de Bolzano, existe un ángulo θ_0 tal que $f(\theta_0) = 0$, i.e., tal que $D_1(\theta_0) = D_2(\theta_0)$.

Capítulo 12

Derivadas

12.1 Recta tangente a una curva

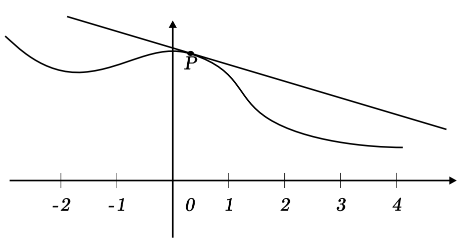
La idea de recta tangente a una curva es muy importante y básica en Geometría: si Γ es una curva cualquiera en el plano y P y Q son dos puntos de la curva, la recta que pasa por P y Q se llama *recta secante a la curva* (ver la figura 12.1).



una recta secante a la curva

Figura 12.1

Si Γ es una curva plana y P un punto de ella, la recta tangente a Γ en P es la posición límite de las rectas secantes que pasan por P y otro punto Q de la curva, cuando Q se acerca a P, moviéndose sobre la curva (si tal posición límite existe); ver la figura 12.2 .

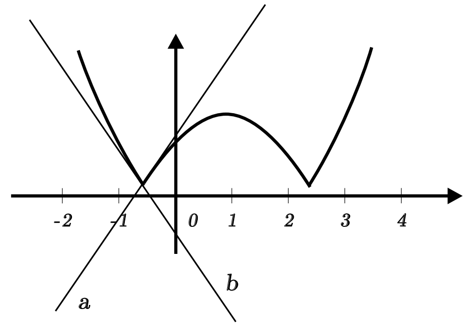


una recta tangente a la curva

Figura 12.2

Desde luego, la posición límite de la secante puede no existir como en el ejemplo de la figura 12.3 en la página 196 : dependiendo de como se acerque Q a P, se obtiene la recta a o la recta b como posición límite de las secantes por P.

Supongamos ahora que tenemos un sistema de coordenadas cartesianas en el plano y que la curva Γ es el gráfico de una función f. Todas las rectas que pasan por el punto $P_0(x_0, f(x_0))$ de la curva



la posición límite de la secante puede no existir

Figura 12.3

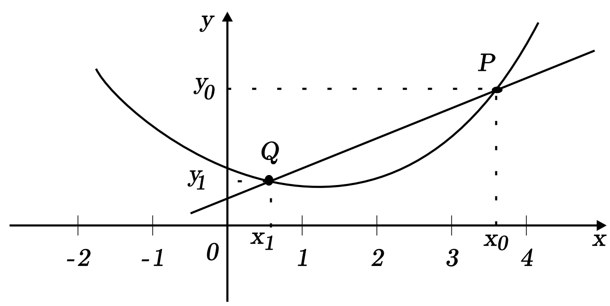
tienen por ecuación

$$y - f(x_0) = m(x - x_0).$$

En particular una recta secante cualquiera es una recta que pasa por $P(x_0, f(x_0))$ y $Q(x_1, f(x_1))$ y su ecuación viene dada por:

$$y - f(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}(x - x_0);$$

ver la figura 12.4 .



una recta secante que pasa por
$P(x_0, y_0)$ *y* $Q(x_1, y_1)$

Figura 12.4

Si tomamos el límite cuando x_1 se acerca a x_0 entonces el punto Q se acerca a P y el límite de la recta secante será la recta tangente (si existe tal límite). Esto es: si $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = m_0$ entonces

$$y - f(x_0) = m_0(x - x_0)$$

es la ecuación de la recta tangente a la curva por P.

De este modo tenemos un método muy eficiente para hallar la tangente a una curva en un punto P, cuando la curva es el gráfico de una función f; su pendiente es:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = m_0,$$

12.2 Razón de cambio

En la vida real es muy importante estudiar y medir cantidades que varían con el tiempo.

Si t es el tiempo y $f(t)$ es la medida de una cantidad física, por ejemplo:

- $f(t)$ es la distancia recorrida por un automóvil desde un momento inicial t_0;
- $f(t)$ es el número de habitantes de una población (un país o un cultivo de bacterias);
- $f(t)$ el volúmen de agua de una represa.

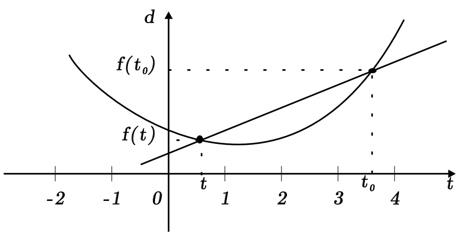
Entonces $f(t)-f(t_0)$ es la variación que ha sufrido la cantidad $f(t)$ en el tiempo transcurrido desde t_0 hasta t y la razón

$$\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$$

es la variación que ha sufrido esa cantidad por unidad de tiempo transcurrido, es decir, la *razón de cambio* de la cantidad que se está midiendo.

Ejemplo: Si $f(t)$ es la distancia recorrida por un automóvil que se mueve en línea recta entonces la razón de cambio es la rapidez media del automóvil en el lapso de tiempo de t_0 a t.

Si hacemos un gráfico de la función f, es decir: en el eje de las abscisas ponemos la variable «tiempo» y en el eje de las ordenadas la variable «distancia», entonces obtenemos una curva (ver la figura 12.5) y



una recta secante que pasa por $P(t_0, f(t_0))$ *y* $Q(t, f(t))$

Figura 12.5

$$\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$$

es la pendiente de la secante a esta curva por los puntos $(t_0, f(t_0))$ y $(t, f(t))$.

Si el carro se mueve con movimiento rectilíneo, uniforme (a velocidad constante), entonces el gráfico de su movimiento es una recta, que coincide con la secante y la velocidad es la pendiente de la secante.

Ejemplo: No siempre la variable es el tiempo, por ejemplo, si en Física o Química se está estudiando una solución en un recipiente a la cual se le está agregando un líquido, la variable x puede ser el volúmen total del líquido y $f(x)$ la masa de ese volúmen.

Como la razón $\dfrac{\text{masa}}{\text{volúmen}}$ es la densidad, la razón de cambio

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

es *la densidad del volumen agregado* a la solución.

12.3 Derivada

Definición: *Si f es una función real, definida en un intervalo abierto que contiene al punto x_0, y si existe el límite*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

este límite se llama **derivada de la función en el punto** x_0 *y se denota* $f'(x_0)$. *También se dice que la función* **f es derivable en** x_0.

> **Definición:** *Si la función f está definida en un intervalo abierto I y es derivable en cada punto x de I, se dice que la función f* **es derivable en** I *y la función $x \mapsto f'(x)$, se llama* **función derivada** *de f en I.*

El significado de la derivada en un punto es claro en los ejemplos anteriores. Así, si consideramos la curva Γ, gráfico de una función f, entonces la derivada en un punto es la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto correspondiente:

$$m_0 = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

De modo que la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto $(x_0, f(x_0))$ se escribe:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

En el segundo ejemplo, donde $f(t)$ es la distancia recorrida por un automóvil que se mueve en línea recta, $f'(t_0)$ es la *velocidad instantánea* (realmente la rapidez instantánea) en el instante t_0, puesto que

$$\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

es la velocidad media en el lapso de tiempo de t_0 a t. Es decir, es la velocidad necesaria para recorrer con velocidad constante la distancia $f(t) - f(t_0)$, en el tiempo $t - t_0$. El límite

$$\lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = f'(t_0)$$

es la rapidez que medimos en el velocímetro de un automóvil en el tiempo t_0. Por lo visto en el ejemplo anterior sabemos que $f'(t_0)$ es la pendiente de la curva que representa el gráfico de f.

En el último ejemplo, el de una solución química a la cual se le está agregando agua, $f'(x)$ representa la variación instantánea de la densidad cuando el volúmen es x.

> **Definición:** *Si f es derivable en x_0, la recta que pasa por el punto $(x_0, f(x_0))$ con pendiente $f'(x_0)$ se llama* tangente al gráfico *de f en el punto $(x_0, f(x_0))$. Su ecuación es*
> $$y(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

> **Definición:** *Si $f(x)$ es la distancia recorrida por un móvil que se desplaza en línea recta, y f es derivable, entonces $f'(x_0)$ se llama* rapidez instantánea *del móvil en x_0.*

12.3.1 Notaciones

Existen muchas maneras distintas de escribir la derivada de una función y se usan todas, dependiendo de la naturaleza del problema que se tenga. Veamos algunas:

- Si f es una función real definida en un intervalo abierto que contiene a x_0,

  $$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

  Es obvio que este es el mismo límite de la definición anterior, escribiendo $x - x_0 = h$.

- En muchos contextos el valor $h = x - x_0$ se llama *incremento de la variable* x y se denota Δx. Así: $\Delta x = x - x_0 = h$ y

  $$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

  A veces también se denota por Δf al incremento de la «variable f»: $\Delta f = f(x) - f(x_0)$. Entonces:

  $$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

La notación anterior es hoy día poco frecuente en Matemáticas, pero sigue siendo muy frecuente en Ingeniería. Sin embargo, convirtiendo la Δ en una d, se obtiene una notación que es muy frecuente y conveniente en muchos casos:

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0).$$

Si la función es derivable en todo el intervalo I, la función derivada se puede escribir entonces de esta manera:

$$f'(x) = \frac{df}{dx}(x).$$

Esta notación puede simplificar muchos cálculos, como veremos más adelante.

Ejercicios

1. Galileo se subió a la Torre Inclinada de Pisa y dejó caer una piedra, observó que la piedra caía $(4,9)t^2$ metros al cabo de t segundos. ¿Cuál sería la velocidad instantánea de la piedra al cabo de $1,\ 2$ ó 3 segundos?
2. Considere la gráfica de la función $f(x) = x^2$. Encuentre la ecuación de la recta secante a la gráfica que pasa por $(1,1)$ y por $((1+h),(1+h)^2)$ para cualquier número $h > 0$ y halle la ecuación de la recta secante que pasa por $(1,1)$ y por $((1+k),(1+k)^2)$ para cualquier número $k < 0$. Encuentre la ecuación de la posición límite de estas secantes cuando h tiende a 0 y cuando k tiende a 0.
3. Un cultivo de bacterias tiene una masa de $2t^2$ gramos al cabo de t minutos:
   (a) ¿ Cuánto crece la masa del cultivo en el período entre 2 y $2,5$ minutos?
   (b) ¿ Cuál es la velocidad media de crecimiento en ese período?
   (c) ¿ Cuál es la velocidad instantánea de crecimiento para $t = 2$ minutos?
4. Un móvil se mueve en línea recta y recorre $3t^2 + 2t$ metros en t segundos. Considere valores de t positivos y encuentre:
   (a) La velocidad media en el intervalo de tiempo $(1, 1+t)$ y en el intervalo $(1-t, 1)$.
   (b) Tomado el límite cuando t tiende a 0, encuentre la velocidad instantánea en el instante $t_0 = 1$.
5. Considere la función $f(x) = x^3$, para un valor arbitrario de $x > 0$, escriba la ecuación de la recta secante al gráfico de f, que pasa por los puntos $(-x, -x^3)$ y (x, x^3). Dibuje esta secante. Tome límites cuando x tiende a 0, $x > 0$. ¿Qué ecuación obtiene con el límite de la ecuación de la secante?

En la definición de derivada, hemos puesto cuidado en decir que «si existe» el límite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

entonces se le llama derivada de f en x_0. Desde luego que el límite puede no existir y entonces la función no es derivable en x_0.

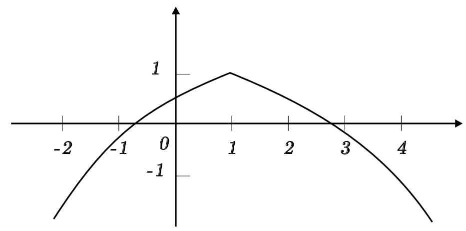
La idea de derivada es inseparable de la idea de tangente a una curva. Si una curva no tiene tangente, entonces no será derivable la función que tenga esa curva como gráfico (ver la figura 12.6 en la página 200).

Es claro que pueden existir los límites a la derecha y a la izquierda: $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ y $\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Estos definirían las pendientes de dos rectas «tangentes» una «a la derecha» y otra «a la izquierda», pero, si las rectas son distintas, no existe una recta tangente. Ver la figura 12.3 en la página 196 .

Ejemplo: Un ejemplo concreto es la función $f(x) = |x|$; ver la figura 12.7 en la página 200 . La función no es derivable en 0 puesto que no hay tangente en 0.

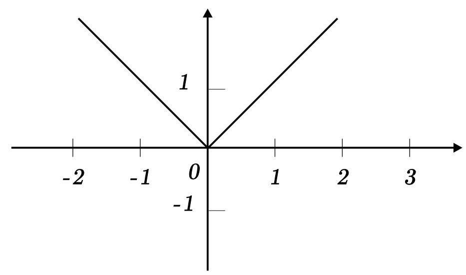
Si hacemos $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{|x|}{x}$, obtenemos que $\frac{|x|}{x} = 1$, si $x > 0$, y $\frac{|x|}{x} = -1$, si $x < 0$.

Luego, $\lim_{x \to x_0} \frac{|x|}{x}$ no existe.



el gráfico de una función f, que no admite tangente en $(1, f(1)) = (1,1)$

Figura 12.6

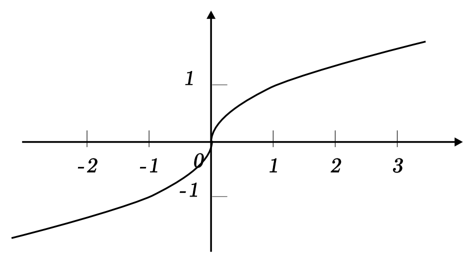


la función $f(x) = |x|$

Figura 12.7

La derivada puede no existir debido a que el límite del cociente incremental se haga infinito. Es el caso de cualquier curva con «tangente vertical».

Ejemplo: Sea $f(x) = \sqrt[3]{x}$; ver la figura 12.8 en la página 200 . Entonces



la inversa de $g(x) = x^3$ tiene tangente vertical en 0

Figura 12.8

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty.$$

Si la función no es continua en un punto, no puede ser derivable en ese punto, esto es consecuencia del siguiente teorema.

Teorema 27 *Si f es una función real definida en un intervalo abierto I que contiene al punto x_0 y si f es derivable en x_0, entonces f es continua en x_0.*

Prueba: *Escribamos (para $x \neq x_0$)*

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Como f es derivable en x_0, tomamos el límite en ambos lados de la igualdad anterior cuando $x \to x_0$ y obtenemos:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to x_0} f(x) &= f(x_0) + \lim_{x\to x_0} (x - x_0) \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= f(x_0) + 0 \cdot f'(x_0) = f(x_0). \end{aligned}$$

Lo que prueba que la función es continua en x_0. □

Corolario 28 *Si f es derivable en un intervalo abierto I, f es continua en I.*

Vamos ahora a hallar la derivada de algunas funciones.

Ejemplos

1. La función $f(x) = x$ es derivable en todo $\mathbb{R}$ y $f'(x) = 1$:
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1.$$
Es obvio que el gráfico de f en este caso es la recta $y = x$ de pendiente 1.
2. La función constante $f(x) = a$ también es derivable en todo $\mathbb{R}$y $f'(x) = 0$:
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{a - a}{x - x_0} = 0.$$
3. Consideramos $f(x) = x^2$. Entonces
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (x + x_0) = 2x_0.$$
La función $f(x) = x^2$ es derivable en todo punto x y $f'(x) = 2x$ para todo x.
4. Sea ahora $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$. Entonces, recordando que
$$\frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + x^{n-3}x_0^2 + \cdots + x_0^{n-1}$$
y tomando límites, obtenemos:
$$\begin{aligned}\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + x^{n-3}x_0^2 + \cdots + x_0^{n-1} = n\,x^{n-1}.\end{aligned}$$
Luego f es derivable en cualquier punto y su función derivada es $f'(x) = n\,x^{n-1}$.

12.4 Reglas de derivación

Proposición 29 *Si f y g son dos funciones derivables en x_0, entonces $f + g$ es derivable en x_0 y su derivada es $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.*

Prueba: *Para probar esto basta escribir*
$$\begin{aligned}\frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.\end{aligned}$$
Al tomar el límite cuando $x \to x_0$, se obtiene $f'(x_0) + g'(x_0)$. □

Proposición 30 *Si f es derivable en x_0 y $a \in \mathbb{R}$ entonces $a\,f$ es derivable en x_0, y $(af)'(x_0) = a(f'(x_0))$.*

Prueba: *El cociente incremental es*
$$\frac{a\,f(x) - a\,f(x_0)}{x - x_0} = a\,\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$
Basta tomar límite para obtener el resultado. □

Ejemplo: Si partimos del ejemplo 4 anterior y usamos las proposiciones, vemos que todo polinomio real es derivable en todo $\mathbb{R}$. Más aún, si

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x_{n-1} + \cdots + a_0$$

entonces

$$P'(x) = n\, a_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1.$$

Observe que P' es de grado $n-1$.

Proposición 31 *Si f y g son dos funciones derivables en un punto x_0 entonces el producto de funciones: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ también es derivable en x_0 y su derivada es*

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

Prueba: *Para calcular el límite*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{fg(x) - fg(x_0)}{x - x_0},$$

descomponemos el numerador así:

$$f(x).g(x) - f(x_0).g(x_0) = f(x)(g(x) - g(x_0)) + g(x_0)(f(x) - f(x_0))$$

Dividiendo por $x - x_0$ obtenemos:

$$\frac{f(x).g(x) - f(x_0).g(x_0)}{x - x_0} = f(x)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} + g(x_0)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Tomando límites cuando $x \to x_0$, obtenemos $(fg)'(x_0) = f(x_0)g'(x_0) + g(x_0)f'(x_0)$. □

Proposición 32 *Si f y g son dos funciones derivables en x_0 y $g(x_0) \neq 0$, entonces $\dfrac{f}{g}$ es una función derivable en x_0 y su derivada es*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

Prueba: *Primero observe que, por ser g derivable en x_0, g es continua en x_0, y, como $g(x_0) \neq 0$, en consecuencia $g(x) \neq 0$ para x en una vecindad de x_0. Luego, la función $\dfrac{f}{g}$ está bien definida para valores cercanos a x_0.*

Escribimos

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)}.$$

Entonces, procediendo como en el caso anterior hagamos el cociente incremental:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x - x_0}\left[\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}\right] &= \frac{1}{g(x)\cdot g(x_0)}\left[\frac{f(x)g(x_0) - g(x)f(x_0)}{x - x_0}\right] \\
&= \frac{\left[\dfrac{g(x_0)(f(x) - f(x_0)) - f(x_0)(g(x) - g(x_0))}{x - x_0}\right]}{g(x)\cdot g(x_0)} \\
&= \frac{\left[g(x_0)\dfrac{(f(x) - f(x_0))}{x - x_0} - f(x_0)\dfrac{(g(x) - g(x_0))}{x - x_0}\right]}{g(x)\cdot g(x_0)}.
\end{aligned}$$

Tomando límites cuando $x \to x_0$, recordando que g es continua en x_0, se obtiene el resultado. □

Corolario 33 *Si g es una función derivable en x_0 y $g(x_0) \neq 0$ entonces*

$\dfrac{1}{g}$ *(inversa multiplicativa)*

también es derivable en x_0 y su derivada es

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \left((g)^{-1}\right)'(x_0) = \frac{-g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

Ejercicios

1. Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

   (a) $2x$
   (b) $3x-1$
   (c) $x-1$
   (d) x^2+2
   (e) x^2+2x+1
   (f) x^3+6x-1
   (g) $x+\dfrac{1}{x}$
   (h) $x^2+\dfrac{1}{x^2}$
   (i) $x^5-3x^4+2x^3-x^2+x$
   (j) $7x^5-3x^2$
   (k) $\dfrac{1}{3x^2-x+3}$
   (l) $\dfrac{x^2+5x+1}{3x^4-3x^2+3x-1}$

2. Encuentre el dominio de cada una de estas funciones y halle la ecuación de la recta tangente en el punto indicado:

   (a) $\dfrac{x+3}{(x-1)(x+5)}$; $x_0=\dfrac{1}{2}$
   (b) $\dfrac{(x^4+3x+2)(x^2+1)}{(x-1)(x+7)}$; $x_0=0$
   (c) $\dfrac{(x^4+3x-4)}{(x-1)(x+7)(x^2+1)}$; $x_0=1$

3. Encuentre la ecuación de la recta tangente a los gráficos de cada una de las funciones siguientes, en los puntos indicados

   (a) $f(x)=x^2$ puntos $(1\,,\,1)$ y $(-1\,,\,1)$
   (b) $f(x)=x^4$ puntos $(1\,,\,1)$ y $(-1\,,\,1)$
   (c) $f(x)=x^6$ puntos $(1\,,\,1)$ y $(-1\,,\,1)$
   (d) $f(x)=x$ puntos $(1\,,\,1)$ y $(-1\,,\,-1)$
   (e) $f(x)=x^3$ puntos $(1\,,\,1)$ y $(-1\,,\,-1)$
   (f) $f(x)=x^5$ puntos $(1\,,\,1)$ y $(-1\,,\,-1)$

12.5 Derivadas de las funciones trigonométricas

Proposición 34 *La función $f(x)=\operatorname{sen} x$ es derivable en todo $\mathbb{R}$ y su derivada es*

$$(\operatorname{sen} x)'=\cos x.$$

Prueba: *Para cualquier $x_0\in\mathbb{R}$ se tiene*

$$\frac{\operatorname{sen} x-\operatorname{sen} x_0}{x-x_0}=2\frac{\operatorname{sen}\dfrac{x-x_0}{2}\,\cos\dfrac{x+x_0}{2}}{x-x_0}$$
$$=\frac{\operatorname{sen}\dfrac{x-x_0}{2}}{\dfrac{x-x_0}{2}}\,\cos\frac{x+x_0}{2}.$$

Tomando límites cuando $x\to x_0$ y usando el resultado $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1$, se obtiene

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\operatorname{sen} x-\operatorname{sen} x_0}{x-x_0}=1\cdot\cos\frac{2x_0}{2}=\cos x_0.$$

□

Proposición 35 *La función* $f(x) = \cos x$ *es derivable en todo* $\mathbb{R}$ *y su derivada es*

$$(\cos x)' = -\operatorname{sen} x.$$

Prueba: *Para cualquier* $x_0 \in \mathbb{R}$ *se tiene*

$$\frac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0} = -\operatorname{sen}\frac{x + x_0}{2} \frac{\operatorname{sen}\dfrac{x - x_0}{2}}{\dfrac{x - x_0}{2}}.$$

Tomando límites cuando $x \to x_0$*, se obtiene*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0} = -\operatorname{sen} x_0.$$

□

Proposición 36 *La función* $f(x) = \tan x$ *es derivable en todo su dominio:* $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$*, y su derivada es*

$$(\tan x)' = \sec^2 x = 1 + \tan^2 x.$$

Prueba: *Como* $\tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ *aplicamos la fórmula para derivar cocientes:*

$$(\tan x)' = \frac{(\operatorname{sen} x)' \cos x - (\cos x)' \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.$$

□

Proposición 37 *La función* $f(x) = \cot x$ *es derivable en todo su dominio:* $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$*, y su derivada es*

$$(\cot x)' = -\csc^2 x = -(1 + \cot^2 x).$$

Prueba: *Aplicando la fórmula de la derivada de un cociente, se obtiene el resultado (ejercicio).* □

Proposición 38 *Las funciones* $\sec x$ *y* $\csc x$ *son derivables en todo sus dominios y sus derivadas son:*

$$\sec x)' = \sec x \ \tan x$$

y

$$(\csc x)' = -\csc x \ \cot x.$$

Prueba: $f(x) = \sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ *está definida en* $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$*; aplicando la fórmula para derivar* $\dfrac{1}{g}$ *se obtiene:*

$$f'(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \sec x \ \tan x.$$

Igualmente, $g(x) = \csc x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$ *está definida en* $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$*; su derivada es*

$$g'(x) = \frac{-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = -\csc x \ \cot x.$$

□

Observación: Usando la notación $\dfrac{d}{dx}$ las derivadas de las funciones trigonométricas se escriben:

$\dfrac{d\ \mathrm{sen}x}{dx} = \cos x$	$\dfrac{d\ \cos x}{dx} = -\,\mathrm{sen}x$
$\dfrac{d\ \tan x}{dx} = \sec^2 x$	$\dfrac{d\ \cot x}{dx} = -\csc^2 x$
$\dfrac{d\ \sec x}{dx} = \sec x \tan x$	$\dfrac{d\ \csc x}{dx} = -\csc x \cot x$

Ejercicios

1. Halle las derivadas de las siguientes funciones:

(a) $\mathrm{sen}x - \cos x$
(b) $x\,\mathrm{sen}x$
(c) $x^2 \cos x$
(d) $\mathrm{sen}x(\cos x - \tan x)$
(e) $(3x^2 + x - 1) \cdot \tan x$
(f) $1 + x^2$
(g) $\sec x(\tan x + \csc x)$
(h) $\dfrac{1 + x^2}{\tan x}$
(i) $\dfrac{4x^3 + 3x - 2}{(x+1)\cos x}$
(j) $(x^2 + 3x - 1)\csc x - (3x^2 + 1)\cot x$

12.6 Regla de la cadena

Sean f y g funciones reales y supongamos que la imagen de f está en el dominio de g

$$\mathrm{Img}f \subset \mathrm{Dom}g.$$

Entonces se puede formar una nueva función $g(f(x))$ cuyo dominio es $\mathrm{Dom}f$ y cuya imagen está contenida en $\mathrm{Img}g$.

Ejemplos

1. Sea $f(x) = \mathrm{sen}x,\ g(x) = x^2 + 1$, entonces $\mathrm{Dom}f = \mathrm{Dom}g = \mathbb{R},\ \mathrm{Img}f = [-1, 1];\ \mathrm{Img}g = [x \in \mathbb{R}|x \geq 1]$.

   Podemos definir

   $$g \circ f(x) = g(f(x)) = \mathrm{sen}^2 x + 1;\ g \circ f : \mathbb{R} \to [1, 2] \subset \mathbb{R}.$$

   Igualmente, podemos definir

   $$f \circ g(x) = f(g(x)) = \mathrm{sen}(x^2 + 1);\ f \circ g : \mathbb{R} \to [-1, 1] \subset \mathbb{R}.$$

2. Sea $f(x) = \cos x$ y $g(x) = \sqrt{x}$, entonces $\mathrm{Dom}f = \mathbb{R}$, $\mathrm{Img}f = [-1, 1]$, $\mathrm{Img}g = \mathrm{Dom}g = \{x \in \mathbb{R}|x \geq 0\}$.

   La función $g \circ f$ no se puede definir en general porque $\mathrm{Img}f \not\subset \mathrm{Dom}g$. Sin embargo, se puede restringir f a intervalos, para los cuales la imagen de f está en el dominio de g. Para estos valores se puede definir $g \circ f(x) = \sqrt{\cos x}$.

   Veamos el caso de $f \circ g$: $\mathrm{Img}g \subset \mathrm{Dom}f$, entonces $f \circ g$ se puede definir para todo $x \in \mathrm{Dom}g$ y $f \circ g(x) = \cos\sqrt{x}$; $f \circ g : [0, +\infty) \to [-1, 1]$.

Teorema 39 (Regla de la cadena) *Sean f y g dos funciones reales tales que $\mathrm{Img}f \subset \mathrm{Dom}g$. Supongamos que f es derivable en $x_0 \in \mathrm{Dom}f$ y que g es derivable en $y_0 = f(x_0) \in \mathrm{Dom}g$. Entonces $g \circ f$ es derivable en x_0 y su derivada es*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0).$$

Prueba: *Probemos primero un caso particular. Supongamos que $f(x) \neq f(x_0) = y_0$ en una vencidad de x_0 (excepto en x_0). Entonces podemos escribir, multiplicando y dividiendo por el factor $f(x) - f(x_0)$.*

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - y_0} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Como f es derivable en x_0, también es continua en x_0 así que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = 0$; entonces tomando límites se obtiene:

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} \\ &\quad = \lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = g'(y_0).f'(x_0) \end{aligned}$$

ya que f es derivable en x_0, g es derivable en y_0 y

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{y \to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = g'(y_0)$$

La demostración anterior falla sólo si $f(x)$ toma el valor y_0 en puntos arbitrariamente cercanos a x_0. Para completar la demostración aún en este caso debemos sustituir el cociente

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)}$$

por algo que tenga sentido siempre, cerca de y_0. Como g es derivable en y_0, llamemos $G(y)$ a la siguiente función:

$$G(y) = \begin{cases} \dfrac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} - g'(y_0) & \text{si } y \neq y_0 \\ 0 & \text{si } y = y_0 \end{cases} .$$

La función G así definida es continua en y_0. Despejando $g(y) - g(y_0)$ obtenemos

$$g(y) - g(y_0) = (y - y_0)[G(y) + g'(y_0)].$$

Sustituimos este valor en el cálculo del cociente:

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = [G(f(x)) + g'(y_0)] \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

La última igualdad tiene sentido, aunque $f(x) = f(x_0) = y_0$. Tomando límites cuando $x \to x_0$ y teniendo en cuenta que $f(x)$ es continua en x_0, se obtiene:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} \left[G(f(x)) + g'(y_0)\right] \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= g'(y_0) \cdot f'(x_0), \text{ porque } \lim_{x \to x_0} G(f(x)) = 0\,. \end{aligned}$$

□

12.6.1 Regla de la cadena. Notación y Ejemplos

La regla de la cadena es un mecanismo para derivar funciones compuestas. Antes de desarrollar los ejemplos introducimos la siguiente notación:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}, \text{ donde } y = f(x).$$

Entonces la regla se escribe así:

$$(g \circ f)'(x) = \frac{d(g \circ f)}{dx} = \frac{dg}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Si se tiene una «cadena» de funciones

$$x \mapsto f(x) \mapsto g(f(x)) \mapsto h(g(f(x))) \cdots$$

introducimos nuevas variables $y, u, v, \ldots$ donde $y = f(x)$, $u = g(y)$, $v = h(u), \ldots$ de manera que:

$$x \mapsto y \mapsto u \mapsto v \cdots.$$

Así, por ejemplo, si F es la función compuesta

$$F(x) = h(g(f(x))),$$

la regla de la cadena, en este caso, se escribe así:

$$\frac{dF}{dx} = \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx},$$

lo que vale para cualquier punto donde tengan sentido todas las derivadas involucradas en la fórmula. Esta notación es muy fácil de recordar.

Ejemplos

1. Sea $f(x) = (3x^2 + 2x - 1)^{10}$, observemos que se podría multiplicar el polinomio por sí mismo diez veces y luego derivarlo lo que sería un trabajo muy largo y tedioso.
   Haciendo $g(x) = 3x^2 + 2x - 1,\ h(y) = y^{10}$, tenemos $f(x) = h(g(x))$. Entonces por la regla de la cadena:
   $$f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x) = 10\ \left(3x^2 + 2x - 1\right)^9 (6x + 2)\,.$$
2. Sea $f(x) = \cos(3x^2 + 2x - 1)$. Hacemos $g(x) = 3x^2 + 2x - 1,\quad h(y) = \cos y$. Entonces $f(x) = h(g(x))$. Por la regla de la cadena:
   $$\frac{df}{dx} = \left[-\operatorname{sen}(3x^2 + 2x - 1)\right](6x + 2) = -(6x + 2)\ \operatorname{sen}(3x^2 + 2x - 1).$$
3. Sea $f(x) = \operatorname{sen}(\cos x)$, hacemos $g(x) = \cos x$, $h(y) = \operatorname{sen} y$. Entonces:
   $$\frac{d}{dx}\operatorname{sen}(\cos x) = \cos(\cos x)(-\operatorname{sen} x) = -\operatorname{sen} x\ \cos(\cos x).$$
4. Para alcular la derivada de $f(x) = \operatorname{sen}^n x$, hacemos $y = g(x) = \operatorname{sen} x,\ h(y) = y^n$. Entonces $f(x) = h(g(x))$ y
   $$f'(x) = (n \operatorname{sen}^{n-1} x) \cdot \cos x = n \cos x\ \cdot\ \operatorname{sen}^{n-1} x.$$
5. Para calcular la derivada de
   $$f(x) = \operatorname{sen}^n(\cos(3x^2 + 2x - 1)),$$
   definimos $y(x) = 3x^2 + 2x - 1$, $u(y) = \cos y$, $v(u) = \operatorname{sen} u$, $w(v) = v^n$. Entonces:
   $$f(x) = w(v(u(y))),$$
   $$\frac{df}{dx} = \frac{dw}{dv} \cdot \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx},$$
   $$\begin{aligned} f'(x) &= \\ &= n \operatorname{sen}^{n-1}(\cos(3x^2 + 2x - 1)) \cdot \cos(\cos(3x^2 + 2x - 1)) \cdot \\ &\quad \cdot (-\operatorname{sen}(3x^2 + 2x - 1)) \cdot (6x + 2). \end{aligned}$$

Ejercicios

1. Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \cos 2x - 2\,\mathrm{sen}x$

(b) $f(x) = (2 - x^2)\cos^2 x + 2x\,\mathrm{sen}x^3$

(c) $f(x) = \mathrm{sen}^4 x \cot x^n$

(d) $f(x) = \dfrac{\mathrm{sen}^3 x}{\mathrm{sen}^2 x}$

(e) $f(x) = \cos(\cos(\cos x))$

2. Calcule también la derivada de:

(a) $f(x) = \tan\left(\dfrac{x^2+1}{2}\right) - \cot\left(\dfrac{x^2+1}{2}\right)$

(b) $f(x) = (x^2 + 3x - 1)(x^4 + 2)(x^3 + x - 1)$

12.7 Derivada de la función inversa

Proposición 40 *Sea f es una función derivable en x_0 tal que $f'(x_0) \neq 0$ y supongamos que existe una función g que es inversa de f en un intervalo abierto que contenga a x_0, entonces g es derivable en $y_0 = f(x_0)$, y su derivada es:*

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Prueba: *Por los momentos supondremos que g es derivable en $y_0 = f(x_0)$ y dejamos para el próximo capítulo la prueba completa[1]. Por la hipótesis sabemos que existe un intervalo I, con $x_0 \in I$, y una función g definida en la imagen de I, $f(I)$ tal que la función compuesta $g \circ f$ es la identidad: $g(f(x)) = x$ para todo $x \in I$.*

Derivando esta función compuesta por la regla de la cadena (ambas funciones son derivables en los puntos necesarios) obtenemos:

$$1 = (g \circ f)'(x_0) = g'(y_0) f'(x_0)$$

y despejando:

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

□

Observación: Si la función f fuese derivable en todo el intervalo I, entonces la función derivada de g estaría definida en todo punto «y» tal que $y = f(x)$ y $f'(x) \neq 0$. Sería:

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

para todo $y \in f(I),\ x \in I$ siempre que $f'(x) \neq 0$.

La proposición anterior permite calcular la derivada de muchas funciones, veamos algunos ejemplos.

[1]En el próximo capítulo probaremos que existe la inversa local g y que g es derivable en $y_0 = f(x_0)$

Ejemplos

1. La derivada de la función $g(x) = \sqrt{x}$ es $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
   La función $g(x) = \sqrt{x}$ está bien definida en la semirecta $[0, +\infty)$ y es la inversa de la función $f(y) = y^2$. Entonces (para $x \neq 0$)
   $$g'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{2y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$
2. Igualmente si $g(x) = \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}$, entonces $g(x)$ es la inversa de $f(x) = x^n$, es derivable en todo su dominio excepto en $x = 0$ y su derivada es
   $$g'(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}.$$
   Observe que si n es impar, la función $g(x) = \sqrt[n]{x}$ está bien definida para todo $x \in \mathbb{R}$ y si n es par, está bien definida sólo para $x \geq 0$. En cualquier caso, $g(x)$ es la inversa en todo su dominio de la función $f(x) = x^n$.
   Calculamos la derivada para $x \neq 0$, según lo visto,
   $$g'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{ny^{n-1}}$$
   pero como $y = \sqrt[n]{x}$ obtenemos, por sustitución,
   $$g'(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$
   siempre que $x \neq 0$, puesto que para $x = 0$ la derivada $f'(0) = 0$ y no tiene sentido dividir por cero.
   Observación: La regla para calcular la derivada de una raíz se recuerda muy fácilmente, pues es la misma que para x^n, es decir:
   $$\frac{dx^\alpha}{dx} = \alpha x^{\alpha-1}, \text{ donde } \alpha = \frac{1}{n}.$$
   Esta regla es general para cualquier número α, podemos probarla para el caso de α racional: $\alpha = \dfrac{p}{q}$.
3. Si $f(x) = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$, entonces f es derivable en su dominio con excepción posiblemente de $x = 0$; y la derivada es
   $$f'(x) = \frac{dx^{\frac{p}{q}}}{dx} = \frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1} = \frac{p}{q\sqrt[q]{x^{q-p}}}.$$
   Prueba: *Llamemos $u = x^p$ y usando la regla de la cadena:*
   $$\begin{aligned}\frac{dx^{\frac{p}{q}}}{dx} &= \frac{d}{dx}\sqrt[q]{u} = \frac{1}{q}u^{\dfrac{1-q}{q}} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= \frac{1}{q}x^{p(\dfrac{1-q}{q})}(px^{p-1}) = \frac{p}{q}x^{p(\dfrac{1}{q}-1)+p-1} = \frac{p}{q}x^{(\dfrac{p}{q}-1)}.\end{aligned}$$
   $\square$
4. Las funciones: $f(x) = \operatorname{arcsen} x$; $g(x) = \arccos x$ y $h(x) = \arctan x$ son derivables en su dominio y sus derivadas son
   $$f'(x) = (\operatorname{arcsen} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ x \in (-1, 1),$$
   $$g'(x) = (\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}},\ x \in (-1, 1),$$
   $$h'(x) = (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2},\ x \in \mathbb{R}.$$

Prueba: *$f(x)$ es el ángulo «y» tal que $x = \operatorname{sen} y$, es decir, es la función inversa de $\operatorname{sen} x$, entonces:*

$$f'(x) = \frac{1}{(\operatorname{sen} y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\cos(\operatorname{arcsen} x)},$$

pero, por el teorema de Pitágoras, sabemos que

$$1 = \cos^2(\operatorname{arcsen} x) + \operatorname{sen}^2(\operatorname{arcsen} x) = \cos^2(\operatorname{arcsen} x) + x^2,$$

sustituyendo arriba obtenemos

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \; x \in (-1, 1).$$

Para la derivada de g tenemos que $\cos y$ es derivable:

$$g'(x) = \frac{1}{(\cos y)'} = \frac{1}{-\operatorname{sen} y} = \frac{1}{-\operatorname{sen}(\arccos x)} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Finalmente:

$$h'(x) = \frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

□

Ejercicios

1. Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \sqrt{1+x^2}$

(b) $f(x) = (3x^2+2x-1)^{\frac{3}{2}}$

(c) $f(x) = \left[\frac{1+x^3}{1-x^5}\right]^{\frac{3}{2}}$

(d) $f(x) = x\sqrt{1+x^2}$

(e) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}(1+\sqrt{1+x^2})}$

(f) $f(x) = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$

(g) $f(x) = \frac{\operatorname{sen} 4x}{x\sqrt{x+1}}$

(h) $f(x) = \operatorname{arcsen}(3x^2+1)$

(i) $f(x) = \left(\frac{x^2+2x+1}{\arccos x}\right)^{\frac{3}{2}}$

(j) $f(x) = \arctan \frac{x^2+3x-1}{\sqrt{x+1}}$

(k) $f(x) = \sqrt[3]{3\arctan \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}}$

12.8 Derivada segunda y derivadas de orden superior

Definición: *Si f es función derivable en un intervalo abierto I, puede ocurrir que la función $f' : I \to \mathbb{R}$ sea también derivable en un punto $x_0 \in I$, es decir, que exista el límite*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = f''(x_0).$$

Este número se llama **derivada segunda de** *f* **en** *x_0, es la derivada en x_0 de la derivada de f. Si f' es derivable en todo I se obtiene una nueva función definida en todo el intervalo I.*

Ejemplo: Sea

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0.$$

Entonces es claro que

$$f'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1 x^1$$

es otra vez derivable y obtenemos

$$f''(x) = n(n-1)a_n x^{n-2} + (n-1)(n-2)a_{n-1}x^{n-3} + \cdots + 2a_2.$$

Ejemplo: Proponemos ver en el ejercicio 1 en la página 199 , que si se deja caer una piedra desde cierta altura, la piedra no cae con velocidad constante sino que su velocidad va aumentando a medida que cae. Determinemos la velocidad instantánea de la piedra, aproximando la razón de cambio en un período de tiempo $t - t_0$. Si $f(t)$ es la altura de la piedra en el instante t, la velocidad en el instante t_0 es

$$v(t_0) = f'(t_0).$$

Como la nueva función $f'(t)$ es también derivable, podemos calcular la razón instantánea de cambio de la velocidad, en el instante t_0, a saber,

$$a(t_0) = f''(t_0).$$

Esta razón de cambio instantánea de velocidad se llama *aceleración*. En el caso de la piedra que cae, el gran descubrimiento de Galileo fue que la piedra cae siempre de manera que recorre $(4{,}9)t^2$ metros al cabo de t segundos. Así que si h metros es la altura de la torre, la función f es $f(t) = (h - (4{,}9)t^2)$ metros. La velocidad instantánea de la piedra es

$$f'(t) = v(t) = -(9{,}8)t\frac{m}{seg}$$

y su aceleración es

$$f''(t) = v'(t) = a(t) = -(9{,}8)\frac{m}{seg^2}$$

Lo que significa que la aceleración $a(t)$ es la función constante: $a(t) = -9{,}8$ cuando la distancia recorrida está medida en metros y el tiempo en segundos.

Este tipo de movimiento se llama *movimiento uniformemente acelerado*, es decir, que es un movimiento con aceleración constante. En este caso $-9{,}8$ es la constante. En Física es muy importante establecer las unidades, en este caso, metros y segundos. Desde el punto de vista del cálculo, establecer las unidades no es otra cosa que fijar los puntos, correspondientes a 1 en cada eje de coordenadas. En este caso la coordenada x corresponde al tiempo t y A_x marca un segundo. La coordenada y corresponde a la distancia d y A_y es el punto correspondiente a 1 metro. Una vez fijadas las coordenadas la función $f(t)$ es una función derivable $d = f(t)$, su derivada representa la velocidad y su segunda derivada, la aceleración.

Hay varias interpretaciones geométricas de la 2^{da} derivada pero las vamos a dejar para estudiarlas más adelante, cuando veamos las técnicas para dibujar las gráficas de funciones derivables y otras aplicaciones de las derivadas.

Puede ocurrir que la función f sea derivable dos veces en todo I y que la función así obtenida $x \mapsto f''(x)$ vuelva a ser derivable en $x_0 \in I$. Su derivada se llama **derivada tercera de** f **en** x_0 y se escribe $f'''(x_0)$.

Definición: *En general, si existen todas las funciones derivadas necesarias:*

$$f'(x),\ f''(x),\ f'''(x), \dots f^{(n-1)}(x),$$

y la función $f^{(n-1)}(x)$ vuelve a ser derivable en x_0, su derivada se llama **derivada n-ésima de la función f en** x_0. *Esto es:*

$$f^{(n)}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0}.$$

Si existe $f^{(n)}(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ se dice f es **infinitamente derivable** *en I.*

Notación: El conjunto de todas las funciones definidas en el intervalo I que son continuas en todo punto de I se denota $C^0(I)$. El conjunto de todas las funciones derivables en todo punto de I con derivada continua en I se denota $C^1(I)$. El conjunto de las que son derivables n veces en todo punto de I con derivada n-ésima continua en I se denota $C^n(I)$ y el conjunto de las que son derivables infinitas veces se denota $C^\infty(I)$. Es obvio que (dé usted un argumento):

$$C^\infty(I) \subset \cdots \subset C^n(I) \subset C^{n-1}(I) \subset \cdots \subset C^1(I) \subset C^0(I).$$

Todas las funciones elementales que se han estudiado hasta ahora son derivables infinitas veces con excepción, quizás, de algunos puntos aislados de su dominio.

Ejemplos

1. Si f es un polinomio,
$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0,$$
es fácil probar, derivando sucesivas veces, que si $1 \leq k \leq n$, entonces
$$f^{(k)}(x) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)a_n x^n + k!a_k;$$
si $k > n$, entonces $f^{(k)} \equiv 0$. Así que todo polinomio es infinitamente derivable.
2. Si $f(x) = \operatorname{sen} x$, entonces, $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\operatorname{sen} x$, $f'''(x) = -\cos x$, $f^{(4)}(x) = \operatorname{sen} x$ y de aquí en adelante estas cuatro funciones se repiten periódicamente.
3. La función $f(x) = \sqrt{x}$, es derivable en $\{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$, no lo es en 0. Sus derivadas se calculan por la fórmula
$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1},$$
así que:
$$f'(x) = \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$
$$f''(x) = \left(\sqrt{x}\right)'' = -\frac{1}{4}x^{-\dfrac{3}{2}} = \frac{-1}{4\sqrt{x^3}}$$
y, en general, para $k \in \mathbb{N}$:
$$f^{(k)}(x) = \left(\sqrt{x}\right)^{(k)} = \frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-k+1)\,x^{-\frac{2k-1}{2}}.$$
Es claro que la función es infinitas veces derivable para todo $x > 0$.

Ejercicios

1. Determinar si las siguientes funciones son derivables en los puntos indicados:
   (a) $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x < 0 \\ x-1 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases} \qquad x = 0$
   (b) $f(x) = \begin{cases} x^2-4 & \text{si} \quad x < 2 \\ \sqrt{x-2} & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases} \qquad x = 2$
   (c) $f(x) = \begin{cases} x^2-9 & \text{si} \quad x < 3 \\ 6x+18 & \text{si} \quad x \geq 3 \end{cases} \qquad x = 3$
   (d) $f(x) = \begin{cases} x-2 & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases} \qquad x = 0$
   (e) $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si} \quad x < -1 \\ 1-x^2 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases} \qquad x = -1$
   (f) $f(x) = \begin{cases} 5-6x & \text{si} \quad x \leq 3 \\ -4-x^2 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases} \qquad x = 3$
2. Hallar los valores de a y b para que las siguientes funciones sean derivables en el punto indicado.
   (a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x < 1 \\ ax+b & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases} \qquad x = 1$
   (b) $f(x) = \begin{cases} ax+b & \text{si} \quad x < 2 \\ 2x^2-1 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases} \qquad x = 2$
3. gráfica de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

(a) $y = \dfrac{5}{1+x^2}$, $(0,5)$, $\left(1, \dfrac{5}{2}\right)$

(b) $y = 2x^3 + 4x^2 - 5x - 3$, $(-1,4)$, $(1,-2)$

(c) $y = (x^2+1)^3(x^4+1)^2$, $(1,32)$

4. Encuentre:

   (a) Todos los puntos de la gráfica de $y = x^3 - x^2$ donde la recta tangente sea horizontal.

   (b) Todos los puntos de la gráfica de $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - x$ donde la recta tangente tenga pendiente 1.

   (c) Una ecuación de la recta tangente a la curva $y = 3x^2 - 4$ que es paralela a la recta $3x + y = 4$.

   (d) Todos los puntos de la gráfica de $y = x^3 + 2x^2 - 4x + 5$ en los que la recta tangente es: (a) horizontal; (b) paralela a la recta $2y + 8x - 5 = 0$.

5. Calcular la derivada de las siguientes funciones:

   (a) $f(x) = \dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$

   (b) $f(x) = \dfrac{a}{\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{b}{x\sqrt[3]{x}}$

   (c) $f(x) = x^2\sqrt[3]{x^2}$

   (d) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x - \cos x}$

   (e) $f(x) = 2x \operatorname{sen} x - (x^2 - 2)\cos x$

   (f) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x^2 - 2x + 1}}{x}$

   (g) $f(x) = \sqrt[3]{x + \sqrt{x}}$

   (h) $f(x) = \tan^2(5x)$

   (i) $f(x) = -\dfrac{\cos x}{3\operatorname{sen}^3 x} + \dfrac{4}{3}\cot x$

   (j) $f(x) = \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

   (k) $f(x) = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)\operatorname{arcsen}\sqrt{x} + \dfrac{1}{2}\sqrt{x - x^2}$

   (l) $f(x) = \arctan\left(\dfrac{x \operatorname{sen} x}{1 - 1\cos x}\right)$

   (m) $f(x) = \left[\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{-1} + 1\right]^{-1}$

   (n) $f(x) = \dfrac{\sec 2x}{1 + \tan 2x}$

   (o) $f(x) = x \arccos(\sqrt{4x+1})$

   (p) $f(x) = \cos^2(\sqrt{\operatorname{sen} 4x + \tan^3 3x})$

   (q) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 1}{x\sqrt{1+x^2}}$

   (r) $f(x) = a\left(1 - \cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)^2$

   (s) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x}}$

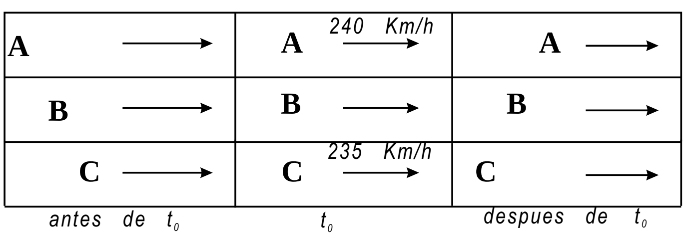
   (t) $f(x) = \dfrac{(x+1)^3\sqrt[4]{(x-2)^3}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}$.

Apéndice 1: Un enfoque geométrico de la Derivada

12.9 Un enfoque geométrico para la noción de derivada

La definición de derivada que dimos anteriormente es la más usual actualmente, sin embargo, observamos que a muchos alumnos les toma algún tiempo entender bien la definición de límites (ε, δ) y que estas nociones requieren de cierta madurez, que no siempre se logra en el transcurso de un solo trimestre del año escolar. Por otra parte la comprensión de la definición de derivada y de los conceptos e ideas del cálculo no pueden esperar mucho, puesto que son indispensables tanto en Matemática y Física como en todo estudio de ciencias. Finalmente hay razones históricas (ver nota histórica al final) que apoyan una definición distinta de derivada. Por estas razones vamos a volver a exponer la definición de derivada desde un punto de vista distinto, que no requiere la idea de límite.

Supongamos que asistimos a una carrera de automóviles y en la recta final vemos el siguiente espectáculo: los automóviles A, B y C van adelante pero en el mismo instante, A pasa a B y B pasa a C, pero sabemos que A corre a velocidad constante 240 Km / h, B corre a velocidad variable y C corre a velocidad constante 235 Km / h. La figura 12.9 representa la posición relativa de los tres automóviles antes del momento t_0 y después de t_0.



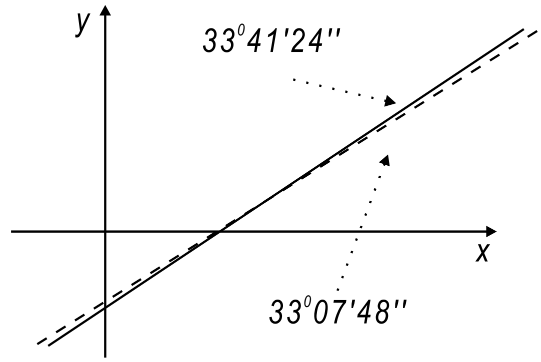
la posiciones relativas de tres automóviles

Figura 12.9

Nuestra observación nos permite afirmar que la velocidad del automóvil B en el momento t_0 era menor que 240 Km / h y mayor que 235 Km / h. Dibujamos los gráficos del movimiento de cada automóvil, llevamos el tiempo t al eje de las abscisas y la distancia recorrida en el eje de las ordenadas. Obtenemos que como los movimientos de A y C son uniformes, sus gráficas son dos rectas, cuyas pendientes son las velocidades respectivas:

$$v = \frac{\text{distancia recorrida}}{\text{tiempo}}.$$

Haciendo la gráfica con las unidades de distancia en metros para el eje y, tiempo en centésimas de segundo en el eje x, tenemos que la pendiente de la recta correspondiente al automóvil A, que va a 240 Km / h = 66,67 m / seg, es 33 grados 41 min. 24 seg. Para el automóvil C, que va a 235 Km / h = 65,28 m / seg., obtenemos la recta de pendiente 33 grados 7 min. 48 seg. (ver la figura 12.10 en la página 216).



rectas con pendientes de: 33 grados 41 min. 24 seg. y 33 grados 7 min. 48 seg. Las rectas casi coinciden, pero en gran escala se llegan a distinguir

Figura 12.10

El ángulo entre las dos rectas es casi imperceptible. La gráfica correspondiente al automóvil B es una curva cuya tangente en el punto (t_0, d_0) está entre estas dos rectas. Para formalizar estas ideas ponemos las siguientes definiciones.

Definición: *Dadas dos funciones f y g definidas en un intervalo abierto que contiene a x_0, diremos que f* **pasa a** *g en el punto x_0, si existe un intervalo abierto I, que contiene a x_0 y se tiene:*

$$f(x) < g(x) \text{ si } x < x_0,\ x \in I$$

y

$$f(x) > g(x) \text{ si } x > x_0,\ x \in I$$

(ver la figura 12.11 en la página 217).

Definición: *Dada una función h, definida en un intervalo abierto que contiene a x_0, diremos que h* **cambia de signo de positivo a negativo** *en x_0, si la función constante, $c(x) = 0$, pasa a h en x_0. Diremos que la función h* **cambia de signo de negativo a positivo** *en x_0 si la función pasa a $c(x)$ en x_0.*

La siguiente proposición resulta obvia de las definiciones.

Proposición 41 *La función f pasa a la función g en x_0 si y sólo si la función $h = f - g$ cambia de signo de negativo a positivo en x_0.*

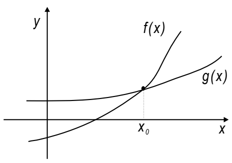
Definición: *(alternativa de derivada): Sea f una función definida en un intervalo abierto que contiene al punto x_0, se dice que el número m_0 es* **la derivada de la función f en el punto** *x_0, si ocurre lo siguiente:*

(a) para todo $m < m_0$, la función f pasa, en x_0, a la recta de ecuación $y(x) = f(x_0) + m(x - x_0)$

(b) para todo $m > m_0$, la recta de ecuación $y(x) = f(x_0) + m(x - x_0)$ pasa la función f en x_0.

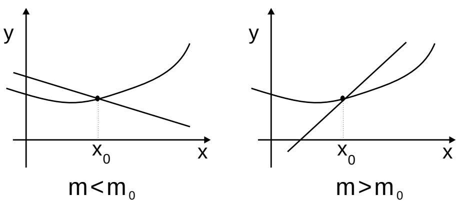
Si el número m_0 existe, entonces se dice que f es derivable en x_0, que m_0 es la derivada de f en x_0, y se escribe $f'(x_0) = m_0$. Si f es derivable en todo los puntos de su dominio se dice que f es derivable.

Volviendo al ejemplo inicial de los tres automóviles A, B y C. Como A pasa a B y B pasa a C en t_0, lo que ocurre es que A está representado por una recta de pendiente m_1, C por otra recta de pendiente



f pasa a g en el punto x_0

Figura 12.11



Si $m < m_0$, la recta corta el gráfico de f de arriba hacia abajo, pero si $m > m_0$, entonces lo corta de abajo hacia arriba

Figura 12.12

m_2 y si f es la función que representa a B, entonces la recta $y(t) = f(t_0) + m_1(t - t_0)$ pasa a f en t_0 y f pasa a la recta $y(t) = f(t_0) + m_2(t - t_0)$ en t_0, luego la derivada m_0 de f en t_0 está entre estos valores: $m_2 < m_0 < m_1$.

La definición de derivada dice que si $m < m_0$, entonces la recta de ecuación $y = f(x_0) + m(x - x_0)$ corta al gráfico de f de arriba hacia abajo. Si $m > m_0$, entonces la recta anterior corta al gráfico de f de abajo hacia arriba (ver la figura 12.12).

Teorema 42 *Si f es derivable en x_0, la derivada $f'(x_0) = m_0$ es única.*

Prueba: *Supongamos que existen los números m_0 y m_0' que cumplen las condiciones de la definición de derivada. Supongamos $m_0 < m_0'$ entonces:*

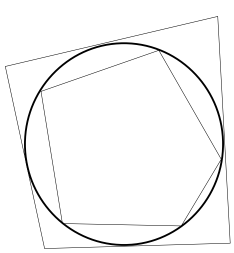
$$m_0 < m = \frac{m_0 + m_0'}{2} < m_0'$$

El número m cumple la condición (b) de la definición para m_0 y cumple la condición (a) de la definición para m_0', entonces la recta $y(x) = f(x_0) + m(x - x_0)$ pasa a la curva en x_0 y la curva pasa a la recta en x_0. Esta es una contradicción: no pueden ocurrir las dos cosas al mismo tiempo. El absurdo viene de la hipótesis $m_0 < m_0'$. □

Observación: Cuando se definió la derivada como el límite de un cociente incremental no hacía falta probar su unicidad ya que se sabe que el límite, si existe, es único.

12.10 Puntos de transición

Para ahondar un poco más en la definición de derivada y vincularla con otros conceptos del cálculo diferencial e integral (ver notas históricas en el capítulo 0 en la página 1), vamos a establecer el concepto de puntos de transición, que sirve además para modelar muchas situaciones del mundo real.



Área del círculo como el punto de transición

Figura 12.13

Definición: *Sean A y B dos subconjuntos de números reales. Se dice que el punto x_0 es un punto de transición de A a B si existe un intervalo abierto I que contenga a x_0, tal que*
(a) si $x \in I$ y $x < x_0$, entonces $x \in A$ y $x \notin B$
(b) si $x \in I$ y $x > x_0$, entonces $x \notin A$ y $x \in B$.

Observación: La definición no dice que x_0 tenga que pertenecer a A o B, puede ocurrir cualquier cosa en este sentido: $x_0 \in A$ ó $x_0 \in B$ ó $x_0 \in A \cap B$ ó $x_0 \notin A \cup B$.

Ejemplos

1 Dos automóviles «a» y «b» están corriendo una carrera. Vamos a llamar A al conjunto de tiempos en los cuales «a» va adelante y B al conjunto de tiempos en los cuales «b» va adelante. Entonces si «a» pasa a «b» en el momento t_0, t_0 es un punto de transición de B a A y si «b» pasa a «a» en t_0, este es punto de transición de A a B.

2 Si la función f pasa a la función g en x_0, entonces x_0 es punto de transición del conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{R} / f(x) - g(x) < 0\}$$

al conjunto

$$B = \{x \in \mathbb{R} / f(x) - g(x) > 0\}$$

Teorema 43 *Sea A el conjunto de las números m tales que la función f pasa a la recta $y(x) = f(x_0)+m(x-x_0)$ en x_0 y sea B el conjunto de los números m tales que la recta $y(x) = f(x_0) + m(x - x_0)$ pasa a la función f en x_0. Entonces m_0 es la derivada de f en x_0 si sólo si m_0 es punto de transición de A a B.*

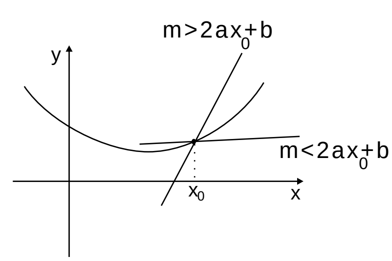
La prueba de este teorema es obvia a partir de las definiciones y se deja como ejercicio.

Ejemplo: El área del círculo se obtiene por aproximaciones con áreas de polígonos inscritos en la circunferencia y áreas de polígonos circunscritos en la misma. Si A es el conjunto de las áreas de los polígonos inscritos en la circunferencia y B es el conjunto de las áreas de los polígonos circunscritos a la circunferencia entonces, definimos área del círculo como el punto x_0 de transición de A a B, (ver la figura 12.13 en la página 217).

Esta definición sirvió a los griegos Eudoxo y Arquímedes para el cálculo del número π con precisión asombrosa (π es el área del círculo de radio 1).

12.11 Ejercicios resueltos

1. Usando la segunda definición de derivada, probar que si $f(x) = ax^2 + bx + c$ entonces $f'(x_0) = 2ax_0 + b$, para cualquiera $x_0 \in \mathbb{R}$.
Respuesta: Hay que comparar la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ con la ecuación general de la recta



Los dos casos:
el trinomio $f(x)$ pasa a la recta en x_0 y viceversa

Figura 12.14

que pasa por $(x_0, f(x_0))$, $y(x) = f(x_0) + m(x - x_0)$ para determinar cuándo la función pasa a la recta y cuándo la recta pasa a la función. Equivalentemente hay que estudiar la variación del signo de la función

$$\begin{aligned} & f(x) - (f(x_0) + m(x - x_0)) \\ & \quad = ax^2 + bx + c - ax_0^2 - bx_0 - c - mx + mx_0 \\ & \quad = a(x^2 - x_0^2) + b(x - x_0) - m(x - x_0) \\ & \quad = (x - x_0)(a(x + x_0) + b - m) \end{aligned}$$

para lo cual se estudia el signo del factor: $a(x + x_0) + b - m$, para valores de x cerca de x_0. Como en x_0 se tiene $a(x_0 + x_0) + b - m = 2ax_0 + b - m$, se tiene que si $m < 2ax_0 + b$, el factor $(a(x_0 + x_0) + b - m)$ es positivo y, en consecuencia, $a(x + x_0) + b - m$ también es positivo si x está cerca de x_0. En conclusión, si $m < 2ax_0 + b$, $f(x) - (f(x_0) + m(x - x_0))$ pasa de negativo a positivo, esto es, $f(x)$ pasa a la recta en x_0,(ver la figura 12.14 en la página 218).

Supongamos ahora que $m > 2ax_0 + b$, entonces el factor $a(x_0 + x_0) + b - m$ es negativo y también el factor $a(x + x_0) + b - m$ lo será para valores de x cerca de x_0, luego $f(x) - (f(x_0) + (x - x_0))$ pasa de positivo a negativo (ver también la figura 12.14 en la página 218). Esto es, la recta pasa al trinomio $f(x)$ en x_0. Por la segunda definición (alternativa) de derivada: $f'(x_0) = 2ax_0 + b$.

2. Usando el teorema 43 en la página 218 , encuentre los conjuntos A y B para los cuales $2ax_0 + b$ es punto de transición.
Respuesta:

$$A = \{m \in \mathbb{R}/m < 2ax_0 + b\}$$

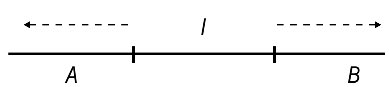
$$B = \{m \in \mathbb{R}/m > 2ax_0 + b\}.$$

12.12 Notas sobre puntos de transición

La idea de punto de transición es útil por describir muchos fenómenos, aunque no todos los puntos de transición son derivada de alguna función. Piense en los siguientes ejemplos:

En el movimiento de un péndulo hay tres puntos de transición claramente determinados: los dos extremos del movimiento y el punto medio del movimiento.

Examinemos el caso de un clavadista saltando de cabeza al agua. Dependiendo de como definamos los conjuntos A y B podemos definir o no puntos de transición. Por ejemplo si A es el período de tiempo en el cual el clavadista está totalmente seco y B es el período en que está totalmente mojado, entonces $A \cap B = \emptyset$, pero no existe punto de transición posible porque hay todo un intervalo I entre A y B como en la siguiente figura.



Si definimos A como el período de tiempo en que el clavadista tiene alguna parte de su cuerpo bajo el agua y B el período de tiempo en que el clavadista tiene alguna parte de su cuerpo fuera del agua, tampoco podemos definir un punto de transición. Podría hablarse de un período de transición que va desde que las puntas de los dedos de la mano entran al agua, hasta que las puntas de los dedos de los pies entran al agua. Hay una intersección de los conjuntos A y B, $A \cap B \neq \emptyset$.

Finalmente, si definimos A como el período en que el clavadista tiene alguna parte de su cuerpo bajo el agua y B como el período en que el clavadista está totalmente en el aire, entonces el punto de transición es el instante en que la punta de su dedos tocan el agua.

Ejercicios

1. Sean $A = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - 1 > 0\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R} | -1 < x \leq 1\}$. Hallar el punto de transición de A a B y el de B a A.

2. Considere la función real siguiente: $f(x) = x$ si $x \leq 1$ y $f(x) = 2x - 1$ si x > 1. Definiendo los conjuntos A y B correspondientes a la segunda definición de derivada en $x_0 = 1$, pruebe que la función no es derivable en $x_0 = 1$.

Apéndice 2: Contactos de primer orden

En esta sección vamos a probar que dada una función diferenciable f en x_0, la recta tangente al gráfico de f en el punto $(x_0, f(x_0))$ es, entre todas las rectas que pasan por ese punto, *la que aproxima mejor a la función*. Esto es, la que mejor se pega a la curva, la que hace mejor «contacto» con la curva. El concepto de «contacto» es muy importante en cálculo. Antes de seguir es conveniente que usted vea, a través de sus gráficos, como los diferentes polinomios: x, x^2, x^3, x^4, etc., se «pegan» a su tangente en 0, que es el eje x. Estas figuras dan una idea de lo que significa «contacto», o lo que significa «mejor contacto».

Definición: *Dos funciones derivables f y g, que coincidan en un punto, $f(x_0) = g(x_0)$, se dice que tienen un contacto de 1^{er} orden en x_0, si además $f'(x_0) = g'(x_0)$.*

Numéricamente, esta definición tiene el siguiente significado: las dos funciones se aproximan cerca del punto x_0, puesto que coinciden y son continuas en x_0. Pero si tienen un contacto de 1^{er} orden se aproximan mucho más rápidamente que si no lo tienen. Un ejemplo muy sencillo, pero que ilustra la situación general, es el siguiente.

Ejemplo: Considere las tres funciones $f(x) = x^2$, $h(x) = x$, $g(x) = 0$. Las gráficas son: una parábola, la diagonal principal y el eje x. Todas coinciden en 0: $f(0) = g(0) = h(0)$ pero $f'(0) = g'(0) = 0$ y $h'(0) = 1 \neq 0$ Entonces f y g tienen un contacto de 1^{er} orden en 0, mientras que g y h, no lo tienen. Usando una calculadora hagamos una tabla de valores (ver tabla 12.1 en la página 224):

La tabla muestra claramente que x^2 se aproxima a 0 con mucha más rapidez que x.

Geométricamente, la definición anterior dice que los gráficos de ambas funciones tienen la misma tangente en $(x_0, f(x_0))$:

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

La recíproca también es cierta, si las gráficas de f y de g se cortan en un punto $(x_0, f(x_0)) = (x_0, g(x_0))$ y tienen la misma tangente en ese punto, entonces $f'(x_0) = g'(x_0)$, y las dos funciones tienen un contacto de 1^{er} orden en ese punto. Hemos probado lo siguiente.

Proposición 44 *Dos funciones f y g, derivables en x_0, tienen un contacto de 1^{er} orden en x_0 si y sólo si las tangentes a sus gráficas en ese punto coinciden.*

Corolario 45 *Si f es una función derivable en x_0 y g es una recta por $(x_0, f(x_0))$, esto es $g(x) = f(x_0) + m(x - x_0)$, entonces, f y g tienen un contacto de primer orden en x_0, si y sólo si g es la recta tangente a f en $(x_0, f(x_0))$.*

Teorema 46 *Dadas las funciones f y g, derivables en x_0 y que coinciden en x_0, $f(x_0) = g(x_0)$, entonces f y g tienen un contacto de primer orden en x_0 si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que*

$$|f(x) - g(x)| \leq \varepsilon |x - x_0| \quad \text{si } |x - x_0| < \delta.$$

Prueba: *Este es un teorema del tipo «si y sólo si», hay que probarlo en dos direcciones.*

Supongamos primero que f y g tienen en x_0 un contacto de 1^{er} orden, entonces: $f(x_0) = g(x_0)$ y $f'(x_0) = g'(x_0)$. Luego la función $f - g$ es derivable en x_0 y

$$(f-g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0) = 0.$$

De acuerdo a la definición de la derivada, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\left| \frac{f(x) - g(x) - f(x_0) + g(x_0)}{x - x_0} - (f-g)'(x_0) \right| < \varepsilon \text{ si } |x - x_0| < \delta.$$

Sustituyendo se obtiene:

$$\left| \frac{f(x) - g(x)}{x - x_0} \right| < \varepsilon \text{ si } |x - x_0| < \delta$$

y en consecuencia:

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon\,|(x - x_0)| \ \text{ si } |x - x_0| \leq \delta.$$

Probemos ahora el recíproco: supongamos que para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que: $|f(x) - g(x)| < \varepsilon\,|(x - x_0)|$ si $|x - x_0| \leq \delta$. Esto es equivalente a decir que $\left|\dfrac{f(x) - g(x)}{x - x_0}\right| < \varepsilon$, si $|x - x_0| < \delta$, pero esto equivale a decir que la derivada de $(f - g)$ es nula en x_0. Luego, $f'(x_0) = g'(x_0)$ y el contacto es de 1^{er} orden. □

El teorema anterior expresa numéricamente una manera de medir cuánto se aproximan f y g, si tienen en x_0 un contacto de 1^{er} orden. Dice que f y g se aproximan una a otra más rápido que lo que x se aproxima a x_0. Aplicando esta idea obtenemos el siguiente resultado.

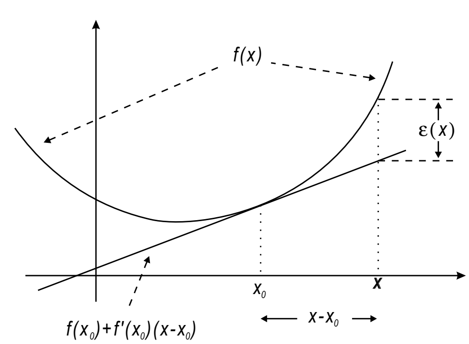
Corolario 47 *Dada una función derivable en x_0, de todas las rectas $y = y(x) = f(x_0) + m(x - x_0)$ que pasan por $(x_0, f(x_0))$, la que mejor se aproxima a la función f es la recta tangente.*

Prueba: *Como tener contacto de 1^{er} orden y ser la recta tangente es la misma cosa en este caso (Corolario 45 en la página 221), el teorema dice que si $|f(x) - y(x)| < \varepsilon\,|(x - x_0)|$ para cualquier $\varepsilon > 0$ en una vecindad correspondiente de x_0, entonces $y(x)$ es la recta tangente. Cualquier otra recta dará aproximaciones numéricas peores que esta.* □

Observación: Si denotamos por $\varepsilon(x) = f(x) - y(x)$ la función «error» entre $f(x)$ y $y(x) = f(x_0) + m(x - x_0)$, el corolario anterior expresa la condición siguiente que caracteriza la recta tangente (y la noción de contacto de 1^{er} orden)

$$\frac{\varepsilon(x)}{x - x_0} = \frac{f(x) - y(x)}{x - x_0} \to 0 \text{ cuando } x \to x_0. \tag{12.1}$$

Para enfatizar lo anterior, la figura 12.16 muestra gráficamente el concepto de aproximaci'on de 1^{er} orden entre la recta tangente a la función. Quedará por verse en lo que sigue la noción de mejor aproximación cuadrática, cúbica…



la mejor aproximación lineal, $\dfrac{|\varepsilon(x)|}{|x - x_0|} \to 0$ *para* $x \to x_0$

Figura 12.16

12.13 Contactos de segundo orden y contactos de orden superior

Definición: *Dos funciones $f(x)$ y $g(x)$, derivables en un intervalo I y que coinciden en un punto, $f(x_0) = g(x_0)$, tienen en x_0* **un contacto de** 2^{do} **orden** *si tienen derivadas segundas en x_0 y además:*

$$f'(x_0) = g'(x_0)$$

y

$$f''(x_0) = g''(x_0).$$

Definición: *Dadas las funciones $f(x)$ y $g(x)$, definidas y derivables n veces en un intervalo I, diremos que* **tienen un contacto de orden n en** *x_0, si coinciden en el punto x_0 y además sus derivadas de orden superior, para todo $k \leq n$, coinciden también:*

$$f^{(k)}(x_0) = g^{(k)}(x_0), \quad k = 1, 2, \ldots n.$$

Ahora es conveniente regresar otra vez a las gráficas de los polinomios $x, \ x^2, \ x^3, \ldots$ Observe que la función x^n tiene en 0 un contacto de orden $n-1$ con el eje x en $x = 0$, que es su tangente, pero no tiene contacto de orden n ya que su n-ésima derivada en 0 es $n! \neq 0$. Veamos una tabla de valores (tabla 12.2 en la página 224), como la que hicimos anteriormente (en pag. 224), para ver como estas funciones se acercan a cero.

La tabla anterior justifica el siguiente teorema, análogo al Teorema 46 en la página 221 en la p. 221, cuya demostración se verá más adelante.

Teorema 48 *Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones derivables n veces en un punto y que coinciden en ese punto. Las funciones tienen en x_0 un contacto de orden n si y sólo si, para cada número $\varepsilon > 0$ existe otro número $\delta > 0$, tal que:*

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon \, |x - x_0|^n \ \text{ si } \ |x - x_0| < \delta.$$

Observación: Igual que en el Teorema 46 en la página 221 , esto significa que si dos funciones tienen un contacto de orden n en un punto, ellas se aproximan cerca de ese punto más rápidamente que como se aproxima $|x - x_0|^n$ a 0. Tanto así que

$$\frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|^n} \to 0, \ \text{para } x \to x_0.$$

valor	$f(x) = x^2$	$g(x) = 0$	$h(x) = x$
$\pm\frac{1}{2}$	$0{,}25$	0	$\pm 0{,}5$
$\pm\frac{1}{4}$	$0{,}06$	0	$\pm 0{,}25$
$\pm\frac{1}{8}$	$0{,}02$	0	$\pm 0{,}13$
$\pm\frac{1}{16}$	$0{,}004$	0	$\pm 0{,}06$
$\pm\frac{1}{32}$	$0{,}0009$	0	$\pm 0{,}03$
$\pm\frac{1}{64}$	$0{,}0002$	0	$\pm 0{,}015$

Tabla 12.1 *Contacto de funciones en* 0

valor	x^2	x^3	x^4	x^5
$\pm\frac{1}{2}$	$0{,}25$	$\pm 0{,}125$	$0{,}0625$	$\pm 0{,}03125$
$\pm\frac{1}{4}$	$0{,}06$	$\pm 0{,}0156$	$0{,}0039$	$\pm 0{,}000976$
$\pm\frac{1}{8}$	$0{,}02$	$\pm 0{,}00195$	$0{,}000244$	$\pm 0{,}00003$
$\pm\frac{1}{16}$	$0{,}004$	$\pm 0{,}000244$	$0{,}000015$	$\pm 0{,}0000009$
$\pm\frac{1}{32}$	$0{,}0009$	$\pm 0{,}00003$	$0{,}000009$	$\pm 0{,}000000003$

Tabla 12.2 *Cercanía al cero de varios monomios*

Capítulo 13

Los teoremas básicos del cálculo diferencial

13.1 El Teorema de Fermat

El análisis elemental del comportamiento de las funciones con las herramientas del cálculo diferencial, reposa en los teoremas que explicaremos en este capítulo. Para la demostración de estos teoremas, necesitamos el resultado de Pierre de Fermat (Beaumont–de–Lomagne 1601, Castres 1665) que explicamos a continuación.

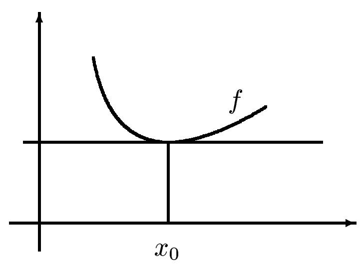


Figura 13.1 *Extremo local para una función derivable, mínimo*

En todo lo que sigue supondremos que $f(x)$ es una función definida en algún intervalo abierto I que contiene al punto x_0. Entonces,

Teorema 49 (Fermat) *Si $f(x)$ tiene en x_0 un extremo local (máximo o mínimo) y si es derivable en ese punto, entonces su derivada es nula en x_0:*

$$f'(x_0) = 0.$$

Prueba: *En efecto, el incremento $\Delta f = f(x) - f(x_0)$ tiene el mismo signo no importa de cual lado esté la x si x_0 es un extremo local para f (¡pruebe esto!). Mientras tanto, el incremento $\Delta x = x - x_0$ cambia su signo según que x esté de un lado u otro de x_0. Por esto, el cociente incremental $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ cambia su signo según que x se encuentre a la izquierda o a la derecha de x_0. Luego, como $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0)$ existe,*

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{\Delta f}{\Delta x} \text{ y } \lim_{x \to x_0^-} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

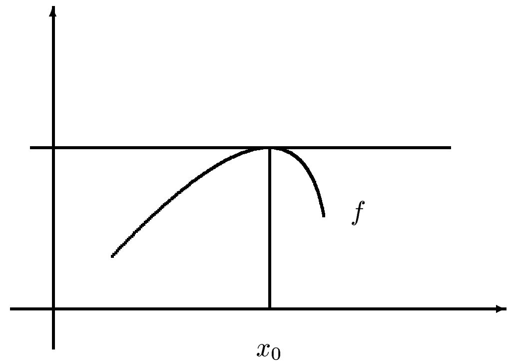


Figura 13.2 *Extremo local para una función derivable, máximo*

existen ambos y uno de ellos es ≥ 0 y el otro es ≤ 0. Como, sin embargo, deben coincidir, resulta que el valor común de ambos debe ser 0. Así $f'(x_0) = 0$, como queríamos probar. ☐

Definición: *Si $f(x)$ está definida en un intervalo abierto que contiene a x_0 y si $f'(x_0)$ existe y vale 0, diremos que x_0 es un* **punto crítico** *para f.*

En este lenguaje podemos decir que el Teorema de Fermat afirma que un extremo local para una función derivable es un punto crítico para la misma.

También, en las hipótesis anteriores, podemos reformular el Teorema de Fermat en lenguaje geométrico:

en un punto x_0 que es extremo local para una función derivable, la tangente a la gráfica debe ser horizontal como se ilustra en las figuras 13.2 y 13.1 en la página 225 .

naturalmente, la recíproca es falsa: el que x_0 sea crítico para f no garantiza que se trate de un extremo local (figura 13.3).

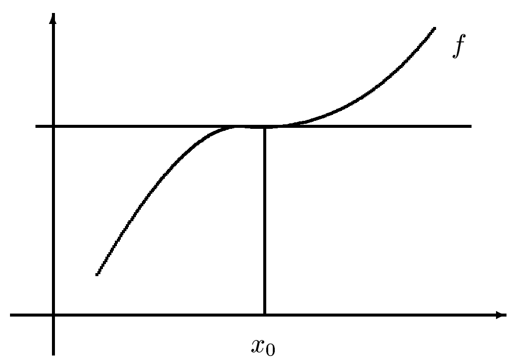


Figura 13.3 *x_0 es crítico para f, pero no se trata de un extremo local*

13.1.1 Ejercicios

Halle los puntos críticos de las siguientes funciones e intente decidir cuáles son extremos locales :

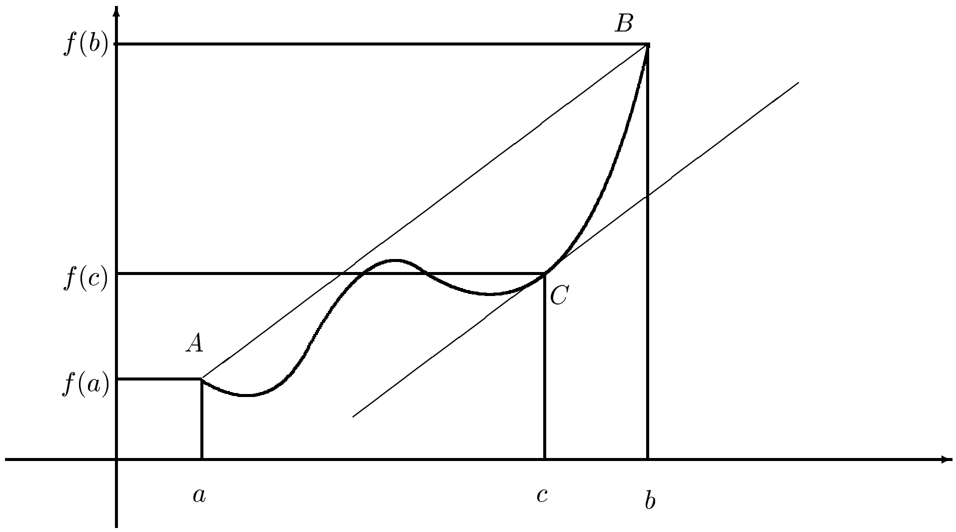


Figura 13.4 *Teorema de los incrementos finitos*

1. $f(x) = x^2 + 4x + 6$
2. $f(x) = 2 + x - x^2$
3. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$
4. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5$
5. $f(x) = \dfrac{(x-2)(8-x)}{x^2}$
6. $f(x) = \dfrac{16}{x(4-x^2)}$
7. $f(x) = (x-2)^3(x+1)^4$
8. $f(x) = x^2(x-5)^2$
9. $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+3}$
10. $f(x) = \dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$

13.2 El Teorema de los incrementos finitos (Lagrange)

El teorema que desarrollaremos en esta sección es sin duda una de las principales herramientas de todo el cálculo diferencial. Su contenido geométrico es casi evidente. Consideremos una función $f(x)$, derivable en algún intervalo I y consideremos puntos $a < b$ en I. Dibujemos la gráfica de f: se trata de una curva que une los puntos A y B del plano. Es natural llamar al segmento $\overline{AB}$ la *cuerda* de la gráfica entre $A(a, f(a))$ y $B(b, f(b))$ (figura 13.4).

En esta notación, el Teorema de Lagrange afirma que debe existir una abscisa c interior al segmento $[a, b]$ tal que en el punto C de coordenadas $(c, f(c))$ sobre la curva, la tangente es paralela a la cuerda.

Este hecho geométricamente *evidente* tiene la traducción analítica obvia siguiente:

en las condiciones anteriormente expuestas acerca de f, existe una abscisa c interior a $[a, b]$ tal que:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

(basta observar que $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ es la pendiente de la cuerda y que $f'(c)$ es la de la tangente a la curva en el punto C).

En cuanto al nombre de *Teorema de los incrementos finitos* que dio Lagrange a este resultado, podemos decir lo siguiente:

en el lenguaje del siglo XVIII, la derivada

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

se consideraba como el cociente de dos incrementos $\Delta f = f(x) - f(c)$ y $x - c$ *infinitesimales* (ya que cuando $x \to c$, $x - c$ y $f(x) - f(c)$ se hacen *infinitamente pequeños*); mientras tanto, la expresión

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

se consideraba como el cociente de dos incrementos *finitos*, ya que no son «infinitesimales», y así el Teorema de Lagrange dice que, en las condiciones indicadas acerca de f, el cociente de los incrementos finitos

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

es el valor de la derivada de f en algún punto c intermedio entre a y b.

Ahora pasamos al enunciado preciso y la prueba del teorema que nos ocupa.

Teorema 50 (De los incrementos finitos, Lagrange) *Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ de la que suponemos que es derivable en el intervalo abierto (a, b). Entonces, existe un punto $c \in (a, b)$ tal que:*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Prueba: *La demostración de este teorema reposa en un resultado previo que se llama el Teorema de Rolle y que no es sino un caso particular del Teorema de Lagrange. Enunciamos este resultado.*

Teorema 51 (Rolle) *Supongamos que además de las hipótesis del teorema de Lagrange, f cumple que $f(a) = f(b)$. Entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

Observemos que la conclusión del Teorema de Rolle es la misma *que la del Teorema de Lagrange para este caso particular, ya que en este caso*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

(Observe también que, geométricamente, el Teorema de Rolle afirma que si $f(a) = f(b)$, hay una tangente a la gráfica que es horizontal (figura 13.5 en la página 229).

Pospongamos por un momento la prueba del Teorema de Rolle y pasemos a la del Teorema de los incrementos finitos. Esta prueba consiste en reducir la situación general a la del caso particular mencionado. En efecto, sea $g(x)$ la función

$$g(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)\right].$$

Observe que $g(x)$ mide la longitud orientada del segmento entre la gráfica de $f(x)$ y la cuerda según indica la figura 13.5 en la página 229 . Notamos que $g(x)$ tiene la forma $g(x) = \alpha f(x) + \beta x + \gamma$ para ciertas constantes α, β, γ (¿cuáles?) y, por consiguiente, $g(x)$ es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Por otra parte, $g(a) = 0$ y $g(b) = 0$. Luego, según el Teorema de Rolle, existe $c \in (a, b)$ tal que $g'(c) = 0$. Pero,

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

en cualquier $x \in (a, b)$. Entonces,

$$g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

produce la igualdad de la tesis. Con esto queda probado el Teorema de Lagrange. □ Vamos ahora a probar el Teorema de Rolle.

Prueba: *(del Teorema de Rolle) La idea de la prueba es demostrar que hay un punto c,* en el interior de $[a, b]$, *es decir en (a, b), donde $f(x)$ alcanza su máximo valor o su mínimo valor. Si esto es*

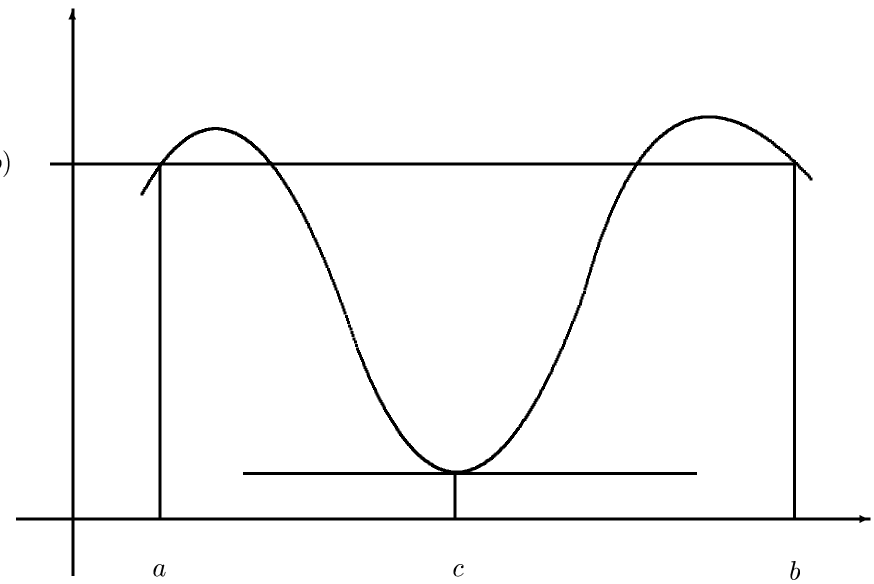
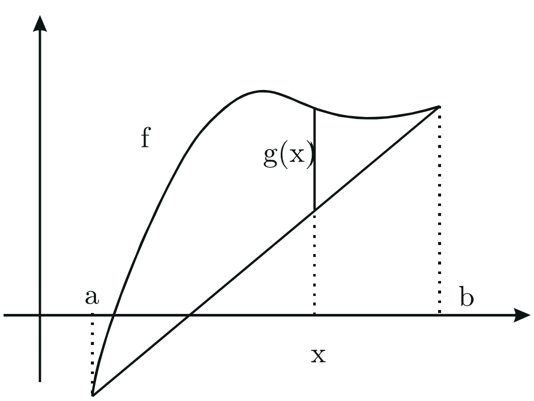


Figura 13.5 *Si $f(a) = f(b)$, hay una tangente horizontal*

así, ya que c es interior a $[a, b]$, este punto será un máximo o un mínimo local *para f y el Teorema de Fermat garantizará que $f'(c) = 0$, que es lo que buscamos. Sean m y M los valores mínimo y máximo, respectivamente, de $f(x)$ en $[a, b]$. Estos valores existen por el Teorema de Weierstrass (recordemos que $f(x)$* es continua *en el* intervalo cerrado *$[a, b]$). Sería aparentemente malo que m se alcanzara en un extremo de $[a, b]$ (si no, la prueba estaría completa). Si esto sucediere, buscaríamos un punto donde M se alcance. Si este punto fuese interior, la prueba estaría completa. Si, por el contrario, M se alcanzase también en un extremo de $[a, b]$, parecería que la prueba fracasa. Pero, por el contrario, si* ambos *m y M se alcanzan en los extremos, entonces $f(x)$ es ¡constante! porque $f(a) = f(b)$ (el mínimo valor de f coincide con su máximo valor) y claro que si $f(x)$ es constante, $f'(x) = 0$ en todo $x \in [a, b]$ y cualquier $c \in (a, b)$ sirve. Así que el Teorema de Rolle queda probado y con él el de Lagrange.* $\square$



significado geométrico de $g(x)$

Figura 13.6

13.3 Primeras consecuencias del Teorema de Lagrange

Como dijimos al comienzo del capítulo, el Teorema de Lagrange y otros que veremos más adelante, son las herramientas del cálculo diferencial para el análisis del comportamiento de las funciones.

Comencemos por el análisis de la monotonía de una función derivable en un intervalo (crecimiento y decrecimiento).

Teorema 52 *Supongamos que $f(x)$ es derivable en el intervalo (a,b) (con $a < b$) y que $f(x)$ es continua en $[a,b]$. Entonces*

1. *Si la derivada $f'(x)$ se anula en todo punto de (a,b), necesariamente $f(x)$ es constante en $[a,b]$.*
2. *Si la derivada $f'(x)$ es ≥ 0 en todo punto de (a,b), sigue que $f(x)$ es creciente en $[a,b]$ y si más aún $f'(x) > 0$ en (a,b) (estrictamente positiva), entonces $f(x)$ será* estrictamente creciente *en el intervalo $[a,b]$.*
3. *Si en la parte 2 cambiamos $\geq$ por $\leq$ y $>$ por $<$, entonces el enunciado sigue siendo cierto si se cambia adicionalmente creciente por decreciente.*

Es un ejercicio para el lector hacer los cambios indicados y escribir correctamente el enunciado completo de la parte 3 del teorema 52 .

Prueba:

1. *Para cada punto $x_0 > a$ de $[a,b]$, el Teorema de los incrementos finitos se puede aplicar a $f(x)$ en el intervalo $[a,x_0]$ (¿por qué?). En consecuencia, habrá un punto $c \in (a,x_0)$ tal que*
$$\frac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a} = f'(c).$$
Pero como $f'(c) = 0$, tenemos $f(x_0) = f(a)$ para cada $x_0 \in [a,b]$ y esto prueba 1.
2. *Consideremos dos valores $u < v$ de la x en $[a,b]$. El Teorema de Lagrange se puede aplicar a $f(x)$ en $[u,v]$ (¿por qué?) y entonces habrá un número $c \in (u,v)$ tal que*
$$\frac{f(v)-f(u)}{v-u} = f'(c)$$
o bien $f(v) - f(u) = (v-u)f'(c)$. Esto muestra que el incremento $f(v) - f(u)$ tiene el mismo signo que $f'(c)$. Si sabemos que $f'(c) \geq 0$, sigue que $f(v) \leq f(u)$. Si lo que sabemos es que $f'(c) > 0$, entonces necesariamente $f(u) < f(v)$ y esto es lo que había que probar.
3. *La prueba de 3 (como enunciado) es enteramente análoga a la de 2 y queda como un ejercicio (poco interesante) para el lector.*

$\square$

Observamos que, como consecuencia de 1 en el teorema anterior, quedan caracterizadas *todas* las funciones que tienen una derivada dada. Más precisamente, sea $g(x)$ una función definida en $[a,b]$ y llamemos una *primitiva* de $g(x)$ en $[a,b]$ a una función $f(x)$ que es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), con derivada $f'(x) = g(x)$ para todo $x \in (a,b)$. Entonces, según el teorema anterior, si $g(x)$ tiene alguna primitiva $f(x)$, necesariamente *toda otra primitiva* $h(x)$ tendrá la forma $h(x) = f(x) + c$ para $x \in [a,b]$ donde c es una constante. El lector debe verificar esto (sugerencia: observe que la diferencia $h(x) - f(x)$ tiene derivada nula en (a,b), siendo continua en $[a,b]$).

13.3.1 Ejercicios

Estudiar el crecimiento y decrecimiento de las funciones:

1. $f(x) = 1 - 4x - x^2$
2. $f(x) = (x-2)^3$
3. $f(x) = x^2(x-3)$
4. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 6x - 16}$
5. $f(x) = x^4 - 8x^2 + 1$
6. $f(x) = x^{\frac{4}{3}} + 4x^{\frac{1}{3}}$

7. $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$
8. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 7$
9. $f(x) = x^3 - x^2 - 40x + 8$
10. $f(x) = x^3 + \dfrac{3}{x}$

13.4 Fórmula de los incrementos finitos de Cauchy

Existe una generalización del Teorema de Lagrange debida a Cauchy que es de gran utilidad adicional en el estudio de las funciones. Su contenido es el siguiente.

Teorema 53 (Cauchy) *Sean $f(x)$ y $g(x)$ continuas en el intervalo cerrado $[a,b]$ y derivables en todo $x \in (a,b)$. Supongamos además que*

1- Las derivadas $f'(x)$ y $g'(x)$ no son simultáneamente nulas en ningún $x \in (a,b)$.

2- $g(a) \neq g(b)$.

Entonces existe un punto $c \in (a,b)$ tal que

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \tag{13.1}$$

donde se afirma además (implícitamente) que en ese c, $g'(c) \neq 0$.

Prueba: *Si $f(a) = f(b)$, el Teorema de Rolle muestra la existencia de $c \in (a,b)$ donde $f'(c) = 0$ (y entonces $g'(c) \neq 0$) y así en ese c, se verifica 13.1 . Supongamos entonces que $f(a) \neq f(b)$, entonces la función*

$$h(x) = f(x)(g(b)-g(a)) - g(x)(f(b)-f(a))$$

toma igual valor en a y en b (¡verifíquelo!) y, como tiene la forma $h(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$ para constantes α y β, es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Entonces verifica las hipótesis del Teorema de Rolle y, por consiguiente, existe $c \in (a,b)$ tal que $h'(c) = 0$, es decir,

$$f'(c)(g(b)-g(a)) - g'(c)(f(b)-f(a)) = 0. \tag{13.2}$$

Pero como estamos suponiendo que $f(b) - f(a) \neq 0$, no puede suceder que $g'(c)$ se anule pues esto obligaría a $f'(c)$ a anularse simultáneamente (no se olvide que suponemos que $g(a) \neq g(b)$) en contra de la hipótesis 1-. Luego, despejando en 13.2 ,

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

como queríamos. □

Comentarios: en las hipótesis del Teorema de Cauchy podríamos razonar así: En el intervalo $[a,b]$, *ambas funciones* f y g verifican el Teorema de Lagrange, lo que nos permite afirmar que

1. existe un punto $c \in (a,b)$ tal que
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c),$$
2. existe un punto $c' \in (a,b)$ tal que
$$\frac{g(b)-g(a)}{b-a} = g'(c'),$$

y como $g(a) \neq g(b)$ (en las hipótesis del Teorema de Cauchy), obtenemos dividiendo, la igualdad

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c')}.$$

Esta relación solamente difiere de la conclusión obtenida en el Teorema de Cauchy en el hecho que aquí los puntos c y c' en (a,b) serán en general diferentes, mientras que, en el teorema mencionado, se calculan las derivadas *en el mismo punto*. Está plenamente justificada entonces la pregunta siguiente: ¿Es realmente *mejor* el Teorema de Cauchy que la doble aplicación del Teorema de Lagrange? Afirmamos que en efecto es *mejor* y la aplicación que sigue en el apéndice de este capítulo (sección 13.8 en la página 243) pretende ser un argumento en este sentido.

Ejercicios

1. Ponga en evidencia que la ecuación $\operatorname{sen} x + \cos x + x^2 = 2$ tiene al menos una solución real.
2. Ponga en evidencia que la ecuación $8x^4 + 4x + 1 = 0$ tiene exactamente dos soluciones reales.
3. Un carro recorre una distancia de 100 km en exactamente dos horas. Después de haber iniciado su viaje el carro se para por 10 minutos, luego, avanzando otra vez, llega a su destino. Ponga en evidencia que en algún instante el carro tenía exactamente la velocidad instantanea de 50 km / hora.
4. Diga justificando, si la curva cuya ecuación es $y = 2\arctan x + \sqrt[3]{x^2+1}$ interseca al eje x e interseca al eje y.
5. Demuestre que si en cierto intervalo abierto (a,b) la función $f(x)$ es continua y derivable y si además $f'(x) = 0$ en todo $x \in (a,b)$ entonces $f(x)$ es constante en (a,b)
6. Sea A el conjunto dado por $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$ y la función f dada por $f(x) = \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x})$; observe que
$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-1/x^2}{1+(1/x)^2}$$
¿Que se puede deducir de esto? ¿Es cierto entonces que $f(x)$ debe ser constante?
7. Halle una condición sobre las constantes a y b para que la ecuación $x^3 + ax + b = 0$ tenga más de una solución
8. Ponga en evidencia que cualesquiera que sean a, b y c, la ecuación $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ siempre tiene al menos una solución real.
9. Halle todas las soluciones de la ecuación $x^3 + x + 1 = 0$

13.5 Verdadero valor de una expresión indeterminada y la regla de l'Hôpital

Sea $f(x)$ una función que se vuelve indeterminada para $x = x_0$. Más precisamente, suponemos que $f(x)$ está definida en un intervalo abierto I que tiene a x_0 como extremo izquierdo, o extremo derecho, o que x_0 está en I, pero $f(x_0)$ no está definido. Llamaremos el verdadero valor de $f(x)$ para $x = x_0$, al límite al cual tiende f cuando x tiende a x_0.

Así por ejemplo, el verdadero valor de $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ para $x = 0$ es 1 ($x \to 0$), pero el verdadero valor de $\dfrac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}$ para $x = 1$ es 0 a condición de que $x \to 1^-$ ya que la función no existe para $x > 1$.

Analizaremos algunas formas frecuentes en las que se presenta el problema del cálculo del verdadero valor de una función.

13.5.1 Forma $\dfrac{0}{0}$ y Regla de l'Hôpital

Esta forma se encuentra cuando los dos términos de una fracción $\dfrac{f(x)}{F(x)}$ son funciones continuas que se anulan simultáneamente para $x = x_0$. El verdadero valor se determina por aplicación de la llamada Regla de l'Hôpital (el marqués de l'Hôpital, que sólo enunció esta regla en su forma geométrica y en el caso más simple, la había tomado de Johann Bernoulli). Esta regla consiste en sustituir el cociente de las funciones, por el cociente de sus derivadas.

Teorema 54 *Si $f(x)$ y $F(x)$ (derivables) se anulan en $x = x_0$, el verdadero valor de $\dfrac{f(x)}{F(x)}$ en el punto x_0 será el límite del cociente $\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ para $x \to x_0$, suponiendo que este límite exista.*

En particular, si $\dfrac{f'(x_0)}{F'(x_0)}$ *es aún de la forma* $\dfrac{0}{0}$, el verdadero valor de $\dfrac{f(x)}{F(x)}$ será el mismo que el verdadero valor de $\dfrac{f''(x)}{F''(x)}$, suponiendo que este exista.

Nota bene: esta regla subsiste cuando se consideran solamente valores de x que son $> x_0$ o bien los que son $< x_0$ y los límites son entonces los límites laterales correspondientes.

En cuanto a la prueba de esta regla, basta observar que el Teorema de Cauchy permite escribir (ya que $f(x_0)$ y $F(x_0)$ son nulos)

$$\frac{f(x_0+h)}{F(x_0+h)} = \frac{f'(x)}{F'(x)}$$

para algún x entre x_0 y x_0+h y entonces si $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ existe y vale L, el número $\dfrac{f(x_0+h)}{F(x_0+h)}$ está tan cerca de L como se quiera cuando h es suficientemente pequeño, porque este número es $\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ para un x aún más próximo a x_0 que x_0+h. Dejamos como ejercicio para el lector poner en forma rigurosa el argumento que antes esbozamos en forma coloquial.

Agregamos que esta regla está sometida a las mismas condiciones que el Teorema de Cauchy sobre el que se apoya:

1. *Las derivadas deben existir en algún intervalo que contiene a x_0 (o que tiene a x_0 por extremo según el caso) aunque no se supone que existan en x_0.*
2. *Las funciones $f'(x)$ y $F'(x)$ no se anulan simultáneamente en el intervalo del que se habla en el apartado anterior.*

Esta regla tiene una aplicación interesante *de carácter teórico*. Supongamos que $f'(x)$ tenga límite para $x \to x_0$ y apliquemos la Regla de l'Hôpital a $f(x)$ y $F(x) = x$, en la forma:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Como estamos en las condiciones indicadas, sigue que el límite anterior coincide con

$$\lim_{x\to x_0} f'(x).$$

Explícitamente: si $f(x)$ es continua en x_0 y derivable en algún intervalo que contiene a x_0, salvo en x_0, entonces *si la derivada $f'(x)$ tiene límite cuando $x \to x_0$*, sigue que $f(x)$ es derivable en $x = x_0$ con derivada igual a $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$.

Caso cuando $x_0 = \pm\infty$

Si las condiciones anteriores subsisten para f y F cuando $|x|$ aumenta indefinidamente, la Regla de l'Hôpital sigue siendo aplicable al caso $x \to +\infty$ y también al caso $x \to -\infty$.

Así por ejemplo, tenemos para probarlo:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(\frac{1}{x})}{F(\frac{1}{x})} \text{ (¿por qué?)}$$

y nos vemos conducidos al caso $x_0 = 0$. Allí la regla se aplica y tenemos:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(\frac{1}{x})}{F(\frac{1}{x})} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{1}{x^2} f'(\frac{1}{x})}{-\frac{1}{x^2} F'(\frac{1}{x})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{F'(x)}.$$

13.5.2 Regla de l'Hôpital para el caso $\dfrac{\infty}{\infty}$

La Regla de l'Hôpital anteriormente enunciada se aplica también a la determinación del verdadero valor de fracciones cuyos dos términos crecen indefinidamente en valor absoluto cuando x tiende a un valor x_0.

Esta regla supone la existencia de las derivadas (salvo en el punto x_0), queda siempre sujeta a las mismas restricciones, a saber:

1. *Las derivadas de los dos términos de la fracción (que se suponen existentes) no toman simultáneamente el valor* 0*, en algún intervalo que tenga a* x_0 *por extremo o que contenga a* x_0 *en su interior.*
2. *El límite del cociente de las derivadas existe.*

Para demostrar esta regla consideramos la fracción $\dfrac{f(x)}{F(x)}$ y damos valores a y x suficientemente próximos a x_0 para que las derivadas $f'(x)$ y $F'(x)$ no se anulen simultáneamente (los valores de a y x están del mismo lado de x_0). Podemos entonces aplicar la Fórmula de Cauchy y sigue que hay un valor ξ entre a y x tal que

$$\frac{f(x)-f(a)}{F(x)-F(a)} = \frac{f(x)}{F(x)}\,\frac{1-\dfrac{f(a)}{f(x)}}{1-\dfrac{F(a)}{F(x)}} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$$

De aquí se deduce

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}\,\frac{1-\dfrac{F(a)}{F(x)}}{1-\dfrac{f(a)}{f(x)}} \tag{13.3}$$

Supongamos entonces que $\dfrac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$ tenga límite A para $x \to x_0$. Entonces el segundo miembro de la ecuación (13.3) se puede hacer tan próximo a A como se requiera con tal que x se tome suficientemente próximo a x_0. En efecto, esta expresión se compone del producto de dos fracciones, de las cuales la primera es tan próxima a A como se quiera, mientras que la segunda es tan próxima como se quiera a 1 y esto es lo que se quería. Veamos estas afirmaciones con algunos detalles.

Primero se puede conseguir ξ tan próximo a x_0 como se quiera a condición de tomar a y x suficientemente próximos a x_0. Entonces la primera fracción $\dfrac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$ es tan próxima como se quiera a su límite A. Se puede entonces hacer de manera que la diferencia sea $< \varepsilon$ bajo la condición que $|x-x_0|$ y $|x-a|$ sean $< \delta$. En seguida se puede, sin dejar de satisfacer esta condición, fijar a y hacer tender x hacia x_0. Entonces los dos términos de la segunda fracción tienden a 1 pues $f(a)$ y $F(a)$ están fijos mientras que $f(x)$ y $F(x)$ tienden a infinito. Así la segunda fracción está tan próxima a 1 como se quiera. Sigue que $\dfrac{f(x)}{F(x)}$ tiene como límite A cuando $x \to x_0$ y esto es lo que queríamos probar.

13.5.3 Algunas observaciones

1. El cociente de las funciones puede tener límite cuando $x \to x_0$ sin que lo tenga el cociente de las derivadas. Por ejemplo:

   $$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}}{\operatorname{sen} x} = 0\ ;\ \lim_{x\to\infty} \frac{x-\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

   Pero los cocientes de las derivadas no tienen límites.

2. **Otras formas de indeterminación del límite**.

   En general, podríamos tener para $x \to x_0$ *indeterminaciones* de las formas

   $$\infty - \infty\ ,\ 0\cdot\infty$$

La primera se presenta cuando los dos términos de la diferencia $f(x)-F(x)$ tienden a ∞ cuando $x \to x_0$; la segunda cuando uno de los factores de $f(x) \cdot F(x)$ tiende a 0 mientras que el otro tiende a ∞. Estas formas se llevan a la forma $\dfrac{0}{0}$ o $\dfrac{\infty}{\infty}$ por transformaciones algebraicas simples. Por ejemplo en el primer caso, podemos poner

$$f(x) - F(x) = \frac{\left(\dfrac{1}{F(x)} - \dfrac{1}{f(x)}\right)}{\dfrac{1}{F(x) \cdot f(x)}}.$$

13.6 Ejercicios

1. Sean f y g funciones derivables que satisfacen

$$fg' - gf' = 0.$$

   Pruebe que si a y b son ceros adyacentes de f y además $g(a)$ y $g(b)$ no son simultáneamente nulos, entonces $g(x) = 0$ para algún x entre a y b. Como esto vale también, cambiando f con g, sigue que los ceros de f y g se «separan» mutuamente (se intercalan). *Sugerencia*: suponga que $g(x) \neq 0$ en $[a, b]$ y saque una contradicción.

2. Pruebe que si

$$\frac{a_0}{1} + \frac{a_1}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n+1} = 0,$$

   entonces

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0$$

   para algún $x \in [0, 1]$.

3. Pruebe que la función

$$f_m(x) = x^3 - 3x + m$$

   nunca tiene dos ceros en $[0, 1]$ (no importa cuál m se elija). *Sugerencia*: use el Teorema de Rolle.

4. Suponga que f es derivable en $(0, 1)$ y continua en $[0, 1]$, que $f(x) \in [0, 1]$ para cada x y que $f'(x) \neq 1$ en cada $x \in [0, 1]$. Muestre que hay un x y sólo uno en $[0, 1]$, tal que $f(x) = x$. *Sugerencia*: muestre primero que hay al menos un tal x, considerando la función contínua $x - f(x)$. Luego vea que sólo puede haber uno.

5. Suponga que f es una función tal que $f'(x) = \frac{1}{x}$ para todo $x > 0$ y que $f(1) = 0$. Pruebe entonces que $f(xy) = f(x) + f(y)$ para todo $x, y > 0$. *Sugerencia*: fije y y considere $g(x) = f(xy)$. Calcule $g'(x)$.

6. Suponga que $f(x)$ es n veces derivable y que $f(x) = 0$ para $n + 1$ valores diferentes de x. Demuestre que entonces hay algún x donde $f^{(n)}(x) = 0$.

7. Pruebe que

$$\frac{1}{9} < \sqrt{66} - 8 < \frac{1}{8}$$

   (¡Sin calcular $\sqrt{66}$ con 2 decimales exactos!).

8. ¿Qué falla en la siguiente aplicación de la Regla de L'Hopital?

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \to 1} \frac{3x^2 + 1}{2x - 3} = \lim_{x \to 1} \frac{6x}{2} = 3$$

   (El límite es -4).

9. Encuentre los siguientes límites

   (a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x}{\tan x}$

(b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos^2(x) - 1}{x^2}$

(c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^3}$

10. Encuentre $f'(0)$ si $f(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ y si $g(0) = g'(0) = 0,\ g''(0) = 17$.

11. Calcular los siguientes límites:

(a) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 - 7x + 6}$

(b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^3}$

(c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan x - \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{sen} x}$

(d) $\lim_{x\to 0} (1 - \cos x)\cot x$

(e) $\lim_{x\to 3} \left(\dfrac{1}{x-3} - \dfrac{5}{x^2 - x - 6}\right)$

(f) $\lim_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{2(1-\sqrt{x})} - \dfrac{1}{3(1-\sqrt[3]{x})}\right)$

(g) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x - \arctan x}{x \operatorname{sen} x}$

(h) $\lim_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{x-1} - 2}{x^2 - 25}$

(i) $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}\right)$

(j) $\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^4 + 5x^2 + 3} - x^2)$

(k) $\lim_{x\to\infty} x \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

(l) $\lim_{x\to 0} x \sec^2 x$

(m) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\frac{1}{x^2} - 2\arctan\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$

(n) $\lim_{x\to \frac{1}{2}^+} (2x - 1)\tan(\pi x)$

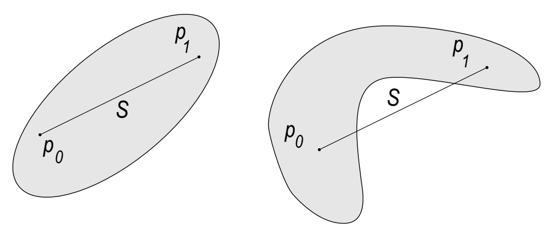
13.7 Convexidad

Hemos visto en los párrafos anteriores algunos usos de la derivada en el estudio del comportamiento de una función en un intervalo. Por ejemplo, el signo de la derivada se relaciona con el crecimiento o decrecimiento de la función.

En está sección describimos otro aspecto -quizá más geométrico- del comportamiento de una función en un intervalo.

El concepto básico aquí es el de *convexidad*. Un conjunto A de puntos del plano $\mathbb{R}^2$ se llama *convexo* si cada vez que contiene a dos puntos p_0 y p_1, también contiene a todos los puntos del segmento S que los une.

En la figura 13.7 se ilustra un conjunto convexo y otro que no lo es. ¿Cómo usamos las coordenadas



Un conjunto es convexo y el otro no

Figura 13.7

cartesianas para expresar la convexidad?

Para esto observe que si $p_0 = (x_0, y_0)$ y $p_1 = (x_1, y_1)$, entonces los puntos $p = (x, y)$ del segmento S que los une tienen la forma

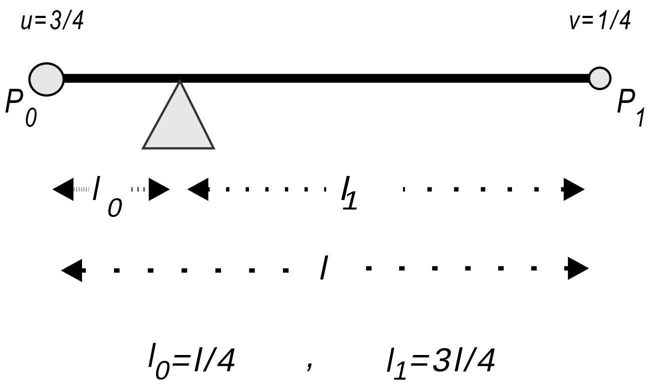
$$p : \begin{cases} x = u\,x_0 + v\,x_1 \\ \\ y = u\,y_0 + v\,y_1 \end{cases} \tag{13.4}$$

en donde podemos elegir los números $u \geq 0$, $v \geq 0$ (*pesos* o *masas*) arbitrariamente, con tal que $u+v = 1$. Nosotros pondremos, para obtener 13.4 , que p es el punto $p = up_0 + vp_1$.

La expresión

(13.5) $\quad p = up_0 + vp_1$

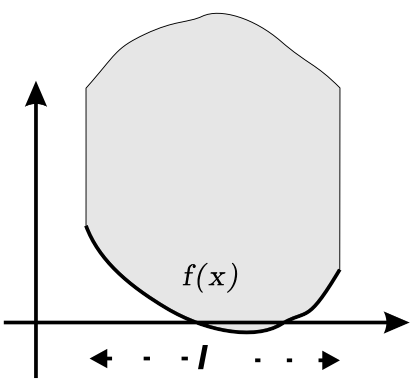
se llamará la *combinación convexa* de p_0 y p_1 con pesos u y v. Es bueno que el lector reflexione a cerca de la siguiente afirmación: *el punto p obtenido a partir de la expresión 13.5 ocupa la posición en el segmento S (que une p_0 con p_1) en la cual se puede apoyar el segmento S (sin peso) con pesos u en p_0 y v en p_1 de modo que el sistema así formado queda en equilibrio:* (La figura 13.8 ilustra la afirmación).



El sistema queda en equilibrio

Figura 13.8

Pero, ¿qué tienen que ver estas observaciones con el estudio de las funciones?



Una función convexa en I

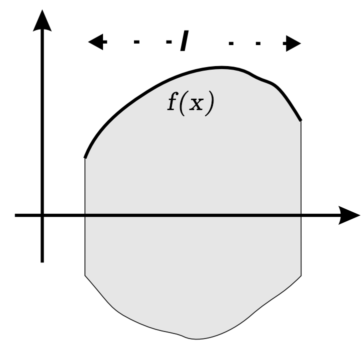
Figura 13.9

Comenzamos con la siguiente:

> **Definición:** *Si $f(x)$ es una función definida en el intervalo I, llamemos* **el conjunto superior asociado a** f *al conjunto de puntos del plano*
> $$\mathcal{S}(f) = \{(x,y)\ /\ x \in I,\ y \geq f(x)\}$$
> *Análogamente, el* **conjunto inferior asociado a** f **será**
> $$\mathcal{I}(f) = \{(x,y)\ /\ x \in I,\ y \leq f(x)\}.$$

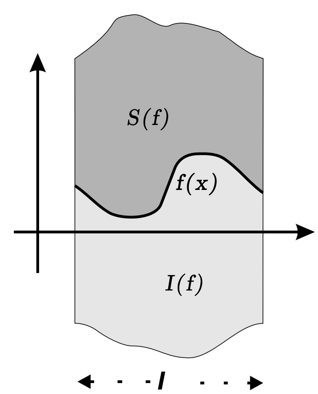
La figura 13.11 en la página 238 ilustra esta definición.

> **Definición:** *Diremos que la función $f(x)$ es* **convexa en el intervalo** I *si el conjunto $\mathcal{S}(f)$ es convexo. Diremos que $f(x)$ es* **cóncava en** I *si $\mathcal{I}(f)$ es convexo.*



Una función cóncava en I

Figura 13.10



$\mathcal{S}(f)$, *Conjunto Superior asociado a* f

Figura 13.11

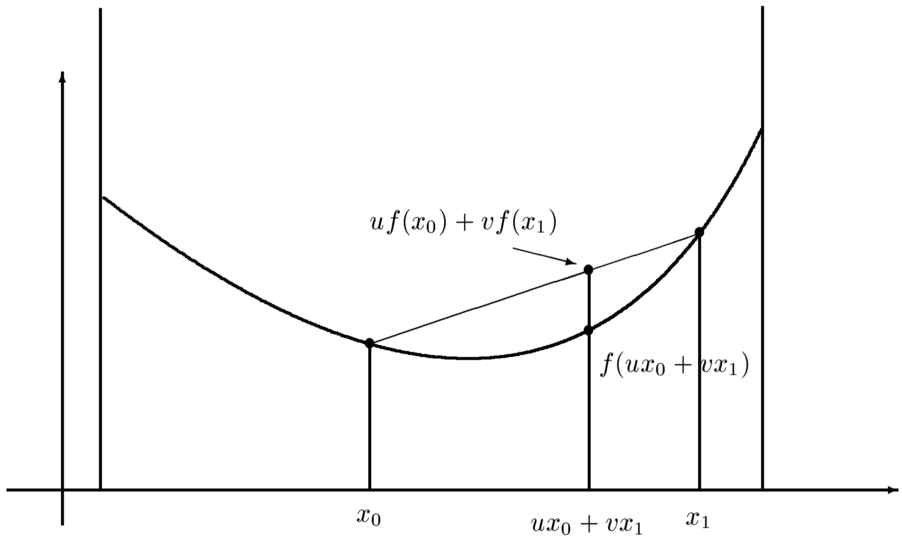


Figura 13.12 *Caracterización de convexidad*

La figura 13.9 y la figura 13.10 en la página 238 ilustran esta definición.

Ahora le proponemos al lector el siguiente ejercicio, que si bien es sencillo es sumamente instructivo.

> **Ejercicio:** Verifique que $f(x)$ es convexa en I, si y solamente si, el segmento que une dos puntos cualesquiera de la gráfica de f, está *por encima de dicha gráfica.* Es decir, si y sólo si, para cada $x_0 \in I,\ x_1 \in I$, se tiene
>
> $$f(ux_0 + vx_1) \leq uf(x_0) + vf(x_1)$$
>
> para todo $u,\ v$ tales que $u \geq 0,\ v \geq 0,\ u + v = 1$ (ver figura 13.12).

Queda como ejercicio para el lector plantear el problema (y resolverlo) correspondiente a las funciones cóncavas en I.

Si uno quisiera expresar en palabras el significado intuitivo de la convexidad, quizás la siguiente frase serviría: *que la función $f(x)$ sea convexa en I significa que en ese intervalo su gráfica se curva hacia arriba.* Una frase análoga (a cargo del lector) expresaría la concavidad.

El siguiente teorema asegura que, en algún sentido, la frase anterior expresa la verdad acerca de la convexidad.

Teorema 55 *Sea $f(x)$ una función derivable en el intervalo I. Entonces:*

(a) $f(x)$ es convexa en I, si y sólo si $f'(x)$ es creciente en I.

(b) $f(x)$ es cóncava en I, si y sólo si $f'(x)$ es decreciente en I.

Prueba: *Sólo probaremos (a), pues (b) se prueba análogamente. En (a) hay dos casos que probar. Supondremos que $f'(x)$ es creciente. Para probar que $f(x)$ es convexa en I, hay que ver, como observamos antes, que el segmento S que une dos puntos cualesquiera de la gráfica de $f(x)$ está por encima de la gráfica. Así que sean $p_0 = (x_0, f(x_0))$ y $p_1 = (x_1, f(x_1))$ puntos en la gráfica de f con $x_0 < x_1$. Mostremos primero que el segmento S está por encima de la gráfica en el caso particular en que p_0 y p_1 estén a la misma altura, es decir $h = f(x_0) = f(x_1)$ y después tratemos el caso general. Si en algún x entre x_0 y x_1, se tuviera $f(x) > h$, entonces el máximo de $f(x)$ en $[x_0, x_1]$ se alcanzaría (ya que $f(x)$ es continua) en un punto $x_2 \in (x_0, x_1)$ (¿por qué?). Pero entonces en él $f'(x_2) = 0$. Pero como $f'(x)$ es creciente en I, tendríamos que $f'(x) \geq 0$ para todo x entre x_2 y x_1, y así $f(x)$ sería creciente en el*

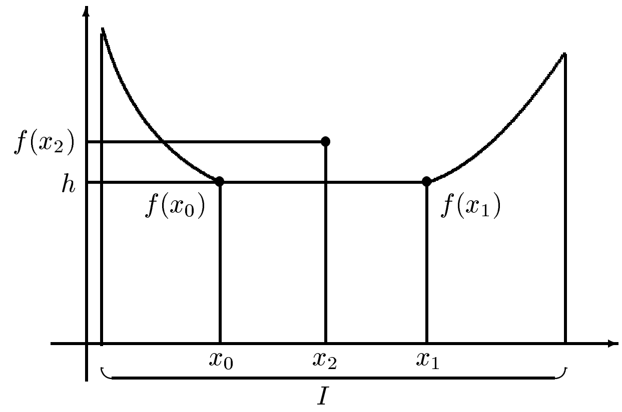


Figura 13.13 *Los puntos p_0 y p_1 están a la misma altura*

intervalo $[x_2, x_1]$. Como $f(x_2) > h$, seguiría que $f(x_1)$ sería mayor que h, lo cual es una contradicción que prueba lo que queríamos. La figura 13.13 en la página 240 ilustra el razonamiento.

Ahora, pasemos al caso general en que no suponemos que los puntos p_0 y p_1 están a la misma altura. Entonces, sea

$$L(x) = mx + b$$

la función cuya gráfica es la recta que pasa por p_0 y p_1 (ver figura 13.14).

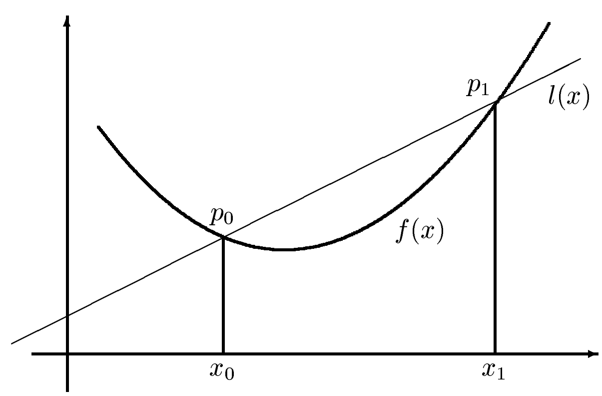


Figura 13.14 *Los puntos p_0 y p_1 no están a la misma altura*

Entonces consideremos la función

$$g(x) = f(x) - L(x).$$

Esta función es derivable y su derivada $g'(x) = f'(x) - m$, que es tan creciente como lo era $f'(x)$ (es la resta de $f'(x)$ menos una constante). Pero $g(x_0) = g(x_1) = 0$. Entonces, por lo visto recién $g(x) \leq 0$ para todo $x \in [x_0, x_1]$. (La gráfica de g entre x_0 y x_1 está por debajo del segmento, como se muestra en la figura 13.15 en la página 241).

Pero esto significa que para x entre x_0 y x_1, $f(x) \leq L(x)$, así que la gráfica de f está por debajo del segmento que une a p_0 y p_1, y esto completa la prueba general de la primera parte de este bello teorema.

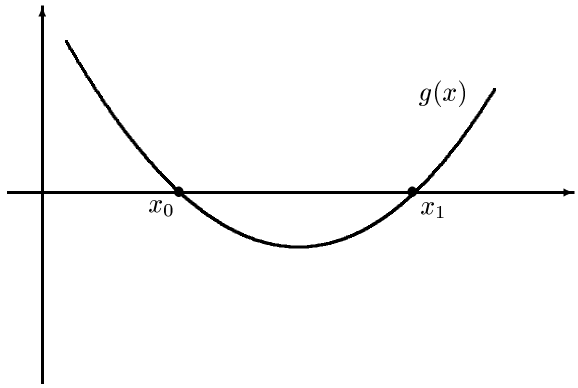


Figura 13.15 $g(x) \leq 0$ *para todo* $x \in [x_0, x_1]$

Para la siguiente parte, debemos suponer que $f(x)$ es convexa en I y mostrar que su derivada debe ser creciente. Sean $x_0,\ x_1$ puntos en I con $x_0 < x_1$. Sea nuevamente $L(x) = mx+k$ la función lineal que une los puntos $p_0 = (x_0, f(x_0))$ y $p_1 = (x_1, f(x_1))$. Entonces, como para x entre x_0 y x_1, $f(x) \leq L(x)$, tenemos para un tal x que:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq m\ , \quad \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \geq m.$$

(¿Por qué?). Entonces,

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \leq m$$

$$\lim_{x\to x_1^-} \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} = f'(x_1) \geq m,$$

así que $f'(x_0) \leq f'(x_1)$ como queríamos (observemos que como $f(x)$ es derivable en x_0 y x_1, estas derivadas laterales son realmente las derivadas de f). ☐

13.7.1 Algunas observaciones

1. La definición que hemos dado de convexidad (y de concavidad) no presupone que la función $f(x)$ sea derivable y funciones como $f(x) = |x|$ son convexas (¡pruébelo!) aunque carecen de derivadas en algunos puntos.
2. Hay quienes definen la convexidad solamente para funciones derivables, como sigue: $f(x)$ *es convexa en I cuando para cada $x_0 \in I$, la gráfica de $f(x)$ está por encima de la recta tangente a dicha gráfica en x_0*. Estos autores definen la concavidad, de manera análoga, cambiando en la frase anterior *encima* por *debajo* (figuras 13.16 en la página 242 y 13.17 en la página 242).

   El lector atento podrá mostrar sin dificultad que esta definición de convexidad (y de concavidad) es equivalente a la que aquí hemos propuesto.
3. Si $f(x)$ tiene en el intervalo I, dos derivadas, es decir, si $f''(x)$ existe para todo x de I, entonces si sabemos que $f''(x) \geq 0$ para $x \in I$, sigue que $f'(x)$ es creciente en I y esto implica que $f(x)$ es convexa en I.

   Análogamente, si $f''(x) \leq 0$ en I, seguirá que $f'(x)$ es decreciente en I y se podrá concluir que $f(x)$ es cóncava en I. Hay quien llama a esta observación *el criterio de la derivada segunda para convexidad.*

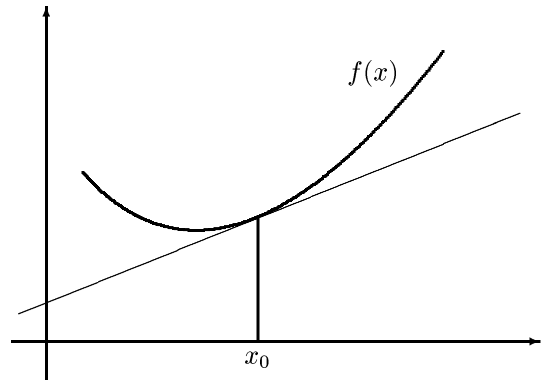


Figura 13.16 *Convexidad mediante el uso de la tangente*

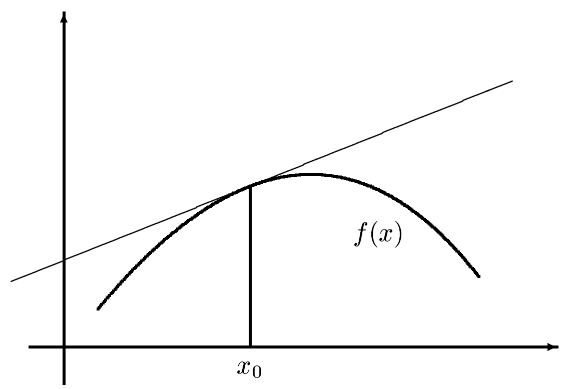


Figura 13.17 *Concavidad mediante el uso de la tangente*

13.7.2 Ejercicios

Estudiar la convexidad de las funciones:

1. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + 4$
2. $f(x) = 2x^6 - 6x^4$
3. $f(x) = (x+1)^4$
4. $f(x) = x - \dfrac{16}{x}$
5. $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$
6. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$
7. $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+12}$
8. $f(x) = \dfrac{x+4}{\sqrt{x}}$.

Apéndice: Aplicaciones

El resto del material de este capítulo será de estudio (opcional) para el estudiante.

13.8 Una aplicación interesante del Teorema de Cauchy

Supongamos que $f(x)$ está definida en algún intervalo abierto I que contiene a x_0 y que tiene en ese intervalo sus tres primeras derivadas $f'(x), f''(x), f'''(x)$. Definimos el polinomio $p(x)$ por la fórmula

$$p(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2.$$

Observamos que x_0 está fijo y que, después de hacer los cálculos indicados, $p(x)$ tiene la forma:

$$p(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

para ciertos números α, β, γ que se pueden calcular en términos de x_0, $f(x_0)$, $f'(x_0)$ y $f''(x_0)$ (¡hágalo!). Así entonces $p(x)$ es un polinomio cuyo grado es, a lo sumo, 2. Observemos también que $p(x)$ es una modificación de la *mejor aproximación lineal* $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ de $f(x)$ en $x = x_0$. Hemos agregado a esta *aproximación lineal* el término cuadrático $\dfrac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$.

Pretendemos mostrar en este párrafo que $p(x)$ es *la mejor aproximación cuadrática* a la función $f(x)$ cerca de $x = x_0$, en un sentido que será claro más adelante, en 13.9 en la página 244 . Y para mostrar esto, será esencial la Fórmula de los incrementos finitos de Cauchy. Consideremos las funciones

$$g(x) = f(x) - p(x), \text{ y } (\Delta x)^3 = (x - x_0)^3.$$

Queremos *comparar* $g(x)$ con $(\Delta x)^3$, cerca de $x = x_0$. Para esto fijamos $x \neq x_0$ en I y observamos que las hipótesis del Teorema de Cauchy se verifican en el intervalo entre x_0 y x para el par de funciones $g(x)$ y $(\Delta x)^3$ (¿por qué?). Entonces, existe un número ξ *entre* x_0 *y* x tal que

$$\frac{g(x) - g(x_0)}{(\Delta x)^3 - (\Delta(x_0))^3} = \frac{g(x)}{(\Delta x)^3} = \frac{f(x) - p(x)}{(x - x_0)^3} = \frac{f'(\xi) - f'(x_0) - f''(x_0)(\xi - x_0)}{3(\xi - x_0)^2}.$$

En las igualdades anteriores, se usó que tanto $g(x_0)$ como $\Delta(x_0)$ son nulos. Ahora y gracias a que en la última fracción sólo aparece *un* ξ (por la aplicación del Teorema de Cauchy), podemos considerar el siguiente par de funciones de ξ

$$f'(\xi) - f'(x_0) - f''(x_0)(\xi - x_0) \text{ y } 3(\xi - x_0)^2.$$

Observamos nuevamente que se les puede aplicar el Teorema de Cauchy en el intervalo que va entre x_0 y ξ (¿por qué?). Observamos de paso que este intervalo está contenido en el que va entre x_0 y x. La aplicación del teorema da que existe un número ξ' entre x_0 y ξ (y a fortiori entre x_0 y x) tal que

$$\frac{f'(\xi) - f'(x_0) - f''(x_0)(\xi - x_0)}{3(\xi - x_0)^2} = \frac{f''(\xi') - f''(x_0)}{6(\xi' - x_0)}$$

Ahora, finalmente observamos que tenemos el par de funciones $f''(\xi') - f''(x_0)$ y $6(\xi' - x_0)$ al que podemos aplicar nuevamente el Teorema de Cauchy (¿por qué?) y deducir que habrá un número a entre x_0 y ξ' y a fortiori entre x_0 y x, tal que

$$\frac{f''(\xi') - f''(x_0)}{6(\xi' - x_0)} = \frac{f'''(a)}{6}$$

Podemos entonces afirmar que:
si $f(x)$ tiene tres derivadas en I, dado $x \in I$ existe un punto a entre x_0 y x tal que

$$\frac{f(x) - p(x)}{(x - x_0)^3} = \frac{f'''(a)}{6}.$$

Habitualmente esta fórmula se escribe de la siguiente manera:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(a)}{6}(x - x_0)^3 \tag{13.6}$$

El polinomio $p(x)$ se conoce como el *polinomio de Taylor de orden 2 de la función $f(x)$, en el punto x_0*. La expresión $R(x) = f(x) - p(x)$ de orden 2 se conoce como el *resto de la Fórmula de Taylor de $f(x)$ en $x = x_0$*. Finalmente, la expresión

$$R(x) = \frac{f'''(a)}{6}(x - x_0)^3$$

toma el nombre de la *expresión de Lagrange del resto de orden 2 de la fórmula de Taylor de f en $x = x_0$*. El lector verá más adelante que estas consideraciones son casos particulares de una fórmula general que se conoce con el nombre de la Fórmula de Taylor.

Veamos una aplicación concreta de lo dicho.

Sea $f(x) = \cos x$, $x_0 = 0$. Entonces $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = -1$, $f'''(a) = \operatorname{sen} a$. Así, según la identidad 13.6 , podemos afirmar para cualquier $x \in \mathbb{R}$, que hay un número a entre 0 y x tal que

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\operatorname{sen} a$$

Esto nos muestra, ya que $|\operatorname{sen} a| \leq 1$, que si $|x| < \frac{1}{100}$ el error que cometemos al tomar $1 - \frac{x^2}{2}$ como valor del coseno de x (la diferencia $\cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)$) no supera en valor absoluto a

$$\frac{1}{(100)^3}\frac{1}{6} = \frac{1}{6.000.000}.$$

Cabe agregar que como $\operatorname{sen} a$ es para $|a| < \frac{1}{100}$ también pequeño, el error estimado antes es todavía mucho menor.

Terminamos esta sección indicando que el método esbozado aquí para aproximar una función con un polinomio es un poderoso instrumento de cálculo, tanto teórico, como práctico: La Fórmula de Taylor; que como dijimos, el lector estudiará más adelante.

13.9 La mejor aproximación cuadrática

Veamos ahora la justificación de la afirmación en la sección anterior acerca de que $p(x)$ *es la mejor aproximación cuadrática a la función $f(x)$ cerca de $x = x_0$* .

Recordemos que cuando $f(x)$ es derivable en x_0, la expresión

$$q(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

es *la mejor aproximación lineal a* $f(x)$ *cerca de* $x = x_0$ en el sentido que la diferencia $f(x) - q(x)$ tiende a 0 cuando $x \to x_0$, más rápidamente que la diferencia $x - x_0$, es decir que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - q(x)}{x - x_0} = 0.$$

Gráficamente esto significa que cuando la expresión lineal $q(x)$ tiene por gráfica a la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $(x_0, f(x_0))$, el *error* $f(x) - q(x)$ es *insignificante* comparado con el incremento

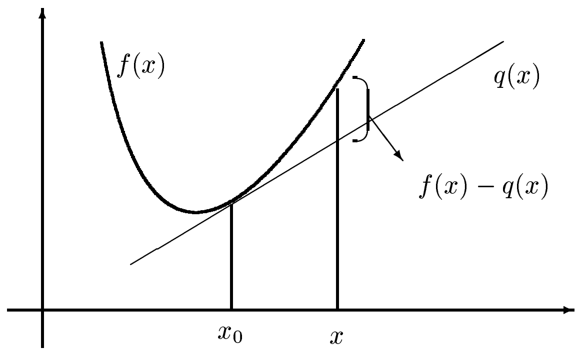


Figura 13.18 *La recta tangente es la mejor aproximación lineal a gráfica de* $f(x)$

$\Delta x = x - x_0$, para x próximo a x_0.

Si suponemos que $f(x)$ tiene 2 derivadas en x_0, entonces podemos construir nuestro polinomio

$$p(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)(x - x_0)^2$$

que es cuadrático. Queremos entonces considerar la diferencia análoga a la anterior $f(x) - q(x)$ y estimar su pequeñez, comparando el tamaño de este *error* con la cantidad $(\Delta x)^2 = (x - x_0)^2$. Conviene

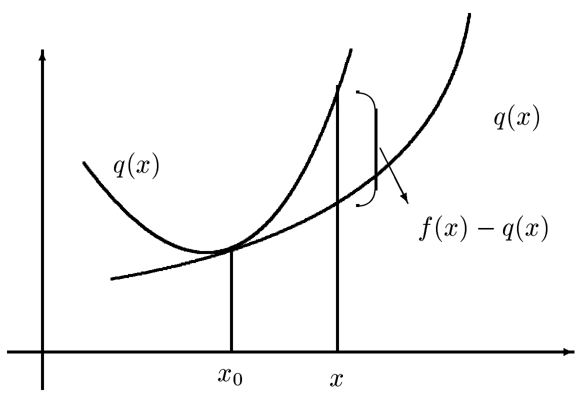


Figura 13.19 *Aproximación cuadrática de* $f(x)$ *cerca de* x_0

observar que $(\Delta x)^2$ es *insignificante* comparado con $x - x_0$ cuando x está próximo a x_0.

El propósito aquí es mostrar que si $f(x)$ tiene en x_0 tres derivadas, el límite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - p(x)}{(x - x_0)^2} = 0$$

En palabras esto se diría así: El polinomio cuadrático $p(x)$ aproxima a $f(x)$ cerca de $x = x_0$ tan bien que el error $f(x) - p(x)$ es insignificante comparado con $(\Delta x)^2$ y no solamente comparado con Δx.

Pasemos a ver por qué

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-p(x)}{(x-x_0)^2} = 0$$

si $f(x)$ tiene en x_0 tres derivadas.

Podemos, usando el Teorema de Cauchy, poner

$$\frac{f(x)-p(x)}{(x-x_0)^2} = \frac{f'(\xi)-f'(x_0)-f''(x_0)(\xi-x_0)}{2(\xi-x_0)}$$

para algún ξ entre x y x_0, ya que $f(x)$ es derivable en algún intervalo abierto que contiene a x_0. Usando nuevamente el Teorema de Cauchy como antes, podemos poner

$$\frac{f'(\xi)-f'(x_0)-f''(x_0)(\xi-x_0)}{2(\xi-x_0)} = \frac{f''(\xi')-f''(x_0)}{2}$$

para algún ξ' entre ξ y x_0 y entonces entre x y x_0. Ahora, tomando límites:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-p(x)}{(x-x_0)^2} = \lim_{\xi'\to x_0} \frac{f''(\xi')-f''(x_0)}{2}.$$

Pero si, como suponemos, $f''(x)$ es derivable (f tiene tres derivadas) en x_0, es entonces continua en x_0 y el límite último es 0, como queríamos probar.

Conviene observar que este particular polinomio $p(x)$ tiene la propiedad que acabamos de probar. Pero sucede que no hay ningún otro polinomio $r(x)$ de la forma

$$r(x) = ux^2 + vx + w$$

que tenga la propiedad de aproximación

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-r(x)}{(x-x_0)^2} = 0$$

que tiene $p(x)$. El lector atento podrá quizá demostrar esto.

Por esta razón llamamos a $p(x)$ la *mejor* aproximación cuadrática a $f(x)$ en $x = x_0$.

13.10 Método de Newton-Raphson, para ecuaciones trascendentales

13.10.1 Introducción

Para resolver sistemas de ecuaciones lineales se estudiarán más adelante los métodos del álgebra lineal.

El método de Newton-Raphson se presenta como uno de los algoritmos más útiles para hallar aproximaciones numéricas de raíces de ecuaciones **no-lineales** (y se extiende a sistemas de ecuaciones no-lineales). Este método asume, entre otras cosas, que las ecuaciones envuelven sólo funciones derivables (diferenciables en el caso de varias variables reales).

13.10.2 Una ecuación y una incógnita.

Para $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivable en (a,b), deseamos encontrar una solución de la ecuación $f(x) = 0$. Si x_n es una aproximación a una raiz α, podemos mejorar la aproximación a x_{n+1} como sigue: se aproxima el gráfico de f por la recta tangente por el punto $(x_n, f(x_n))$. La ecuación no-lineal se reemplaza por una ecuación **lineal**

$f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) = 0$ como en la figura 13.20 en la página 247. La solución de la última ecuación es

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

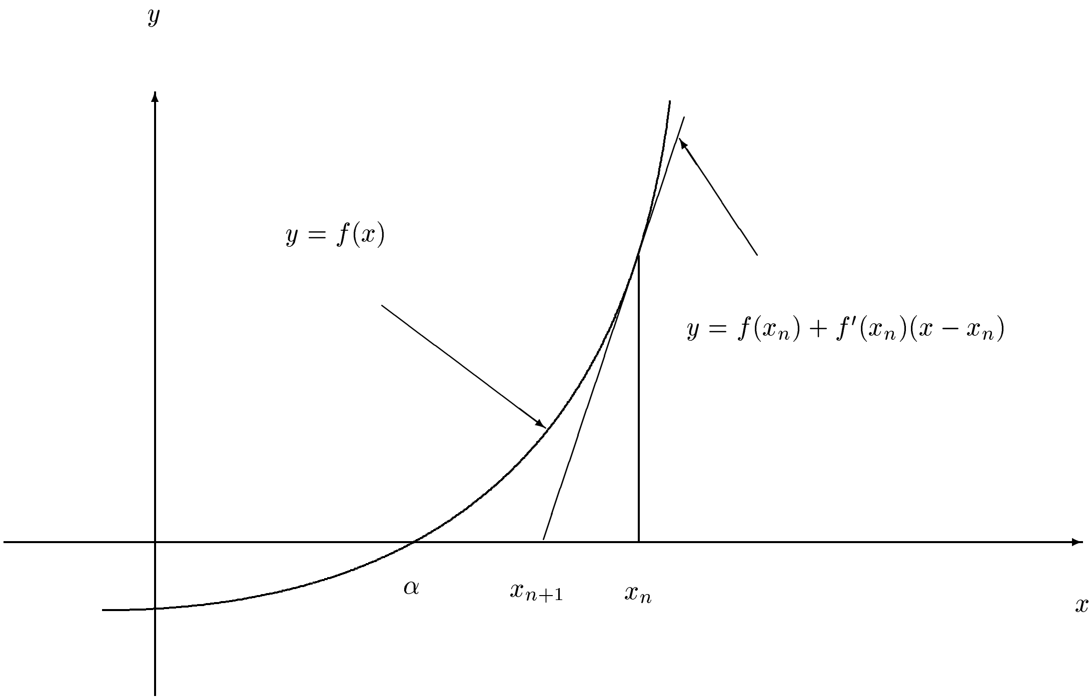


Figura 13.20 *La siguiente aproximación x_{n+1} será $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$*

Se parte con una aproximación inicial x_0, e iterando el proceso, se obtienen nuevas aproximaciones $x_1,\ x_2,\ x_3, \cdots$ Si las condiciones son favorables, $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$ (ver figura 13.21 en la página 248).

De acuerdo a la **Fórmula de Taylor**, el error cometido al aproximar el gráfico por la recta tangente se obtiene de

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + f''(\xi)\frac{(x - x_n)^2}{2}$$

donde ξ está entre x y x_n. Estas consideraciones llevan al resultado siguiente.

Teorema 56 *Si $f : [a,b] \to R$ tiene dos derivadas en (a,b), $f(\alpha) = 0$, $f'(\alpha) \neq 0$, $\alpha \in [a,b]$, entonces:*

1. *Para x_0 suficientemente cerca de α, $x_n \to \alpha$ cuando $n \to \infty$.*
2. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha - x_{n+1}}{(\alpha - x_n)^2} = -\frac{f'(\alpha)}{2f''(\alpha)}$.

Notas:

1. Observar que entonces $\alpha - x_{n+1} \approx \text{cte.}(\alpha - x_n)^2$; se dice entonces que la aproximación es «cuadrática». La convergencia es basante rápida si x_0 está «suficientemente» cerca de α.
2. Una prueba del teorema arriba puede encontrarse en textos de Cálculo (Análisis) Numérico como por ejemplo: Atkinson, *An Introduction to Numerical Analysis*, Wiley, NY. Sec. Ed. 1989 (pp.60- 61).
3. Otro buen libro: *Numerical Recipes* de Preiss et al. Cambridge University Press.

13.10.3 Ejemplos de aplicación

Ejemplo: Sea $f(x) \equiv \cos(x) - x$ en $[0, \pi/2]$. Un dibujo muestra que hay una raiz $\alpha \in [0, \pi/2]$.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\cos(x_n) - x_n}{-\operatorname{sen}(x_n) - 1}\ ,\ x_0 = 0.5$$

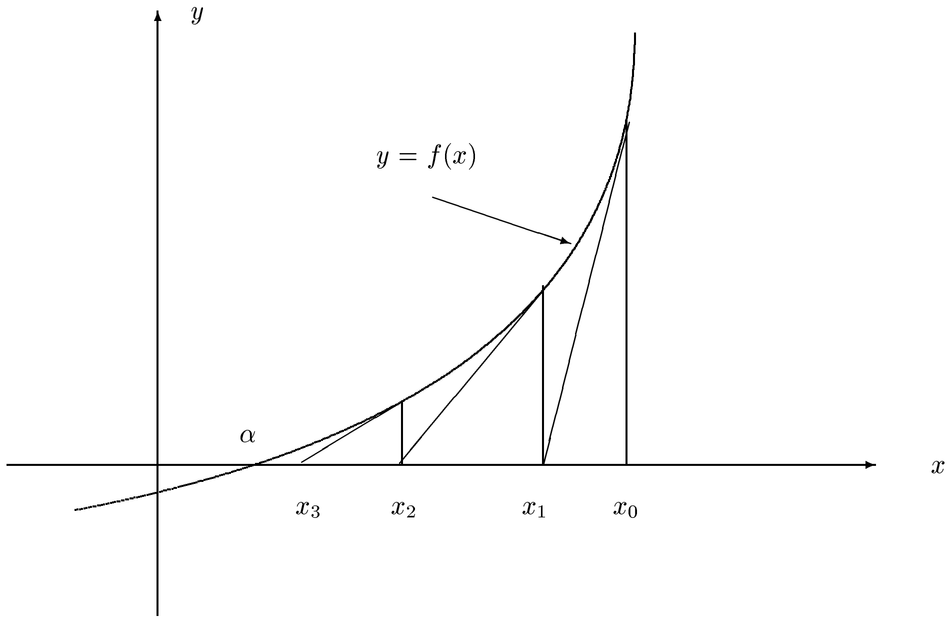


Figura 13.21 $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$

n	x_n
0	0.5000000000000000000
1	0.7552224171056364216
2	0.7391416661498792449
3	0.7390851339208068033
4	0.7390851332151606418
5	0.7390851332151606417 $\approx \alpha$
6	0.7390851332151606417 $\approx \alpha$

Nota:

- Un criterio razonable para detenerse es que $|x_{n+1} - x_n|$ sea menor que una *tolerancia* deseada. Mejor aún sería una cota para el error.

Ejemplo: A manera de ejercicio, resolver la ecuación $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ en el intervalo $[1, 2]$, partiendo con $x_0 = 15/10$. Solución: $x_3 = 1.36523001$ con todos los dígitos correctos.

13.10.4 Raices cuadradas

La ecuación $x^2 - b = 0$, $(b > 0)$ produce una ley de formación dada por

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{b}{x_n}\right)$$

(verificar)

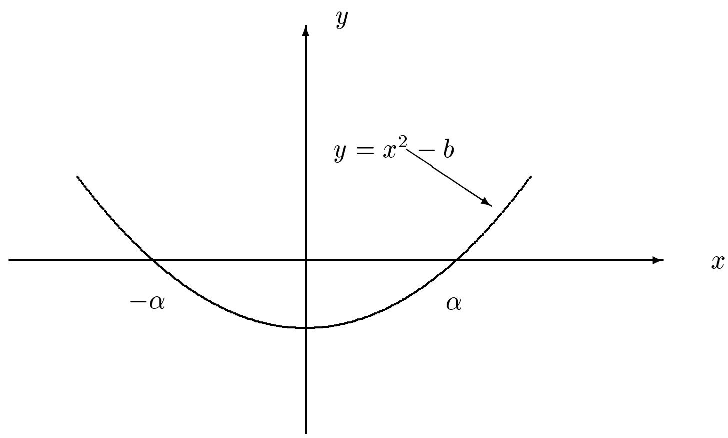


Figura 13.22 $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{b}{x_n}\right)$

Ejemplo: Con $b = 2$ y $x_0 = 1$:

n	x_n
0	1.0000000000000000000
1	1.5000000000000000000
2	1.4166666666666666666
3	1.4142156862745098039
4	1.4142135623746899106
5	1.4142135623730950488 $\approx \alpha$
6	1.4142135623730950488 $\approx \alpha$

13.10.5 Raices k-ésimas

Similarmente para raices k-ésimas: $x^k - b = 0$.

$$x_{n+1} = x_n\left(1 - \frac{1}{k}\right) + \frac{b}{k\,(x_n)^{k-1}}.$$

Por ejemplo aproxime $\sqrt[3]{2}$ por este procedimiento ($k = 3$).

Notas:

1. Este procedimiento se puede convertir en un algoritmo para calcular (aproximadamente) las raices de un polinomio, reales o complejas. Un programa en Pascal se puede encontrar en: Flanders, *Scientific Pascal*, 2nd edition, Birkhäuser, boston, 1995.
2. Programas de este tipo están también implementados en paquetes como MATLAB, MATHEMATICA y MAPLE.

Ejercicios

1. $x^3 - 2x^2 - 5 = 0$ en $[1, 4]$.
2. $x^3 + 3x^2 - 1 = 0$ en $[-4, 1]$.
3. $x - 0.8 - 0.2\,\mathrm{sen}(x) = 0$ en $[0, \pi/2]$.
4. $x^2 - 10\cos(x) = 0$.
5. $3x^2 - e^x = 0$.

13.11 El Teorema de Darboux de la propiedad del valor intermedio de la derivada

Como el lector sabe las funciones continuas tienen, según el teorema 23 en la página 176 (de Bolzano) la propiedad del valor intermedio que afirma que en un intervalo una función continua no puede pasar de un valor a otro, sin pasar en ese intervalo por todos los valores intermedios. Esta propiedad no es característica de las funciones continuas. En efecto, hay funciones que poseen esta propiedad sin ser continuas. Por ejemplo, la función $f(x)$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

toma, *en todo el intervalo*, todos los valores entre -1 y 1 (¡pruébelo!) así claramente tiene la propiedad del valor intermedio, pero no es continua en $x = 0$.

Sin embargo, Darboux probó que si una función es derivable en un intervalo, entonces su derivada (que puede no ser continua en él) tiene la propiedad del valor intermedio.

Más precisamente.

Teorema 57 (Darboux) *Si $f(x)$ es derivable en $[a, b]$, $f'(x)$ no puede pasar de un valor a otro en este intervalo sin pasar por todos los valores intermedios.*

Prueba: *Consideremos primero el caso en que $f'(a)$ y $f'(b)$ son de signos contrarios. Afirmamos que entonces $f'(x)$ se anula entre a y b. En efecto, sea, para fijar ideas, $f'(a) > 0$ y $f'(b) < 0$. El máximo valor de $f(x)$ (que existe por el Teorema de Weierstrass, puesto que $f(x)$ es continua en $[a, b]$) no puede ser alcanzado ni en a, ni en b. (En efecto, $f'(a) = \lim_{x\to a^+} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$ obliga a que cerca de a por la derecha, hayan x tales que $f(x) > f(a)$ (¿por qué?). Análogamente en b). Luego, este máximo se alcanza en un $c \in (a, b)$ y, por el Teorema de Fermat, en este c, $f'(c) = 0$. En el caso general, sea A un número comprendido entre $f'(a)$ y $f'(b)$. Entonces la función $f(x) - Ax$ tiene derivadas de signos opuestos en a y en b (¿Por qué?). Luego, existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$(f(x) - Ax)' = f'(x) - A$$

se anula en c. Es decir, $f'(c) = A$, que es lo que queríamos probar. □

Si bien la propiedad del valor medio, como dijimos antes, no es característica de las funciones que son continuas en un intervalo, tenemos lo siguiente.

> **Observación:** *Si $f(x)$ es creciente (o decreciente) en $[a, b]$ y si en este intervalo tiene la propiedad del valor medio, entonces $f(x)$ es continua en $[a, b]$.*

Sean, en efecto $m = f(a)$ y $M = f(b)$ el mínimo y el máximo de $f(x)$ en $[a, b]$ (supongamos $f(x)$ creciente para fijar ideas). Sea $x_0 \in (a, b)$. Consideremos un intervalo I de semiamplitud $\varepsilon > 0$ con centro $f(x_0)$ y sean x_1 y x_2 dos valores tales que $f(x_1)$ y $f(x_2)$ son los extremos de $I \cap [m, M]$. Estos valores existen porque $f(x)$ toma todos los valores entre m y M.

Tenemos $x_1 < x_0 < x_2$ puesto que $f(x)$ es creciente y no puede suceder que $x_1 = x_0$ ni que $x_0 = x_2$ (¿por qué?). Sea entonces $\delta > 0$ el menor de los números $x_2 - x_0$ y $x_0 - x_1$. Entonces claramente, $|x - x_0| < \delta$ obliga a $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ y f resulta continua en x_0. El razonamiento subsiste si x_0 fuese a o b. Esto queda a cargo del lector.

Terminamos esta sección con una versión mejorada del Teorema de la función inversa.

Teorema 58 *Sea $f(x)$ una función definida en un intervalo I, derivable en I y tal que su derivada $f'(x)$ no se anula en ningún punto de I. Entonces:*

1. *El conjunto de los valores $f(x)$ de f forma un intervalo J.*
2. *La función f, pensada como función de I sobre J, es biyectiva. Más aún, f es necesariamente estrictamente creciente o decreciente en I.*

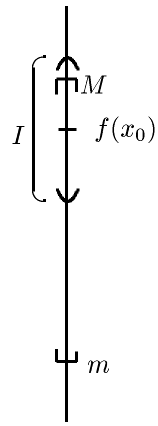


Figura 13.23 *$f(x)$ toma todos los valores entre m y M*

3. *La función inversa $g(y)$ de $f(x)$, que existe según 2- como función de J en I, es también derivable. más aún, la derivada de $g'(y)$ de g en el punto $y \in J$ se calcula mediante la fórmula*

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

donde x es el único número en I tal que $f(x) = y$.

Prueba: *Como $f(x)$ es derivable, sigue que $f(x)$ es continua en I, así que por el Teorema de Bolzano del valor intermedio, sabemos que J (conjunto de valores de $f(x)$) es un intervalo, lo que prueba 1 en la página 250 .*

Para 2 en la página 250 , es claro que $f : I \to J$ es sobreyectiva puesto que J es el conjunto de los valores de f. Para ver la inyectividad de f, observamos que la derivada $f'(x)$ sólo puede ser siempre positiva o siempre negativa. En efecto, $f'(x)$ no se anula nunca (por hipótesis) y por el Teorema de Darboux si tomara valores positivos y negativos, tendría que anularse. Luego, si $f'(x)$ es siempre positiva, $f(x)$ es estrictamente creciente, sino es estrictamente decreciente, como se afirma en 2 en la página 250 .

Finalmente para demostrar 3 , nos limitaremos al caso en que $f(x)$ es estrictamente creciente (el otro caso se trata en forma análoga). Observemos primero que $g(y)$ es estrictamente creciente en su dominio J (por ser g la inversa de f) y toma todos los valores de I, obviamente. La siguiente observación es que entonces $g(y)$ tiene la propiedad del valor intermedio en J. Porque si $x_1 = g(y_1) < g(y_2) = x_2$ y si x_0 está entre x_1 y x_2, g toma el valor x_0 en algún y_0, pero este y_0 no puede ser menor que y_1 ni mayor que y_2 (ya que g es creciente). Luego, g toma el valor x_0 en un y_0 entre y_1 y y_2, como queríamos. Pero entonces g es continua (pues es creciente y tiene la propiedad del valor intermedio). Pero necesitamos más: necesitamos averiguar que g no sólo es continua en J, sino que es derivable. Para esto escribimos la igualdad

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \varepsilon(x)$$

que expresa la derivada de f en $x_0 \in I$ donde

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\varepsilon(x)}{x - x_0} = 0.$$

Si ponemos $y_0 = f(x_0)$, $y = f(x)$, podemos escribir (ya que $g(y_0) = x_0$ y $g(y) = x$):

$$y - y_0 = f'(x_0)(g(y) - g(y_0) + \varepsilon(g(y)),$$

o bien (ya que $f'(x_0) \neq 0$),

$$g(y) - g(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}(y - y_0) - \frac{\varepsilon(g(y))}{f'(x_0)}.$$

Está claro entonces, que para obtener la conclusión final del teorema es suficiente (y necesario) probar que

$$\lim_{y\to y_0} \frac{\varepsilon(g(y))}{y-y_0} = 0$$

ya que $f'(x_0)$ *es una constante. En otras palabras, hay que ver que*

$$\lim_{y\to y_0} \frac{\varepsilon(x)}{x-x_0}\,\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)} = 0$$

(no olvide que sabemos que f *y* g *son inyectivas, así que* $y \neq y_0$ *obliga a que sea* $x \neq x_0$*). Pero esto es claro porque, como* g *es continua, tenemos que cuando* $y \to y_0, \quad x = g(y) \to x_0 = g(y_0)$*. Entonces* $\dfrac{\varepsilon(x)}{x-x_0} \to 0$ *y* $\dfrac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)} \to \dfrac{1}{f'(x_0)}$*, así que el límite anterior es nulo, y concluye la prueba.* □

Capítulo 14

Aplicaciones de la derivada

14.1 Movimiento sobre una Línea Recta

Aquí suponemos que una partícula P se está moviendo sobre una línea recta. Para simplificar, consideraremos que la línea es horizontal. El movimiento de la partícula está completamente determinado si especificamos donde está ubicada la partícula P en cada instante de tiempo. Siguiendo un poco la notación de los libros de física, denotamos por s la distancia dirigida sobre la línea, en vez de la acostumbrada letra x. Sea $s = f(t)$ la función que nos da (o nos describe) la distancia dirigida desde el origen a la partícula que se mueve P, en un tiempo t. Para una función $f(t)$ dada, el movimiento de la partícula está completamente determinado.

Por ejemplo, sea $s = t^2 - 9$ en algunas unidades físicas convenientes. Para concretar, sea s medido en centímetros y t en segundos. Esta ecuación nos dice que para $t = 0, s = -9$; o sea, la partícula P se encuentra al lado izquierdo del origen y a una distancia de $9cm$. En la figura 14.1, se describe el movimiento de la partícula P para algunos valores de t indicados en la línea superior mientras que en la línea inferior están los correspondientes valores dirigidos de s. Observe que para $t = 3, s = 0$; es decir, la partícula pasa por el origen después de 3 segundos de haber iniciado su movimiento. Cuando $t = 10$, P está al lado derecho del origen y a una distancia de 91 cm (ver figura 14.1).

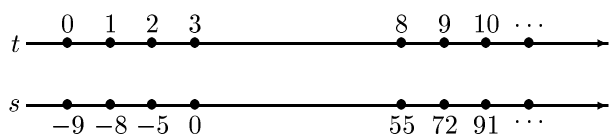


Figura 14.1 *posiciones s de la partícula en diferentes instantes t*

La velocidad de P se encuentra tomando la distancia dirigida que ha viajado la partícula y dividiéndola por el tiempo requerido en cubrir dicha distancia. Esto es satisfactorio si la partícula P se mueve uniformemente, esto es no va más rápido o más lento a medida que el tiempo transcurre. Si el movimiento no es uniforme, como es el caso de nuestro ejemplo, este cociente (espacio recorrido / distancia) solo nos da una *velocidad promedio* y este promedio no necesita ser constante. En el caso de nuestro ejemplo si tomamos un intervalo de 2 segundos entre $t = 1$ y $t = 3$, la partícula se mueve entre los puntos $s = -8$ a $s = 0$. Así la distancia recorrida $\Delta_s = 0 - (-8) = 8\,cm$. La velocidad promedio durante este intervalo de 2 segundos es $\Delta_s/\Delta_t = 8/2 = 4\,cm/seg$. En cambio, si tomamos un intervalo de 2 segundos comprendidos entre $t = 8$ y $t = 10$, la partícula se mueve entre los puntos $s = 55$ y $s = 91$; es decir, una distancia de $36cm$. La velocidad promedio durante estos dos segundos es $\Delta_s/\Delta_t = 36/2 = 18\,cm/seg$. Si movemos el intervalo de tiempo o cambiamos su longitud, obtendremos otros valores diferentes para la velocidad promedio. De estas consideraciones, es claro que lo que deseamos es tener una velocidad *Velocidad Instantánea* para algún valor fijo de t. Esta velocidad instantánea es el valor límite que tiene la razón

$$\frac{\Delta_s}{\Delta_t}$$

cuando el intervalo de tiempo Δ_t tiende a cero.

Definición: *Si $s = f(t)$ da la localización de una partícula que se mueve sobre una línea recta, entonces $v = v(t_1)$, la velocidad instantánea en $t = t_1$ se define por la ecuación:*

$$\begin{aligned} v(t_1) &= \lim_{\Delta_t \to 0} \frac{\Delta_s}{\Delta_t} \\ &= \lim_{\Delta_t \to 0} \frac{f(t_1 + \Delta_t) - f(t_1)}{\Delta_t}. \end{aligned} \tag{14.1}$$

La velocidad instantánea es llamada simplemente *velocidad* y llamaremos *rapidez*[1] de la partícula al valor absoluto de la velocidad. Es claro que la velocidad es la derivada de $f(t)$ y podemos escribir

$$v = v(t) = f'(t) = \frac{ds}{dt} = s'(t). \tag{14.2}$$

y seleccione la notación que le parezca más conveniente

Definición: *Llamaremos* aceleración *de una partícula a la variación instantánea de la velocidad. Si denotamos por $a = a(t)$ a esta cantidad, tenemos:*

$$\begin{aligned} a = a(t) &= \lim_{\Delta_v \to 0} \frac{v(t + \Delta_t) - v(t)}{\Delta_t} \\ &= \lim_{\Delta_t \to 0} \frac{\Delta_v}{\Delta_t} = \frac{dv}{dt}. \end{aligned} \tag{14.3}$$

Como $v = \dfrac{ds}{dt}$, se sigue

$$\begin{aligned} a &= \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) \\ &= \frac{ds^2}{dt^2} = s''(t). \end{aligned} \tag{14.4}$$

En palabras, la aceleración de una partícula que se mueve sobre una línea recta es la segunda derivada con respecto al tiempo de la función que da la distancia a un origen, considerado fijo durante el movimiento de P.

Ejemplo: Discutir el movimiento de una partícula que se mueve sobre una línea recta si su posición está dada por $s = t^2 - 16t$, donde s se mide en centímetros y t en segundos.

Solución: Para $t = 0$, $s = 0$; o sea, la partícula inicia su movimiento en el origen.

Si durante los cálculos nos olvidamos de la unidades físicas tales como cm y seg para retomarlas al final, tenemos que la velocidad para un tiempo cualquiera t está dada por

$$v = \frac{ds}{dt} = 2t - 16 = 2(t - 8). \tag{14.5}$$

Luego, para $t = 0, v = -16\, cm/seg$, es decir, la partícula se mueve hacia la izquierda, como se muestra en la figura 14.2, donde la flecha indica la dirección del movimiento. Si $t < 8$,

[1] Los términos «rapidez» y «velocidad» con frecuencia se confunden. La diferencia es que la velocidad es una cantidad con dirección y sentido (es un vector); en cambio la rapidez es $|v|$, la magnitud de la velocidad y por lo tanto siempre es positiva.

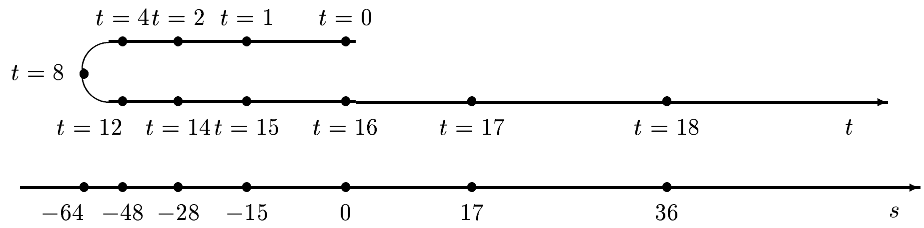


Figura 14.2 *Dirección del movimiento de la partícula*

el factor $t-8$ es negativo. Así en el intervalo $0 \leq t < 6$, la partícula se mueve hacia la izquierda.

Para $t = 8$, $v = 0$ y la partícula está momentáneamente en reposo. Para $t > 8$, la velocidad es positiva, y para estos valores de t, la partícula se mueve a la derecha. Evidentemente para $t = 8$ la partícula alcanza su posición extrema a la izquierda del origen. En otras palabras, es un mínimo en $t = 8$ y un simple cálculo nos dice que ese valor mínimo es $s = 64 - 16 \cdot 8 = -64$.

Para encontrar el tiempo que nos indica que la partícula está de nuevo en el origen, resolvamos la ecuación $s = t^2 - 16t = 0$. Esto nos da $t = 0$ y $t = 16$.

Finalmente, calculamos la aceleración mirando 14.4 y 14.5

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(2t - 16) = 2.$$

En otras palabras, la velocidad aumenta uniformemente a la razón de $2\,cm/seg$ en cada segundo (que se escribe cm/seg^2). Así la velocidad empieza en $-16\,cm/seg$; en 8 segundos aumentó a $0\,cm/seg$ y en 8 segundos más tarde se aumenta a $16\,cm/seg$. Durante este mismo período de tiempo la rapidez tiene una decrecimiento de $16\,cm/seg$ a 0 y un incremento de nuevo a $16\,cm/seg$.

14.2 Movimiento bajo la acción de la gravedad

Es un hecho experimental, descubierto por Galileo, que un cuerpo en caída libre, cerca de la superficie de la tierra tiene una aceleración que lo atrae hacia el centro de la tierra, que es constante y aproximadamente igual a $g = 9{,}8\,m/seg$, siempre y cuando no consideremos la resistencia del aire. Si tomamos como positiva la dirección «hacia arriba» , entonces la ecuación básica que gobierna el movimiento de un cuerpo que cae bajo la influencia de la gravedad es:

(14.6) $$a = -g.$$

Como la aceleración es la derivada de la velocidad con respecto al tiempo, la ecuación 14.6 y el Teorema «difiere en una constante» (*Matemáticas I*, Corolario 2, p.212) nos lleva

(14.7) $$v = -gt + C_1$$

donde C_1 es alguna constante.

Observe que el proceso de ir de la ecuación 14.6 a la 14.7 es el inverso de la diferenciación. En lugar, de derivar una función dada, estamos dando su derivada y queremos encontrar su *«primitiva»* , esto es, la función original. Este proceso se llama *«integración»* (algunas veces *«antidiferenciación»*) y será estudiado sistemática en el siguiente curso. Por el momento observe que si usted deriva $v = -gt + C_1$, obtiene $a = -g$, no importando que valor tenga la constante C_1.

Continuando con esta idea, podemos hallar una expresión para s, recordemos de 14.1 que $v = ds/dt$, de modo que buscamos una función $s(t)$, tal que su derivada sea $-gt + C_1$. Una simple inspección, basada en nuestros conocimientos ya adquiridos de derivación, nos dice que $s(t)$ es

(14.8) $$s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1 t + C_2$$

donde C_2 es cualquier constante.

Si usted deriva en ambos lados de 14.8 obtiene 14.7 para cualquier valor que tenga la constante C_2, como también es intuitivamente claro que cualquiera función $s(t)$ para la cual se cumpla $s''(t) = -g$ debe tener la forma dada en 14.8. Más adelante, y cuando usted estudie «Ecuaciones Diferenciales» le demostraremos esta propiedad, pero usted ya tiene las herramientas para hacerlo, por ejemplo usando el Teorema de Rolle.

También es interesante es que conociendo el valor de la aceleración podamos encontrar la posición en cualquier instante de un cuerpo que se lanza «hacia arriba» o simplemente se deja caer desde un punto fijo, por ejemplo, de la terraza de un edificio.

¿Pero, qué podemos decir de las constantes C_1 y C_2? Si tomamos $t = 0$, en la ecuación 14.7, tenemos $v = C_1$. Llamaremos a esta velocidad *«velocidad inicial»* y la denotamos por v_0. Luego, la constante C_1 es la velocidad inicial de nuestro movimiento,

Análogamente, si $t = 0$ en la ecuación 14.8, tenemos $s(0) = C_2$, que llamaremos *«posición inicial»* y que simbolizaremos con s_0. Luego la constante C_2 es la localización inicial del objeto que se mueve en $t = 0$. Por lo tanto, la ecuación 14.8 puede ser escrita en la forma

$$s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + s_0 \tag{14.9}$$

Ejemplo: Una piedra es lanzada hacia arriba, con un ángulo θ, desde el tope de un edificio que tiene $40\,m$ de alto con una velocidad inicial de $20\,m/seg$. Hallar la máxima altura que la piedra alcanza. ¿Cuánto tiempo transcurre para pasar de nuevo por el tope del edificio, esta vez viniendo en caída? ¿Cuándo alcanza el suelo?

Consideremos positiva la dirección «ir hacia arriba» y el origen en el suelo. Luego, $s_0 = 40$ y $v_0 = 20$. La ecuación 14.9 nos da:

$$s(t) = -\frac{1}{2}10.t^2 + 20t + 40 \tag{14.10}$$

Aquí hemos tomado g aproximadamente igual a $10\,m/seg$.

Derivando ambos lados de 14.10 obtenemos la velocidad

$$v = \frac{ds}{dt} = -10t + 20 = -10(t-2).$$

Para $t < 2$, la velocidad es positiva y la piedra va subiendo. Para $t = 2$, la velocidad es cero y la piedra se detiene por un instante. Entonces comienza a descender. Luego, la máxima altura a que llega la piedra se obtiene, poniendo $t = 2$ en la ecuación 14.10. Es decir,

$$s_{\max} = s(2) = -5 \cdot 4 + 20 \cdot 2 + 40 = 60.$$

Luego, la altura máxima alcanzada por la piedra es de $60\,m$.

La piedra está en el tope del edificio, cuando $s = 40$ en la ecuación 14.10. Esto nos da:

$$\begin{aligned} -5t^2 + 20t + 40 &= 40 \\ 5t(4-t) &= 40. \end{aligned}$$

Luego, para $t = 0$ y $t = 4$ la piedra pasa por el tope del edificio. En el caso del problema que estamos resolviendo es $t = 4$ (cuando viene de caída).

La piedra golpea el suelo cuando $s = 0$. La ecuación 14.10 nos dice

$$\begin{aligned} -5t^2 + 20t + 40 &= 0 \\ -5(t^2 - 4t - 8) &= 0 \\ (t-2)^2 - 12 &= 0 \\ t = &\ 2 + 2\sqrt{3}, \quad \text{o} \quad t = 2 - 2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

La segunda posibilidad no tiene sentido físico y la eliminamos (sólo buscamos $t \geq 0$). Luego, la piedra golpea el suelo al cabo de $5{,}4$ segundos aproximadamente.

14.2.1 Ejercicios[2]

1. En los siguientes problemas una partícula se mueve sobre una recta horizontal de acuerdo a la ecuación dada. Encontrar la velocidad, la aceleración y determinar cualquier posición extrema para $t \geq 0$. Haga un gráfico similar a figura 14.1 (p. 253), mostrando el movimiento para $t \geq 0$.
   (a) $s(t) = t^2 - 13t + 60$
   (b) $s(t) = t^3 - 9t - 7$
2. Una piedra es lanzada hacia arriba desde el tope de un edificio que tiene una altura de $48m$ y con una velocidad inicial de $5\,m/seg$. Hallar la altura máxima que la piedra alcanza, y cuándo golpea al suelo. ¿Dónde se encuentra la piedra cuando la velocidad es de $-20\,m/seg$?
3. Una pelota es arrojada directamente hacia abajo desde lo alto de un elevado edificio, con una velocidad inicial de $30\ ft/seg$. Suponiendo[3] que la pelota golpea al suelo con una velocidad de $190\ ft/seg$. ¿Cuál es la altura del edificio?
4. Una pelota es dejada caer desde el tope de un edificio que tiene $144ft$ de alto. Un segundo más tarde una segunda pelota es arrojada hacia abajo desde el tope del mismo edificio con una velocidad inicial $|v_0|$ ¿Qué valor debe tener $|v_0|$ para que ambas pelotas golpeen el suelo al mismo tiempo?
5. Una bola se deja caer desde un edificio de altura h metros[4].
   (a) Demuestre que la bola golpea el suelo en $\frac{1}{5}\sqrt{5h}$ segundos.
   (b) Si la bola se lanza hacia arriba con una velocidad inicial de $|v_0|\,m/seg$, demostrar que golpea el suelo después de
   $$\frac{1}{10}\left(\sqrt{v_0^2 + 20h} - |v_0|\right)$$
   segundos.
6. Un hombre de pie en suelo lanza una piedra verticalmente hacia arriba. Encuentre una fórmula que dé la altura máxima alcanzada por la piedra en función de su velocidad inicial $|v_0|$. Desprecie la altura del hombre y (como solemos pensar) suponga la aceleración de gravedad constante. ¿Cuál es el menor valor de $|v_0|$ que hará que la piedra caiga sobre el tope de un edificio de 100 metros de alto.
7. Un hombre parado en un puente lanza una piedra hacia arriba. Tarda 3 segundos la piedra en pasar frente al hombre, viniendo hacia abajo. Después de 2 segundos golpea el agua que está bajo el puente. Hallar la velocidad inicial de la piedra y la altura del puente sobre el agua.
8. ¿Es posible tener una partícula moviéndose sobre una línea horizontal de izquierda a derecha ($s(t)$ es siempre creciente) y sin embargo tener $v(t_0) = 0$ para algún valor particular t_0? ¿Es posible tener $v(t) = 0$, para dos valores diferentes de t?
9. Un astronauta parado en un acantilado deja caer una piedra. Observa que tarda 3 segundos en llegar al suelo. ¿Cuál es la altura del acantilado, sobre el suelo al que llega la piedra? si:
   (a) El astronauta está en Venus, donde $g = 28\ ft/seg^2$.
   (b) Está en Marte, donde $g = 12\ ft/seg^2$.
   (c) Está en la Luna, donde $g = 5,5\ ft/seg^2$?
10. Suponga que
    $$s(t) = t^4 - 12t^3 + 60t^2 - 11t - \sqrt{29}$$
    da la localización de una partícula que se mueve sobre una línea recta. Hallar la velocidad de la partícula cuando la aceleración es
    (a) $24\,m/seg^2$,
    (b) $60\,m/seg^2$,
    (c) $12\,m/seg^2$,
    (d) $0\,m/seg^2$

[2] Se sugiere resolver los problemas 1.,2. y 3 del §8.4 de la Guía de Problemas I, de los Profs. Giudici

[3] $g = 32\ ft/seg^2$

[4] $g = 10\,m/seg^2$

14.3 Razones afines, o coeficientes de variación

La localización de una partícula P no es la única cantidad que puede depender del tiempo. En realidad, cualquier magnitud física F que está cambiando, nos lleva a una función $F(t)$ y la derivada $F'(t)$ da la «variación instantánea» de F con respecto a t. Por ejemplo, F puede ser el volumen de un globo al cual se le introduce aire, o F podría ser la concentración de un ácido en un tubo donde se está realizando una reacción química, o F podría ser la cantidad de carga eléctrica en un condensador o F podría ser la resistencia que tiene una cierta viga de acero colocada en un puente cuando pasa un camión. En algunos casos puede ser muy difícil, o aún imposible determinar $F(t)$ y por lo tanto $F'(t)$, pero en muchos de los casos lo que hacemos es encontrar una ecuación que relacione F, con otras magnitudes para las cuales conozcamos la variación de ellas con respecto a la variable t, que generalmente es el tiempo. Derivamos esta ecuación con respecto al tiempo y resolvamos la ecuación para $F'(t)$. Pero veamos mejor con ejemplos.

Ejemplos

1. Un globo esférico se llena de aire y su radio crece a razón de $2,5$ centímetros por minuto; ¿con qué rapidez aumenta el volumen cuando el radio es de 20 centímetros?

   Solución: Se puede expresar el volumen en el instante t, en función del radio en el instante t, por medio de la bien conocida fórmula para el volumen de una esfera. Así,

   $$F(t) = V(t) = \frac{4}{3}\pi(r(t))^3. \tag{14.11}$$

   Derivando ambos lados de la ecuación 14.11 con respecto a t y utilizando la llamada *«regla de la cadena»* , obtenemos:

   $$F'(t) = V'(t) = 4\pi(r(t)^2)r'(t). \tag{14.12}$$

   Ahora bien, si el radio es de $20cm$ en el instante t_1, tenemos

   $$V'(t_1) = 4\pi(400)x1.5 = 2400\pi. \tag{14.13}$$

   O sea, el volumen aumenta en razón de $2400\pi\ cm^3/min$ ($\approx 7536cm^3/min$).

2. Un hombre está parado sobre el tope de una escalera que tiene 13 metros de largo, la cual está apoyada sobre una pared (puede pensar que el hombre está pintando la pared). El suelo donde se apoya la escalera está jabonoso y la escalera empieza alejarse de la parte inferior de la pared a razón de 6 m/min. Si el hombre permanece en el tope de la escalera, ¿a qué velocidad el hombre desciende, cuando:

   (a) el extremo inferior está a 5 metros de la muralla?
   (b) el extremo inferior está a 12 metros de la muralla?

   Solución: La figura 14.3 ilustra la situación del problema. Si P representa al hombre situado en el tope de la escalera, tenemos

   $$x^2 + y^2 = 13^2 = 169 \tag{14.14}$$

   Donde $y = y(t)$ representa la altura del tope de la escalera al suelo, en un instante t y $x = x(t)$, la distancia del punto Q de la escalera que se apoya en el suelo. Derivando implícitamente, en la ecuación 14.14, con respecto a t, tenemos

   $$2x(t)\frac{dx(t)}{dt} + 2y(t)\frac{dy(t)}{dt} = 0. \tag{14.15}$$

   Despejando $\frac{dy(t)}{dt}$ se obtiene

   $$\frac{dy(t)}{dt} = -\frac{x(t)}{y(t)}\frac{dx(t)}{dt}.$$

   Cuando $x = 5$, la ecuación 14.14 nos da

   $$y = \sqrt{169-25} = \sqrt{144} = 12.$$

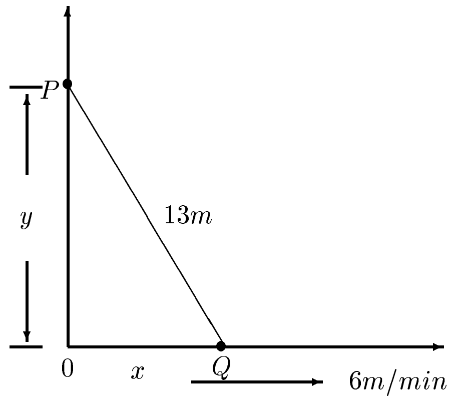


Figura 14.3 *la escalera apoyada en la pared*

Por otra parte, nos dan que $\dfrac{dx(t)}{dt} = 6\, m/min$. Por lo tanto,

$$\frac{dy(t)}{dt} = -\frac{5}{12} \cdot 6 = -2,5\, m/min,$$

o sea el hombre desciende a razón de $2,5\, m/min$.

Cuando $x = 12,\ y = 5$ y en este caso

$$\frac{dy(t)}{dt} = -\frac{12}{5} \cdot 6 = -14.4\, m/min,$$

y esto es bastante más rápido.

3. Una persona, parada sobre un acantilado, observa un bote de motor con unos anteojos de larga vista, cuando el bote se acerca a al playa que está directamente abajo de ella. Si los anteojos de larga vista están a 250 metros arriba del nivel del agua y si el bote se acerca a $20\, m/seg$. ¿Con qué rapidez cambia el ángulo del telescopio con respecto al bote cuanto éste se encuentre a 250 metros de la playa?.

   Solución: La figura 14.4 nos indica la situación del problema donde α y x son las variables que dependen del tiempo. Ahora bien,

$$\frac{dx}{dt} = -20. \tag{14.16}$$

El signo menos se debe a que la distancia x disminuye con el tiempo. Buscamos $\dfrac{d\alpha}{dt}$ cuando

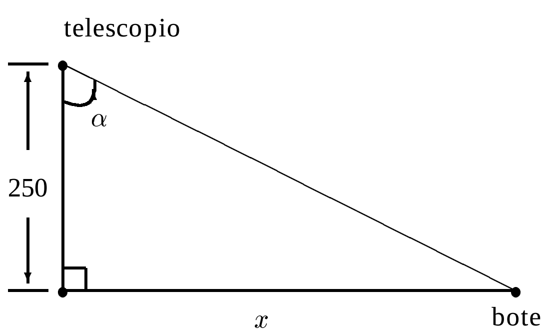


Figura 14.4 *el observador del bote*

$x = 20$. Por otra parte,

(14.17) $\tan\alpha = \dfrac{x}{250}$.

Derivando, tenemos

(14.18) $\sec^2\alpha(\dfrac{d\alpha}{dt}) = \dfrac{1}{250}\dfrac{dx}{dt}$.

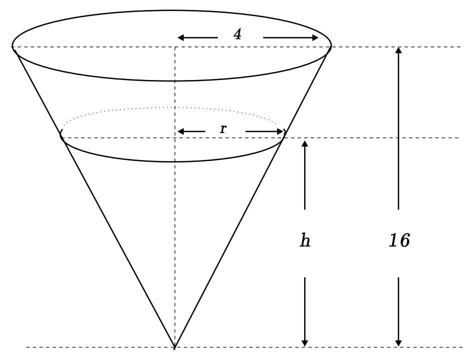
En el instante en que $x = 250$; $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ radianes y $\sec^2(\dfrac{\pi}{4}) = 2$. Luego,

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{20}{250}\cdot\frac{1}{2} = -\frac{1}{25} = -0{,}04.$$

El ángulo α cambia a razón de $-0{,}04$ radiantes por segundo. El signo negativo se debe a que α disminuye con el tiempo.

4. Un tanque tiene la forma de un cono invertido con una altura de 16 metros y un radio base de 4 metros. El agua fluye al tanque a razón de $2m^3/min$. ¿Qué tan rápido crece el nivel cuando el agua tiene 5 metros de profundidad?

Solución: Sean t el tiempo en minutos que ha transcurrido desde que el agua comenzó a fluir dentro del tanque; h la altura en metros del nivel del agua en t minutos; r el radio medido en metros de la superficie del agua en t minutos y v el volumen en metros cúbicos del agua en el tanque en t minutos. La figura 14.5 muestra las condiciones del problema.



un tanque con forma de un cono invertido

Figura 14.5

En cualquier instante de tiempo, el volumen de un cono es $v = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$, donde r y h son funciones del tiempo. Usando triángulos semejantes tenemos

(14.19) $\dfrac{r}{h} = \dfrac{4}{16} = \dfrac{1}{4}$.

Por lo tanto,

(14.20) $v = \dfrac{1}{48}\pi h^3$.

Derivando ambos lados de 14.20 con respecto a t, tenemos

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{16}\pi h^2\frac{dh}{dt}.$$

Como $\frac{dv}{dt} = 2$, despejando $\dfrac{dh}{dt}$, tenemos $\dfrac{dh}{dt} = \dfrac{32}{\pi h^2}$, que para $h = 5$, nos da que el agua crece a razón

$$\frac{32}{25\pi} \approx 0{,}41\ m/min$$

cuando el agua se encuentra a 5 metros de profundidad.

5. El área de una elipse centrada de semi-ejes a y b es πab (muy pronto sabrá calcularlo por integrales). Se sabe que el semi-eje a crece a razón de $2\,cm/seg$ y que el semi-eje b disminuye a razón de $2\,cm/seg$. ¿Cómo varía el área de la elipse?

   Solución: Sea $A = \pi ab$. Derivando con respecto a t, tenemos

$$\begin{aligned}\frac{dA}{dt} &= \pi(\frac{da}{dt}b + a\frac{db}{dt}) \\ &= 2\pi(b-a).\end{aligned}$$

14.3.1 Ejercicios[5]

1. Un triángulo de lados a,b y c es tal que el ángulo (formado por los lados a y b) se mueve a razón de $2\,grados/seg$. ¿Cómo varía el área del triángulo?
2. Si el radio de un disco se aumenta a razón de $3\,cm/seg$, encontrar la variación del área cuando $r = 4\,cm$.
3. Dos automóviles, uno se dirige hacia el este a razón de $40\,km/hora$ y el otro hacia el sur a razón de $30\,km/hora$, están viajando hacia la intersección de las dos carreteras. ¿A qué velocidad se aproximan los dos automóviles, uno con respecto al otro, en el instante en que el primer carro está 400 metros y el segundo está a 300 metros de la intersección?
4. A las $8:00$ AM. el barco A se encuentra 25 millas al sur del barco B. Suponiendo que A navega hacia el este a razón de 16 $millas/hora$ y B navega hacia el sur a 20 $millas/hora$, encuentre la razón de cambio de las distancia entre los dos barcos a las $8:30$ AM.
5. Se bombea gas a un balón esférico a razón de $5\,m^3/min$. ¿Si la presión se mantiene constante, cuál es la razón de cambio del radio cuando el diámetro mide 180 cm?
6. Se tira una piedra a un lago y esto produce olas circulares cuyos radios crecen a razón de $50\,cm/seg$. ¿A razón de cuántos metros por segundo aumenta el perímetro de una ola cuando su diámetro mide 8 metros?
7. Un punto $P(x, y)$ se mueve sobre la gráfica de la ecuación $y = x^3 + x^2 + 1$. Su abscisa varía a razón de 2 unidades por segundo. ¿A razón de cuántas unidades por segundo varía su ordenada en el punto $(1\,,3)$?
8. Un cohete es lanzado en dirección vertical y es rastreado por una estación en el suelo a 3 km del sitio del lanzamiento. ¿Cuál es la velocidad vertical del cohete en el instante en el que su distancia a la estación de radar es de 5 km y esta distancia aumenta a razón de $5000\,km/hora$?
9. Un hombre de $1{,}80$ metros de alto corre a una velocidad de $8\,m/seg$ alejándose de una luz callejera al tope de un poste de 9 metros de altura. ¿Con qué rapidez se mueve el extremo de su sombra sobre el suelo cuando él está a 100 metros del poste de la luz?
10. Dos estaciones de radar $ALFA$ y $BETA$ con $BETA$ a 6 millas al este de $ALFA$, están rastreando un barco. En cierto momento, el barco está a 5 millas de $ALFA$ y su distancia aumenta as razón de $28\,millas/hora$. En el mismo instante, el barco está a 5 $millas$ de $BETA$, mientras su distancia aumenta a sólo $4\,millas/hora$. ¿Dónde está el barco, con qué rapidez se mueve y en qué dirección lo hace?

14.3.2 Respuestas de los ejercicios en la página 257

1. (a) Ver la figura 14.6.
   (b) Ver la figura 14.7.
2. $20\,m$, $t = 3\,seg$.
3. $550\,ft$.
4. $40\,ft/seg$, $160\,ft$.

[5] Se sugiere resolver los problemas 4,5,6,7,8,9,10,11,12,13 de §8.4 de la Guía de Problemas I, de los Profes. Giudici

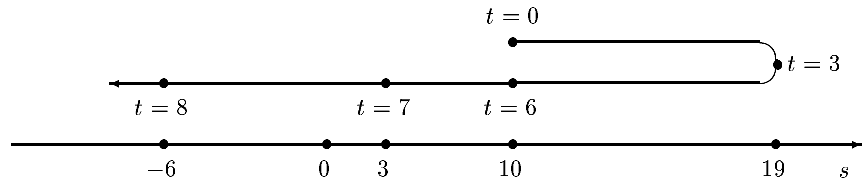


Figura 14.6 *ejercicio 1 parte a*

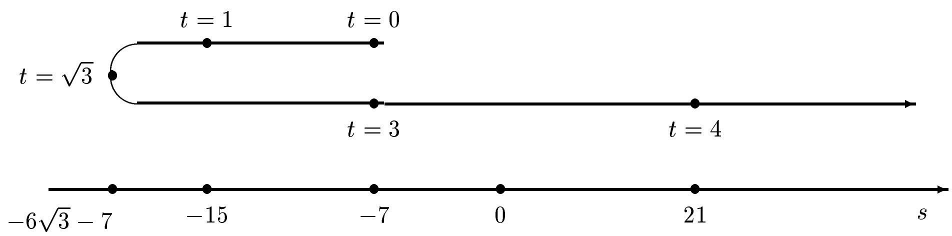


Figura 14.7 *ejercicio 1 parte b*

5.
6. $\dfrac{v_0^2}{64}$, $80\,m/seg.$
7. $48\,ft/seg,\ \ 160\,ft.$
8. Si, $s(t)=(t-1)^3$.
   Si. Si $s(t)=6t^5-15t^4+10t^3$ entonces $v=30t^2(t-1)^2$.
9. (a) $126\,ft.$
   (b) $54\,ft.$
   (c) $25\,ft.$
10. (a) $t=2\,seg,\ v=117\,m/seg,\ \text{ o t}=4\,\text{seg},\ \text{v}=149.$
    (b) $t=1\,seg,\ v=77\,m/seg,\ \text{ o t}=5\,\text{seg},\ \text{v}=189.$
    (c) $t=3\,seg,\ v=133.$
    (d) La aceleración es siempre diferente de cero.

14.3.3 Respuestas de los ejercicios en la página 261

1. Usando que el área del triángulo es $A=\dfrac{1}{2}ab\,\mathrm{sen}\gamma$ (donde γ es el ángulo formado por los lados a y b y se expresa en radianes), se tiene $\dfrac{dA}{dt}=\dfrac{1}{2}ab\cos\gamma\,\dfrac{d\gamma}{dt}$. Como $\frac{d\gamma}{dt}=2\frac{\pi}{180}radianes/seg$, podemos escribir $\dfrac{dA}{dt}=\dfrac{\pi}{180}ab\cos\gamma$.
2. $24\pi\,cm^2/seg.$
3. $0{,}38\,m/seg.$
4. $-10{,}12\,millas/h.$ (El signo negativo indica que a las $8:30$ AM., la distancia entre los barcos estará disminuyendo).
5. $\dfrac{125}{81\pi}\approx 0{,}49\,m/min.$
6. $\pi\,metros/seg.$
7. $10\,unidades/seg.$
8. $6250\,km/hora.$
9. $10\,m/seg.$ Obsérvese que el valor 100 no se utiliza.
10. El barco está 3 millas al este y 4 millas al norte de $ALFA$. El barco está navegando hacia el noroeste a una velocidad de $20\sqrt{2}\,millas/hora.$

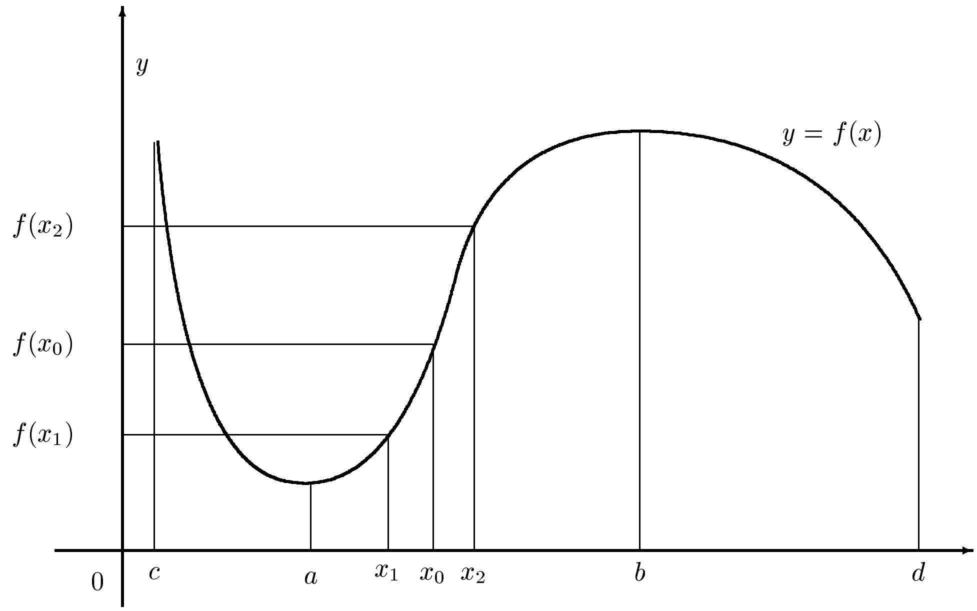


Figura 14.8 *función con regiones de crecimiento y decrecimiento*

14.4 Funciones crecientes y decrecientes

Usted está familiarizado con el concepto de «función creciente» y sólo para recordar :

- Una función $f(x)$ se dice que es creciente en un intervalo I si, para cualesquiera x_1 y x_2 en I con $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) < f(x_2)$. Si $f(x)$ es creciente en un intervalo I, escribiremos $f \uparrow I$.
- Una función $f(x)$ es creciente en un punto x_0 si existe un intervalo alrededor de x_0, tal que $f(x)$ es creciente en ese intervalo.

También estudió un teorema de Lagrange que nos da un criterio simple para saber si una función es creciente en un intervalo dado I, es decir,

- Si $f(x)$ es una función tal que $f'(x)$ es positiva en x_0, un punto en el dominio de f, entonces f es creciente en x_0.
- Si la derivada es positiva en todo un intervalo I, entonces $f \uparrow I$.

Ahora bien, cuando hablamos de estudiar funciones crecientes queremos decir, encontrar los subintervalos del dominio de f, donde f sea creciente, o lo que es lo mismo, donde $f'(x) > 0$. En la figura 14.8 vemos que la función $y = f(x)$ no es creciente en todas partes, pero si lo es en el intervalo $a < x < b$.

En forma análoga podemos definir una función decreciente y tener un criterio para su estudio ; pero podemos evitar este trabajo observando que

- $g(x)$ es una función decreciente ($\downarrow$) si y sólo si $f(x) = -g(x)$ es una función creciente.

En la figura 14.8, f es decreciente en $[c, a) \cup (b, d]$.

Ejemplo: Hallar en cuáles intervalos la función $f(x) = 17 - 15x + 9x^2 - x^3$ es creciente y en cuáles decreciente.

Solución : Calculando la derivada de $f(x)$ tenemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= -15 + 18x - 3x^2 \\ &= -3(5 - 6x + x^2) = -3(x-5)(x-1). \end{aligned} \tag{14.21}$$

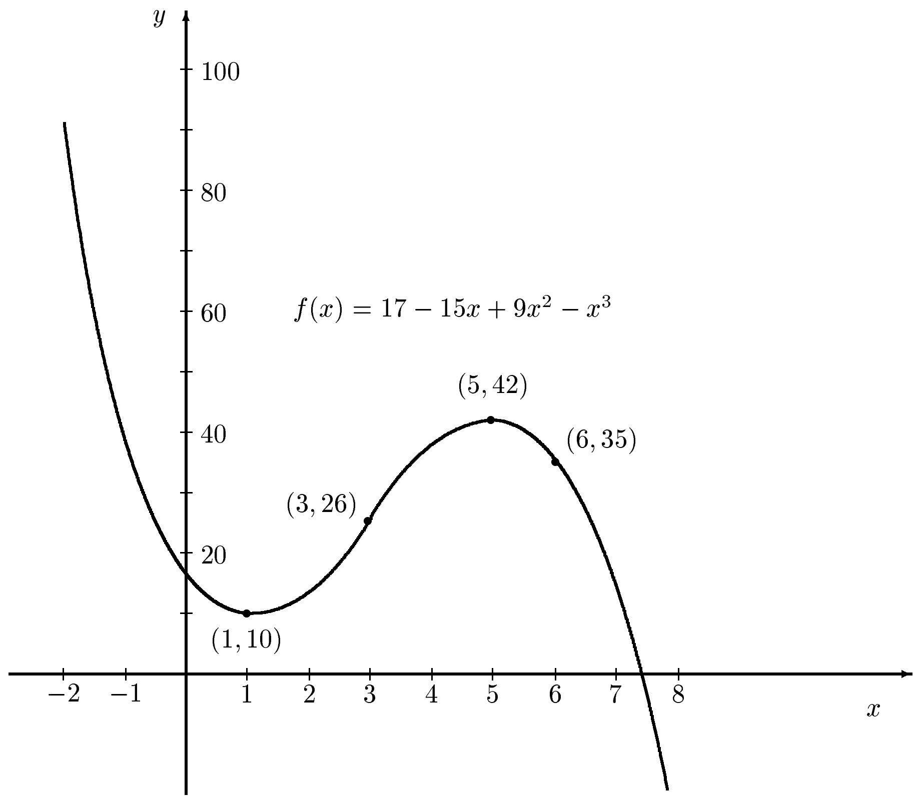


Figura 14.9 $f(x) = 17 - 15x + 9x^2 - x^3$

Claramente, la derivada es cero en $x = 1$ y $x = 5$ y sólo en estos valores. Estos dos puntos dividen al eje x en tres conjuntos o subintervalos :

$$I_1 = (-\infty, 1)\ ;\ I_2 = (1,5)\ ;\ I_1 = (5,\infty).$$

En cada uno de estos subintervalos la derivada tiene signo constante. Por ejemplo estudiemos primero el I_3. Cuando $x > 5$, los dos factores $(x-5)$ y $(x-1)$ son mayores que cero y por lo tanto $f'(x) < 0$ si $x > 5$. Luego, $f \downarrow I_3$. Una discusión similar se puede realizar para los otros dos subintervalos. Este trabajo lo arreglamos en la tabla 14.1. El gráfico de esta

		signos	signo de	
	Dominio de x	-3(x-5)(x-1)	$f'(x)$	La función es
I_1	$-\infty < x < 1$	(-)(-)(-)	$-$	$\downarrow$
I_2	$1 < x < 5$	(-)(-)(+)	$+$	$\uparrow$
I_3	$5 < x < \infty$	(-)(+)(+)	$-$	$\downarrow$

Tabla 14.1 *tabla de signos de la derivada*

función lo vemos en la figura 14.9.

Ejemplo: Hallar en qué intervalos la función

$$f(x) = \frac{8}{x^2+1}$$

es creciente y en cuáles es decreciente.

Solución : El lector deberá justificar los diferentes pasos que se escriben a continuación :

(14.22) $$f'(x) = 8 \cdot (-1)\frac{1}{(x^2+1)^2}(2x) \text{ (¿ ?)}$$

Dado que $x^2 + 1 > 0$ (¿ ?), $x = 0$ divide al eje x (dominio de f) en dos conjuntos :

$$I_1 = (-\infty, 0) \text{ y } I_2 = (0, \infty).$$

Luego f es $\uparrow$ en I_1 y $\downarrow$ en I_2 (¿ ?). Haga un dibujo de la función.

Ejemplo: Hallar en qué intervalos la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ es creciente y en cuáles es decreciente.

Solución : Usted puede resolver este problema haciendo el gráfico de la función $\operatorname{sen} x$ y observar que qué subintervalos de su dominio (todo $\mathbb{R}$) es creciente. O bien calcular

(14.23) $$f'(x) = \cos x$$

Ahora bien, $\cos x = 0$, para $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ con n un número entero. Como la función $\cos x$ tiene período 2π, podemos analizarla entre los subintervalos

$$I_1 = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \text{ y } I_2 = (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$$

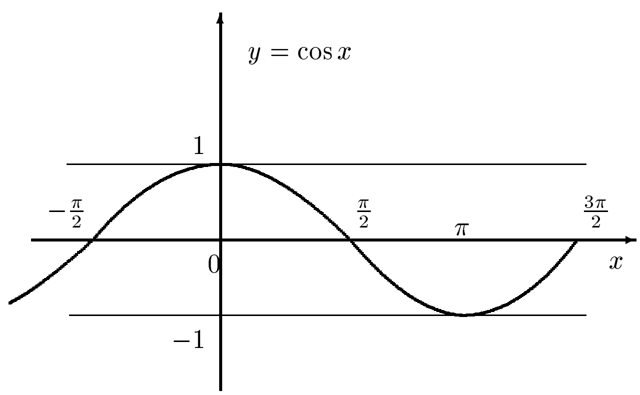


Figura 14.10 $y = \cos x$

La figura 14.10 nos ayuda a determinar el signo de $f'(x)$ en I_1 e I_2. En efecto, $f'(x) > 0$ en I_1 y $f'(x) < 0$ en I_2.

Luego,

$$f \text{ es } \uparrow \text{ en } \left(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi\,,\ \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)$$

y

$$f \text{ es } \downarrow \text{ en } \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\,,\ \frac{3\pi}{2} + 2n\pi\right)$$

en donde n es un número entero.

14.4.1 Ejercicios: crecimiento y decrecimiento

Hallar los intervalos en los cuales la función f es creciente y los intervalos en los cuales la función f es decreciente[6].

[6] Se sugiere buscar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las funciones que están en los problemas $1, 2, \ldots, 16$ de §8.3 de la Guía de Problemas I de los profesores Giudici

1. $f(x) = x^2 + 9$
2. $f(x) = x^2 + 6x - 1$
3. $f(x) = x^3 - 8$
4. $f(x) = x^3 - 3x^2$
5. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 9$
6. $f(x) = (x+1)^3(x-3)^3$
7. $f(x) = x\sqrt{8 - x^2}$
8. $f(x) = \dfrac{9 + 2x - x^2}{1 + x}$
9. $f(x) = \dfrac{5 - 3x}{1 - x}$
10. $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x}$.

14.4.2 Soluciones de los ejercicios de crecimiento y decrecimiento

1. f es $\uparrow$ en $(0\,,\,\infty)$ y
   f es $\downarrow$ en $(-\infty\,,\,0)$.
2. f es $\uparrow$ en $(-3\,,\,\infty)$ y
   f es $\downarrow$ en $(-\infty\,,\,-3)$.
3. f es $\uparrow$ en todo su dominio.
4. f es $\uparrow$ en $(-\infty\,,\,0) \cup (2\,,\,\infty)$
   y f es $\downarrow$ en $(0\,,\,2)$.
5. f es $\uparrow$ en $(3\,,\,\infty)$
   y f es $\downarrow$ en $(-\infty\,,\,0) \cup (0\,,\,3)$
6. Ver nota 6 al pie de página.
7. f es $\uparrow$ en $(-2\,,\,2)$
   y f es $\downarrow$ en $\left(-2\sqrt{2}\,,\,-2\right) \cup \left(2\,,\,2\sqrt{2}\right)$
8. Ver nota 6 al pie de página.
9. Ver nota 6 al pie de página.
10. f es $\downarrow$ en todo su dominio.

14.5 Valores extremos de una función

14.5.1 Puntos críticos

Brevemente, el valor máximo de una función es su valor más grande (alto) y el mínimo es su menor valor (más bajo). Para precisar debemos especificar el valor que estamos considerando. En otras palabras, debe estar muy claro cuáles valores de x se permiten en la competencia de hacer $f(x)$ un máximo o un mínimo.

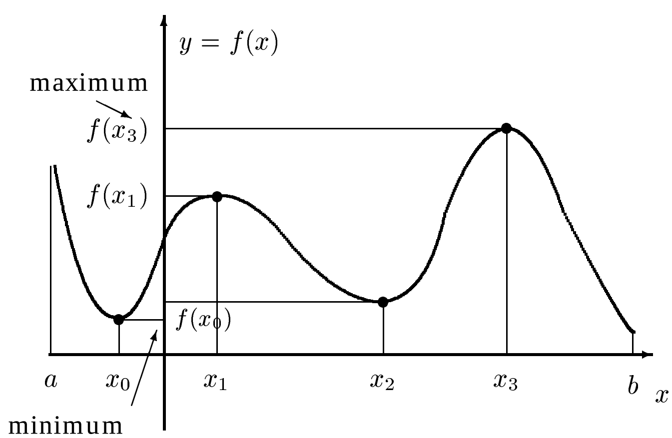


Figura 14.11 *el máximum y el mínimum*

Recordemos que en el capítulo 3 estudiamos el concepto de máximos y mínimos tanto locales como globales, y sólo para recordar:

- La función $f(x)$ se dice que tiene un valor máximo en x_0 en el intervalo I si $f(x_0) \geq f(x)$, para todo $x \in I$.
- Análogamente, $f(x_0)$ es el mínimo de $f(x)$ en el intervalo I si $f(x_0) \leq f(x)$, para todo $x \in I$.

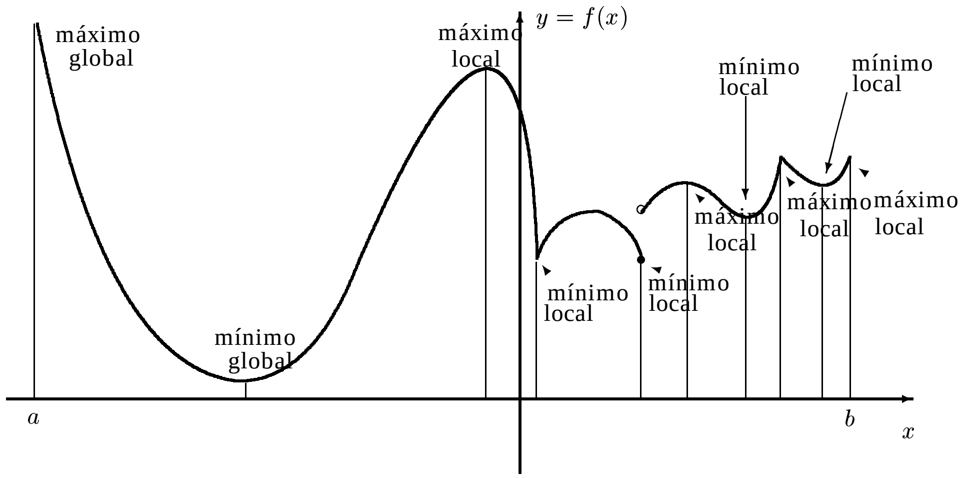


Figura 14.12 *diferentes casos de extremos*

El gráfico de una función puede tener varios puntos que aparecen como los puntos más altos de una función. Para distinguir entre tales puntos, el mayor de todos lo llamaremos *máximum* o máximo absoluto o máximo de $f(x)$, mientras que los otros los denominaremos máximos relativos locales de $f(x)$. En la figura 14.11 $f(x_1)$ es un máximo relativo; en cambio $f(x_3)$ es el máximo global o absoluto.

Similarmente se definen los mínimos relativos o locales y el mínimo absoluto o global o simplemente *mínimum*. Así, en la figura 14.11, $f(x_0)$ es el mínimo absoluto en cambio $f(x_2)$ es un mínimo local.

Los valores $x_i \in I$, tales que $f(x_i)$ es un máximo o un mínimo (absoluto o relativo) se llaman *valores extremos*.

De acuerdo al Teorema de Fermat uno espera que los valores extremos se obtengan cuando la derivada de la función es cero (para una función derivable y en los puntos interiores del intervalo).

En la figura 14.12 vemos diversos casos dónde una función $f(x)$ puede tener un valor extremo. Así vemos que los candidatos a ser valores extremos pueden ser:

- *Puntos frontera:* que son los puntos inicial y final de un intervalo $I = [a, b]$ (o $[a, b)$, o $(a, b]$).
- *Puntos estacionarios:* puntos $x_i \in I$ donde $f'(x_i) = 0$. Observe que en estos puntos la gráfica de $f(x)$ se nivela, dado que la tangente es horizontal. Con frecuencia los valores extremos se presentan en los puntos estacionarios (vea la figura 14.12).
- *Puntos singulares:* puntos $x_i \in I$ donde $f'(x_i)$ no existe. En estos puntos la gráfica puede tener un vértice (no hay una buena recta tangente), una tangente vertical, o tal vez da un salto (discontinuidad). Los valores extremos pueden darse en puntos singulares, ver la figura 14.12.

En estos tres tipos de puntos: frontera, estacionarios y singulares, está la clave de la teoría de máximos y mínimos y cualquier punto $x_i \in \mathrm{Dom} f$ que sea de uno de estos tres tipos se llama punto crítico de f.

Observación: *Hay funciones que, no poseen un valor máximo o mínimo en su dominio o en cualquier subintervalo abierto en el dominio. Por ejemplo,* $f(x) = \frac{1}{x}$*, no tiene valores máximos ni mínimos en* $(0, \infty)$ *como se observa en la figura 14.13.*

Por otra parte, esa misma función tiene el valor máximo $f(1) = 1$ *y el valor mínimo* $f(3) = \frac{1}{3}$ *en* $I = [1, 3]$*. Observe que esta función es continua en* $(0, \infty)$*.*

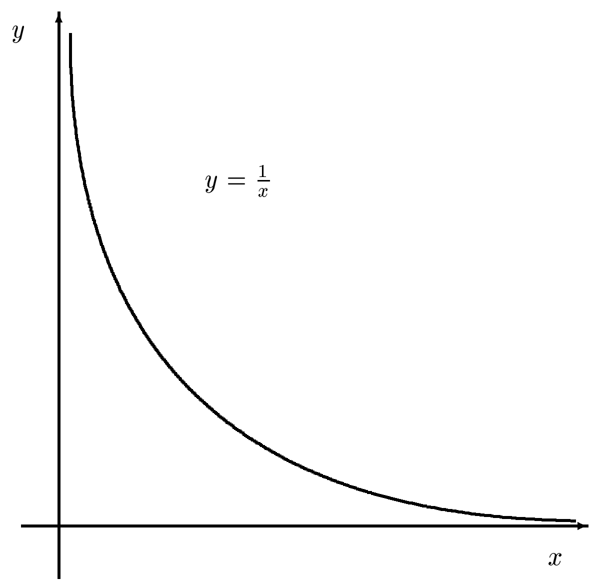


Figura 14.13 $f(x) = \frac{1}{x}$

Ejemplo: La función

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad 1 \leq x < 2 \\ x - 2 & \text{si} \quad 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

En $I = [1, 4]$, $f(x)$ no tiene valor máximo. Se acerca indefinidamente a 4, pero nunca lo alcanza. Sin embargo, $f(x)$ tiene el valor mínimo $f(2) = 0$.

Observe que esta función es discontinua en $x = 2$, ver figura 14.14.

El teorema de Weierstrass que responde a la pregunta de la existencia de valores máximo y mínimo. Note que ese teorema exige que $f(x)$ sea continua y que el intervalo de definición sea cerrado.

Ejemplo:Hallar los valores extremos de la función

$$f(x) = 17 - 15x + 9x^2 - x^3$$

en todo su dominio. Esta función ya la habíamos tratado en un ejemplo de la sección 14.4 (ver figura 14.9 en la página 264).

En efecto,

$$f'(x) = -3(x - 5)(x - 1).$$

Luego los valores extremos relativos se encuentran en $x = 1$ y en $x = 5$. Como $f(x)$ es decreciente para $x < 1$ y creciente para $x > 1$ y $x < 5$, es claro que la curva desciende, se para en $x = 1$ y luego asciende. Es decir, en $x = 1$, tenemos un mínimo relativo y su valor es

$$f(1) = 17 - 15 + 9 - 1 = 10.$$

La figura 14.15 representa una porción de la gráfica de $f(x)$ (compare con la figura 14.9).

Análogamente, $f(x)$ es creciente en $1 < x < 5$, se para en $x = 5$, y después continúa decreciendo. Luego, $f(x)$ tiene un máximo relativo en $x = 5$ y su valor es

$$f(5) = 17 - 15 \cdot 5 + 9 \cdot 25 - 125 = 42.$$

La figura 14.16 representa otra porción de la gráfica de $f(x)$. Observe que $x = 1$ no es el mínimum (o mínimo absoluto). Por ejemplo,

$$f(20) = -4.683 < f(1) = 10.$$

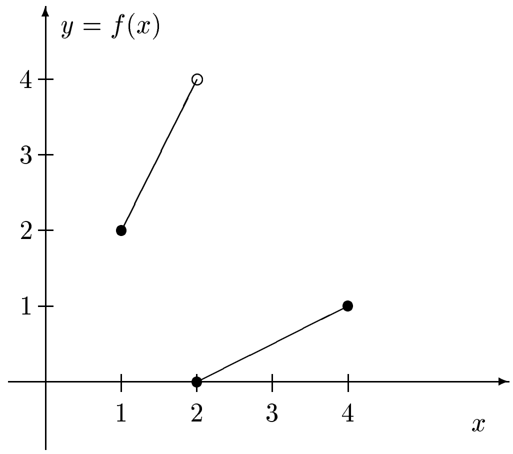


Figura 14.14 *función sin máximo absoluto*

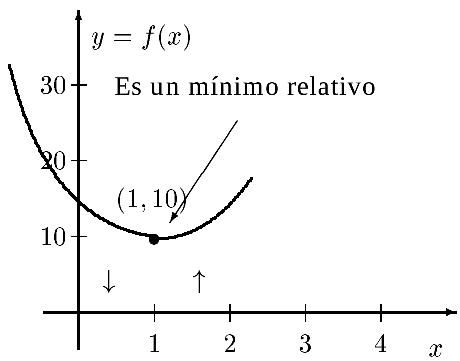


Figura 14.15 10 *es un mínimo relativo*

Tampoco $x = 5$ es el máximum,

$$f(-20) = 11.917 > f(5) = 42.$$

14.6 Aplicaciones de los extremos de una función

Hasta el momento hemos estudiado los puntos máximos y mínimos que tiene una función, sin preocuparnos de algún significado concreto que ellos pudieran tener.

Sin embargo existen muchos problemas que se presentan en el mundo físico que se resuelven reduciéndolos a un problema de hallar puntos máximos y mínimos sobre una curva (gráfico de una función). Veamos algunos ejemplos.

Ejemplos

1. *(Descomponiendo un número en dos sumandos).* Hallar dos números cuya suma es 28 y cuyo producto sea el mayor posible.

   Solución: Sean x y y los números. Entonces la condición del problema nos dice:

   (14.24) $\qquad x + y = 28$

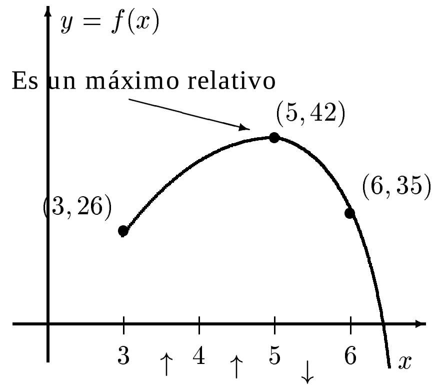


Figura 14.16 42 *es un máximo relativo*

(14.25) $\quad P = x \cdot y$

La ecuación 14.25 depende de dos variables, pero por medio de la ecuación 14.24 podemos convertir a P en una función de una sola variable, por ejemplo si de 14.24 despejamos y, $y = 28 - x$, tenemos

(14.26) $\quad P = P(x) = x(28 - x) = 28x - x^2$

> **Observación:** *La función $P(x)$ es una parábola en x, y y usted puede seguir este problema hallando el máximo de la curva.*

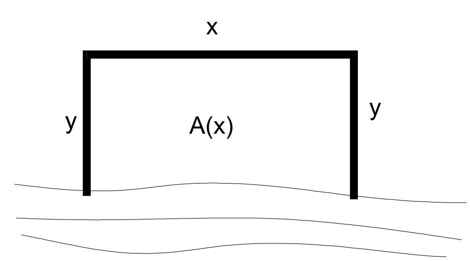
(14.27) $\quad P'(x) = 28 - 2x$

Luego, $P'(x) = 0$, nos da $x = 14$.

Ahora bien, $P'(x) > 0$ si $x < 14$. O sea, $P(x)$ es $\uparrow$ en $(-\infty, 14)$, y $P'(x) < 0$ si $x > 14$. O sea, $P(x)$ es $\downarrow$ en $(14, \infty)$. Luego el punto (14 ,196) es un punto máximo local. Pero dejamos al estudiante probar que es también el punto máximum.

Luego, el producto es máximo para cuando se separa en 14 y 14, y su valor es 196.

> **Observación:** *Si usted recuerda el llamado criterio de la segunda derivada, usted puede usar la segunda derivada en 14.27 y tener $P''(x) = -2 < 0$; o sea $x = 14$, representa un valor máximo.*



2. *diseño del terreno y la cerca*

Figura 14.17

(Cercando un terreno). Se dispone de alambre suficiente para construir una valla de $100\,m$ de largo y se desea usarlo para cercar tres lados de un jardín rectangular, cuyo cuarto lado bordea la orilla de un lado. ¿Cuáles deberían ser las medidas del terreno para que la valla abarque el área máxima posible ?

Solución: La figura 14.17, nos ayuda a plantear y resolver este problema. Sea A el área del terreno con x la longitud del lado paralelo al lago y con y la longitud de los otros dos lados.

La condición del problema nos dice

$$A = xy \tag{14.28}$$

$$x + 2y = 100 \tag{14.29}$$

Con lo cual ha resultado un problema muy parecido al del ejemplo anterior. Justifique usted los pasos que mostramos a continuación:

$$\begin{aligned} A = A(x) &= \left(\tfrac{100-x}{2}\right) x \\ &= 50x - \tfrac{x^2}{2}, \text{ en } [0,100]. \end{aligned} \tag{14.30}$$

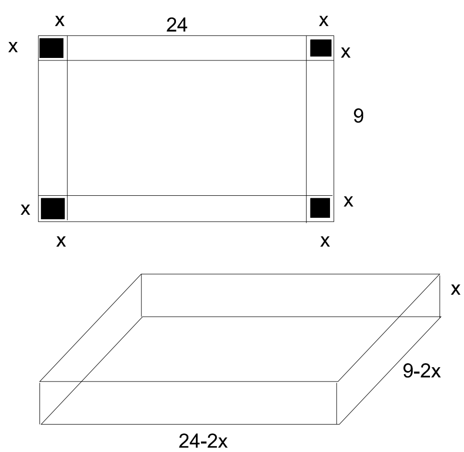
$$A'(x) = 50 - x$$

$$x = 50$$

$$A(0) = A(100) = 0 \text{ y } A(50) = 1250m^2 \tag{14.31}$$

y efectivamente se trata de un máximo. Luego la valla debe tener las medidas $x = 50\,m$ y $y = 25\,m$.

Observación: *Fíjese nuevamente que $A(x)$ es una parábola.*



la pieza de cartón y el diseño de la caja

Figura 14.18

3. **(Construyendo una caja).** Se desea construir una caja rectangular con una pieza de cartón de $24\,cm$ de ancho por $9\,cm$ de largo, cortando cuadrados idénticos en las cuatro esquinas y doblando los lados, como se muestra en la figura 14.18. Hallar las dimensiones de la caja de máximo volumen y el volumen de dicha caja.

   Solución: Sea x el lado del cuadrado que se va a cortar y V el volumen de la caja. La base de la caja tiene dimensiones

   $$(24 - 2x) \times (9 - 2x)$$

   y el volumen V es la siguiente función de x,

   $$\begin{aligned} V(x) &= x(24-2x)(9-2x) \\ &= 4x^3 - 66x^2 + 216x \end{aligned} \tag{14.32}$$

   Ahora, x debe estar en el intervalo $I = [0\,,4{,}5]$ para que exista una caja como la pedida. Derivando $V(x)$ e igualando a cero, tenemos

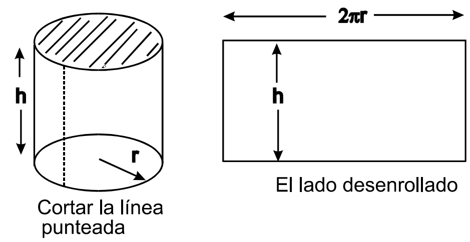
   $$V'(x) = 12x^2 - 132x + 216 \tag{14.33}$$

   $$= 12(x^2 - 11x + 18) = 12(x-9)(x-2).$$

Luego, se tienen valores $x = 2$ y $x = 9$ (que debemos descartar porque $9 \notin I = [0\,,4{,}5]$).
Hay tres puntos críticos: 0, 2 y $4{,}5$. En los puntos frontera 0 y $4{,}5$, $V = 0$; por lo tanto el único punto que nos queda es $x = 2$ y en este caso $V = 2 \cdot 20 \cdot 5 = 200\,cm^2$.
Efectivamente, el punto $(2, 200)$ es máximo absoluto para $V(x)$ en $[0\,,4{,}5]$, ya que $V''(2) = -14 < 0$ en $[0\,,4{,}5]$.

Observación: *Sugerimos al lector que estudie este problema buscando los extremos de la función cúbica*

$$4x^3 - 66x^2 + 216x.$$



4. *envase cilíndrico*

Figura 14.19

(Construyendo un recipiente económico). De todos los recipiente metálicos cilíndricos que encierran un volumen de $100\,cm^3$, ¿cuál de ellos requiere le menor cantidad de material para construirlo ?
Solución: La figura 14.19 nos muestra un cilindro con base de radio r y altura h. El área de la superficie S del recipiente está dada por:

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h \tag{14.34}$$

ya que hay que tomar en cuenta las dos bases circulares y el costado. Ahora bien, h y r están relacionados por la ecuación:

$$\pi r^2 h = 100. \tag{14.35}$$

Despejando h de 14.35 y reemplazando en 14.34 tenemos

$$S = S(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{100}{\pi r^2} \tag{14.36}$$

$$= 2\pi r^2 + \frac{200}{r} \text{ en } (0, \infty). \tag{14.37}$$

Derivando $S(r)$ e igualando a cero tenemos:

$$S' = 4\pi r - \frac{200}{r^2} = \frac{4\pi r^3 - 200}{r^2} = 0. \tag{14.38}$$

Como $r > 0$, $4\pi r^3 - 200 = 0$ y por consiguiente,

$$r = \sqrt[3]{\frac{50}{\pi}}. \tag{14.39}$$

Hay un solo punto crítico y en él se alcanza el mínimo. En efecto,

$$S''(r) = 4\pi + \frac{400}{r^3} > 0, \tag{14.40}$$

para toda $r \in (0, \infty)$, en particular para r dada en 14.39.
Luego se trata de un mínimo absoluto y las dimensiones son

$$r = \sqrt[3]{\frac{50}{\pi}} \text{ y } h = \frac{100}{\pi r^2} = 2\sqrt[3]{\frac{50}{\pi}}.$$

Es decir la altura del recipiente es igual a la de su diámetro.

Observación: *Encuentre que*

$$r = \sqrt[3]{\frac{50}{\pi}}$$

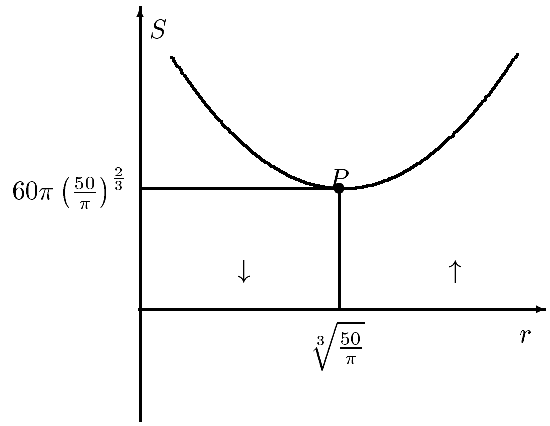


Figura 14.20 *la función decrece a la izquierda de un punto y crece a la derecha de él*

es un mínimo, estudiando que la función decrece a la izquierda del punto $\sqrt[3]{\frac{50}{\pi}}$ y crece a la derecha de él. Vea la figura 14.20.

5. **(Un abrevadero de agua).** Un abrevadero de 20 pies de largo tiene sus extremos en forma de triángulos isósceles cuyos lados iguales son de 4 pies de longitud. Determinar el ancho en la parte superior de un extremo triangular, de manera que el volumen del abrevadero sea máximo. *Solución:* Sea θ el ángulo entre la vertical y uno de los lados. Ver la figura 14.21. Usando

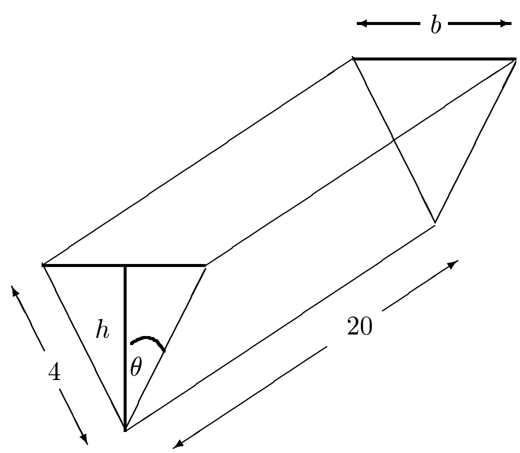


Figura 14.21 *abrevadero*

trigonometría tenemos

(14.41) $h = 4\cos\theta$ y $b = 8\,\mathrm{sen}\theta$.

Por lo tanto, el volumen V que depende del ángulo θ, es

(14.42) $$V = V(\theta) = \frac{1}{2}(4\cos\theta)(8\,\mathrm{sen}\theta)\cdot 20$$
$$160(2\,\mathrm{sen}\theta\,\cos\theta) = 160\,\mathrm{sen}2\theta$$

en donde $\theta \in I = [0, \frac{\pi}{2}]$. Usando el mismo procedimiento de los problemas anteriores, tenemos

$$V'(\theta) = 320 \cos 2\theta = 0.$$

Luego, $\theta = \frac{\pi}{4}$ y el punto nos da un valor máximo (¿por qué?). El ancho de la parte superior del abrevadero, es la base del triángulo isósceles, o sea

$$8 \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = 4\sqrt{2}\, pie.$$

Observación: *Sugerimos resolver todos los problemas 1 al 20 de máximos y mínimos que se encuentran en la sección 8.2 del Problemario de Mat. 1 de los Profes. Giudici.*

14.6.1 Ejercicios

1. Estudiar los valores extremos de la función

$$f(x) = 17 - 15x + 9x^2 - x^3$$

   (a) $I = [-2, 6]$,
   (b) $I = [3, 6]$.

2. Hallar los puntos críticos para las funciones en los ejercicios 1), 3), 6), 8) y 9) en su dominio. Ver la nota 7 al pie de página.

3. En los problemas que se dan a continuación hallar el mínimo absoluto y su máximo absoluto.

   (a) $f(x) = \dfrac{3x+1}{x^2+x+3}$, $x \in [-4, -1]$.
   (b) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$, $x \in [9, 10]$.
   (c) $f(x) = \dfrac{2-x}{x^2-4x+5}$, $x \in [-100, 2]$.
   (d) $f(x) = \dfrac{1+x+x^2+x^3}{x^3+1}$, $x \in [2, 5]$.

4. Discutir[7] el punto $(0, 0)$ perteneciente a la curva $y = x^n$, para cada entero $n > 0$.

5. Hallar dos números cuya suma es $2n$, n entero y positivo, y tal que su producto sea el mayor posible. Generalice si $n \in \mathbb{R}$.

6. La operación de un camión de transporte cuesta $(120 + \frac{v}{4})$ bolívares por cada kilómetro cuando es conducido a una velocidad de v kilómetros por hora. El conductor recibe como sueldo 484 bolívares por hora. ¿A qué velocidad se minimiza el costo para un transporte que está a d kilómetros de distancia? Suponga para este problema que las leyes restringen la velocidad entre $40 \leq v \leq 60$.

7. En física se demuestra que cuando no se considera la resistencia del aire, el alcance horizontal D de un proyectil está dado por:

$$D = \frac{v_0^2}{g} \operatorname{sen} 2\theta, \; 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

   donde v_0 es la velocidad inicial, g es la aceleración de gravedad y θ es el ángulo de elevación o de partida. Hallar el ángulo $theta$ para que el alcance sea máximo.

8. Un terreno rectangular que tiene $1500\, m^2$ va a ser cercado y dividido en dos porciones iguales mediante una cerca adicional paralela a dos de los lados. Hallar las dimensiones del terreno que requieran la menor cantidad de cerca.

[7] Se sugiere buscar los puntos críticos de las funciones que están en los problemas 1 al 16 de la sección §8.3 de la Guía de Problemas I de los profesores Giudici.

9. La resistencia de una viga rectangular de madera varía directamente proporcional al ancho y con el cuadrado de la altura. ¿Cuáles son las dimensiones de la viga más resistente que podamos cortar de un tronco cilíndrico de radio r?
10. Un pedazo de alambre de longitud l se corta en dos pedazos y cada pedazo se dobla hasta formar un cuadrado. ¿Cómo debemos cortar el alambre para que la suma de las áreas encerrada por los dos cuadrados sea máxima?
11. Si el número de turistas que hacen un recorrido en autobús a una ciudad es exactamente 30, una empresa cobra 20 dólares por persona. por cada persona adicional a las 30, se reduce el cobro personal en $0{,}50$ dólares. ¿Cuál es el número de turistas que debe llevar un autobús para maximizar los ingresos de la empresa?
12. Se desea construir un oleoducto desde una refinería hasta unos tanques de almacenamiento, cru-

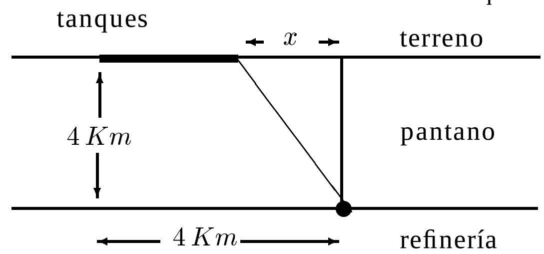


Figura 14.22 *tendido del oleoducto*

zando un pantano. El costo de construcción a través del pantano es de $25.000.000$ de bolívares por kilómetro y por terreno firme es de $20.000.000$ por kilómetro. ¿Cómo debe tenderse el oleoducto para que el costo de construcción sea mínima? Vea la figura 14.22

14.6.2 Soluciones de los ejercicios

1.
   (a) $x = 1$ da el mínimo absoluto y $f(1) = 10$.
   $x = -2$ da el máximo absoluto y $f(-2) = 91$.
   (b) $x = 3$ da el mínimo absoluto y $f(3) = 26$.
   $x = 5$ da el máximo absoluto y $f(6) = 35$.
2. 1) mínimum en $(0, 9)$.
   3) No tiene.
   6) Mínimo relativo en $(1, -64)$.
   8) No tiene.
   9) No tiene.
3.
   (a) $-1,\ -\frac{2}{3}$.
   (b) $\frac{81}{82},\ \frac{100}{101}$.
   (c) $0,\ \frac{1}{2}$.
   (d) $\frac{26}{21}\ ,\ \frac{5}{3}$.
4. Es el mínimum para n par.
5. $x = y = n$; $P = n^2$.
6. $v \approx 44\ km/hora$.
7. $\theta = \dfrac{\pi}{4}$.
8. Las dimensiones deben ser $15\sqrt{10} \times 10\sqrt{10}$.
9. El ancho debe ser $\frac{2r}{\sqrt{3}}$ y la altura $2r\sqrt{\frac{2}{3}}$.
10. Si cortamos el alambre por la mitad, los cuadrados tienen lado $\frac{l}{8}$; pero esto corresponde a un mínimo. Si nos atenemos al problema de tener dos partes y un máximo, no hay solución.
11. # turistas = 35.
12. $x = 4$.

14.7 Asíntotas y dibujo de curvas

En esta sección nos dedicaremos al dibujo de curvas más sofisticadas, utilizando para ello todo lo aprendido anteriormente más otros conceptos, tales como el de *asíntota* de una curva, una recta a la que la curva se acerca arbitrariamente en un sentido que especificaremos pronto.

14.7.1 Asíntotas Verticales y Horizontales

En la sección 9.2, p. 103 estudiamos

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty, \tag{14.43}$$

que significa que dado $M > 0$, existe $delta > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta \text{ implica } f(x) > M.$$

O sea, $f(x)$ *«aumenta sin límite»*

Ejemplo:

$$\lim_{x \to 5} \frac{1}{(x-5)^2} = +\infty \tag{14.44}$$

puesto que $(x-5)^2$ es positivo y tiende a cero cuando $x \to 2$.

Análogamente, $f(x)$ *«decrece sin límite»* cuando $x \to a$, y se escribe

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \tag{14.45}$$

tiene una definición análoga (¡escríbala, Ud. mismo!).

También tienen sentido las versiones para los conceptos 14.43 y 14.45 cuando $x \to a^+$ o cuando $x \to a^-$.

Por ejemplo,

$$\lim_{x \to 5^-} \frac{1}{(x-5)^n} = -\infty,$$

si n es un natural impar mientras que

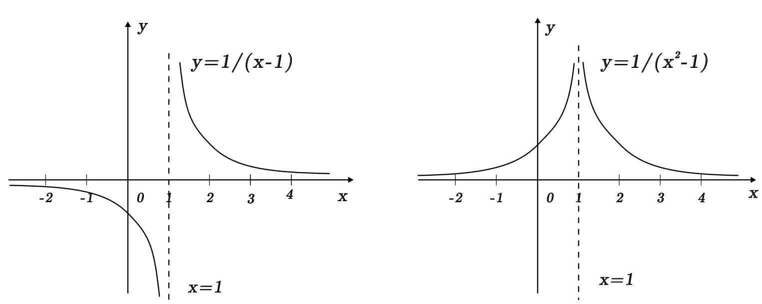
$$\lim_{x \to 5^+} \frac{1}{(x-5)^n} = +\infty,$$

para todo natural n.

Ahora bien, diremos que la recta $x = a$ es una *«asíntota vertical»* de la curva $y = f(x)$ si

$$\lim_{x \to a} |f(x)| = \infty. \tag{14.46}$$

El significado geométrico de una asíntota vertical lo vemos en las gráficas de $y = \dfrac{1}{x-1}$ y de $y = \dfrac{1}{(x-1)^2}$ en la figura 14.23.



asíntotas verticales

Figura 14.23

En ambos casos, cuando $x \to 1$ y $f(x) \to \pm\infty$, el punto $(x, f(x))$ de la curva, se aproxima a la asíntota vertical $x = 1$. Observe que

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$$

y

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty \text{ para } f(x) = \frac{1}{x-1}\,;$$

en cambio,

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty.$$

Observación: *Las asíntotas verticales se presentan con frecuencia en las funciones racionales como* $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ *(vistas en la sección 8.2, p. 74), en el punto* $x = a$ *donde* $q(a) = 0$*, pero* $p(a) \neq 0$*.*

Recordemos también que existen límites finitos cuando la variable tiende al infinito. O sea,

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = L, \tag{14.47}$$

que significa, dado $\varepsilon > 0$, existe $M > 0$ tal que $x > M$ implica $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Análogamente, usted puede escribir la definición para

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = L. \tag{14.48}$$

No es difícil probar que si

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

y

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \pm\infty,$$

entonces

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0. \tag{14.49}$$

En particular, deducimos que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^r} = 0, \tag{14.50}$$

para r cualquier racional positivo.

La propiedad 14.50 nos permite evaluar fácilmente los límites al infinito de funciones racionales.

Ejemplo: Hallar

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^3 - x}{3x^3 + 7x^2 - 2}$$

Dado que conocemos 14.50, dividimos el numerador y el denominador entre x^3, que es la más alta potencia de x en la función racional dada.

Luego,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3-x}{3x^3+7x^2-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{5-\dfrac{1}{x^2}}{3+\dfrac{7}{x}-\dfrac{2}{x^3}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}(5-\dfrac{1}{x^2})}{\lim\limits_{x\to\infty}(3+\dfrac{7}{x}-\dfrac{2}{x^3})}=\frac{5-0}{3+0-0}=\frac{5}{3}.$$

Observe que este mismo cálculo nos dice que

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^3-x}{3x^3+7x^2-2}=\frac{5}{3}.$$

El significado geométrico del enunciado $\lim\limits_{x\to\infty}=L$, nos dice que el punto $(x,f(x))$ de la curva $y=f(x)$ se aproxima a la recta horizontal $y=L$ cuando $x\to\infty$. En particular, con los números M y ε de la condición 14.47, la parte de una curva en la que $y>M$ se encuentra entre las rectas horizontales $y=L-\varepsilon$ e $y=L+\varepsilon$. Vea la figura 14.24.

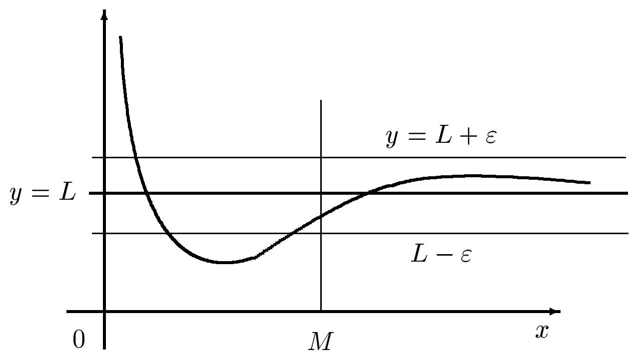


Figura 14.24 *asíntota horizontal*

Se dice que la recta $y=L$ es una *«asíntota horizontal»* de la curva $y=f(x)$ si

(14.51) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=L,$ o bien $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=L.$

Ejemplos

1. Hallar las asíntotas horizontales o verticales de $f(x)=\dfrac{x}{x-2}$. Bosqueje la gráfica.

   Solución: Fíjese que $x=2$, es una asíntota vertical porque $|f(x)|\to\infty$ cuando $x\to 2$. Por otra parte,

   $$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x-2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{1-\dfrac{2}{x}}=1.$$

   Así, $y=1$ es una asíntota horizontal.

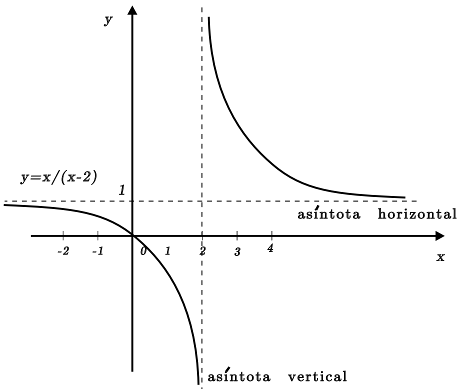
   Por otra parte,

   $$f'(x)=-\frac{2}{(x-2)^2}$$

   y

   $$f''(x)=\frac{4}{(x-2)^3}.$$

Como ni $f'(x)$ ni $f''(x)$ se anulan en parte alguna, $f(x)$ no tiene puntos críticos ni de inflexión. Además, $f'(x) < 0$ para $x \neq 2$, o sea $f(x)$ es decreciente $\downarrow$ en $\mathbb{R} - \{2\}$. Y también se cumple $f''(x) < 0$ para $x < 2$, mientras que $f''(x) > 0$ cuando $x > 2$; es decir, f es convexa $(\smile)$ en $(-\infty, 2)$ y cóncava $(\frown)$ en $(2, \infty)$. En la figura 14.25, Ud. puede ver la gráfica.



asíntota vertical y asíntota horizontal

Figura 14.25

2. Localizar las asíntotas para el gráfico de

$$f(x) = \frac{4x^3}{(x-4)^2(x+2)}.$$

Bosqueje la gráfica.

Solución: Justifique los pasos que daremos a continuación. Para las asíntotas horizontales tenemos

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{4}{\left(1 - \frac{4}{x}\right)^2 \left(1 + \frac{2}{x}\right)} = 4 \qquad \text{(¿qué hicimos?)}$$

Luego, $y = 4$ es asíntota horizontal.

Las asíntotas verticales son $x = 4$ y $x = -2$.

Por otra parte,

$$\lim_{x \to 4^+} f(x) = \infty \text{ y } \lim_{x \to 4^-} = \infty$$

y $g(4) > 0$. Pero en cambio,

$$\lim_{x \to (-2)^-} = \infty \text{ y } \lim_{x \to (-2)^+} = -\infty$$

y $g(-2) < 0$.

Estos hechos se pueden ver en la figura 14.26

La curva corta al eje x, cuando $y = 0$; es decir, cuando $4x^3 = 0$, o sea $x = 0$. Se sospecha que $(0, 0)$ debe ser un punto de inflexión. En efecto, si usted calcula $f''(0)$ lo verificará.

La curva corta la asíntota horizontal $y = 4$; ya que

$$4 = \frac{4x^3}{(x-4)^2(x+2)} \tag{14.52}$$

nos lleva a

$$\begin{aligned} x^3 - 6x^2 + 32 &= x^3 \\ 6x^2 &= 32 \end{aligned}$$

y por lo tanto, la curva corta la asíntota horizontal en

$$x = \pm\frac{4}{\sqrt{3}} \approx \pm 2{,}31.$$

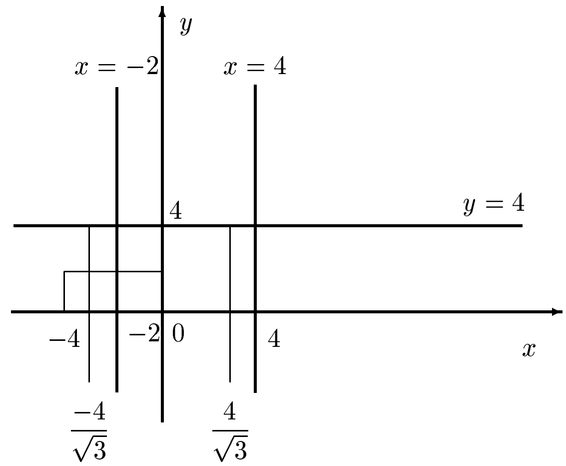


Figura 14.26 *asíntotas*

Los puntos críticos se obtienen estudiando

$$f'(x) = \frac{-4x^2(6x+24)}{(x-4)^3(x+2)^2}$$

$$= -\frac{24x^2(x+4)}{(x-4)^3(x+2)^2} \tag{14.53}$$

(¿Por qué?)

Luego, $x = -4$ nos lleva al punto crítico $(-4, 2)$. Por otra parte, $f(x)$ es $\uparrow$ en $(-4, -2)$ y $\downarrow$ en $(-\infty, -4)$.

Es decir que $(-4, 2)$ es un mínimo local para la curva. Usted puede verificar que $f(x)$ es $\uparrow$ en

$$(-4, -2) \cup (0, 4) \text{ y } \downarrow$$

en

$$(-\infty, -4) \cup (-2, 0) \cup (4, \infty).$$

$f(x)$ es $\smile$ en

$$(-4, -2) \cup (0, 4) \cup (4, \infty)$$

y $\frown$ en

$$(-\infty, -4) \cup (-2, 0).$$

Con estos datos la curva tendrá una forma muy similar a la de la figura 14.27

14.7.2 Asíntotas Oblicuas

Existen también rectas que sin ser horizontales ni verticales son asíntotas para una curva. Un caso así puede verlo en la figura 14.28

El siguiente teorema nos permite localizar las asíntotas que denominamos *oblicuas*.

Teorema 59 *Sea $\mathcal{C}$ el gráfico de la función $y = f(x)$. Si $f(x)$ puede ser escrita en la forma*

$$f(x) = mx + b + g(x) \tag{14.54}$$

con $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = 0$, entonces la recta $y = mx + b$ es una asíntota oblicua de $\mathcal{C}$ con pendiente m.

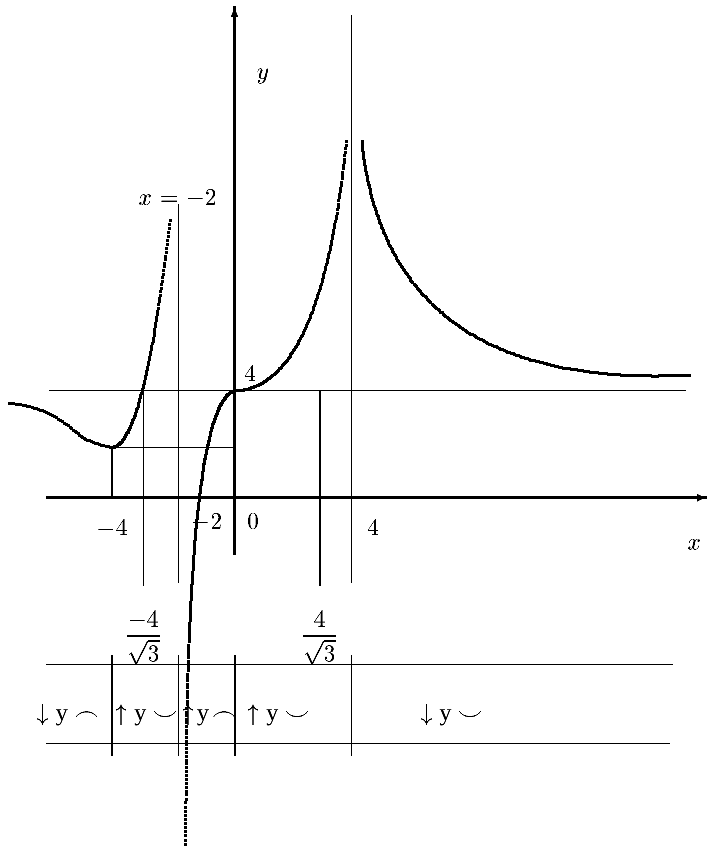


Figura 14.27 *bosquejo del gráfico de* $f(x) = \dfrac{4x^3}{(x-4)^2(x+2)}$

Prueba: *En la figura 14.29,* $\mathcal{C}$ *es la curva y* $mx + b$ *la recta. Para un* x *dado, sea* $Y_L = mx + b$ *la ordenada en la recta* $mx + b$ *y sea* $Y_c = f(x)$ *la ordenada en la curva* $\mathcal{C}$*.*

Sean P_c *y* P_L *los puntos* (x, Y_c) *y* (x, Y_L)*, respectivamente. De 14.54 , tenemos*

(14.55) $\quad Y_c - Y_L = f(x) - (mx + b) = g(x)$

Suponiendo que $g(x) \to 0$*, tenemos que* $Y_c - Y_L \to 0$ *cuando* $x \to \infty$*.*

Por otra parte, la distancia d *es un cateto del triángulo rectángulo* P_cQP_L *(recto en* Q*) y por consiguiente*

(14.56) $\quad d < |Y_c - Y_L|.$

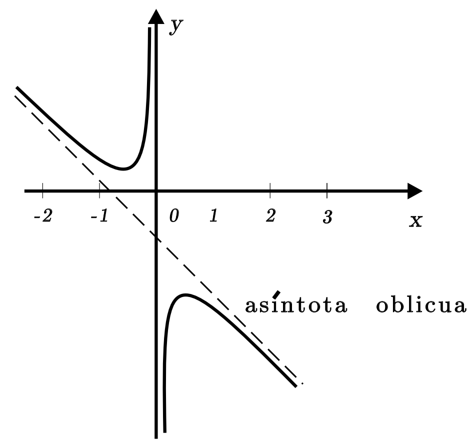
Luego, $d \to 0$ *cuando* $x \to \infty$ *y por lo tanto la curva tiene como asíntota a la recta* $Y_L = mx + b$ *que tiene pendiente* m*.* □

Similarmente, usted puede demostrar el teorema para el caso en $g(x) \to 0$ cuando $x \to -\infty$.

Ejemplos

1. Hallar las asíntotas para el gráfico de la función

(14.57) $\quad f(x) = \dfrac{x^2 + 5x + 10}{2(x+1)}.$



asíntota oblicua
Figura 14.28

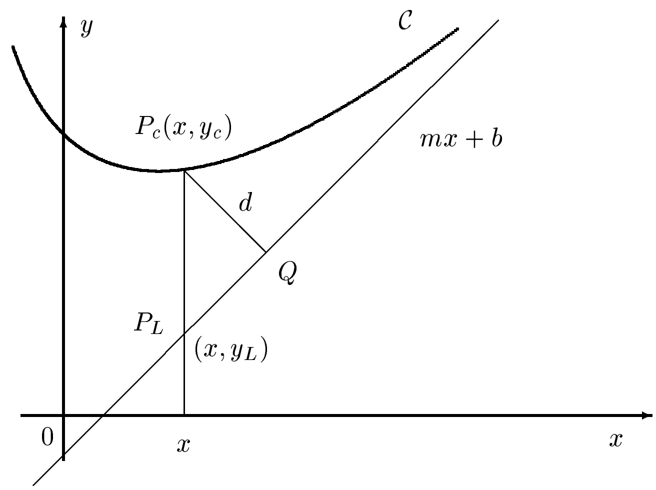


Figura 14.29 *una asíntota oblicua*

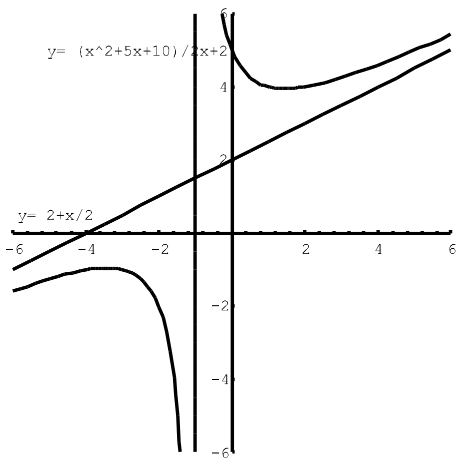
Solución: Claramente $x = -1$ es una asíntota vertical (¿por qué?) y no tiene asíntotas horizontales. Si efectuamos la división de $(x^2 + 5x + 10)$ entre $2(x + 1)$, obtenemos

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 2 + \frac{3}{x+1}. \tag{14.58}$$

Comparando esta última ecuación con la 14.54 tenemos que $mx + b = \frac{1}{2}x + 2$ y que $g(x) = \frac{3}{x+1}$.
Como $\lim\limits_{x\to\infty} = 0$, se sigue del Teorema 59 que la recta $y = \frac{1}{2}x + 2$ es una asíntota oblicua de la gráfica de 14.57.
Por otra parte, $g(x) > 0$ si $x > -1$, de modo que la curva está por sobre la asíntota cuando $x > -1$. Cuando $x < -1, g(x) < 0$ y la curva está por debajo de la asíntota. Usando todo lo aprendido, usted debería obtener un dibujo de la curva similar al de la figura 14.30.

2. Hallar las asíntotas y bosquejar la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1} \tag{14.59}$$



$$f(x) = \frac{x^2 + 5x + 10}{2(x+1)}$$

Figura 14.30

Solución: Ayuda mucho saber si una función posee algún tipo de simetría o como ya había dicho, conocer su paridad.

En este caso particular, $f(-x) = -f(x)$; es decir, se trata de una función impar; de modo que basta analizar la curva en $x \geq 0$ para tener toda la curva; ya que ella será simétrica respecto al origen.

Así, $x = 1$ es una asíntota vertical y por consiguiente también lo será $x = -1.(x^2 - 1 = 0)$. Esta curva no tiene asíntotas horizontales, pero si tiene asíntota oblicua. En efecto,

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1} = x + \frac{x}{x^2 - 1}. \tag{14.60}$$

(efectuando la división). Utilizando el Teorema 59, tenemos que $mx + b = x$; o sea $m = 1, b = 0$ y

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{x^2 - 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{\dfrac{1}{x}}{1 - \dfrac{1}{x^2}} = 0. \tag{14.61}$$

Es decir, $g(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ y $g(x) \to 0$, cuando $x \to \infty$.

Luego la recta $y = x$ es una asíntota oblicua. Analizamos ahora la primera derivada.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{(x^2-1)^2}\left((x^2 - 1)3x^2 - x^3(2x)\right) \\ &= \frac{x^2}{(x^2-1)^2}(x^2 - 3). \end{aligned} \tag{14.62}$$

Los puntos críticos son $x = 0; x = \pm\sqrt{3}$ y $x = \pm 1$ (donde no existe, pero que ya sabemos su interpretación; son las asíntotas verticales).

Por otra parte, $f'(x) > 0$ si $x^2 - 3 > 0$, o sea

$$x \in (\sqrt{3}, \infty) \cup (-\infty, -\sqrt{3})$$

y $f'(x) < 0$ si $x^2 - 3 < 0$, o sea

$$x \in (-\sqrt{3}, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \sqrt{3})$$

o sea, que los puntos $(\sqrt{3}, \frac{3}{2}\sqrt{3})$ y $(-\sqrt{3}, -\frac{3}{2}\sqrt{3})$ son puntos de mínimo local y máximo local, respectivamente.

Dejamos al lector, calcular $f''(x)$ y ver que $(0,0)$ es un punto de inflexión. Además, $f(x)$ es $\smile$ si $x \in (-1,0) \cup (1,\infty)$ y $f(x)$ es $\frown$ si $x \in (-\infty,-1) \cup (0,1)$. Un bosquejo de la curva lo tiene la figura 14.31

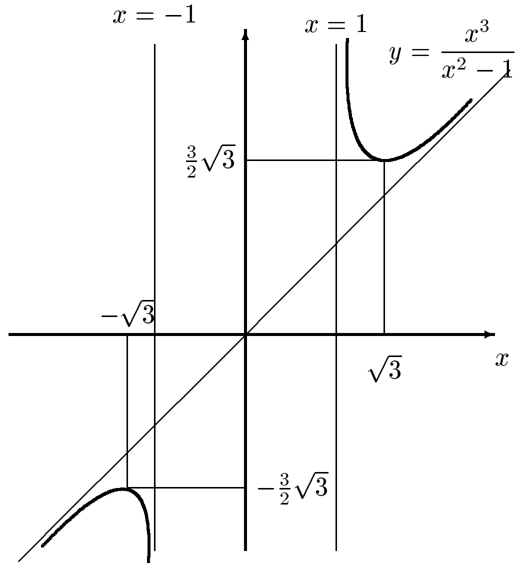


Figura 14.31 *bosquejo de* $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$

14.7.3 Problemas: graficación

Ejercicios

1. En los ejercicios que se dan a continuación, hallar todas las asíntotas y dibujar la gráfica.

(a) $f(x) = -\dfrac{2x+7}{x+1}$

(b) $f(x) = \dfrac{2x-5}{x-1}$

(c) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

(d) $f(x) = \dfrac{1}{2x^2-x}$

(e) $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x^2-4}$

(f) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1+2\cos x}$

(g) $f(x) = \dfrac{2x^2-x-8}{2x-3}$

(h) $f(x) = \dfrac{x^2-2x+4}{x-2}$

2. Demuestre que las rectas $y = \pm\dfrac{bx}{a}$ son asíntotas para la hipérbola[8]

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a_2} = 1.$$

3. ¿Tiene asíntotas la parábola $y = x^2$?

4. ¿Tiene asíntotas la recta $y = mx + b$?

[8]Sugerimos resolver todos los problemas de §8.3 Graficación de Funciones del texto Guía de Problemas, Matemáticas I de Reinaldo Giudici y Rosa S. de Giudici

5. Demuestre que que $p(x)$ es un polinomio de grado $n+1$ y $q(x)$ uno de grado n, entonces el gráfico de la función racional

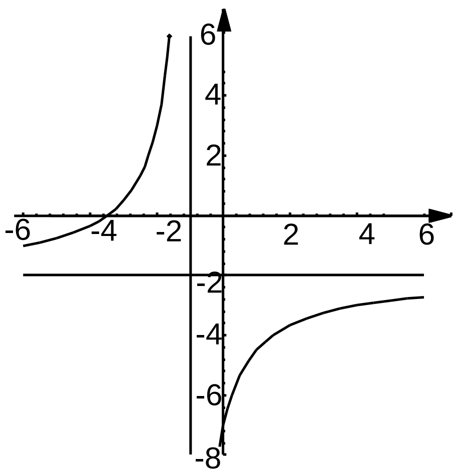
$$y = \frac{p(x)}{q(x)}$$

tiene siempre una asíntota que no es vertical.

14.7.4 Respuestas

1. Asíntotas

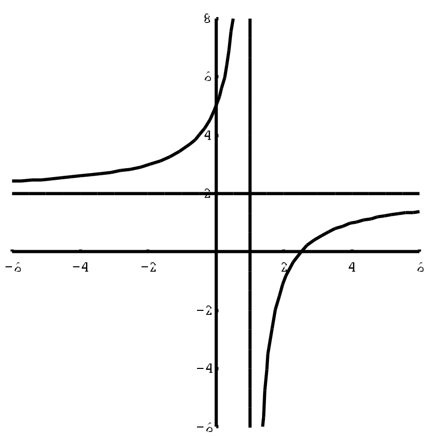
(a) $x = -1, y = -2$ Gráfico similar al de la figura 14.32



$$f(x) = -\frac{2x+7}{x+1}$$

Figura 14.32

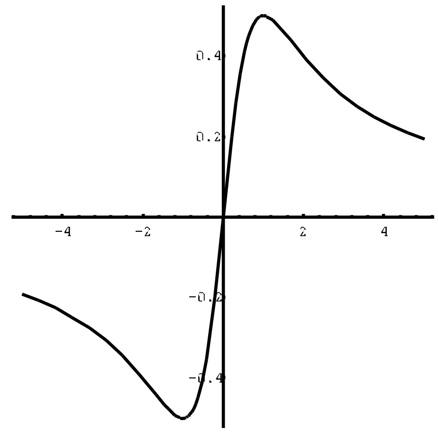
(b) Asíntotas $x = 1, y = 2$ Gráfico similar al de la figura 14.33



$$f(x) = \frac{2x-5}{x-1}$$

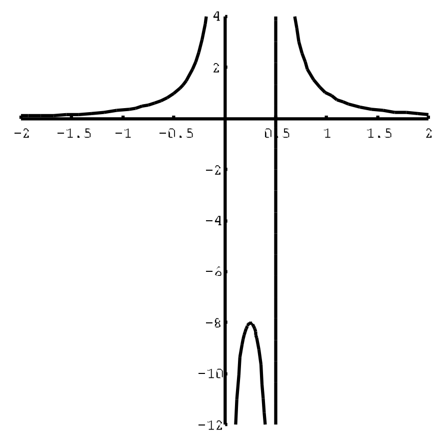
Figura 14.33

(c) Asíntotas en $y = 0$ máximo global en $(1, \frac{1}{2})$ mínimo global en $(-1, -\frac{1}{2})$ es una función impar similar al de la figura 14.34



$f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

Figura 14.34

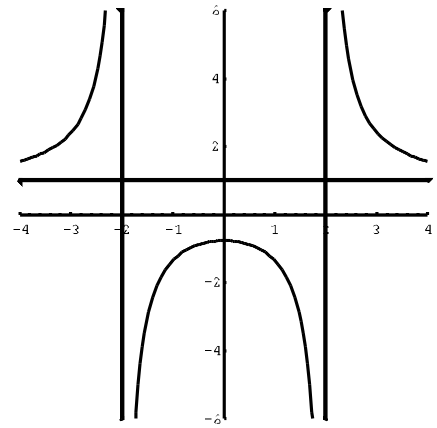


$f(x) = \dfrac{1}{2x^2-x}$

Figura 14.35

(d) Asíntotas $x = 0, x = \frac{1}{2}, y = 0$; máximo local en $(\frac{1}{4}, 8)$. Ver figura 14.35.

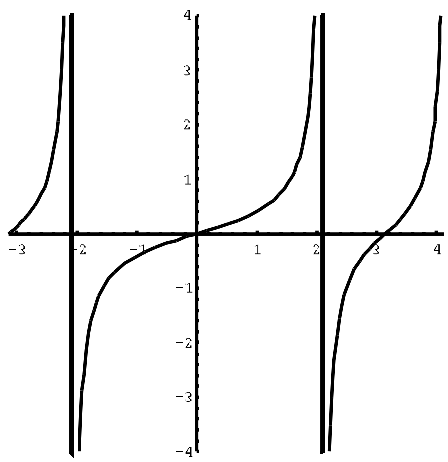
(e) Asíntotas $x = \pm 2, y = 1$; máximo local en $(0, -\frac{3}{4})$. Ver figura 14.36.



$$f(x) = \frac{x^2+3}{x^2-4}$$

Figura 14.36

(f) Asíntotas verticales $x = \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Ver la figura 14.37.



$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{1 + 2\cos x}$$

Figura 14.37

(g) Asíntota horizontal $x = 3/2$. Asíntota oblicua $y = x + 1$. Curva similar al de la figura 14.38.

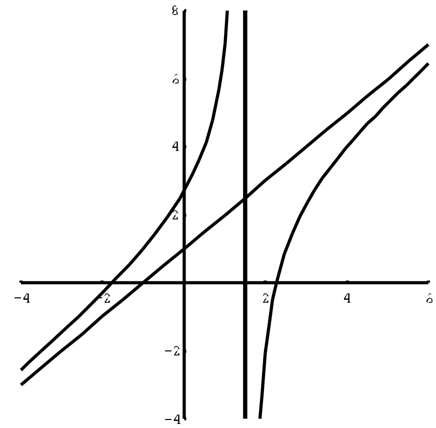
(h) Asíntota horizontal $x = 2$. Asíntota oblicua $y = x$; mínimo local $(4, 6)$; máximo local $(0, -2)$; $\smile$ en $(2, \infty)$; $\frown$ en $(-\infty, 2)$. Ver figura 14.39.

2. Debe probar que

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{bx}{a} - \frac{b}{a}\sqrt{x^2+a^2}) = 0.$$

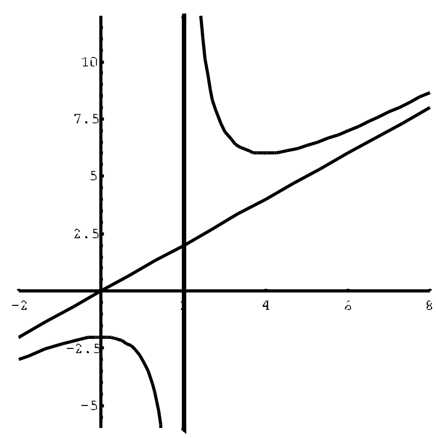
Para ello observe que

$$\frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2+a^2})(x + \sqrt{x^2+a^2}) = -ab.$$



$$f(x) = \frac{2x^2 - x - 8}{2x - 3}$$

Figura 14.38



$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}$$

Figura 14.39

3. No.
4. Si, la propia recta $y = mx + b$.

Índice de Materias